

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur R^* par : $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction f (on précisera l'allure du graphe au voisinage de l'origine).

On peut remarquer que cette fonction est impaire (graphe symétrique par rapport à l'origine) et faire l'étude que pour les valeurs positives. De plus, on peut donc prolonger f par continuité à l'origine en posant $f(0) = 0$.

La dérivée de f est égale à : $f'(x) = \frac{2x^2 - (1+x^2)\ln(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}$ et elle est nulle quand son

numérateur est nul ou encore $2(t-1) - t\ln t = 0$ en posant $t = 1+x^2$, $t \geq 1$.

Soit $z(t) = 2(t-1) - t\ln t = 0$, $z'(t) = 1 - \ln t$ qui est nulle pour $t = e$.

On trouve $z(e) = e - 2 > 0$ et par exemple $z(e^2) = -2 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur t_0 dans l'intervalle $]e, e^2[$ qui annule $z(t)$.

Soit $x_0 = \sqrt{t_0 - 1}$. La fonction z est croissante sur l'intervalle $]0, x_0[$ et décroissante ensuite.

La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0, \sqrt{e-1}[$, puis décroissante. D'autre

part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et la pente à l'origine est donnée par $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$

2. Calculer $I = \int_0^1 x^2 f(x) dx$. On calcule par intégration par parties.

$$I = \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx = \ln \sqrt{2} - \int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$$

$$I = \ln \sqrt{2} - \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

3. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n strictement positif.

Etudier la convergence de cette suite et calculer sa limite, si elle existe.

On vérifie facilement par récurrence que la suite est strictement positive.

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(1+u_n^2) - u_n^2}{u_n} < 0$. La suite est décroissante et minorée, donc convergente

vers une limite l solution de l'équation : $l = f(l)$, car f est continue, avec son prolongement par continuité en 0, d'où $l = 0$

Exercice n° 2

1. Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'intégrale suivante est convergente :

$$\int_0^1 \frac{|\ln x|^\beta}{(1-x)^\alpha} dx .$$

Cette intégrale présente un problème en zéro pour le numérateur et un problème en 1 pour le dénominateur. $\int_0^{1/2} \frac{|\ln x|^\beta}{(1-x)^\alpha} dx$ est convergente en 0 pour tout β et en 1, $\ln x \approx x-1$ est convergente en 1 pour $\alpha < \beta + 1$

2. En déduire que $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx$ est convergente et calculer I .

L'intégrale est convergente d'après la question précédente. On pose $t = \sqrt{1-x}$,

$I = 2 \int_0^1 \ln(1-t^2) dt = 2 \int_0^1 \ln(1-t) dt + 2 \int_0^1 \ln(1+t) dt$, puis en posant $u = 1-t$ dans la première intégrale et $u = 1+t$ dans la deuxième intégrale, on obtient $I = 4(\ln 2 - 1)$

Une primitive de $\ln x$ est $x \ln x - x$.

Exercice n° 3

1. Etudier la convergence de la suite (u_n) de terme général $u_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx$

Solution : $u_{n+1} - u_n = \int_1^e x (\ln x)^n (\ln x - 1) dx < 0$. La suite est décroissante et minorée par zéro, donc elle converge.

2. Etudier la convergence de la suite (v_n) de terme général $v_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$

$v_{n+1} - v_n = \int_0^1 x^{n+1} (x-1) \ln(x+1) dx < 0$ et la suite est décroissante, minorée par zéro, elle

converge. On a, par intégration par parties : $v_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$ qui tend vers zéro.

Exercice n° 4

Soient $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E .
Evident.

2. Déterminer un supplémentaire G de F dans E . Les fonctions h de E qui ne sont pas dans F vérifient $h(0) \neq 0$ ou $h'(0) \neq 0$. Par exemple les fonctions constantes et les applications linéaires sont ainsi.

Soit $G = \{f \in E \mid f(x) = ax + b\}$. Montrons que G est un supplémentaire de F .

Soit $f \in F \cap G$, alors $f(x) = ax + b$, $f(0) = b$, et $f'(0) = a$. Donc $a=b=0$ (car $f \in F$) et l'intersection est réduite à zéro.

Soit $h \in E$, on pose : $f(x) = h(x) - h(0) - h'(0)x$ et $f \in F$. Et la fonction

$g(x) = h(0) + h'(0)x$ appartient à G et $h = f + g$.

L'espace G est engendré par les fonctions $e_1(x) = 1$ et $e_2(x) = x$ et donc G est de dimension 2.

3. Soit la fonction h définie par : $h(x) = x^2 + x + 1$. Quelle est sa projection orthogonale sur G ?

On peut se restreindre à l'espace vectoriel des fonctions du second degré et naturellement la projection de h sur G est la fonction $x+1$ (on peut le vérifier avec la matrice de la projection orthogonale sur G).

Exercice n° 5

Soient $f_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^n dt$ et $F_n(x) = \int_0^x \frac{f_n(t)}{f_n(1)} dt$ où n est un entier naturel et x un nombre réel strictement positif.

1. Calculer $f_n(1)$

$$f_n(1) = \left[t(1-t^2)^n \right]_0^1 + 2n \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{n-1} dt = -2n f_n(1) + 2n f_{n-1}(1)$$

$$\text{Et } f_n(1) = \frac{2n}{2n+1} f_{n-1}(1) \text{ et on obtient : } f_n(1) = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

2. Montrer que $\int_0^1 (f_n(1) - f_n(t)) dt = \frac{1}{2(n+1)}$

$$\int_0^1 (f_n(1) - f_n(t)) dt = \int_0^1 \int_t^1 (1-x^2)^n dx dt = \frac{1}{2} \sum_k C_n^k \frac{(-1)^k}{k+1} \text{ et } \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{(n+1)} = \sum_k C_n^k \frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$\text{En conclusion } \int_0^1 (f_n(1) - f_n(t)) dt = \frac{1}{2(n+1)}$$

3. Etudier la suite (u_n) définie par : $u_n = 1 - F_n(1)$

$$u_n = \int_0^1 \frac{f_n(1) - f_n(t)}{f_n(1)} dt = \frac{1}{f_n(1)} \times \frac{1}{2(n+1)}$$

On vérifie que $u_{n+1} = \frac{2n+3}{2n+4} u_n$ et la suite est décroissante et minorée par zéro, donc elle converge.

Exercice n° 6

Soit A une partie non vide de R^2 et $a \in A$. On pose,

$$T(A, a) = \left\{ u \in R^2 / \exists (x_n) \in A, \exists \lambda_n > 0, x_n \rightarrow a, \lambda_n (x_n - a) \rightarrow u \right\}$$

1. Montrer que $(0,0) \in T(A, a)$

Il suffit de prendre $x_n = a$ et $\lambda_n = 1$.

2. Montrer que $T(A, a)$ est un ensemble stable par homothétie positive.

Soit $u \in T(A, a)$, $\forall \mu > 0$, $\mu \lambda_n (x_n - a) \rightarrow \mu u$ et $\mu u \in T(A, a)$, donc cet ensemble est stable par homothétie positive.

3. Montrer que $T(A, a)$ est un ensemble fermé de R^2 .

Soit u^i une suite de points de $T(A, a)$ et $u = \lim_i u^i$. Comme $u^i \in T(A, a)$, $\exists \lambda_{pi}^i > 0$,

$\exists x_{pi}^i \in A$, $x_{pi}^i \rightarrow a$,

$\lambda_{pi}^i (x_{pi}^i - a) \rightarrow u^i$. Pour tout n , $\exists k_n > 0$ tel que $|\lambda_{kn}^n (x_{kn}^n - a) - u^n| < \frac{1}{n}$ et alors $x_{kn}^n \rightarrow a$,

$\lambda_{kn}^n (x_{kn}^n - a) \rightarrow u$ et $u \in T(A, a)$, ce qui montre que $T(A, a)$ est un ensemble fermé de R^2 .

4. Montrer que $T(A, a)$ est un ensemble convexe de R^2 si A est une partie convexe

$$\exists (u_n) \in A, \exists \lambda_n > 0, u_n \rightarrow a, \lambda_n (u_n - a) \rightarrow u$$

$$\exists (v_n) \in A, \exists \alpha_n > 0, v_n \rightarrow a, \alpha_n (v_n - a) \rightarrow v \text{ et}$$

$$\lambda \lambda_n (u_n - a) + (1 - \lambda) \alpha_n (v_n - a) \rightarrow \lambda u + (1 - \lambda) v.$$

Par ailleurs,

$$\lambda \lambda_n (u_n - a) + (1 - \lambda) \alpha_n (v_n - a) = (\lambda \lambda_n + (1 - \lambda) \alpha_n) \left(\frac{\lambda \lambda_n u_n + (1 - \lambda) \alpha_n v_n}{\lambda \lambda_n + (1 - \lambda) \alpha_n} - a \right) \text{ ou encore,}$$

$$\lambda \lambda_n (u_n - a) + (1 - \lambda) \alpha_n (v_n - a) = \beta_n (w_n - a) \text{ avec}$$

$$\beta_n (w_n - a) \rightarrow \lambda u + (1 - \lambda) v,$$

$w_n \in A$, car A est une partie convexe de R^2 ,

$$w_n = \frac{\lambda \lambda_n u_n + (1 - \lambda) \alpha_n v_n}{\lambda \lambda_n + (1 - \lambda) \alpha_n} \rightarrow a \quad \text{car } \|w_n - a\| \leq \text{Max}(\|u_n - a\|, \|v_n - a\|).$$

En conclusion $\lambda u + (1 - \lambda) v \in T(A, a)$

5. Soit $A = R^+ \times R^+$, expliciter $T(A, a)$ pour $a = (0, 0)$.

On vérifie facilement que $T(A, a) = R^+ \times R^+$

6. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, y \geq x^2, x \geq y^2\}$, expliciter $T(A, a)$ pour $a = (0, 0)$.

Soit $u = (x, y) \in T(A, a)$,

$$\exists (x_n, y_n) \in A, \exists \lambda_n > 0, x_n \geq 0, y_n \geq 0, y_n \geq x_n^2, x_n \geq y_n^2, \lambda_n x_n \rightarrow x, \lambda_n y_n \rightarrow y$$

En multipliant par λ_n les inégalités, on obtient :

$y_n \geq x_n^2 \Rightarrow \lambda_n (y_n - x_n^2) \geq 0 \Rightarrow \lambda_n y_n - \lambda_n x_n x_n \geq 0$ et par passage à la limite, $y \geq 0$. De même, $x \geq 0$. On a donc $T(A, a) \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Réciproquement, on pose, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $x_n = x/n, y_n = y/n, \lambda_n = n$ et on vérifie que cette suite (x_n, y_n) appartient à l'ensemble A pour n grand.