ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Calculatrice non programmable autorisée.

Les exercices sont indépendants.

Dans tous les exercices, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur R^* par : $f(x) = \dfrac{Ln(1+x^2)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction f (on précisera l'allure du graphe au voisinage de l'origine ; on ne cherchera pas à préciser les points d'inflexion).

2. Calculer $I = \int_0^1 x^2 f(x)\, dx$.

3. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n strictement positif.

Etudier la convergence de cette suite et calculer sa limite, si elle existe.

Exercice n° 2

1. Déterminer les valeurs des paramètres réels α et β pour lesquelles l'intégrale suivante est convergente :

$$\int_0^1 \frac{|Ln\, x|^\beta}{(1-x)^\alpha}\,dx$$

2. En déduire que $I = \int_0^1 \frac{Ln\, x}{\sqrt{(1-x)}}\,dx$ est convergente et calculer *I*.

Exercice n° 3

1. Etudier la convergence de la suite (u_n) de terme général $u_n = \int_1^e x\,(Lnx)^n\,dx$, où $n \in N^*$ et *Ln* désigne le logarithme népérien.

2. Etudier la convergence de la suite (v_n) de terme général $v_n = \int_0^1 x^n\, Ln\,(x+1)\,dx$ (si la suite est convergente, on précisera sa limite).

Exercice n° 4

Soient $E = C^1(R,R)$ et $F = \{ f \in E \ / \ f(0) = f'(0) = 0 \}$.

1. Montrer que *F* est un sous espace vectoriel de *E*.
2. Déterminer un supplémentaire *G* de *F* dans *E*. Quelle est la dimension de *G* ?
3. Soit la fonction *h* définie par : $h(x) = x^2 + x + 1$. Quelle est sa projection orthogonale sur *G* ?

Exercice n° 5

Soient $f_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^n \, dt$ et $F_n(x) = \int_0^x \frac{f_n(t)}{f_n(1)} dt$ où n est un entier naturel et x un nombre réel strictement positif.

1. Calculer $f_n(1)$ en fonction de n

2. Montrer que $\int_0^1 (f_n(1) - f_n(t))\, dt = \frac{1}{2(n+1)}$ (on pourra aussi calculer $\int_0^1 (1-x)^n \, dx$)

3. Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_n = 1 - F_n(1)$

Exercice n° 6

Soit A une partie fermée non vide de R^2 et $a \in A$. On définit alors l'ensemble suivant :

$$T(A,a) = \{u \in R^2 / \exists (x_n) \in A, \exists \lambda_n > 0, x_n \to a, \lambda_n (x_n - a) \to u\}$$

1. Montrer que $(0,0) \in T(A,a)$.
2. Montrer que $T(A,a)$ est un ensemble stable par homothétie positive.
3. Montrer que $T(A,a)$ est un ensemble fermé de R^2.
4. Montrer que $T(A,a)$ est un ensemble convexe de R^2 si A est une partie convexe de R^2.
5. Soit $A = R^+ \times R^+$, expliciter $T(A,a)$ pour $a = (0,0)$.
6. Soit $A = \{(x,y) \in R^2 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \geq x^2,\ x \geq y^2\}$, expliciter $T(A,a)$ pour $a = (0,0)$.