ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2[ème] COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Calculatrice non programmable autorisée.

Les exercices sont indépendants.

Dans toute la composition, *R* désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} \text{ et } 0 < u_0 < 1$$

1. Etudier la convergence de cette suite (u_n) et donner sa limite (si elle est convergente).

2. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \frac{3}{4} + \frac{(v_n)^2}{4} \text{ et } 1 < v_0 \leq 2$$

Etudier la convergence de cette suite (v_n) et donner sa limite (si elle est convergente).

Exercice n° 2

Soit l'application linéaire *f* définie sur R^4 et à valeurs dans R^3 par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + y + z + t)$$

1. Déterminer une base du noyau de *f*.

2. Déterminer une base de l'image de *f*, notée *Im(f)*.

3. En identifiant R^3 à $R^4 \times \{0\}$, quel est l'orthogonal de l'image de *f* dans R^4 ?

4. Ecrire la matrice *A* de la projection orthogonale sur *Im(f)* dans une base formée de la réunion d'une base de *Im(f)* et de son orthogonal.

5. Ecrire la matrice *M* de la projection orthogonale sur *Im(f)* dans la base canonique de R^4.

Exercice n° 3

Soit f l'application définie sur R par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\exp(x^2)-1}{x} \quad si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est impaire et continue.

2. Montrer que f garde un signe constant sur R. On pourra étudier la fonction u qui, à tout t réel positif, associe : $u(t) = (2t-1)\exp(t)+1$.
En déduire l'existence d'une application réciproque de f impaire.

3. Justifier l'existence d'un développement limité de f en 0 à tout ordre n.

4. Ecrire un développement limité de f en 0 à l'ordre 5 ; donner également un développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 5.

Exercice n° 4

.Pour tout nombre réel *x*, on désigne par $E(x)$ sa partie entière, soit le plus grand entier inférieur ou égal à *x*.

1. Etudier la continuité de la fonction *f* définie sur R^{+*} (ensemble des nombres réels strictement positifs) par : $f(x) = \dfrac{E(x)}{x}$

2. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \dfrac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$, étudier la convergence de cette suite et donner sa limite (si elle existe).

Exercice n° 5

1. Etudier les variations de tracer le graphe de la fonction numérique sh d'une variable réelle x définie par : $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

2. Soit $f(x) = Ln(1 + sh(x))$, où Ln désigne le logarithme népérien. Donner un développement limité de f d'ordre 3 au voisinage de zéro.

3. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

4. Soit $g(x) = \dfrac{f(x)}{\sin x}$, donner un développement limité de g d'ordre 2 au voisinage de zéro.

5. Etudier le prolongement par continuité de g à l'origine. Cette fonction est-elle dérivable à l'origine ?

Exercice n° 6

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$, où n est un entier naturel.

1. Déterminer la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

2. Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n.

3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

4. Soit $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$. Déterminer la limite de J_n quand n tend vers l'infini.

5. Calculer J_n en fonction de n .