ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Calculatrice non programmable autorisée.

Les exercices sont indépendants.

Dans toute la composition, *R* désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Pour tout entier $n \in N$, on définit l'intégrale $S(n)$ par : $S(n) = \int_0^1 (1+x)^n \, dx$

1. Calculer $S(n)$
2. En déduire $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$, où C_n^k désigne le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi n.

Exercice n° 2

Soit f l'application définie sur $[-1,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Soit la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{2}$. Etudier la convergence de cette suite et déterminer sa limite si elle existe.

Exercice n° 3

1. Trouver une primitive de la fonction numérique *f* définie par : $f(t)=\dfrac{2t^2}{t^2-1}$

2. Trouver une primitive de $g(t)=\dfrac{\sqrt{1-t}}{t}$

3. Soit $H(x)$ une primitive de $\dfrac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

   Montrer que :

   $H(x)=-2Lnx\sqrt{1-x}+4\sqrt{1-x}+2Ln(1-\sqrt{1-x})+K$, où K est une constante.

4. Soit $I=\displaystyle\int_0^1\frac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}}dx$, montrer que cette intégrale est convergente.

5. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} H(x)$

6. Pour $\varepsilon>0$, on pose : $I(\varepsilon,a)=\displaystyle\int_\varepsilon^a\frac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}}dx$. Calculer $I(\varepsilon,a)$ et en déduire la valeur de *I*.

Exercice n° 4

Pour une valeur de périmètre donnée, quelle est parmi ces trois figures : carré, rectangle, cercle, celle qui a la plus grande surface ?

Exercice n° 5

Soit *f* une fonction numérique d'une variable réelle trois fois continûment dérivable en un point *a*.

Soit *D* le déterminant défini par : $D(a,h)=\begin{vmatrix}1 & f(a) & f(a+h)\\ 1 & f(a+h) & f(a+2h)\\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h)\end{vmatrix}$

Calculer $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{D(a,h)}{h^4}$

Exercice n° 6

Soit f une application linéaire définie sur R^3 et à valeurs dans R^3 par :

$$f(x,y,z)=\frac{1}{14}(13x-2y-3z,-2x+10y-6z,-3x-6y+5z)$$

1. Déterminer le noyau de f.
2. Déterminer l'image de f.
3. Calculer les valeurs propres de la matrice M associée à f dans la base canonique de R^3.
4. Expliciter la nature géométrique de l'application f.
5. Ecrire la matrice S, dans la base canonique de R^3, de la symétrie par rapport au plan d'équation : $X+2Y+3Z=0$
6. Exprimer MS et SM (produits de deux matrices) dans la base formée par la réunion d'une base du noyau de f et de l'image de f.

AVRIL 2015

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Fomesoutra.com ça soutra ! Docs à portée de main

Exercice n° 1

Pour tout entier $n \in N$, on définit l'intégrale $S(n)$ par : $S(n) = \int_0^1 (1+x)^n\, dx$

1. Calculer $S(n)$

$$S(n) = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{(2^{n+1}-1)}{n+1}$$

2. En déduire $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$, où C_n^k désigne le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi n.

$$S(n) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{k+1} = \frac{(2^{n+1}-1)}{n+1}$$

Exercice n° 2

Soit f l'application définie sur $[-1,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction est définie pour $x \geq -1$. Sa dérivée est égale à : $f'(x) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{1+x}} > 0$, donc la fonction est strictement croissante de $[-1,+\infty[$ sur R^+, $f(-1) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

2. Soit la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ *et* $u_0 = \frac{1}{2}$. Etudier la convergence de cette suite et déterminer sa limite si elle existe.

Montrons par récurrence la propriété suivante : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

Pour n=0, on a $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et la propriété est vérifiée.

On suppose que : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$. Comme *f* est strictement croissante, on a :

$f(0) < f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)$, c'est-à-dire $\frac{\sqrt{2}}{2} < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$, d'où la propriété à l'ordre *n*+1.

La suite étant croissante et majorée (par 1), elle est convergente et sa limite *l* vérifie l'équation : $f(l) = l$ ou encore : $l = \sqrt{\frac{l+1}{2}}$, d'où : $2l^2 - l - 1 = 0$ et *l*=1.

Exercice n° 3

1. Trouver une primitive de la fonction $f(t) = \frac{2t^2}{t^2-1}$

$\frac{2t^2}{t^2-1} = 2 + \frac{2}{t^2-1} = 2 + \frac{1}{t-1} + \frac{-1}{t+1}$ et une primitive est égale à $2t + Ln|t-1| - Ln|t+1| + K = 2t + Ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + K$

2. Trouver une primitive de $g(t) = \frac{\sqrt{1-t}}{t}$

$\int \frac{\sqrt{1-t}}{t} dt = \int \frac{2x^2}{x^2-1} dx$ en posant $x = \sqrt{1-t}$. D'où d'après la question précédente, on obtient :

$2\sqrt{1-t} + Ln\left|\frac{\sqrt{1-t}-1}{\sqrt{1-t}+1}\right| + K$

3. Soit $H(x)$ une primitive de $\frac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}}$, où *Ln* désigne le logarithme népérien.

   Montrer que

   $H(x) = -2Lnx\sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x} + 2Ln(1-\sqrt{1-x}) + K$, où *K* est une constante.

$H(x) = \int \frac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}} dx = \left[-2\sqrt{1-x}\,Ln\,x\right] - \int 2\sqrt{1-x}\,\frac{1}{x} dx$, ce qui donne l'expression demandée, où on peut enlever les valeurs absolues.

4. Soit $I = \int_0^1 \frac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}} dx$, montrer que cette intégrale est convergente.

La fonction $\frac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}}$ n'est pas définie en 0 et 1. On a une intégrale généralisée.

En 0, $\frac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}} \approx Ln\,x$ et $x^{1/2}\,Ln\,x \to 0$ et l'intégrale converge en 0.

En 1, on pose $t = 1-x$, $\frac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}} = \frac{Ln(1+t)}{\sqrt{t}} \approx \frac{1}{\sqrt{t}}$, donc on a la convergence en 1.

En conclusion, l'intégrale est convergente.

5. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} H(x)$

$H(x) = -2Ln x\sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x} + 2Ln(1-\sqrt{1-x}) + K$

$H(x) = -2Ln x(1-\frac{x}{2}+o(x)) + 4\sqrt{1-x} + 2Ln(1-(1-\frac{x}{2}+o(x))) + K$

$H(x) = -2Ln x + xLn\ x(1+o(1)) + 4\sqrt{1-x} + 2Ln(\frac{x}{2}+o(x)) + K$

$H(x) = -2Ln x + xLn\ x(1+o(1)) + 4\sqrt{1-x} + 2Ln x + 2Ln(\frac{1}{2}+o(1)) + K$

$H(x) = xLn\ x(1+o(1)) + 4\sqrt{1-x} + 2Ln(\frac{1}{2}+o(1)) + K$, puis on passe à la limite :

$\lim\limits_{x\to 0} H(x) = 4 - 2Ln2 + K$

6. Soit $I(\varepsilon, a) = \int_{\varepsilon}^{a} \frac{Ln x}{\sqrt{1-x}}dx$. Calculer $I(\varepsilon, a)$ et en déduire la valeur de I.

$I(\varepsilon, a) = H(a) - H(\varepsilon)$

$I(\varepsilon, a) = -2Ln(a)\sqrt{1-a} + 4\sqrt{1-a} + 2Ln(1-\sqrt{1-a}) + 2Ln(\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon} - 4\sqrt{1-\varepsilon} + 2Ln(1-\sqrt{1-\varepsilon})$

$I = H(1) - H(0) = 4 - 2Ln2$

Exercice n° 4

Pour une longueur de périmètre donnée, quelle est parmi ces trois figures : carré, rectangle, cercle, celle qui a la plus grande surface ?

Soit p le périmètre donné.

Pour un cercle, son périmètre est égal à $p = 2\pi R$ (R étant le rayon) et sa surface à $\pi R^2 = \pi\frac{p^2}{4\pi^2} = \frac{p^2}{4\pi}$

Pour un carré, sa surface est égale à : $\frac{p^2}{16}$ (le côté étant égal à $p/4$)

Pour un rectangle, son périmètre est égal à : $p = 2(L+l)$ où L désigne sa longueur et l sa largeur. Sa surface est égale à : $S = L\times l = L\times(\frac{p}{2}-L)$ et cette surface est maximale pour la valeur qui annule la dérivée de cette fonction concave à savoir $L = \frac{p}{4}$. Par conséquent la surface d'un rectangle est la plus grande quand c'est un carré et donc on ne compare que la surface du carré avec le cercle. Comme $16 > 4\pi$, $\frac{p^2}{4\pi} > \frac{p^2}{16}$ et le cercle a la plus grande surface.

Exercice n° 5

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle trois fois continûment dérivable en un point a.

Soit D le déterminant défini par : $D(a,h)=\begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 1 & f(a+h) & f(a+2h) \\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h) \end{vmatrix}$

Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{D(a,h)}{h^4}$

En faisant une soustraction de lignes, on obtient :

$$D(a,h)=\begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 0 & f(a+h)-f(a) & f(a+2h)-f(a+h) \\ 0 & f(a+2h)-f(a) & f(a+3h)-f(a+h) \end{vmatrix}$$

On développe ce déterminant bien sûr par rapport à la première colonne pour obtenir :

$$D(a,b)=\left[(f(a+h)-f(a))\times(f(a+3h)-f(a+h))\right]-\left[(f(a+2h)-f(a))\times(f(a+2h)-f(a+h)\right]$$

Puis on applique la formule de Taylor à chaque expression à l'ordre 3 au voisinage de a (l'ordre 3 suffit, car le déterminant sera en h puissance 4, ce qui correspond au dénominateur de la limite à calculer.

On a :

$$f(a+h)-f(a)=h\,f'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{6}f^{(3)}(a)+o(h^3)$$

$$f(a+2h)-f(a)=2h\,f'(a)+2h^2 f''(a)+\frac{4h^3}{3}f^{(3)}(a)+o(h^3)$$

$$f(a+2h)-f(a+h)=h\,f'(a+h)+\frac{h^2}{2}f''(a+h)+\frac{h^3}{6}f^{(3)}(a+h)+o(h^3)$$

$$f(a+3h)-f(a+h)=2h\,f'(a+h)+2h^2 f''(a+h)+\frac{4h^3}{3}f^{(3)}(a+h)+o(h^3)$$

Les termes en h^2 et h^3 s'éliminent, et le terme en h^4 est égal à : $f'(a)\times f^{(3)}(a)-\left(f''(a)\right)^2$

Donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{D(a,h)}{h^4}=f'(a)\times f^{(3)}(a)-\left(f''(a)\right)^2$

Exercice n° 6

Soit f une application linéaire définie sur R^3 par :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{14}(13x - 2y - 3z, -2x + 10y - 6z, -3x - 6y + 5z)$$

1. Déterminer le noyau de f.

$f(x, y, z) = 0$ implique $13x - 2y - 3z = 0,\ -2x + 10y - 6z = 0,\ -3x - 6y + 5z = 0$, soit $y=2x$ et $z=3x$. Le noyau est donc une droite engendrée par le vecteur de composantes (1, 2, 3).

2. Déterminer l'image de f.

L'image est le plan d'équation : $X + 2Y + 3Z = 0$

3. Calculer les valeurs propres de la matrice M associée à f dans la base canonique de R^3.

$Det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 13-14\lambda & -2 & -3 \\ -2 & 10-14\lambda & -6 \\ -3 & -6 & 5-14\lambda \end{vmatrix}$. En ajoutant à la première colonne, deux fois la deuxième et trois fois la troisième, on obtient :

$Det(M - \lambda I) = -14\lambda \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 10-14\lambda & -6 \\ 3 & -6 & 5-14\lambda \end{vmatrix}$. On soustrait trois fois la première ligne à la troisième ligne :

$Det(M - \lambda I) = (-14\lambda)(14(1-\lambda)) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 10-14\lambda & -6 \\ 0 & 0 & 14-14\lambda \end{vmatrix}$ et en développant par rapport à la dernière ligne, on obtient : $Det(M - \lambda I) = -(14)^3 \lambda (1-\lambda)^2$

Par conséquent 0 est une valeur propre simple et 1 une valeur propre double.

4. Expliciter la nature géométrique de l'application f.

On constate que le noyau est orthogonal à l'image et que $M^2 = M$, il s'agit d'une projection orthogonale sur le plan d'équation $X + 2Y + 3Z = 0$

5. Ecrire la matrice S, dans la base canonique de R^3, de la symétrie par rapport au plan d'équation : $X+2Y+3Z=0$

On écrit d'abord dans une base obtenue avec le noyau et l'image, plus précisément :

$e_1=(-2,1,0)$ et $e_2=(-3,0,1)$ forment une base du plan de symétrie, donc $S(e_1)=e_1$ et $S(e_2)=e_2$

$e_3=(1,2,3)$ est un vecteur orthogonal au plan de symétrie, donc $S(e_3)=-e_3$

Donc dans cette base, $S=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

La matrice de passage est $P=\begin{pmatrix}-2&-3&1\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}$ et son inverse : $P^{-1}=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}-2&7&-6\\-2&-4&5\\1&2&3\end{pmatrix}$

Dans la base canonique $S_c=P\,S\,P^{-1}=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}9&-4&-6\\-4&3&-12\\-4&-8&-1\end{pmatrix}$

6. Exprimer MS et SM (produits de deux matrices) dans la base formée par la réunion d'une base du noyau de f et de l'image de f.

On a : $S(e_1)=e_1, S(e_2)=e_2,\ S(e_3)=-e_3$ et $M(e_1)=e_1, M(e_2)=e_2,\ M(e_3)=0$

Par conséquent $MS=SM=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$