

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les exercices sont indépendants.

Dans toute la composition, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Pour k un entier strictement supérieur à 1 et x un nombre réel positif, on pose

$$f_k(x) = \frac{((k-1)x+1)^{k/k-1} - kx - 1}{k}$$

et

$$f_k^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (xy - f_k(x))$$

1. Etudier les variations et tracer le graphe de $f_3(x)$.
2. Calculer $f_2^*(x)$.
3. Etudier la convexité de $f_k(x)$.
4. Calculer $f_k^*(y)$ pour tout $k > 1$.

Exercice n° 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n (entier strictement supérieur à 2) et f un endomorphisme sur E vérifiant : $(f - a \text{Id}) \circ (f - b \text{Id}) = 0$, où $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ et Id désigne l'application identique de E .

1. On rappelle qu'une application linéaire φ de E dans E est une projection si $\varphi \circ \varphi = \varphi$.
Montrer que l'on peut trouver deux nombres réels λ, μ tels que :

$$p = \lambda(f - a \text{Id}) \text{ et } q = \mu(f - b \text{Id}) \text{ soient des projections.}$$

Quelle relation existe-t-il entre p et q ?

2. Exprimer f à l'aide de p et q . En déduire $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois)
3. Montrer que si $ab \neq 0$, l'application f est inversible. Exprimer son inverse f^{-1} à l'aide de p et q .

$$4. \text{ Soit la matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } m \text{ est un paramètre réel non nul.}$$

Déterminer a et b tels que : $(A - aI)(A - bI) = 0$, où I désigne la matrice unité d'ordre 3. En déduire A^n

Exercice n° 3

On note C l'ensemble des nombres complexes et f l'application de C dans C définie, pour $z \neq 2i$, par : $f(z) = \frac{z-1}{z-2i}$

1. Donner les formes cartésiennes et trigonométriques de $f(i)$
2. Résoudre l'équation : $f(z) = 2i$
3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z , tels que $|f(z)| = 2$

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,1[$ par : $f(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)}$

1. Etudier les variations de f .
2. Montrer que le graphe de f est symétrique par rapport à un point que l'on précisera.
3. Trouver une primitive de f sur $]0,1[$.
4. Calculer l'aire comprise entre l'axe Ox , le graphe de f et les droites d'équation $x=1/2$ et $x=2/3$

5. Soit la fonction numérique g définie sur $]0,1[$ par : $g(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$. Trouver la primitive G de g qui vérifie : $G(1/2)=6$.
6. Comparer la position des graphes de f et g sur $]0,1[$

Exercice n° 5

Pour $\alpha \in]-1,1[$, on considère l'équation fonctionnelle (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1-x) f(\alpha x)$$

où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Comparer deux solutions f et g de (E) qui vérifient : $f(0) = g(0)$
2. Montrer que les solutions de (E) sont développables en série entière sur un intervalle que l'on précisera.

Exercice n° 6

Pour n entier naturel, on définit la suite des intégrales $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^{2n}(x) dx$

1. Montrer que J_n existe pour tout entier naturel n . Calculer J_0 .
2. Pour n non nul, déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1} . En déduire une expression de J_n en fonction de n .
3. Etudier la convergence de la suite (J_n) .
4. Déterminer la nature de la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ de terme général : $u_k = \ln\left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right)$ et en déduire la limite de la suite (J_n) .

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**ITS voie B Option Mathématiques****CORRIGE DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHEMATIQUES****Exercice n° 1**

Pour $k > 1$ et $x \in \mathbb{R}$ positif, on pose

$$f_k(x) = \frac{((k-1)x+1)^{k/k-1} - kx-1}{k}$$

et

$$f_k^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (xy - f_k(x))$$

1. Etudier les variations et tracer le graphe de $f_3(x)$.

On a : $f_3(x) = \frac{(2x+1)^{3/2} - 3x-1}{3}$ et sa dérivée est égale à : $f_3'(x) = \sqrt{2x+1} - 1 > 0$.

La fonction est donc strictement croissante sur les réels positifs, avec une branche parabolique dans la direction Oy. Elle présente une tangente horizontale en 0.

2. Calculer $f_2^*(x)$.

Pour $k=2$, $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2$ et $f_2^*(y) = \sup_x (xy - \frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}y^2$. Car cette borne supérieure est atteinte pour $x=y$

3. Etudier la convexité de $f_k(x)$.

On a : $k f_k'(x) = k((k-1)x+1)^{1/k-1} - 1$. Posons $u = ((k-1)x+1)^{1/k-1} - 1$, on obtient : $u' = ((k-1)x+1)^{2-k/k-1} > 0$, la dérivée seconde de $f_k(x)$ étant strictement positive, la fonction est convexe. (Comme $k > 1$ et $x \in \mathbb{R}$ positif, la racine est bien définie).

4. Calculer $f_k^*(y)$ pour tout $k > 1$.

Soit $g(x) = xy - f_k(x)$, alors $g'(x) = y - f_k'(x) = 0$ pour $x = \frac{(y+1)^{k-1} - 1}{k-1}$ et en

remarquant que : $((k-1)x+1)^{k/k-1} = (y+1)^k$, on obtient : $f_k^*(y) = \frac{(1+y)^k - ky - 1}{k(k-1)}$

Exercice n° 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n (entier strictement supérieur à 2) et f un endomorphisme sur E vérifiant : $(f - a \text{Id}) \circ (f - b \text{Id}) = 0$, où $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ et Id désigne l'application identique de E .

1. Montrer que l'on peut trouver deux nombres réels λ, μ tels que :

$p = \lambda(f - a \text{Id})$ et $q = \mu(f - b \text{Id})$ soient des projections (on rappelle qu'une application linéaire φ de E dans E est une projection si $\varphi \circ \varphi = \varphi$).

Quelle relation existe-t-il entre p et q ?

On a : $p \circ p = \lambda^2(b - a)(f - a \text{Id})$ et $p \circ p = p \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{b - a}$

De même, $q \circ q = q \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{a - b}$

On vérifie que : $p + q = \text{Id}$

2. Exprimer f à l'aide de p et q . En déduire $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$

On obtient $f = (b - a)p + a \text{Id} = bp + aq$ et $f^n = b^n p + a^n q$

3. Montrer que si $ab \neq 0$, l'application f est inversible. Exprimer son inverse f^{-1} à l'aide de p et q .

On obtient : $f^{-1} = \frac{1}{ab}((a + b)\text{Id} - f) = b^{-1}p + a^{-1}q$

4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}$, où m est un paramètre réel non nul.

Déterminer a et b tels que : $(A - aI)(A - bI) = 0$, où I désigne la matrice unité d'ordre 3. En déduire A^n .

Si $(A - aI)(A - bI) = 0$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, a et b sont les valeurs propres de la matrice A .

On obtient : $\det(A - \delta I) = (\delta + 1)^2(\delta - 2)$, $a = 2, b = -1$ ou l'inverse et $A^n = (-1)^n q + 2^n p$

Exercice n° 3

On note C l'ensemble des nombres complexes et f l'application de C dans C définie, pour $z \neq 2i$, par : $f(z) = \frac{z-1}{z-2i}$

1. Donner les formes cartésiennes et trigonométriques de $f(i)$.

$$f(i) = -1 - i = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right)$$

2. Résoudre l'équation : $f(z) = 2i$

$$f(z) = 2i \Leftrightarrow z - 1 = 2i(z - 2i) \Leftrightarrow z(1 - 2i) = 5 \Leftrightarrow z = 1 + 2i$$

3. Déterminer l'ensemble D des points M tels que $|f(z)| = 2$

$$|f(z)| = 2 \Leftrightarrow |x + iy - 1| = 2|x + iy - 2i| \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4(x^2 + (y-2)^2), \text{ d'où}$$

$$|f(z)| = 2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$$

Il s'agit donc d'un cercle de centre $(-1/3, 8/3)$ et de rayon : $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,1[$ par : $f(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)}$

1. Etudier les variations de f .

On a $f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{x^2(x-1)^2}$. Le numérateur est toujours négatif. La fonction f est donc strictement décroissante de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que le graphe de f est symétrique par rapport à un point que l'on précisera.
Le graphe de f est symétrique par rapport au point $A(1/2, 0)$, en effet si on pose

$$X = x - 1/2, \text{ on obtient } f(X) = \frac{2X}{X^2 - 1/4} \text{ qui est impaire.}$$

3. Trouver une primitive de f sur $]0,1[$.

Une primitive de f sur $]0,1[$ est $F(x) = \ln x(1-x) + Cste$.

4. Calculer l'aire comprise entre l'axe ox , le graphe de f et les droites d'équation $x=1/2$ et $x=2/3$

L'aire comprise entre l'axe ox , le graphe de f et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{2}{3}$ est égale à : $\ln \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) - \ln \frac{2}{3} (1 - \frac{2}{3}) = \ln \frac{9}{8}$.

5. Soit la fonction numérique g définie sur $]0,1[$ par : $g(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$. Trouver la primitive G de g qui vérifie : $G(1/2)=6$.

On obtient $G(x) = -\frac{1}{x(x-1)} + k$ et avec $G(\frac{1}{2}) = 6$, $k = 2$

6. Comparer la position des graphes de f et g sur $]0,1[$.

Pour $x \in]0,1[$, $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow 2x-1 \geq \frac{2x-1}{x(x-1)}$

Si $x \geq 1/2$, $f(x) \leq g(x)$

Si $x \leq 1/2$, $f(x) \geq g(x)$

Exercice n° 5

Pour $\alpha \in]-1,1[$, on considère l'équation fonctionnelle (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1-x) f(\alpha x)$$

où f est une fonction continue.

1. Comparer deux solutions f et g de (E) qui vérifient : $f(0) = g(0)$

Si f est solution de (E) alors $f(x) = \prod_{k=0}^n (1-\alpha^k x) f(\alpha^{n+1} x)$. Quand n tend vers plus

l'infini, $f(\alpha^{n+1} x) \rightarrow f(0)$ tandis que la suite de terme général $\prod_{k=0}^n (1-\alpha^k x)$ converge.

En effet, pour N assez grand, $\forall n \geq N, \prod_{k=N}^n (1-\alpha^k x) > 0$ et

$\ln(\prod_{k=N}^n (1-\alpha^k x)) = \sum_{k=N}^n \ln(1-\alpha^k x)$ et $\ln(1-\alpha^k x)$ est le terme général d'une série

absolument convergente. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) \prod_{k=0}^{\infty} (1-\alpha^k x)$. La fonction g a une expression de la même forme, d'où l'égalité de f et g lorsque $f(0) = g(0)$.

2. Montrer que les solutions de (E) sont développables en série entière sur un intervalle que l'on précisera.

A partir de l'expression $f(x) = f(0) \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha^k x)$ et par calcul, on obtient que pour

$a_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout n , $a_{n+1} = \frac{\alpha^n}{(1 - \alpha^{n+1})} a_n$, la série entière $\sum a_n x^n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et sa fonction somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est solution de l'équation prenant la valeur a_0 en 0.

Ainsi toutes les fonctions f solutions de (E) sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et on vérifie $f(x) = f(0) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{1 - \alpha^{k+1}} \right) x^n$

Exercice n° 6

Pour n entier naturel, on définit la suite des intégrales $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^{2n}(x) dx$

1. Montrer que J_n existe pour tout n . Calculer J_0

On a un problème en $+\infty$ et $|e^{-x} \sin^{2n}(x)| \leq e^{-x}$, l'intégrale est donc convergente et $J_0 = 1$.

2. Pour n non nul, déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1} . En déduire une expression de J_n en fonction de n .

Avec deux intégrations par parties et en posant chaque fois $v'(x) = e^{-x}$, on obtient :

$$J_n = \frac{2n(2n-1)}{4n^2 + 1} J_{n-1} \text{ et } J_n = 2^n \prod_{k=1}^n \frac{k(2k-1)}{4k^2 + 1}$$

3. Etudier la convergence de la suite (J_n)

La suite est décroissante et minorée par zéro, donc elle converge.

4. Déterminer la nature de la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ de terme général : $u_k = Ln\left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2 + 1}\right)$ et en déduire la limite de la suite (J_n) .

$u_k = Ln\left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2 + 1}\right) = Ln\left(1 - \frac{1+2k}{1+4k^2}\right) \approx -\frac{1}{2k}$ et la série est divergente vers moins l'infini.

$$\text{On a : } \ln \frac{J_k}{J_{k-1}} = \ln \left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2+1} \right)$$

$$\text{et } \sum_k \ln \frac{J_k}{J_{k-1}} = \sum_k \ln J_k - \sum_k \ln J_{k-1} = \ln J_n = \sum_k u_k ,$$

donc $\lim \ln J_n = -\infty$ et $\lim J_n = 0$