ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les exercices sont indépendants.

Exercice n° 1

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par : $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}}$.

1. Étudier les variations et tracer le graphe de f.

2. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

3. Pour $\alpha > 0$, on pose $f_\alpha(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{|x|^\alpha}$. Étudier les variations de f_α et la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$.

Exercice n° 2

Pour m > 0, on pose $f_m(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^m} & si \quad x \neq 0 \\ 1 \quad si \quad x = 0 & \end{cases}$

1. Pour quelle valeur de m la fonction est-elle continue ? (On notera f la fonction qui correspond à la valeur de m ainsi trouvée).

2. Étudier la dérivabilité de f.

3. Étudier la continuité de la dérivée de f.

4. f a-t-elle une dérivée seconde continue ?

Exercice n° 3

On considère deux suites de nombres réels (u_n) et (v_n) définies, pour *n* entier naturel, par :

$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 4v_n \end{cases}$ et u_0, v_0 sont donnés quelconques.

1. Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_0, v_0 et *n* (on fera apparaître l'expression $u_0 + v_0$).

2. Étudier la convergence de ces deux suites.

Exercice n° 4

On considère la matrice *M* définie par : $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

1. Étudier la diagonalisation de *M* (si elle est diagonalisable, on précisera une base de vecteurs propres et on notera par *D* la matrice ainsi obtenue).

2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur la droite engendrée par un vecteur propre de la matrice *M* associé à la valeur propre 3. On notera P_X cette matrice.

3. Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur le plan engendré par des vecteurs propres de la matrice *M* associés aux valeurs propres 2 et 3. On notera P_Y cette matrice.

4. Calculer les produits $P_X\, P_Y$ et $P_Y\, P_X$

5. Parmi les matrices suivantes : M, D, P_X, P_Y, quelles sont celles qui peuvent définir une norme sur R^3 ?

Exercice n° 5

Soit la matrice *M* définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une base du noyau de l'application linéaire associée à *M*.

2. Déterminer les valeurs propres de cette matrice. Que peut-on en conclure ?

3. Déterminer une base de l'orthogonal du noyau de *M*.

4. Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés aux deux valeurs propres non nulles de M.

5. Résoudre le système $\begin{cases} x+2y+3z=m \\ 2x+3y+4z=2m \\ 3x+4y+5z=3m \end{cases}$, où m est un paramètre réel.

Exercice n° 6

1. Pour n entier strictement supérieur à 3, on considère la fonction numérique f_n définie par : $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^2}$. Étudier les variations de cette fonction et tracer son graphe.

2. Soit $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$ pour n entier naturel. Calculer I_0, I_1, I_2

3. Calculer I_n et $J_n=\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$ pour tout n.

4. Étudier la suite (u_n) définie par : $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{1+u_n^2}$ et u_0 un nombre réel quelconque.

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Les exercices sont indépendants.

Exercice n° 1

Soit la fonction *f* définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par : $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}}$

1. Étudier les variations et tracer le graphe de *f*

On remarque que la fonction est paire et donc que son graphe est symétrique par rapport à l'axe vertical. Il suffit de faire l'étude sur les nombres réels strictement positifs. Sa dérivée est égale à : $f'(x) = \dfrac{e^{-x^2}(-4x^2-1)}{2x\sqrt{x}} < 0$. La fonction est donc strictement décroissante de $+\infty$ à zéro sur les réels positifs. Les axes sont des asymptotes.

2. Étudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

On remarque que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$.

En 0 : $f(x) \approx \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc convergente

En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{x^2}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}} = 0$ et l'intégrale est convergente.

3. Pour $\alpha > 0$, on pose $f_\alpha(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{|x|^\alpha}$. Étudier les variations de f_α et la convergence de l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$.

La fonction f_α est strictement décroissante sur les réels positifs (résultats analogues à ceux pour *f*).

En 0 : $f_\alpha(x) \approx \dfrac{1}{x^\alpha}$, donc convergente si et seulement si $0 < \alpha < 1$,

En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f_\alpha(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{2-\alpha} f_\alpha(x) = 0$ pour $0 < \alpha < 1$ et l'intégrale est convergente pour $0 < \alpha < 1$

Exercice n° 2

Pour m>0, on pose $f_m(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^m} & si \quad x \neq 0 \\ 1 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$

1. Pour quelle valeur de m la fonction f_m est-elle continue ? (On notera f la fonction qui correspond à la valeur de m ainsi trouvée).
Tout le problème est uniquement en 0.
On a : $\underset{0}{Lim}\, f_m(x) = \underset{0}{Lim}\, x^{1-m} = f_m(0) = 1$ si et seulement si m=1. Dans toute la suite de l'exercice, on fixe m=1 et on note f cette fonction.

2. Étudier la dérivabilité de f

$$\underset{0}{Lim}\frac{f(x)-1}{x}\, f_m(x) = \underset{0}{Lim}\frac{\sin x - x}{x^2} = \underset{0}{Lim}(-\frac{x}{6}) = 0 = f'(0)$$

3. Étudier la continuité de la dérivée de f

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \text{ et } \underset{0}{Lim}\, f'(x) = \underset{0}{Lim}\frac{x(1-x^2/2)-(x-x^3/6)}{x^2} = \underset{0}{Lim}(-x/3) = 0 = f'(0)$$

4. f a-t-elle une dérivée seconde continue ?

$$f''(0) = \underset{0}{Lim}\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \underset{0}{Lim}\frac{x(1-x^2/2)-(x-x^3/6)}{x^3} = -\frac{1}{3}$$

On a : $f''(x) = \dfrac{-x^3\sin x - 2x^2\cos x + 2x\sin x}{x^4} \approx \dfrac{-x^4+2x^4-x^4/3}{x^4} \to -\dfrac{1}{3} = f''(0)$

En conclusion la fonction (pour m=1) est de classe C^2.

Exercice n° 3

On considère deux suites de nombres réels définies par :
$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 4v_n \end{cases}$ et u_0, v_0 sont donnés quelconque.

1. Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_0, v_0 et n.
On a : $u_{n+1} + v_{n+1} = 2(u_n + v_n) = 2^{n+1}(u_0 + v_0)$ et $3u_{n+1} + 2v_{n+1} = 3u_n + 2v_n = 3u_0 + 2v_0$
Par conséquent : $u_{n+1} = -2^{n+2}(u_0 + v_0) + 3u_0 + 2v_0$ et $v_{n+1} = 3\times 2^{n+1}(u_0 + v_0) - 3u_0 - 2v_0$

2. Étudier la convergence de ces deux suites
Si $u_0 + v_0 = 0$, alors $u_{n+1} = 3u_0 + 2v_0 = -v_{n+1}$ (suites stationnaires)
Si $u_0 + v_0 > 0$, alors $u_n \to -\infty$, $v_n \to +\infty$
Si $u_0 + v_0 < 0$, alors $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$

Exercice n° 4

On considère la matrice M définie par : $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

1. Étudier la diagonalisation de M (si elle est diagonalisable, on précisera une base de vecteurs propres et on notera D la matrice diagonale semblable à M)

On a : $\det(M - \lambda I) = \det \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4-2\lambda & 4 & 2 \\ -1 & 3-2\lambda & 1 \\ 1 & 5 & 5-2\lambda \end{pmatrix}$. On ajoute la troisième colonne à la première pour obtenir : $\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (6-2\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3-2\lambda & 1 \\ 1 & 5 & 5-2\lambda \end{pmatrix} = 0$

Puis on retranche la première ligne à la troisième pour obtenir :

$\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (6-2\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3-2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-2\lambda \end{pmatrix} = 0$, d'où

$\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (6-2\lambda)(4-2\lambda)(2-2\lambda) = 0$, soit $\lambda = 1, 2$ ou 3

Comme la matrice admet 3 valeurs propres réelles distinctes, elle est diagonalisable.

Elle est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ avec comme matrice de passage

$P = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur la droite engendrée par un vecteur propre de la matrice M associé à la valeur propre 3. On notera P_X cette matrice.

Posons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matrice de projection est égale à : $P_X = X(X^{'}X)^{-1}X^{'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur le plan engendré par des vecteurs propres de la matrice M associés aux valeurs propres 2 et 3. On notera P_Y cette matrice.

De la même façon, posons $Y = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient $(Y^{'}Y) = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ et

$(Y^{'}Y)^{-1^{'}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$

La matrice de projection est égale à : $P_Y = Y(Y^{'}Y)^{-1}Y^{'} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. Calculer les produits $P_X\, P_Y$ et $P_Y\, P_X$

On obtient $P_X\, P_Y = P_Y P_X = P_Y$

5. Parmi les matrices suivantes : M, D, P_X, P_Y, quelles sont celles qui peuvent définir une norme sur R^3 ?

Il faut que la matrice soit symétrique définie positive, seule *D* vérifie cette propriété.

Exercice n° 5

Soit la matrice *M* définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une base du noyau de l'application linéaire associée à *M*.

Il suffit de résoudre le système pour obtenir : $x + y + z = 0;\ y + 2z = 0$. Le noyau est une droite vectorielle engendrée par le vecteur (1, -2,1).

2. Déterminer les valeurs propres de cette matrice. Que peut-on en conclure ?

On a : $\det(M - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ 3 & 4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(-\lambda^2 + 9\lambda + 6) = 0$

La matrice admet trois valeurs propres distinctes $(0, \dfrac{9 \pm \sqrt{105}}{2})$, elle est donc diagonalisable (on pouvait aussi remarquer qu'elle est symétrique).

3. Déterminer une base de l'orthogonal du noyau de *M*.

Il suffit de trouver deux vecteurs indépendants orthogonaux à (1, -2,1).

Par exemple : (1, 0, -1) et (2, 1, 0), soit le plan d'équation : *x*-2*y*+*z*=0. Ce que l'on pouvait aussi trouver directement.

4. Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés aux deux valeurs propres non nulles.

Comme la matrice est symétrique et les valeurs propres distinctes, les sous-espaces propres sont orthogonaux. Par conséquent on obtient le même résultat qu'à la question précédente : le plan d'équation *x*-2*y*+*z*=0.

5. Résoudre le système $\begin{cases} x + 2y + 3z = m \\ 2x + 3y + 4z = 2m \\ 3x + 4y + 5z = 3m \end{cases}$, où *m* est un paramètre réel.

On obtient, de façon triviale, une droite affine comme solution, à savoir : *x*=*z*+*m* ; *x*+*y*+*z*=*m*

Exercice n° 6

1. Pour *n* entier strictement supérieur à 3, on considère la fonction numérique suivante : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^2}$. Étudier les variations de cette fonction et tracer son graphe.

Si *n* est pair, la fonction est paire et son graphe est symétrique par rapport à l'axe verticale.

Si n est impair, la fonction est impaire et son graphe est symétrique par rapport à l'origine.
Il suffit d'étudier la fonction sur les réels positifs.

La dérivée est égale à : $f_n^{'}(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(1+x^2)^2}\left[n+(n-2)x^2\right]$ qui est positive pour $x>0$. La fonction est donc croissante avec une branche parabolique dans la direction oy et une tangente horizontale à l'origine.

2. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ pour n entier naturel. Calculer I_0, I_1, I_2

Les calculs sont évidents : $I_0 = \dfrac{\pi}{4}$; $I_1 = Ln\sqrt{2}$; $I_2 = 1-\dfrac{\pi}{4}$

3. Calculer I_n et $J_n = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ pour tout n.

$$I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x^2+1-1)}{1+x^2}dx = \frac{1}{n+1} - I_n$$

$$I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \ldots + (-1)^n\frac{\pi}{4} \text{ et } I_{2n+1} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} + \ldots + (-1)^n Ln\sqrt{2}$$

Si n est impair, la fonction est impaire et $J_n = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx = 0$

Si n est pair, la fonction est paire et $J_n = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx = 2I_n$

4. Étudier la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{1+u_n^2}$ et u_0 un nombre réel quelconque.

Pour $n>1$, $u_n > 0$ (récurrence évidente). Si $u_0 = 0$, la suite est stationnaire égale à zéro.

Si la suite (u_n) converge vers une limite l, alors cette limite vérifie : $l = \dfrac{l^2}{1+l^2}$, soit $l=0$.

On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} < 1$. La suite est décroissante et minorée, donc elle converge vers zéro.