Corrigé

PGP 2006

Exercice 1 (3 points)

1) Cherchons la proportion des personnes atteintes par l'un deux virus A et B.

$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})\,P(\overline{B})$

$= (1 - \frac{6}{100})(1 - \frac{12}{100}) = \frac{94 \times 88}{10\,000} = 0{,}8272$

d'où $p(A \cup B) = 1 - 0{,}8272 = 0{,}1728$

nombre de personnes : $10\,000 \times 0{,}1728 = 1728$

2) Les 2 virus sont indépendants d'où le nombre :

$500 \times \frac{12}{100} = 60$

Exercice 2 (7 points)

1) $U_2 = \frac{4}{3}$; $U_3 = \frac{11}{9}$

2) (k^n) vérifie (E) d'où $3k^2 - 2k - 1 = 0$

$K = 1$ ou $k = \frac{-1}{3}$

d'où $V_n = 1$ et $W_n = (\frac{-1}{3})^n$

3) Par récurrence sur n, $n = 0$, $U_0 = 2 > 0$

Par hypothèse de recurrence : Pour tout entier n, $U_n > 0$.

Montrons que $U_{n+1} > 0$

$U_n > 0$, $U_{n-1} > 0$ alors $\frac{U_{n-1} + 2U_n}{3} > 0$ alors $U_{n+1} > 0$

4) a) $\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{U_{n+1} - U_n}{U_n - U_{n-1}} = \frac{\frac{U_{n-1} + 2U_n}{3} - U_n}{U_n - U_{n-1}}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{U_{n-1} - U_n}{U_n - U_{n-1}} = \frac{-1}{3}$

(T_n) suite géométrique de raison $(\frac{-1}{3})$ et de premier terme $T_1 = -1$

b) $S_n = -U_0 + U_n$ (1)

c) D'autre part, $S_n = (-1)\dfrac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$ d'où en passant à la limite, (1) devient :

$-\frac{3}{4} = -U_0 + \lim_{n \to \infty} U_n$ alors $\lim_{n \to \infty} U_n = \frac{5}{4}$

Corrigé

Fomesoutra.com
ça soutra !

Exercice 3 (10 points)

Partie A

1) $Dg =]0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

2) pour tout réel x élément de Dg : $g'(x) = \ln x - \ln|x-2|$

$g'(x) > 0$ équivaut à $\dfrac{x}{|x-2|} > 1$ équivaut à $x > |x-2|$

sur $]0 ; 2[$, on a : $x > 2 - x$ signifie que $x > 1$

sur $]2 ; +\infty[$, on a : $x > x - 2$ signifie que $0 > -2$ (toujours vrai)

d'où pour tout réel x élément de $]0 ; 1]$, $g'(x) < 0$

pour tout réel x élément de $[1 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$, $g'(x) > 0$

3)

x	0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	||	+	
$g(x)$		↘	0	↗ $2\ln 2$	|| $2\ln 2$	↗	

D'où pour tout réel x élément de $]0 ; +\infty[\setminus \{1 ; 2\}$, $g(x) > 0$ et $g(1) = 0$

Partie B

1) $Df =]0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(2-x)}{\ln x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(1+1-x)}{1-x} \times \dfrac{1-x}{\ln x}$

$= \lim\limits_{X \to 0} \left(-\dfrac{\ln(1+X)}{X} \times \dfrac{-X}{\ln(1-X)} \right) = -1(+1) = -1$

f est dérivable en 1

3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ alors la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe de f

Corrigé

4) $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x-2)(\ln x)^2}$

$f'(x)$ a le même signe que $x - 2$ car sur $Df \setminus \{1\}$, $g(x)$, x et $(\ln x)^2$ sont positifs,

d'où pour tout réel élément de $]0\,;1[\cup]1\,;2[$, $f'(x) < 0$

pour tout réel élément de $]2\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$

5)

X	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|| $+$	
$f(x)$	0 ↘		$-\infty$ || $-\infty$ ↗	1

6) Courbe