Corrigé

PGP-2009

EXERCICE 1

1- $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

2- $z+i\bar{z}=(\cos\theta+\sin\theta)(1+i)$

$z+i\bar{z}=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Signe sur $[0,\pi]$ de $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ et de celui de $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$.

θ	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$
$\theta+\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$
$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$	-	+	0	-	

θ	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$
$\epsilon+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{4}$
$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$		+		-	

- $z+i\bar{z}$

Si $\theta\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right[$ alors $|z+i\bar{z}|=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\arg(z+i\bar{z})=\frac{\pi}{4}$.

Si $\theta\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right[$ alors $|z+i\bar{z}|=-2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\arg(z+i\bar{z})=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$.

Si $\theta=\frac{3\pi}{4}$ alors $z+i\bar{z}$ est nul (de module 0 et d'argument no défini.).

- $z-i\bar{z}$

Si $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ alors $|z-i\bar{z}|=2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ et $\arg(z-i\bar{z})=-\frac{\pi}{4}$.

Si $\theta\in\left]\frac{\pi}{4},\pi\right]$ alors $|z-i\bar{z}|=-2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ et $\arg(z-i\bar{z})=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

Si $\theta=\frac{\pi}{4}$ alors $z-i\bar{z}$ est nul .

EXERCICE 2

1-Légalité est vraie à l'ordre n=1 ; en effet $1^2=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

Supposons la vraie à l'ordre n et donnons son expression à l'ordre n+1.

On a :

$1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2+7n+6\right] \text{ or } \Delta=49-48=1 \text{ donc}$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)2(n+2)\left(n+\frac{3}{2}\right)$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

2-

a) Valeurs possibles de X : $X\in\{2,3,4,\ldots,n\}$

Loi de probabilité de X

$$p(X=k)=\frac{k-1}{C_n^2} \quad k\in\{2,3,4,\ldots,n\}.$$

$$p(X=k)=\frac{k-1}{\frac{1}{2}(n-1)n} \quad k\in\{2,3,4,\ldots,n\}$$

b)

$$E(X)=\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{\frac{1}{2}(n-1)n}k$$

$$E(X)=\frac{2}{(n-1)n}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-k\right)=\frac{2}{n(n-1)}\left[\sum_{k=1}^{n}k\right]$$

$$E(X)=\frac{2}{n(n-1)}\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\right]=\frac{2}{3}(n+1)$$

EXERCICE 3

1- $D_g=]-\infty;1[\cup]1,+\infty[$. $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-1$

2- $g'(x)=-\frac{(x+3)}{(x-1)^3}$.

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$		$-$
$g(x)$	$-1 \searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow +\infty$		$+\infty \searrow -1$

3- Tableau de variation de g^2. Comme $g(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{0;3\}$ et que le carré de g est décroissant sur $\mathbb{R}^-$; croissant sur $\mathbb{R}^+$. On a :

x	$-\infty$	-3		0		$-$		3	$+\infty$

Corrigé

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2+7n+6\right] \text{ or } \Delta=49-48=1 \text{ donc}$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)2(n+2)\left(n+\frac{3}{2}\right)$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

2-

a) Valeurs possibles de X : $X \in \{2,3,4,\ldots,n\}$

Loi de probabilité de X

$$p(X=k)=\frac{k-1}{C_n^2} \quad k \in \{2,3,4,\ldots,n\}.$$

$$p(X=k)=\frac{k-1}{\frac{1}{2}(n-1)n} \quad k \in \{2,3,4,\ldots,n\}$$

b)

$$E(X)=\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{\frac{1}{2}(n-1)n}k$$

$$E(X)=\frac{2}{(n-1)n}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-k\right)=\frac{2}{n(n-1)}\left[\sum_{k=1}^{n}k\right]$$

$$E(X)=\frac{2}{n(n-1)}\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\right]=\frac{2}{3}(n+1)$$

EXERCICE 3

1- $D_g=]-\infty;1[\cup]1,+\infty[$. $\lim\limits_{x\to1}g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-1$

2- $g'(x)=-\dfrac{(x+3)}{(x-1)^3}$.

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$		$-$
$g(x)$	$-1 \searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow +\infty$		$+\infty \searrow -1$

3- Tableau de variation de g^2. Comme $g(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{0;3\}$ et que le carré de g est décroissant sur $\mathbb{R}^-$; croissant sur $\mathbb{R}^+$. On a :

x	$-\infty$	-3		0		$-$		3	$+\infty$

Corrigé

$[g(x)]^2$	1 ↗	$\frac{81}{64}$	↘	0	↗ $+\infty$		$+\infty$ ↘	0	↗ 1

Tableau de variation de f.

x	$-\infty$	-3		0		1		3	$+\infty$
$[g(x)]^2$	1 ↗	$\ln\frac{81}{64}$	↘ $-\infty$		$-\infty$ ↗ $+\infty$		$+\infty$ ↘ $-\infty$		$-\infty$ ↗ 0

Branches infinies de C_f .

En $-\infty$ et en $+\infty$ l'axe (OI) est asymptote à C_f

En 0, en 1 et en 3 , il y a présence d'asymptote verticale à C_f .

4- Courbe