IMAGERIE MEDICALE 2006

Exercice 1 (6 points)

1) Soit V_n le capital disponible après la $n^{ième}$ année.

$V_0 = 77\ 000$; $V_1 = (1,07)\ V_0 = 82\ 390$; $V_2 = (1,07)^2\ V0 = 88\ 157,3$

$V_n = (1,07)^n\ V_0$

2) Déterminons le plus petit entier n tel que $V_n \geq 90\ 000$.

$(1,07)^n\ V_0 \geq 90\ 000$ alors $(1,07)^n \geq 1,168831169$ d'où $n \geq 2,305$

Il pourra effectuer cet achat le 1^{er} janvier 2010

3) Soit P_n le prix de mobylette le 1^{er} janvier (2007 + n)

$P_n = 90\ 000 + 3\ 000\ n$

Déterminons le plus petit entier n tel que: $V_n \geq P_n$

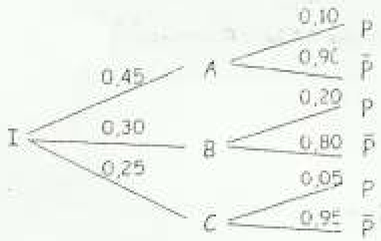
Pour n = 5, $V_5 = 107\ 996$ et $P_5 = 105\ 000$ F

Pour n = 4, $V_4 = 100\ 931$ et $P_4 = 102\ 000$ F

Il pourra l'acheter le 1^{er} janvier 2012

Exercice 2 (6 points)

Soit I un individu quelconque, A, B et C respectivement l'ensemble de ces individus dont l'âge est inférieur à 20 ans, compris entre 20 et 45 ans et supérieur à 45 ans, P l'ensemble des porteurs.



1) Détermination de la proportion des individus dont le test de dépistage est positif:

$P = 0,45 \times 0,1 + 0,3 \times 0,2 + 0,25 \times 0,05$

$P = 0,1175$

2) Calcul de la probabilité pour que l'âge d'un individu choisi soit supérieur à 20 ans:

$P(B \cup C/\overline{P}) = P(B/\overline{P}) + P(C/\overline{P})$ car $B \cap C = \varnothing$

$= \dfrac{0,3 \times 0,8 + 0,25 \times 0,95}{1 \quad 0,1175}$

alors $P(B \cup C/\overline{P}) = 0,541$

3) a) Les valeurs possibles de x: $x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

b) détermination de la probabilité $P(x \geq 2)$:

$x \quad B(10; 0,1175)$

d'où $P(x \geq 2) = 1 - [P(x = 0) + P(x = 1)]$

$= 1 - [0,1175^{10} + 10 \times (0,1175)^9 \times (0,8825)]$

$P(x \geq 2) = 0,999$

Exercice 3 (8 points)

1) Détermination des limites

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

2) a) Montrons que f est continue en 0:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ et $f(0) = 1$ alors f est continue en 0.

b) Montrons que f est dérivable en 0:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) \quad f(0)}{x \quad 0} =$

3) Détermination de la dérivée $f'(x)$:

Pour tout réel x non nul, $f'(x) = \frac{e^x \quad 1 \quad xe^x}{(e^x \quad 1)^2}$

4) a) Etude de la variation de la fonction g:

- Limites:

$\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = -1$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = -\infty$

- On considère que la fonction g est dérivable sur $\Re$.

Déterminons la dérivée $g'(x)$:

$g'(x) = -x e^x$

- Pour tout réel x, $g'(x)$ est négative; alors la fonction g est décroissante sur $\Re$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$-1 \searrow -\infty$

b) Déterminons le signe de g:

Pour tout réel x, $g(x)$ est négatif (voir tableau de variation ci-dessus)

5) Le tableau de variation de f:

. D'après la question 3), pour tout réel x non nul, $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x \quad 1)^2}$;

or pour tout réel x, $g(x) < 0$ et $(e^x - 1)^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$

On a le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$F(x)$	$+\infty \searrow 0$

6) Construction de la courbe de f