SOCIETE MATHEMATIQUE
DE COTE D'IVOIRE (SMCI)

SOCIETE MATHEMATIQUE
DE COTE D'IVOIRE - SMCI

Concours Miss Mathématique

Edition de 2012

NIVEAU : Terminale C

Durée : 4 heures

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2. Les cinq exercices sont indépendants.

1 RECONCILIATION

Un bricoleur passionné des pyramides décide de construire une pyramide de la manière suivante : il prend un cube de $\frac{1}{2}$ m d'arête ; il pose dessus un cube de $\frac{1}{3}$ m d'arête, puis dessus un cube de $\frac{1}{4}$ m d'arête et pense continuer ainsi le plus haut possible. Il se demande si la pyramide ainsi construite pourra atteindre ou dépasser le plafond de son atelier haut de 3 m.

Pour résoudre ce problème, on pose :

$U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ et $V_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}$.

1) Démontrer que : $U_n \leq ln(n) \leq V_n$.

2) En déduire la limite de U_n puis interpréter le résultat.

3) Déterminer une valeur de n pour laquelle la hauteur de la pyramide dépasse le plafond de l'atelier.

2 PAIX

Soit A , B et C trois points non alignés.

On note I le milieu de [BC], J le milieu de [AC] et K le milieu de [AB].

Soit M un point quelconque du plan, P le symétrique de M par rapport à I, Q le symétrique de M par rapport à J et R le symétrique de M par rapport à K.

1) Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) quand elles existent, ont un point commun M'.

2) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Démontrer que $\overrightarrow{GM'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$.

3) Soit x, y et z trois nombres réels tels que $x + y + z \neq 0$. Démontrer que si M est le barycentre des points pondérés (A, x) ; (B, y) ; (C, z) alors M' est le barycentre des points pondérés (A, $y+z$) ; (B,$x+z$) ; (C,$x+y$).

3 FRATERNITE

Soit (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré dans laquelle a, b et c sont des nombres entiers tels que a et c sont non nuls. Démontrer que si une solution de (E) est un nombre rationnel alors l'un au moins des coefficients a, b ou c est pair.

4 SOLIDARITE

On pose : $P(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$;

$$C_n = (-1)^{n-1}(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}})(1 - e^{i\frac{4\pi}{n}})(1 - e^{i\frac{6\pi}{n}})\ldots(1 - e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}) ;$$

$$B_n = \frac{e^{-i\frac{\pi}{n}}}{2i}\times\frac{e^{-i\frac{2\pi}{n}}}{2i}\times\frac{e^{-i\frac{3\pi}{n}}}{2i}\ldots\times\frac{e^{-i\frac{(n-1)\pi}{n}}}{2i}.$$

1) a) Démontrer que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(x) = 0$ est égal à :

$$\{e^{i\frac{2k\pi}{n}} ; k \text{ entier tel que } 1 \leq k \leq n - 1 \}.$$

b) En déduire que $C_n = (-1)^{n-1}\times n$.

c) Vérifier que $B_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$.

2) On pose $A_n = sin(\frac{\pi}{n})\times sin(\frac{2\pi}{n})\times sin(\frac{3\pi}{n})\times \ldots\times sin(\frac{(n-1)\pi}{n})$.

a) Démontrer que $A_n = B_nC_n$.

b) En déduire que $sin\frac{\pi}{8}\times sin\frac{2\pi}{8}\times sin\frac{3\pi}{8}\times \ldots \times sin\frac{7\pi}{8} = \frac{1}{16}$.

5 DEVELOPPEMENT

On suppose que $n \geq 2$.

1. Démontrer que $C_{n+1}^3 + C_{n+1}^2 = C_{n+2}^3$.
2. Démontrer par récurrence que : $\sum_{k=2}^{n} C_k^2 = C_{n+1}^3$.
3. Démontrer que : $\sum_{k=2}^{n} C_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k$.
4. En déduire que : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.