Niveau : **BTS** Durée de l'épreuve : 3 HEURES

Session : **2011** Coefficient : 3

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, I, J) unité graphique : 2 cm.

1. a) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$ **(1 pt)**

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz-2 = 4i-z$.
   On donnera la solution sous forme algébrique.

2. On désigne par I, A et B les points d'affixes respectives 1, 2i et 3+i. **(3 pts)**

   a) Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

   b) Calculer l'affixe z du point C image de A par la symétrie centrale de centre I.

   c) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe Z défini par :
   $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ où z_A, z_B sont les affixes respectives des points A et B.

   d) Soit D le point d'affixe z_D tel que $z_D - z_C = z_A - z_B$.
   Démontrer que ABCD est un carré.

3. Pour tout point M du plan, on considère le vecteur : $\vec{V} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$. **(2 pts)**

   a) Exprimer $\vec{V}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MI}$.

   b) Démontrer que le point K défini par $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{AB}$ est le milieu du segment [AD].

   c) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = \|2\overrightarrow{AB}\|$ et construire (Γ).

EXERCICE 2 (4 points)

On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$.

1. Calculer P(-4) puis en déduire une factorisation de P(x) en produit de facteurs de degré 1. **(1 pt)**
2. Déterminer le signe de P(x) suivant les valeurs de x. **(1 pt)**
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: **(2 pts)**

   a) L'équation : $P(x) = 0$

   b) L'équation : $(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 10 \ln x + 8 = 0$

   c) L'inéquation : $e^{6x+3}+e^{4x+2}-10e^{2x+1}+8<0$.

(11)

PROBLEME (10 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par : $g(x) = 1-x^2-\ln|x|$.

Partie A (4 pts)

1. a) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
   b) On admet que g est dérivable sur chacun des intervalles de son ensemble de définition. Déterminer $g'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   c) Donner les variations de g et dresse son tableau de variation.

2. a) Calculer $g(-1)$ et $g(1)$.
   b) Déduire des questions précédentes, le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B (6 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par : $f(x) = -x+e+\dfrac{\ln|x|}{x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal. Unité graphique : 2 cm.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Calculer la limite de f en o, puis interpréter le résultat.

2. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x+e$ est une asymptote à la courbe (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Préciser les positions relatives de (C) et (D).

3. a) Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$
   b) Donner les variations de f, puis dresser son tableau de variation.

   c) Construire la droite (D) et la courbe (C).