BTS BLANC DE CESA ABIDJAN juin 2014

Choisir CESA Abidjan, c'est s'ouvrir les portes de la réussite.

Filière	Epreuve	Durée
FCGE	MATHEMATIQUES GENERALES	3 HEURES

EXERCICE 1

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=a\ln x+bx+\frac{c}{x}$ où a, b et c sont trois réels à déterminer. On note C la courbe représentative de cette fonction f. Unité graphique est de 2 cm.

PARTIE A (recherche de la fonction)

1- Déterminer $f'(x)$ en fonction de la variable x et des nombres réels a, b et c.

2- Exprimer $f(1)$, $f'(1)$, $f'(2)$ en fonction des nombres réels a, b et c.

3- On admet que : $f(1)=1$, $f'(1)=1$, $f'(2)=0$, montrer que les nombres réels a, b et c sont solutions du système S suivant :

$$\begin{cases} b+c=1 \\ a+b-c=1 \\ 2a+4b-c=0 \end{cases}$$

4- Résoudre le système S par la méthode matricielle. En déduire une expression de $f(x)$.

PARTIE B (étude de la fonction)

Dans la suite de l'exercice, la fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=8\ln x-3x+\frac{4}{x}$$

1- Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2- Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

3- a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{(3x-2)(2-x)}{x^2}$$

b) Dresser le tableau de variations complet de f (justifier avec soin le signe de $f'(x)$).

c) Montrer que sur l'intervalle $[4;5]$ l'équation $f(x)=0$ a une solution unique α.

d) Justifier l'encadrement de la solution α suivant : $4{,}07 < \alpha < 4{,}08$.

4- Construire C dans un repère orthonormé (o; i ; j).

5- Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=(8x+4)\ln x-8x-\frac{3}{2}x^2$. Montrer que F est une primitive de f.

6- Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C et les droites d'équation x = 1/2 et x = 2. On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.

PARTIE C (Application économique)

Une entreprise fabrique par jour 500 à 2000 articles. Pour x milliers d'articles produits par jour, *g(x)* désigne en millions de francs, le montant des coûts de production de ces x milliers d'articles ; avec $g(x)=8\ln x-3x+\frac{4}{x}$.

1- Déterminer les montants des coûts de production respectifs de 600 articles puis de 1200 articles.

2- a/ Déterminer la quantité d'articles à produire par jour pour minimiser les coûts de production (arrondir le résultat à l'entier le plus proche).

b/ Préciser le coût de production minimal.

3- Quel est le coût moyen de production des articles fabriqués par jour.

Rappel : On appelle valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, le réel M tel que $M=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

BTS BLANC
DE CESA ABIDJAN juin 2014

Choisir CESA Abidjan, c'est s'ouvrir les portes de la réussite.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

M étant une matrice carrée, on pose, pour tout n, $M^{n+1} = M \times M^n$

1- Une suite u est définie par : $u_1 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = 1 + 2u_n$

a) Calculer u_2 et u_3 .

b) Soit la suite v définie pour tout n par : $v_n = 1 + u_n$.

Montrer que v est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_1.

c) exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

2- On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les matrices A^2 et $B = I + A$. en déduire que $B \times A = 2A$.

b) On admet que pour tout entier n non nul, il existe un réel a_n tel que : $B^n = I + a_nA$.

Exprimer B^{n+1} en fonction de I, A et a_{n+1}

En remarquant que : $B^{n+1} = B \times B^n$, exprimer B^{n+1} en fonction de I, A, et de a_n.

En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 1 + 2a_n$.

3- En utilisant les résultats de la question 1 exprimer a_n en fonction de n. déduire des questions précédentes l'expression de B^n en fonction de n, A et I.

BTS BLANC
DE CESA ABIDJAN juin 2014

EXERCICE 3

En général quatre demandeurs d'emploi sur dix falsifient leur curriculum vitae. Une agence de recrutement dispose d'un fichier de 150 demandeurs d'emploi. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de curriculum vitae falsifiés dans ce fichier.

1- Montrer que X suit une loi binomiale B(n ;p) que l'on précisera.

2- a) Quel est en moyenne le nombre de curriculum vitae que pourrait contenir ce fichier ?

b) Déterminer l'écart-type de la variable aléatoire X.

3- a) Montrer que la loi binomiale B(n ;p) peut être approchée par une loi normale dont on déterminera les paramètres.

b) Utiliser cette approximation de la loi binomiale pour calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Le fichier contient au moins 40 CV falsifiés ».

B : « Le fichier contient au plus 50 CV falsifiés ».

C : « Le nombre de CV falsifiés que contient le fichier est strictement compris entre 45 et 55 ».