MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE L'EMPLOYABILITE (DGESE)

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR / SESSION 2015

FILIERE TERTIAIRE : FINANCES –COMPTABILITE ET GESTION D'ENTREPRISES

EPREUVE : MATHEMATIQUES, STATISTIQUES ET PROBABILITE

Durée de l'épreuve : 3 Heures

Coefficient de l'épreuve : 2

Cette épreuve comporte 03 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Le candidat recevra une feuille de papier millimétré.
L'usage des tables financières et statistiques est autorisé.

EXERCICE 1 : ETUDE DE FONCTION (8 pts)

PARTIE A (5 pts)

On considère la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x(1-\ln x)^2 \text{ Si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1- Donner l'ensemble de définition Df de f. 0,5

2- Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition Df. 0,5

3- En admettant la fonction continue et dérivable sur $Df \setminus \{0\}$

3-1 (1) Calculer la dérivée $f'(x)$, puis donner son signe.

3-2 Etudier les variations de f. 0,25 + 0,25 TV 0,5

$x = e$ ou $x = \frac{1}{e}$

TS = 0,5

4- Construire la courbe représentative (Cf) de f dans un repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique : OI = 2 cm ; OJ = 2 cm (1)

PARTIE B (3 pts)

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x(1-\ln x)^2$.
Pour $x \in]0 ; 4[$ $f(x)$ représente le bénéfice que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x dizaines de milliers de pièces.
Pour quelles quantités de pièces l'entreprise :

1. Réalise un bénéfice nul (de deux façons différentes). (1)
2. Réalise un bénéfice maximal. (1)
3. Dégage un bénéfice non nul. (1)

EXERCICE 2 : CALCUL MATRICIEL 7 pts

1ère Partie 5 pts

On donne les matrices

$$M = \begin{pmatrix} a-2 & 1 & 1 \\ 1 & a-2 & 1 \\ 1 & 1 & a-2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et } P = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

avec a, x, y et z des réels

1- Pour a = 3, calculer det (M) ; Que dire de la matrice M ? 0,25 0,25 0,25

2- On suppose que a = 4 et on note I la matrice unité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 0,25

2-1 Calculer les matrices M^2, M^3 sous forme de matrices à trois lignes et à trois colonnes. 0,5 + 0,5

2-2 Montrer que $M^3 - 6M^2 + 9M - 4I = 0$ 0,5

2-3 Déduire du résultat précédent, l'existence d'une matrice M' telle que MM' = M'M = I. Que représente la matrice M' pour M ? 0,5 0,25 + 0,25

2-4 Calculer M' sous forme d'une matrice à trois lignes et à trois colonnes. 1 + 0,

2ème Partie 2 pts

Dans un pays, une agence de voyage s'occupe spécialement des touristes en leur rendant annuellement trois différents services :
V (Vente de billets) T (Transport) et C (Choix d'un hôtel)

Afin de rendre correctement ces services, l'agence emploie trois catégories de salariés (S_A, S_B, et S_C) dont les nombres en milliers sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Libellés	V	T	C
S_A	2	1	1
S_B	1	2	1
S_C	1	1	2

Désignons respectivement par x, y et z le nombre de services V, T et C rendus aux touristes.

Par an, l'agence dispose de 6000 salariés S_A, 4000 salariés S_B et 4000 salariés S_C.

1°) En considérant les données de ce problème, écrire le système (S) des trois équations linéaires à trois inconnues x, y et z. 0,5

2°) Ecrire le système (S) sous forme matricielle. 0,5

3°) Résoudre ce système en se servant de la question 2-4. 1

EXERCICE 3 : PROBABILITES

Pendant une période de cent quatre jours une firme pharmaceutique a fourni à l'un des pays touchés par la fièvre hémorragique à virus Ebola, des sérums expérimentaux. La demande de ces produits suit approximativement une loi normale dont on ignore les paramètres. Pour l'ensemble de la population, on dispose dans le tableau ci-dessous les quantités demandées de flacons par lot de 50 en fonction du nombre de jours.

Quantité demandée de flacons (en nombre de lots de 50)	Nombre de jours
0 à moins de 10	1
10 à moins de 20	2
20 à moins de 30	3
30 à moins de 40	8
40 à moins de 50	25
50 à moins de 60	27
60 à moins de 70	20
70 à moins de 80	12
80 à moins de 90	5
90 et plus	1

1. Calculer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type σ' de l'échantillon.
   En déduire une estimation ponctuelle des paramètres de la loi normale de la demande.
2. Pour évaluer la rentabilité de cette activité, la firme pharmaceutique décide, de se baser sur une demande globale annuelle qui ait 60% de chances d'être dépassée.

Soit X la variable aléatoire mesurant la demande journalière en nombres de lots. Soit Z la variable aléatoire mesurant la demande annuelle en nombres de flacons.
On donne $Z_i = \Sigma X_i$ (i =1 ; 2 ; .... ; 360)

2-1 Montrer que les paramètres de Z sont m = 19800 et σ = 307,4

2-2 Quel est le nombre de lots minimum pour que la demande ait 60% de chance d'être dépassée ?

2-3 En déduire le nombre de flacons pour que la demande ait 60% de chance d'être dépassée ?

****

BTS Correction

MATHEMATIQUES, STATISTIQUES ET PROBABILITES

FCGE

EXO1 (8 pts)

PARTIE (1 pts)

1) $D_f = \mathbb{R}_+$ (0,5)

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ (0,25) et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (0,25)

3)

1- $\forall x \in D_f$, $f'(x) = (1 - \ln x)(-1 - \ln x)$ (1)

$f'(x) = 0 \iff x \in \{e ; \frac{1}{e}\}$ (0,25 + 0,25)

T.S

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	0	+	

(0,5)

$\forall x \in [0 ; \frac{1}{e}] \cup [e ; +\infty[$ $f'(x) \geq 0$

$\forall x \in [\frac{1}{e} ; e]$ $f'(x) \leq 0$

2 - Les variations de f

T.V

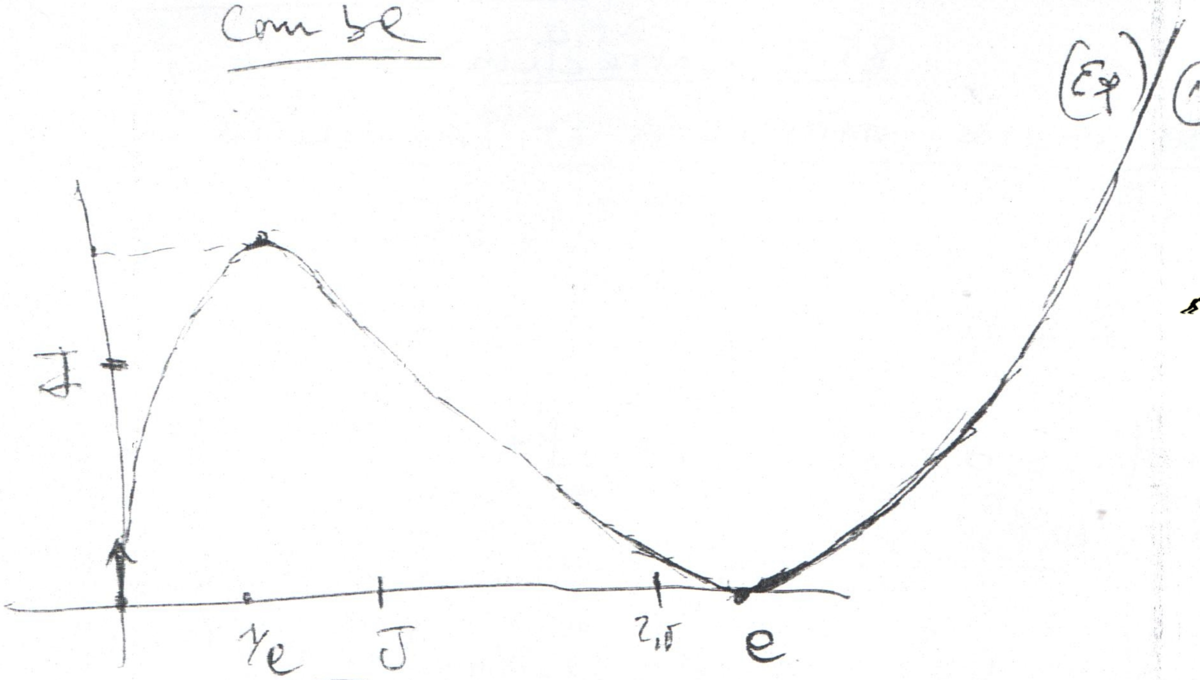
(0,5)

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0	↗	

f est croissante sur $]0 ; \frac{1}{e}] \cup [e ; +\infty[$ (0,25)

f est decroissante sur $[\frac{1}{e} ; e]$. (0,25)

4) Courbe



PARTIE B (3 pts)

$f(x) = x(1-\ln x)^2$ pour $x > 0$.

$x \in]0\,;4[$

Tableau économique

x	0	$\frac{1}{e}$		e		4
f	↗	$f(\frac{1}{e})$	↘	$f(e)$	↗	

1- pour réaliser un bénéfice nul on a

$f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $(1-\ln x)^2 = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = e$

$\iff x = e$ car $0 \notin]0\,;4[$

L'entreprise réalise un bénéfice nul lorsque

$x = e$ d'ou $e \times 10\,000$ pieces

soit $e \times 10\,000 \simeq 27183$ pieces. 1

* on peut aussi voir la methode graphique

2. D'après le tableau economique

$x = \frac{1}{e} \simeq 0,36787$ 1

benefice maximal pour $\frac{1}{e} \times 10.000$ pieces soit

3679 pieces

2eme methode

Au benefice maximal on a

$f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{e} \times 10\,000$ pieces

$\simeq 3679$ pieces

3°) un benefice non nul.

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; e[$ ou $x \in]e; 4[$ 1

soit pieces $\in]0; 27183[$ ou $]27183; 40\,000[$

EXERCICE 2 7pts

1ere partie

1) Pour $a = 3$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 0,25

$\det M = 0$ 0,25, on peut dire que M n'est pas inversible (n'est pas reguliere) 0,25

2)

$a = 4$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

2-1)

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

$$M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

2.2)

$$M^3 - 6M^2 + 9M - 4I = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M^3 - 6M^2 + 9M - 4I = O$

2-4) $M' = \frac{1}{4}(M^2 - 6M + 9I)$ 0,5

$$M' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad 1$$

2-3) D'après 2-2.

$M^3 - 6M^2 + 9M - 4I = 0 \Leftrightarrow M\left(\frac{1}{4}(M^2 - 6M + 9I)\right) = I$ 0,5

posons $M' = \frac{1}{4}(M^2 - 6M + 9I)$ alors 0,25

$MM' = I$, alors il existe une matrice inversible M' de M tq $MM' = M'M = I$ 0,25 partie

1) système linéaire

$$(S) : \begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

0,5

2) (S) sous forme matricielle

$$(S) : \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

0,25

$MN = P$ pour $a = 4$

0,25

3°) pour $a = 4$, $M.N = P \Leftrightarrow N = M^{-1}P$ M^{-1} étant l'inverse de M.

1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$S_{\mathbb{R}^3} = \{ x^* = (2500 ; 500 ; 500) \}$

0,5

EXERCICE 3 : (5 pts)

Classe	Centre x_i (0,5)	Effectif (n_i)	$n_i x_i$ (0,5)	$n_i x_i^2$ (0,5)
[0 ; 10[	5	1	5	25
[10 ; 20[	15	2	30	450
[20 ; 30[	25	3	75	1875
[30 ; 40[	35	8	280	9800
[40 ; 50[	45	25	1125	50 625
[50 ; 60[	55	27	1485	81 675
[60 ; 70[	65	20	1300	84500
[70 ; 80[	75	12	900	67500
[80 ; 90[	85	5	425	36125
[90 ; 100[	95	1	95	9025
T	X	104	5720	341 600

1) moyenne $\bar{x}$. 0,25

$\bar{x} = \dfrac{\sum n_i x_i}{N} = \dfrac{5720}{104}$, $\bar{x} = 55$ lots de flacons

écart type δ' . 0,5

$V(x) = \dfrac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$, $V(x) = \dfrac{341600}{104} - 55^2$

$V(x) = 259,61538$

$\delta' = \sqrt{V(x)}$, $\delta' = 16,1125845$

$\delta' \simeq 16,11$

estimation ponctuelle de la moyenne et de l'ecart type. (4)

1) on estime la moyenne m et l'ecart type δ dans une population à partir de la moyenne $\bar{x}$ et l'ecart type δ' d'un echantillon.
Cette estimation (approximation) est possible à travers la loi normale de parametre (m, δ) avec n > 30 (ici n = 124)

- estimation ponctuelle de la moyenne de la pop.

$m = \bar{x} = 55$ (0,25)

- estimation ponctuelle de l'ecart type

$$\delta^2 = \frac{n}{n-1}\delta'^2 \Leftrightarrow \delta = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \delta'$$

(0,5)

A.N $\delta = \sqrt{\frac{124}{123}} \cdot 16{,}1126$

(0,25) $\boxed{\delta \simeq 16{,}2}$

2) soit les variables aléatoires suivantes

- X : " mesurant la demande journalière en nbre de lits " $X \sim N(m, \delta)$
- Z : " mesurant la demande annuelle en nbre

de lots de flacons"

$$z_i = \sum_{i=1}^{360} x_i$$

2.1) montrons que la loi normale Z a pour paramètre $m_Z = 19800$ et $\delta_Z = 307,4$

Théorème

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires de même loi normale $N(m, \delta)$.

La somme $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ suit une loi normale $N(n.m\,;\ \delta.\sqrt{n})$.

$$Z = \sum_{i=1}^{360} x_i \quad , \quad X_i \sim N(55\,;\ 16,2)$$

1

$$Z \sim N(360 \times 55\,;\ 16,2 \times \sqrt{360})$$

$m_Z = 360 \times 55 =$ et $\delta_Z = 16,2 \times \sqrt{360}$

Donc $Z \sim N(19800\,;\ 307,4)$

2.2) Nbre de lots minimum

Théorème

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables indépendantes de même loi de moyenne m et d'écart type

-) δ ; la variable $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$ vérifie (1)

$T_n = \dfrac{S - n.m}{\delta \sqrt{n}}$ avec

T_n converge vers Y quand n tend vers $+\infty$.

et Y tend vers $N(0,1)$.

D'après ce théorème et dans les m conditions (pour que la demande ait 60% d'être chance dépassée).

z est minimal si $P(Z < z) = 0{,}6$

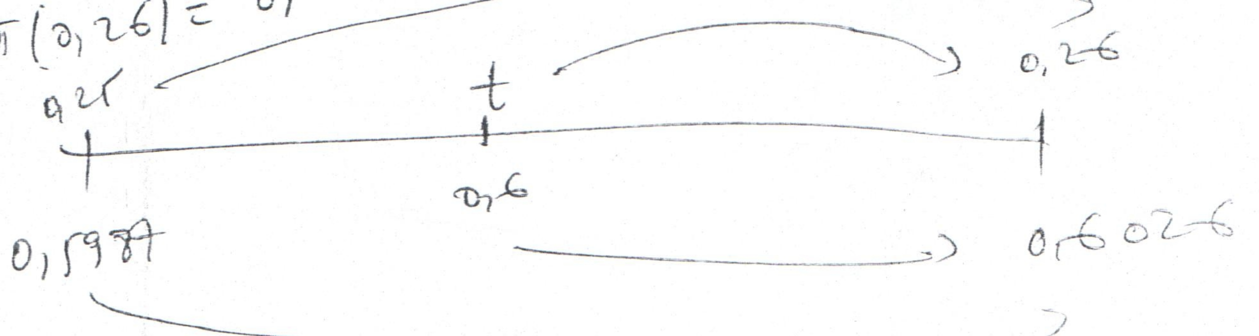
$$P(Z<z) = 0.6 \iff P\left(T < \frac{z - 19800}{307{,}4}\right) = 0{,}6$$

$$\Pi\left(\frac{z-19800}{307{,}4}\right) = 0{,}6$$

On pose : $t = \dfrac{z - 19800}{307{,}4}$

$\Pi(t) = 0{,}6$

$\left.\begin{array}{l}\Pi(0{,}25) = 0{,}5987 \\ \Pi(0{,}26) = 0{,}6026\end{array}\right\}$ par interpolation linéaire



$$\frac{t-0{,}26}{0{,}6-0{,}6026} = \frac{0{,}25-0{,}26}{0{,}5987-0{,}6026}$$

$$t = 0{,}26 - 0{,}0026 \times \frac{0{,}01}{0{,}0039}$$

$$t = 0{,}253333$$

or $t = \dfrac{z-19800}{307{,}4} \Rightarrow z = 307{,}4t + 19800$

$$z = 307{,}4 \times 0{,}253333 + 19800$$

$$z = 19878$$

le nbre de lots minimum est $z = 19878$ lot

2.3 Deduction du nbre de flacons

1 lot contient 50 flacons, donc que 19 878 lot en aura : 19878×50 flacons soit 993 900 flacons (demande minimale de flacons par an).