REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union - Discipline -Travail

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

IT Academy
PROFESSIONAL TRAINING
AUDITS CONSULTING AND EXPERTISE

University of Technologies and Solutions Integrator

Epreuve de :	BTS BLANC N°1	**Année académique** : 2020 - 2021
TRAITEMENT DE SIGNAUX & MATHEMATIQUES	(14.04.2021) / 8h – 12h	**Filière** : RIT (**DALOA**)
		Durée : 4 heures
		Coefficient : 4

EXERCICE 1

On considère la fonction f, périodique de période 2π, impaire telle que :

$$\forall t \in [0;\ \pi], f(t) = t^2 - \pi t$$

1°) a. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

b. A l'aide d'une double intégration par partie, montrer que la valeur de l'intégrale I_n définie par $I_n = \int_0^{\pi} f(t)\, sin(nt)\, dt = \int_0^{\pi} f(t)\, sin(nt)\, dt$ est donnée par l'égalité ci-dessous :

$$I_n = \frac{2}{n^3}[(-1)^n - 1]$$

2°) $(a_n)n \in IN$ et $(b_n)n \in IN$ désignant les coefficients de Fourier réels de f.

Donner les valeurs du terme général des suites suivantes :

a. a_n $\quad(n \in IN)$

b. b_{2p} $\quad(p \in IN)$

c. b_{2p+1} $\quad(p \in IN)$

3°) $S_f(t)$ désigne la forme réelle de la série de Fourier de f.

a. Montrer que $S_f(t) = -\frac{8}{\pi}\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{sin[\,(2p+1)\,t\,]}{(2p+1)^3}\right)$.

b. La fonction f vérifie-t-elle l'hypothèse du théorème de DIRICHLET ? Justifier

c. En posant $t = \frac{\pi}{2}$ dans l'égalité 3-a, donner la somme de la série $\sum_{p=3}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$

4°) a. Déterminer la puissance moyenne de l'harmonique de rang 2p et de rang 2p+1 de la fonction périodique f, puissance moyenne notée respectivementE_{2p} et E_{2p+1}.

b. En déduire l'identité de PARSEVAL.

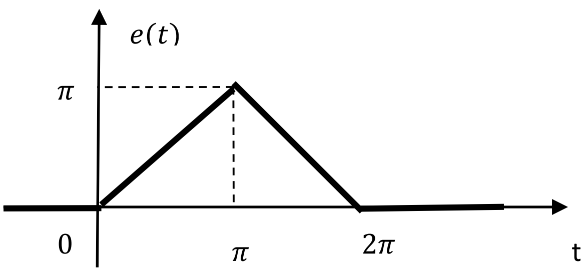
c. En déduire la somme de la série $\sum_{p=4}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^6}$ en utilisant l'identité de PARSEVAL.

EXERCICE 2 :

On se propose de déterminer, en utilisant la transformation de Laplace, la fonction causale solution de l'équation différentielle :

$$(E): \quad \begin{cases} i''(t) + i(t) = e(t) \\ i(0^+) = i'(0^+) = 0 \end{cases}$$

Où e est le signal représenté graphiquement ci-dessous.



1. Exprimer le signal e(t) en fonction de l'Echelon Unité U(t).
2. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto e(t)$.
3. a) En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (E), déterminer la transformée de Laplace I(p) de la fonction $t \mapsto i(t)$.

   b) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $J(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$

   c) Déterminer la transformée de Laplace inverse de $J(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$

   d) Déduire des questions précédentes une expression de la fonction $t \mapsto i(t)$.
4. a) Préciser l'expression de $i(t)$ sur chacun des intervalles suivants :

   $$]-\infty; 0[; \ [0; \pi[\ ; \ [\pi; 2\pi[\ ; \ [2\pi; +\infty[\ .$$

   b) Etudier les variations de i sur $[0; \pi]$

   c) Déterminer les solutions de l'équation $i(t) = 0$ si t appartient à $[0; \pi]$

d) Représenter graphiquement la fonction i sur l'intervalle $[0;\ \pi]$.

Unité graphique :

$$\begin{cases} 3\ cm\ pour\ \pi\ sur\ l'axe des\ abscisses \\ 1\ cm\ pour\ l'unité\ sur\ l'axe des\ ordonnées \end{cases}$$