BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR / SESSION 2022

FILIERE INDUSTRIELLE : INFORMATIQUE – DEVELOPPEUR D'APPLICATION

EPREUVE : MATHEMATIQUES GENERALES ET STATISTIQUES

Durée de l'épreuve : 2 Heures **Coefficient de l'épreuve : 3**

EXERCICE 1

Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction f_n par :

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}$$

1)
  a) Déterminer l'ensemble de définition D_{f_n} de la fonction f_n
  b) Déterminer les limites de la fonction f_n aux bornes de son ensemble de définition.
  c) On désigne par (C_n) les courbes représentatives de f_n.
  Montrer que pour tout entier naturel non nul, toutes les courbes (C_n) passent par un point A dont on déterminera les coordonnées.

2)
  a) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $[0, +\infty[$
  b) Justifier que pour tout entier naturel non nul, on a $0 < \alpha_n < 1$
  c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$

3)
  a) Montrer que la suite (α_n), où $n \geq 1$, est croissante.
  b) Déduire des questions précédentes que la suite (α_n) est convergente.

4)
  a) Vérifier que $\alpha_n = 1 - \frac{\ln[(\alpha_n)^2+1]}{2n}$
  b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n$

5)
  a) On pose $f = f_1$
  Dresser le tableau de variation de f.
  b) (C) désigne la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm .
  Représenter graphiquement (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

EXERCICE 2

On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et l'endomorphisme g_m de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A_m = \begin{pmatrix} m+3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, m étant un paramètre qui parcourt $\mathbb{R}$.

1- Déterminer les valeurs de m , pour lesquelles g_m est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$

2- On prend $g = g_1$ et $M = A_1$
Déterminer le noyau Kerg et l'image I_g de g

3- On prend $m = 0$ et on note $f = g_0$ et $A = A_0$ et on considère les vecteurs :
$V_1 = (f - id)V_2$ et id l'application identité de $\mathbb{R}^3$; $V_2 = e_1$
et $V_3 = e_1 + e_3$. (I désigne la matrice identité d'ordre 3.)

a) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

b) Montrer que la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

4- On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que N^2 est la matrice nulle

b) Montrer par récurrence sur n , que $A'^n = I + nN$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5- Montrer que $A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n & -2n \\ -n & 1-n & n \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}$, sachant que $A^n = PA'^nQ$

6- On considère le système

$$(S)\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} = -x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$$ et on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

a) Vérifier que $(S) \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n$

b) Exprimer X_n en fonction de A , n et X_0

c) En déduire l'expression de x_n , y_n , z_n en fonction de n , x_0, y_0, z_0

d) On prend $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, calculer X_5 où X_5 désigne X_n pour n = 5.

****