L1 - OPTIQUE GEOMETRIQUE

Travaux Dirigés Série n° 1 (Corrigé)

Exercice 1

1) La vitesse de propagation dans le vide est $c_0 = 3.10^8$ m.s^{-1}.

La longueur d'onde est donnée par $\lambda = c_0 / v$; AN : $\lambda = 0,6.10^{-6}$ m

Cette onde appartient au spectre visible et est de couleur rouge.

2) Dans un milieu d'indice n = 2,5, la vitesse de propagation devient : $c = c_0 / n$;

AN : $c = 1,2.10^8$ m.s^{-1}. Mais sa fréquence v et donc sa couleur sont inchangées dans le milieu.

Par contre, sa longueur d'onde devient $\lambda_{mil} = cT = \frac{c}{v}$; AN : $\lambda_{mil} = 0,24$ μ m.

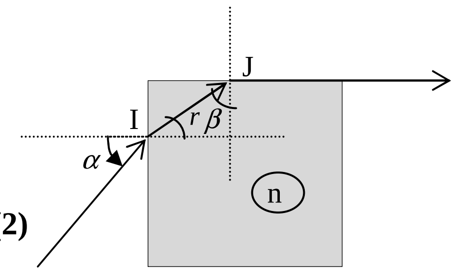
Exercice 2

En appliquant la formule $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$, on trouve $n(\lambda_v) = 1,3558$ et $n(\lambda_b) = 1,3659$.

L'écart relatif entre les valeurs de l'indice est donc :

$$\frac{n(\lambda_b) - n(\lambda_v)}{n(\lambda_v)} = \frac{\Delta n}{n(\lambda_v)} \approx \frac{\Delta n}{n(\lambda_b)} = 7,4.10^{-3}$$

Exercice 3



1) Indice du verre

La troisième loi de SNELL-DESCARTES permet d'écrire :

en I, on a : $\sin\alpha = n \sin r$ **(1)** et J, on a : $n \sin\beta = 1.\sin\frac{\pi}{2} = 1$ **(2)**

Puisque $\beta = \frac{\pi}{2} - r$, (2) devient : $n \sin(\frac{\pi}{2} - r) = 1 \Rightarrow \cos r = \frac{1}{n}$

D'où (1) $\sin\alpha = n \sin r = n\sqrt{1 - \cos^2 r} = n\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \sqrt{n^2 - 1} \Rightarrow n = \sqrt{1 + \sin^2\alpha}$; AN : $n = 1{,}19$

2) Que se passe-t-il pour $\alpha > 40°$ et pour $\alpha < 40°$?

Lorsque $\alpha > 40°$, r augmente et β diminue et est donc plus petit que l'angle de réfraction limite en J, donc le rayon émerge en J.

Lorsque $\alpha < 40°$, r diminue et β augmente et est plus grand que l'angle de réfraction limite en J, d'où il y a réflexion total en J.

Exercice 4

1) - Dans l'air, la vitesse de la lumière est : $c = c_0 = 3.10^8$ m.s^{-1} .
- Dans l'eau, la vitesse de la lumière est : $v_{eau} = c/n_1$; AN : $v_{eau} = 2,25.10^8$ m/s
- Dans le diamant, la vitesse de la lumière est : $v_{diamant} = c/n_2$; AN : $v_{diamant} = 1,24.10^8$ m/s

2) (Voir figure ci-dessous)

Au point I : Les propriétés des angles alternes internes montrent que l'angle d'incidence $i_1 = \hat{E} = 50°$.

L'angle de réfraction r_1 est tel que $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin r_1 \Rightarrow \sin r_1 = 0,421 \Rightarrow r_1 = 24,89°$

Au point J : Pour déterminer l'angle d'incidence i_2, on considère le triangle AIJ dans lequel :
$40+(90+r_1)+(90-i_2)=180 \Rightarrow i_2=64,89°$

L'angle de réflexion totale en J est : $\alpha=\arcsin(\frac{n}{n_2})=24,41°$.

$i_2>\alpha$: Il y a réflexion totale en J et $r_2=i_2=64,89°$

Au point K : L'angle d'incidence est $i_3=90-r_2 \Rightarrow i_3=25,11°$.

En K, l'angle de réflexion totale est $\alpha'=\arcsin(\frac{n_1}{n_2})=33,33°$. $i_3<\alpha'$: il y a réfraction en K et

$\sin r_3=\frac{n_2 \sin i_3}{n_1}=0,772 \Rightarrow r_3=50,54°$.

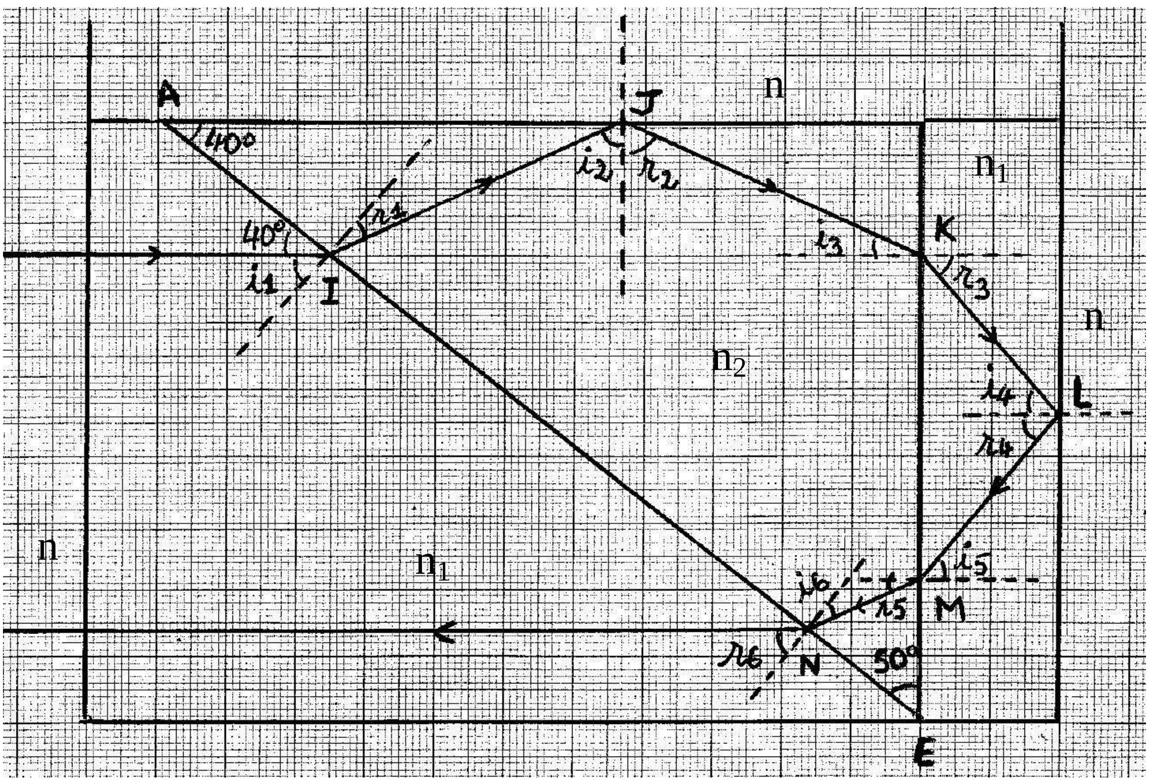
Au point L : L'angle d'incidence est $i_4=r_3=50,54°$.

En L, l'angle de réflexion totale est $\alpha"=\arcsin(\frac{n}{n_1})=48,75°$. $i_4>\alpha"$: il y a réflexion totale en L et

l'angle de réflexion est $r_4=i_4=50,54°$.

Au point M : L'angle d'incidence est $i_5=r_4=50,54°$.
En appliquant le principe du retour inverse de la lumière (cf. au point K), l'angle de réfraction en M est $r_5=i_3=25,11°$.

Au point N : Pour déterminer l'angle d'incidence i_6, on considère le triangle MNE dans lequel :
$50+(90-r_5)+(90-i_6)=180 \Rightarrow i_6=24,89°$
Selon toujours le principe du retour inverse de la lumière, il y a réfraction en N et $i_6=24,89°$



3) Le rayon ressort de la cuve d'eau par la face il est rentré, parallèlement au rayon incident avec une propagation en sens opposé.

Exercice 5

Pour qu'un rayon soit se propage dans cette fibre, il faut qu'il soit réfracté en I et en condition de réflexion totale en J. La première condition est réalisée car $n_1>1$ mais la deuxième impose en J que l'angle j soit supérieur à j_{lim} défini par $j_{\text{lim}} = \arcsin(\frac{n_2}{n_1}) = 60,07°$. Par ailleurs, on a toujours :

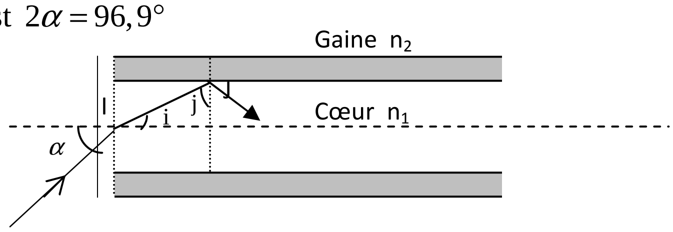
$i + j = 90$, Ainsi

$j \geq j_{\text{lim}} \Rightarrow 90° - i \geq 60,07 \Rightarrow i \leq 29,93° \Rightarrow \sin i \leq \sin 29.93 \Rightarrow n_1 \sin i \leq n_1 \sin 29.93$

La 3$^{\text{ème}}$ loi de Snell-Descartes donne $\sin\alpha = n_1 \sin i$, donc

$\sin\alpha \leq n_1 \sin 29.93 \Rightarrow \sin\alpha \leq 0,748 \Rightarrow \alpha \leq 48.45° \Rightarrow 2\alpha \leq 96,9°$.

L'ouverture numérique de cette fibre est $2\alpha = 96,9°$



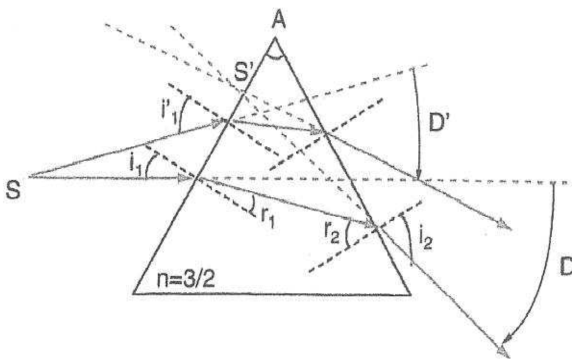
Exercice 6

Les formules du prisme donnent successivement :

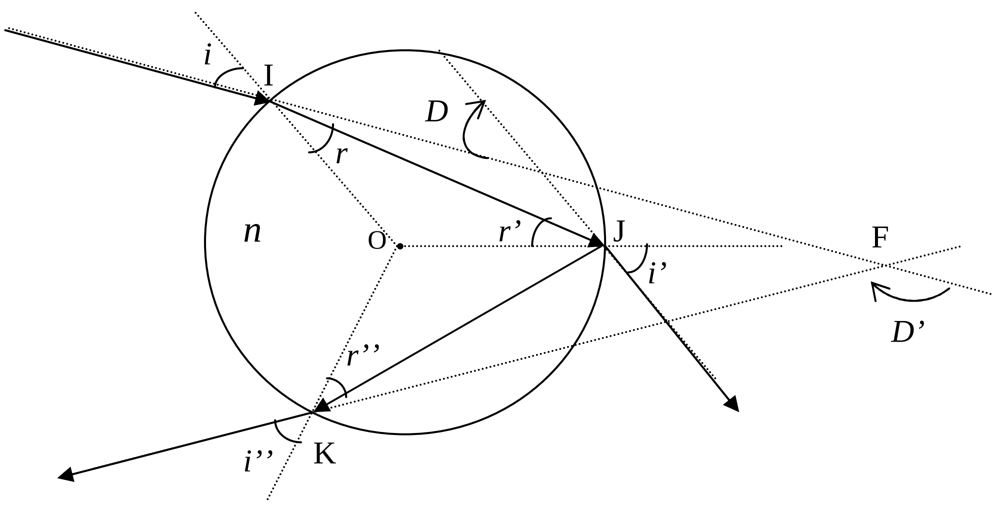
$i_1 = 30°$, $r_1 = 19,47°$, $r_2 = 40,53°$, $i_2 = 77,09°$ et $D = 47,09°$

$i'_2 = 45°$, $r'_1 = 28,12°$, $r'_2 = 31,88°$, $i'_2 = 52,38°$ et $D' = 37,38°$

Les deux angles de déviation D et D' étant orientés dans le sens des aiguilles d'une montre, ils sont négatifs. Pour un observateur qui regarde la lumière sortir du prisme, tout se passe comme si les deux rayons sortants étaient issus de la source S' située dans le prisme, sur leur prolongement (Figure 9.2). S' ici est une image virtuelle.



Exercice 7 (voir aussi cours : exercice d'application sur la goutte d'eau)



Exercice 7

a) Le rayon réfracté existe toujours en I puisque le rayon lumineux se propage vers un milieu plus réfringent.
En effet $\sin r = \frac{\sin i}{n}$, n étant supérieur à 1, r existe toujours.
Si $i = 90°$, on a $\sin r = \frac{1}{n} = 3/4 \Rightarrow \underline{r = 48,59°}$

b) i) Le triangle IOJ étant isocèle en O, on a $r' = r$
D'autre part on a $\sin i = n \sin r$ et $\sin i' = n \sin r$.
Si $r = r'$ alors $i' = i$. En somme on a :
$\underline{r' = r \quad \text{et } i' = i}$

ii) Expression de la déviation
$D = (i - r) + (i' - r') = (i' + i) - (r' + r)$;
comme $i' = i$ et $r' = r$; $\underline{D = 2(i - r)}$

iii). Le rayon lumineux se propageant vers un milieu plus refringent, $r < i \Rightarrow D > 0$ et croissante. Donc, le minimum de déviation est obtenu pour $i = r = 0$ et $D_m = 0$; le rayon incident traverse la goutte selon le diamètre.

iv) Si la goutte est éclairée par un faisceau de rayons parallèles, les differents rayons arrivant aux alentours du point J ne sont pas vus sous les mêmes incidences. On voit un halo de lumière, ce qui correspond à de la diffusion dans le brouillard.

V) Un halo est un phénomène optique qui se manifeste par un cercle ou taches de lumière apparaissant autour du soleil, la lune ou d'une source de lumière puissante comme certains lampadaires.

c) i) De la même façon que précédemment, le triangle OJK est isocèle : $r'' = j$ avec $j = (\widehat{JO, JK})$; or $j = r'$ (réflexion). On a donc $r'' = r' = r$ et il en résulte également que $i'' = i' = i$.

ii) La déviation $D' = D + \pi - 2r - (i' - r') + (i'' - r'')$

avec $i'' = i' = i$ et $r'' = r' = r$ on obtient $\underline{D' = \pi + 2i - 4r}$

iii) Le minimum de déviation est obtenu lorsque $dD' = 0$.

$dD' = 0 \Rightarrow 2di - 4dr = 0 \Rightarrow di = 2dr \Rightarrow \frac{di}{dr} = 2$ (3)

Par ailleurs $\sin i = n \sin r \Rightarrow di \cos i = n\, dr \cos r$.

Soit $\frac{di}{dr} = \frac{n \cos r}{\cos i}$ (4)

(3) et (4) $\Rightarrow 2 \cos i = n \cos r$ (5)

En reprenant $\sin i = n \sin r = n\sqrt{1 - \cos^2 r}$ et en remplaçant $\cos r$ par $\frac{2 \cos i}{n}$ (cf.(5)), on obtient

$$\sin i = n\sqrt{1 - \frac{4}{n^2}\cos^2 i} = n\sqrt{1 - \frac{4}{n^2}(1 - \sin^2 i)} \Rightarrow$$

$$\sin^2 i = n^2 - 4 + 4\sin^2 i \Rightarrow \boxed{\sin i = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}}$$

Expression de $\cos \frac{Dm}{2}$

Soit Dm la déviation au minimum de déviation

$D' = \pi + 2i - 4r \Rightarrow \frac{Dm}{2} = \frac{\pi}{2} + i - 2r$.

ou $\frac{Dm}{2} = \frac{\pi}{2} - (2r - i)$

$$\frac{D_m}{2} = \frac{\pi}{2} - (2r - i) \Rightarrow \cos\frac{D_m}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (2r - i)\right)$$

Or $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ donc

$\cos\frac{D_m}{2} = \sin(2r - i)$. Or $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\forall a, b$. On peut donc écrire

$$\cos\frac{D_m}{2} = \sin 2r \cos i - \cos 2r \sin i.$$

* On a $\sin 2r = 2\sin r \cos r$ avec $\sin r = \frac{\sin i}{n}$ et

$\cos r = \frac{2}{n}\cos i$ d'où $\sin 2r = \frac{4}{n^2}\sin i \cos i$

* On a aussi $\cos 2r = 1 - 2\sin^2 r$ (formules trigo)

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\cos\frac{D_m}{2} &= \frac{4}{n^2}\sin i \cos^2 i - \sin i\,(1 - 2\sin^2 r) \\
&= \frac{4}{n^2}\sin i\,(1 - \sin^2 i) - \sin i\left(1 - 2\frac{\sin^2 i}{n^2}\right) \\
&= \left(\frac{4}{n^2} - 1 - \frac{2}{n^2}\sin^2 i\right)\sin i \\
&= \left(\frac{4}{n^2} - 1 - \frac{2}{n^2}\left(\frac{4-n^2}{3}\right)\right)\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \\
&= \frac{4-n^2}{3n^2}\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \\
&= \sqrt{\frac{(4-n^2)^3}{3^3\, n^4}} \iff \boxed{\cos\frac{D_m}{2} = \sqrt{\frac{(4-n^2)^3}{27n^4}}}
\end{aligned}$$

iv) avec $n = 4/3$

* $\sin i_m = \sqrt{\frac{4-(4/3)^2}{3}} = \sqrt{\frac{20}{27}} = \frac{2}{3}\sqrt{5/3}$ $\qquad \underline{i_m = 59{,}39°}$

* $\sin r_m = \frac{\sin i_m}{n} = \frac{1}{2}\sqrt{5/3}$ $\qquad \underline{r_m = 40{,}20°}$

* $\cos\frac{D_m}{2} = \sqrt{\frac{(4-(4/3)^2)^3}{27\times\left(\frac{4}{3}\right)^4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{125}{243}}$

$\cos\frac{D_m}{2} \simeq 0{,}3586$ $\qquad \underline{D_m = 137{,}97°}$

Ce phenomène est celui de l'arc-en-ciel, dû à un ensemble de réflexions successives de rayons du soleil dans les gouttes d'eau.

d) Expression de $\frac{dD_m}{dn}$

$$\cos\frac{D_m}{2} = \sqrt{\frac{(4-n^2)^3}{27n^4}} \Rightarrow \frac{d}{dn}\left(\cos\frac{D_m}{2}\right) = \frac{d}{dn}\left(\sqrt{\frac{(4-n^2)^3}{27n^4}}\right) \quad (E)$$

* Pour calculer le deuxième membre de cette égalité, posons $f(n) = \frac{(4-n^2)^3}{27n^4}$. Il faut se rappeler que $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$. Déterminons donc $f'(n)$:

$$f'(n) = \frac{3(4-n^2)^2(-2n)(27n^4) - 4\times 27n^3(4-n^2)^3}{27^2\ n^8}$$

$$f'(n) = -\left[\frac{6n^2(4-n^2)^2+4(4-n^2)^3}{27\ n^5}\right]$$

$$f'(n) = -\left[\frac{2(n^2+8)(4-n^2)^2}{27\ n^5}\right]$$

$$\frac{d}{dn}\left(\sqrt{\frac{(4-n^2)^3}{27n^4}}\right) = \frac{-2\cdot(n^2+8)(4-n^2)^2}{2\times 27n^5} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{(4-n^2)^3}{27n^4}}}$$

$$\frac{d}{dn}\left(\sqrt{\frac{(4-n^2)^3}{27n^4}}\right) = -\frac{(n^2+8)}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{27n^4}} \quad (F)$$

* Le premier membre de l'égalité (E) donne

$$\frac{d}{dn}\left(\cos\frac{D_m}{2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{dD_m}{dn}\sin\left(\frac{D_m}{2}\right)$$

Exprimons $\sin\left(\frac{D_m}{2}\right)$ en fonction de n.

Comme on l'a fait pour $\cos\frac{D_m}{2}$;

$$\sin\left(\frac{D_m}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (2r - i)\right)$$
$$= \cos(2r - i)$$
$$= \cos 2r \cos i + \sin 2r \sin i \quad \text{avec}$$

$$\cos 2r = (1 - 2\sin^2 r) = \left(1 - 2\frac{\sin^2 i}{n^2}\right)$$

$$\sin 2r = \frac{4}{n^2}\sin i \cos i \,.$$

On a donc

$$\sin\left(\frac{D_m}{2}\right) = \left(1 - 2\frac{\sin^2 i}{n^2}\right)\cos i + \frac{4}{n^2}\sin^2 i \cos i$$
$$= \left(1 + \frac{2}{n^2}\sin^2 i\right)\cos i$$
$$= \left(1 + \frac{2}{n^2}\sin^2 i\right)\sqrt{1 - \sin^2 i}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{(4-n^2)}{3}}\left[1 + \frac{2}{n^2}\left(\frac{4-n^2}{3}\right)\right]$$
$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3n^2}\right)\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$$
$$= \frac{n^2+8}{3n^2}\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$$

$$\sin\left(\frac{D_m}{2}\right) = (n^2+8)\sqrt{\frac{n^2-1}{27n^4}}$$

D'où $$\frac{d}{dn}\left(\cos\frac{D_m}{2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{dD_m}{dn}\cdot(n^2+8)\sqrt{\frac{n^2-1}{27n^4}} \qquad (G)$$

En comparant (F) et (G), on tire l'expression

$$\boxed{\frac{dD_m}{dn} = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{n^2-1}}}$$

AN : $dn = 0{,}014$, $dD_m = 0{,}0355\ rd = 2{,}034°$