EXERCICES DE MATHÉMATIQUES

QUELQUES QUESTIONS DE Mathématiques résolues

Juin 2022

PAR GILDAS MBA OBIANG

Espace préhilbertien : théorème de la projection orthogonal

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

1. On pose $F = \mathbb{R}_2[X]$ et on considère la base $B = \{t \mapsto 1, t \mapsto \sqrt{3}(2t-1), t \mapsto \sqrt{5}(6t^2-6t+1)\}$ Justifier soigneusement que B est une base orthonormé de F.
2. Déterminer la projection orthogonale de $t \mapsto t^3$ sur F.
3. Déduire

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$$

Solution de l'exercice. On considère l'espace vectoriel $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

1. Pour simplifier les calculs on pose $f_1 : t \mapsto 1$, $f_2 : t \mapsto \sqrt{3}(2t-1)$ et $f_3 : t \mapsto \sqrt{5}(6t^2-6t+1)$ D'une part, on a successivement :

$$\begin{aligned}
\langle f_1, f_1\rangle = \|f_1\|^2 &= \int_0^1 dt = [t]_{t=0}^{t=1} = 1-0 = 1\\
\langle f_2, f_2\rangle = \|f_2\|^2 &= 3\int_0^1 (2t-1)^2 dt = 3\left[\frac{(2t-1)^3}{6}\right]_{t=0}^{t=1} = 3\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) = \frac{6}{6} = 1\\
\langle f_3, f_3\rangle = \|f_3\|^2 &= 5\int_0^1 (6t^2-6t+1)^2 dt \quad (*)
\end{aligned}$$

Calculons $(*)$
En remarquant que $(6t^2-6t+1)^2 = 12(3t^4-6t^3+4t^2-t)+1$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle f_3, f_3\rangle = \|f_3\|^2 &= 5\int_0^1 [12(3t^4-6t^3+4t^2-t)+1]dt\\
\langle f_3, f_3\rangle = \|f_3\|^2 &= 5\left(\left[12\left(\frac{3}{5}t^5 - \frac{3}{2}t^4 + \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right) + t\right]_{t=0}^{t=1}\right)\\
\langle f_3, f_3\rangle = \|f_3\|^2 &= 60\left(\frac{3}{5} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) + 5 = 60 \times \left(-\frac{1}{15}\right) + 5 = -4+5 = 1
\end{aligned}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}
\langle f_1, f_2\rangle &= \int_0^1 \sqrt{3}(2t-1)dt = \sqrt{3}[t^2-t]_{t=0}^{t=1} = 0\\
\langle f_1, f_3\rangle &= \int_0^1 \sqrt{5}(6t^2-6t+1)dt = \sqrt{5}[2t^3-3t^2+t]_{t=0}^{t=1} = 0\\
\langle f_2, f_3\rangle &= \int_0^1 \sqrt{15}(2t-1)(6t^2-6t+1)dt\\
\langle f_2, f_3\rangle &= \sqrt{15}\int_0^1 (12t^3-18t^2+8t-1)dt = \sqrt{15}[3t^4-6t^3+4t^2-t]_{t=0}^{t=1}\\
\langle f_2, f_3\rangle &= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que B est une base orthonormé de F.

2. Notons $P:\ t\mapsto t^3$ et P_0 le projété orthogonal de P sur F.

$$\begin{aligned}
P_0 &= \sum_{k=1}^{3}\langle P, f_k\rangle f_k = \langle P, f_1\rangle f_1 + \langle P, f_2\rangle f_2 + \langle P, f_3\rangle f_3\\
P_0 &= \int_0^1 t^3 dt + 3(2t-1)\int_0^1 t^3(2t-1)dt + 5(6t^2-6t+1)\int_0^1 t^3(6t^2-6t+1)dt
\end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}
\langle P, f_1\rangle &= \int_0^1 t^3 dt = \left[\frac{1}{4}t^4\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{4}\\
\langle P, f_2\rangle &= \int_0^1 t^3(2t-1)dt = \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{4}t^4\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}\\
\langle P, f_3\rangle &= \int_0^1 t^3(6t^2-6t+1)dt = \left[t^6 - \frac{6}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4\right]_{t=0}^{t=1} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

donc il s'ensuit :

$$P_0 = \frac{1}{4} + \frac{9}{20}(2t-1) + \frac{1}{4}(6t^2-6t+1) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{1}{20}$$

3. On remarque que :

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_0^1 (t^3-at^2-bt-c)^2 dt = \inf_{Q\in\mathbb{R}_2[X]}\|P-Q\|^2$$

On en déduit que :

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_0^1 (t^3-at^2-bt-c)^2 dt = \inf_{Q\in\mathbb{R}_2[X]}\|P-Q\|^2 = \|P-P_0\|^2$$

Or, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\|P-P_0\|^2 = \|P\|^2 - \|P_0\|^2$$

de plus, on a d'une part :

$$\|P\|^2 = \int_0^1 t^6 dt = \left[\frac{t^7}{7}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{7}$$

et d'autre part :

$$\|P_0\|^2 = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{1}{20}\right)^2 dt = \frac{57}{400}$$

Ainsi, on obtient :

$$\|P-P_0\|^2 = \frac{1}{7} - \frac{57}{400} = \frac{1}{2800}$$

c'est-à-dire que :

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_0^1 (t^3-at^2-bt-c)^2dt=\frac{1}{2800} \qquad \square$$

Famille libre- famille liée

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions réelles définies sur $]-1;1[$. On considère deux vecteurs f_1 et $f_2\in E$ tels que :

$$\forall x\in\,]-1;1[,\quad f_1(x)=\frac{2}{x+1},\quad f_2(x)=\frac{4}{x-1}$$

1. Montrer que les vecteurs $f_1,\ f_2$ sont libres dans E.
2. Montrer que le vecteur $g\in E$ définie par $g(x)=\dfrac{2}{5(x^2-1)}$ est un élément du sous espace vectoriel $\langle f_1;\,f_2\rangle$ de E engendré par $f_1,\ f_2$.
3. Le vecteur $h\in E$ tel que $h(x)=3x^2$ est-il un élément de $\langle f_1;\,f_2\rangle$? Justifier votre réponse.

Solution. Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions réelles définies sur $]-1;1[$ et

1. Supposons qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f_1=\lambda f_2$. On a alors :

   $$\forall x\in\,]-1;1[,\quad f_1(x)=\frac{2}{x+1}=\lambda f_2(x)=\frac{4\lambda}{x-1}\qquad(\star)$$

   En particulier d'après $(\star)$ on a :

   $$\frac{2}{0+1}=\frac{4\lambda}{0-1}\quad\text{et}\quad\frac{2}{\frac{1}{2}+1}=\frac{4\lambda}{\frac{1}{2}-1}$$

   c'est-à-dire que $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ et $\lambda=-\dfrac{1}{6}$ absurde !
   Conclusion : la famille $\{f_1,\,f_2\}$ elle est libre. $\square$

2. $g\in\langle f_1;\,f_2\rangle\Leftrightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\forall x\in\,]-1;1[,\ \dfrac{2}{5(x^2-1)}=\dfrac{2a}{x+1}+\dfrac{4b}{x-1}$. Or on a :

   $$\forall x\in\,]-1;1[,\quad \frac{2a}{x+1}+\frac{4b}{x-1}=\frac{(2a+4b)x+4b-2a}{x^2-1}$$

   d'où $\forall x\in\,]-1;1[,\ \dfrac{2}{5(x^2-1)}=\dfrac{2a}{x+1}+\dfrac{4b}{x-1}$ implique que :

   $$\begin{cases}2a+4b=0\\ -2a+4b=\dfrac{2}{5}\end{cases}$$

   On ce système est un système de cram de déterminant $16\neq 0$ donc il admet deux solutions distincts a et b telles que $a=\dfrac{\begin{vmatrix}0 & 4\\ \frac{2}{5} & 4\end{vmatrix}}{16}=\dfrac{-\frac{8}{5}}{16}=-\dfrac{1}{10}$et $b=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 0\\ -2 & \frac{2}{5}\end{vmatrix}}{16}=\dfrac{\frac{4}{5}}{16}=\dfrac{1}{20}$
   Ainsi, on en déduit que $\forall x\in\,]-1;1[,\ g(x)=-\dfrac{1}{10}f_1(x)+\dfrac{1}{20}f_2(x)$ ce qui traduit parfaitement que $g\in\langle f_1;\,f_2\rangle$. $\square$

3. Le vecteur $h\in E$ tel que $h(x)=3x^2$ n'est pas un élément de $\langle f_1;\,f_2\rangle$. En effet, d'après la question précedente on a vu que $\langle f_1;\,f_2\rangle=\left\{\frac{(2a+4b)x+4b-2a}{x^2-1};\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ et comme les polyômes $(x^2-1)h(x)$ et $(2a+4b)x+4b-2a$ pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ n'ont pas le même degré, on en déduit que $h(x)$ ne peut pas s'écrire sous la forme des éléments de $\langle f_1;\,f_2\rangle$. $\square$

Intégral double : Théorème de Fubini

Exercice 3.

Partie I : Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leqslant x\leqslant 1-y^2 \text{ et } 0\leqslant y\leqslant 2\}$.

1. Représenter graphiquement D.
2. Calculer l'aire de D en unité d'aire.
3. Calculer $\iint_D xy\,dx\,dy$

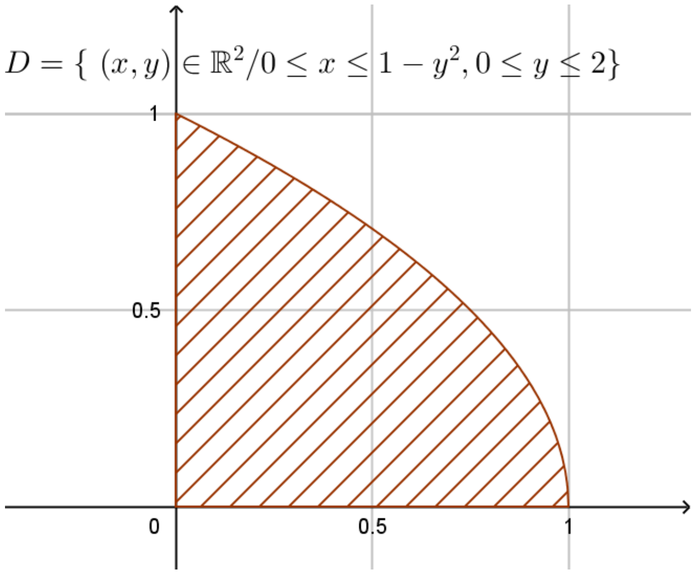
Partie II : Soit $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leqslant x\leqslant \sin(y) \text{ et } 0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{4}\right\}$.

1. Représenter graphiquement S.
2. Calculer l'aire de S en unité d'aire.
3. Calculer $\iint_S x\cos(y)\,dx\,dy$

Solution.

Partie I : Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leqslant x\leqslant 1-y^2 \text{ et } 0\leqslant y\leqslant 2\}$.

1. D est le domaine du plan contenu entre les graphes des fonctions $u : x\mapsto 0$, $v : x\mapsto 1-x^2$ et les droites horizontales d'équation respective $y=0$ et $y=2$. On en déduit la présentation graphique suivante :



Représentation graphique de D.

2. On a

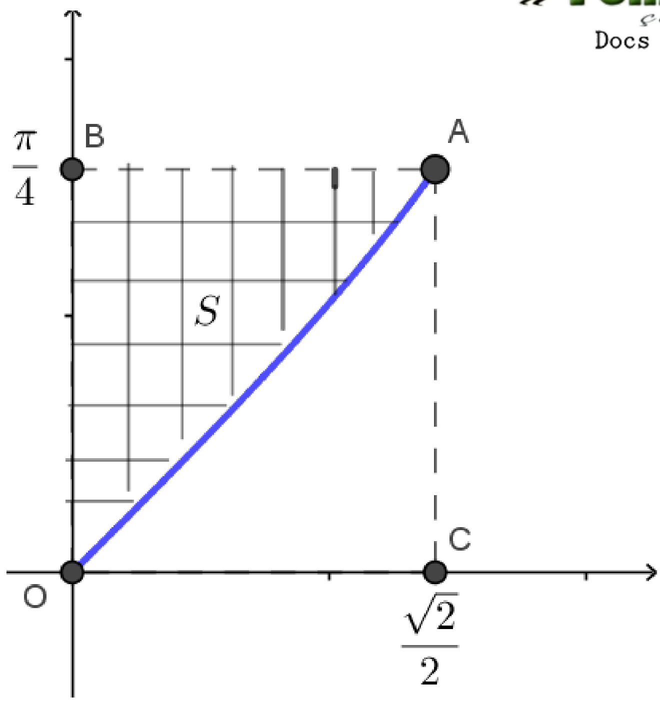
$$\text{Aire}(D) = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\mathfrak{u.a}$$

3. On a :

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^{1-y^2} xy\,dx\,dy = \int_0^2\left(\left[\frac{x^2y}{2}\right]_0^{1-y^2}\right)dy$$
$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^2 \frac{y(1-y^2)^2}{2}dy = \left[-\frac{1}{12}(1-y^2)^3\right]_0^2 = \frac{27}{12}+\frac{1}{12}=\frac{28}{12}=\frac{7}{3}$$

Partie II : Soit $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leqslant x\leqslant\sin(y)\ \text{ et }\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$

1. S est le domaine du plan contenu entre les graphes des fonctions $u : x\mapsto 0$, $v : x\mapsto\sin(x)$ et les droites horizontales d'équation respective $y=0$ et $y=\frac{\pi}{4}$. On en déduit la présentation graphique suivante :



Représentation graphique de S.

Figure.

2. Soit A l'aire du domaine S en unité d'aire. On a

$$A = \text{Aire(ABOC)}-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\arcsin(x)dx$$

Par intégration par parties, en posant $u'=1$ et $v=\arcsin(x)$ on a :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\arcsin(x)dx = [x\arcsin(x)]_0^1-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\left[x\arcsin(x)-\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\arcsin(x)dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

ainsi, on en déduit que $A=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}-\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$ c'est-à-dire $A=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathfrak{u.a}$

3. On a :

$$\iint_S x\cos(y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sin(y)}x\cos(y)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\left[\frac{x^2\cos(y)}{2}\right]_0^{\sin(y)}\right)dy$$

$$\iint_S x\cos(y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2(y)\cos(y)}{2}dy=\left[\frac{\sin^3(y)}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{6}=\frac{\sqrt{2}}{24}$$

Sous-groupe additif de $\mathbb{R}$: Topologie de $\mathbb{R}$

Exercice 4. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
Démontrer G est soit dense dans $\mathbb{R}$ soit de la formé $a\mathbb{Z}$ avec $a \geqslant 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

Solution. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

Si G est le groupe trivial alors il n'y a rien à démontrer. On suppose $G \neq \{0\}$.

Considérons l'ensemble $G_+ = G \cap \mathbb{R}_+ =: \{x \geqslant 0, x \in G\}$. Il est clair que $G \cap \mathbb{R}_+ \neq \varnothing$ et $G \cap \mathbb{R}_+$ est une partie de $\mathbb{R}$ minorée. Soit alors $a = \mathrm{infG} \cap \mathbb{R}_+ \geqslant 0$. Ainsi, on a deux cas :

- Cas $a = 0$. Montrons que G est dense dans $\mathbb{R}$.

  Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g_\varepsilon \in G$ tel que $0 < g_\varepsilon < \varepsilon$. Notons $n = E\left(\frac{x}{g_\varepsilon}\right)$. On a

  $$n \leqslant \frac{x}{g_\varepsilon} < n + 1$$

  par suite, $n g_\varepsilon \leqslant x < g_\varepsilon n + g_\varepsilon$ c'est-à-dire $0 \leqslant x - g_\varepsilon n < \varepsilon$. Or, G est un groupe donc $g_\varepsilon n$ est un élément de G d'où, on a montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y = n g_\varepsilon \in G$ tel que $|x - y| < \varepsilon$.

  Conclusion : G est dense dans $\mathbb{R}$.

- Cas $a > 0$. Montrons que G est de la forme $a\mathbb{Z}$.

  Montrons d'abord que $\boldsymbol{a \in G}$.

  Par définition de a, il existe une suite $(g_n)_n$ d'éléments de G converge vers a. Cette suite est une suite de cauchy dans $\mathbb{R}$, ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, n \in \mathbb{N}$, dès que $p \geqslant N$, $n \geqslant N$ on a $0 \leqslant |q_n - q_p| < a$ mais puisque $|q_n - q_p| \in G$ on a alors $q_n = q_p$ ce qui nous permet d'affirmer qu'il existe $g_N \in G$ tel que $a = g_N$ et de ce fait $a \in G$.

  Montrons que $\boldsymbol{G}$ est de la forme $\boldsymbol{a\mathbb{Z}}$..

  $a \in G$ et $(G, +)$ est un groupe implique que $a\mathbb{Z} \subset G$.

  Soit $g \in G$. En posant $n = E\left(\frac{g}{a}\right)$. On a :

  $$na \leqslant g < an + a$$

  $0 \leqslant g - an < a$. Or, G est un groupe donc na est un élément de G ainsi, on en déduit que $g - na = 0$ et donc $g = na \in a\mathbb{Z}$.

  Conclusion : G est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$

Matrice diagonalisable

Exercice 5. Soit A une matrice de taille $n \geqslant 1$ à coefficients réels telle que $A^3 = A^t A$.
Démontrer que A est $\mathbb{C}$-diagonalisable.

Solution. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ $(n > 0)$ telle que $A^3 = A^t A$.

Par les propriétés de la trace on en déduit que ${}^t(A^3) = {}^t(A^t A) = A^t A = A^3$ par suite, A^3 est une matrice symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans une base orthonormale ce qui est équivalent à dire, qu'il existe P polynôme à coefficients réelles scindés à racines simples telle que $P(A^3) = 0$. On pose alors :

$$P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A^3)} (X - \lambda) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$$

avec pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le polynôme $z^3 - a$ est scindé et racinces simples dans $\mathbb{C}$ et on a :

$$z^3 - a = 0 \Longleftrightarrow (z - \sqrt[3]{a})(z - \sqrt[3]{a}\,j)(z - \sqrt[3]{a}\,j^2) = 0$$

où $j = \exp\left(\frac{2\pi}{3}i\right)$. Ainsi, le polynôme $Q = \prod_{k=1}^{n} (X^3 - \lambda_k) = \prod_{k=1}^{n} \left(X - \sqrt[3]{\lambda_k}\right)\left(X - \sqrt[3]{\lambda_k}\,j\right)\left(X - \sqrt[3]{\lambda_k}\,j^2\right)$ est scindé dans $\mathbb{C}$ et à racines simples. De plus, $Q(A) = 0$. De ce fait, on a montré qu'il existe un polynôme scindé à racines simples annulateur de A et à coefficients dans $\mathbb{C}$ du coup A est $\mathbb{C}$-diagonalisable.

Caractérisation des sous-groupe d'un groupe cyclique fini

Exercice 6. Soit $G = \langle x \rangle$ un sous-groupe cyclique d'ordre n et d un diviseur de n. Démontrer qu'il existe un unique sous-groupe de G d'ordre d.

Solution. Soit H un sous-groupe de G.

- **Première étape : H est cyclique.**

  Si $H = \{e\}$ alors H est cyclique.

  On suppose que H n'est pas le groupe trivial. Soit $\mathcal{N} = \{k \in \mathbb{N}^*, x^k \in H\}$.

  Puisque H est un sous-groupe de G, on en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^k \in H$ ainsi, $\mathcal{N}$ est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide donc elle admet un plus petit élément $n_0 = \min \mathcal{N}$. De toute évidence, on a $\langle x^{n_0} \rangle \subset H$. Soit $h \in H$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $h = x^k$. En effectuant la division euclidienne de k par n_0, il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que $k = n_0\, q + r$ avec $0 \leqslant r < n_0$ mais ona $x^r = x^k \times x^{-n_0 q} \in H$ d'où $x^r \in H$ et $0 \leqslant r < n_0$ par suite $r = 0$ c'est-à-dire $x^k = x^{n_0 q} \in \langle x^{n_0} \rangle$. On vient de montrer que $H = \langle x^{n_0} \rangle$ ce qui permet de conclure que H est cyclique.

- **Deuxième étape : G admet un unique sous-groupe d'ordre d.**

  Lemme. *Soit G un groupe fini et $x \in G$ d'ordre n. On a $n = \mathrm{card}(\langle x \rangle)$.*

  Démonstration. *Soit $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \langle x \rangle$, $k \mapsto x^k$.*

  φ est un morphisque de groupe surjectif par construction. On a $\langle x \rangle = \varphi(\mathbb{Z}) = \{x^k, k \in \mathbb{Z}\}$. Soit $h \in \langle x \rangle$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $h = x^k$. En effectuant la division euclidienne de k par n il existe, un unique couple d'entiers (q, r) tel que $k = nq + r$ avec $0 \leqslant r < n$ donc $x^r = x^k \in H$ par suite, $\langle x \rangle = \varphi(\mathbb{Z}) = \{x^k, k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

  Supposons qu'il existe $k, k' \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x^k = x^{k'}$. On a

  $$x^{k-k'} = e \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant k - k' < n$$

  ainsi, on en déduit que $k = k'$ par suite, $\mathrm{card}(\langle x \rangle) = \mathrm{card}(\{x^k, k \in [\![0, n-1]\!]\}) = n$

  $\square$

  Soit $H = \left\langle x^{\frac{n}{d}} \right\rangle$. Il est clair que H est un groupe de G d'ordre d.

  Montrons que c'est le seul.

  Supposons qu'il existe $H' = \langle x^k \rangle$ un sous-groupe de G d'ordre d. On a $dk \in n\mathbb{Z}$ par suite on a $k \in \frac{n}{d}\mathbb{Z}$ c'est-à-dire $H' \subset H$. Or, de plus, $\mathrm{card}(H) = \mathrm{card}(H') = d$ de ce fait, $H = H'$.

Matrice triangulaire supérieure nilpotente

Exercice 6. Soit $n > 0$ et $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure ayant uniquement des zéros sur la diagonale. Montrer que $A^n = 0$.

Solution. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f l'application linéaire associé à A dans la base B. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$f(e_1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2, n]\!], f(e_k) \in \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$$

par suite, $f^2(e_2) = 0$, $\forall k \in [\![3, n]\!]$, $f^2(e_k) \in \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{k-2})$. Par récurrence on a :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], f^p(e_k) = 0, \ \ \forall k \in [\![p+1, n]\!], f^p(e_k) \in \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{k-p})$$

ainsi, on en déduit $f^n(e_k) = 0$ $\forall k \in [\![1, n]\!]$ c'est-à-dire $A^n = 0$.