MATHEMATIQUES

Coef : 4
Durée : 4 h
Série : D

Ce sujet comporte (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3. Le candidat traitera tous les exercices proposes. Toute calculatrice scientifique est acceptée sauf les calculettes programmables. Aucun document ou support n'est autorisé. Le candidat recevra une feuille de papier millimétré pour les constructions.

EXERCICE 1 : 2 points

Pour chacune des propositions suivantes, indique le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Propositions	Réponses	
1	Soit (U_n) une suite numérique telle que : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{1+U_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. On admet que cette suite est monotone. La limite de (U_n) est égale à	A	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
		B	1
		C	$+\infty$
2	La fonction $x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x+3}$ admet pour primitive sur l'intervalle K =]1 ;+∞[la fonction	A	$x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+3}$
		B	$x \mapsto \ln(x^2+x+3)$
		C	$x \mapsto x^2+x+3$
3	Soit A et B deux événements quelconques de probabilités respectives P(A) et P(B) tels que : P($\bar{A}$) = 0,2 ; P(B) = 0,5 et P(A∩B) = 0,4 alors la probabilité conditionnelle de B sachant A est :	A	$P_A(B) = 0{,}8$
		B	$P_A(B) = 0{,}5$
		C	$P_A(B) = 0{,}10$
4	La dérivée troisième sur l'intervalle IR de la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est la fonction	A	$x \mapsto 8sin(2x)$
		B	$x \mapsto 4cos(2x)$
		C	$x \mapsto 4sin(2x)\cos(2x)$

EXERCICE 2 : 2 points

Fais correspondre pour chaque lettre du texte lacunaire, l'un des mots ou groupe de mots proposés entre guillemets. Par exemple : **m – croissante**.

« géométrique » ; « convergente » ; « point d'inflexion » ; « arithmétique » ; « une solution unique » ; « divergente » ; « plusieurs solutions » ; « tangente ».

Si la dérivée seconde d'une fonction s'annule en changeant de signe alors cette fonction admet un ……(a)…….telle qu'en ce point la courbe traverse la …..(b)………

Si une fonction f est continue et non monotone sur un intervalle donné telle que la courbe coupe plusieurs fois l'axe des abscisses alors l'équation $f(x) = 0$ admet…..(c)……, cependant si elle est continue et monotone et que sa courbe coupe l'axe (OI) alors l'équation $f(x) = 0$ admet……..(d)…….

Toute suite…….(e)……..de raison non nulle est nécessairement …….(f)…….. et toute suite ……..(g)….. de raison non nulle et comprise en -1 et 1 est nécessairement……..(h)……….

EXERCICE 3 : 3,5 points

Soit la suite (U_n) définie pour tout entier naturel par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1 \end{cases}$

1. a) Calcule les valeurs des termes U_1 , U_2 , U_3 et U_4.
   b) Etablis une conjecture sur le sens de variation de la suite (U_n).

2. a) Démontre par récurrence que la suite est majorée par $\frac{5}{2}$.
   b) Montre que pour tout entier naturel, $U_{n+1} - U_n = -\frac{2}{5}(U_n - \frac{5}{2})$ et en déduire le sens de variation de la suite (U_n).
   c) Justifie que la suite (U_n) est convergente.
   d) Détermine la limite de la suite (U_n).

3. Soit la suite définie par $W_n = U_n - \frac{5}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.
   a) Démontre que la suite (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprime W_n en fonction de n .
   c) Détermine la limite de (W_n) puis précise sa convergence.

4. On pose : $S_n = W_0 + W_1 + \cdots + W_n$
   a) Exprime S_n en fonction de n.
   b) Calcule S_{2024}

EXERCICE 4 : 3,5 points

Pendant la journée mondiale du diabète, une ONG en partenariat avec un laboratoire, effectue une mission sanitaire qui consiste à tester un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.

Pour cela, 60 % des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.

- Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8 ;
- On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90 % des personnes ayant reçu une substance neutre.

On note les événements suivants :

M : « l'individu choisi a pris le médicament » et $\overline{M}$ son contraire.

B : « L'individu choisi a subi une baisse de son taux de glycémie. » et $\overline{B}$ son contraire.

1. Dresse un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Démontre que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.
3. Calcule la probabilité qu'un individu ait pris le médicament sachant qu'on a constaté une baisse de son taux de glycémie.
4. On contrôle 5 individus au hasard et on s'intéresse à la variable X qui désigne le nombre de personnes ayant une baisse du taux de glycémie.
   a) Justifie que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b) Calcule la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé.
5. On veut élargir le test sur un certain nombre d'individus pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieure à 0,98. Détermine le nombre n d'individus à partir duquel les statistiques prévisionnelles seront atteintes.

EXERCICE 5 : 5 points

Partie A :

Soit la fonction g définie et dérivable sur l'intervalle]0 ; + ∞[par $g(x) = 1 + xlnx$

1.a) Justifie que : $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[$, $g'(x) = 1 + lnx$.

b) Etudie les variations de g puis dresse son tableau de variation.

c) Déduis-en que : $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[$, $g(x) > 0$.

PARTIE B :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ;+∞[par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall\, x \in\,]0\,;+\infty[, f(x) = \frac{x}{1+xlnx} \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique 4 cm).

1.a) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b) Démontre qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est (T) : $y = x$.

c) Démontre que (C) est au-dessus de (T) sur l'intervalle]0;1[et en dessous de (T) sur l'intervalle]1 ;+∞[.

2. Démontre que la droite (OI) est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

3. On admet que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

a) Justifie que : $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[, f'(x) = \frac{1-x}{(1+xlnx)^2}$.

b) Déduis-en les variations de f puis dresse son tableau de variation.

4. Soit h la restriction de f sur l'intervalle]0;1[. On note (C_h) sa courbe représentative, h^{-1} est la bijection réciproque de h de courbe $(C_{h^{-1}})$.

a) Justifie que h est une bijection de]0;1[sur un intervalle K à préciser.

b) Dresse le tableau de variation de h^{-1}.

4. Construis la tangente (T) et les courbes (C), (C_h) et $(C_{h^{-1}})$ dans le plan muni du repère (O, I, J). (en couleurs différentes)

EXERCICE 6 : 4 points

Une pandémie s'est déclarée dans un pays. Les chercheurs réunis en urgence ont pu modéliser l'évolution de la maladie par la fonction f définie sur IN par $f(n) = 120n + 1$.

$f(0)$ désigne le nombre de cas déclarés le jour de l'annonce de la découverte de la maladie. Donc pour $n > 0$, $f(n)$ désigne le nombre de nouveaux cas déclarés au $n^{ième}$ jour après la déclaration du premier cas.

Le ministre de la santé annonce lors d'un point de presse que le gouvernement instaurera un couvre-feu si le nombre total de cas dans le pays dépasse 10000.

Après ce discours, ta camarade de classe, Amani affirme que la fonction modélisée par les chercheurs est une suite arithmétique et que si la tendance se poursuit, le couvre-feu interviendra 10 jours après la déclaration du premier cas.

A l'aide de tes connaissances mathématiques, donne une valeur de vérité en infirmant ou confirmant chacun des propos de Amani.