CARGO

3^e

Collection de Mathématiques

Préparation au **BEPC**

hachette
LIVRE INTERNATIONAL

CARGO

Collection de Mathématiques

3e

MEZUI M'BANGOUET
David Stone
1er Prix meilleure élève 4e LLO
Année 2018 - 2019

Famille MEZUI M'BANGOUET

hachette
LIVRE INTERNATIONAL

Avant-Propos

Vous avez entre les mains un livre de mathématiques destiné aux élèves des classes de troisième des lycées et collèges. Son contenu est conforme au programme de mathématiques en vigueur dans plusieurs pays du continent ayant le français comme langue d'enseignement.

L'enseignement des mathématiques a connu tout au long des dix dernières années une évolution remarquable. Son appropriation complète par des enseignantes et des enseignants africains s'est accompagnée d'une forte démographie scolaire, rendant de plus en plus nécessaire une **pédagogie centrée sur l'apprenant** et basée sur **une approche par compétences.**

C'est tout naturellement sur cette **approche par compétences** qu'est construit ce manuel.

Réparti en quinze chapitres, son contenu permet d'acquérir les deux compétences de base de l'enseignement des mathématiques au collège, à savoir :

– Résoudre des problèmes issus de la vie courante, nécessitant l'utilisation des connaissances sur les nombres et leurs opérations.

– Résoudre des problèmes (de la vie courante, quand c'est possible) impliquant la construction et la reproduction d'éléments de configurations géométriques (dans le plan ou dans l'espace) et faisant intervenir des relations métriques et/ou des raisonnements déductifs.

Chaque chapitre comporte les articulations suivantes :

- une situation permettant une entrée dans l'objet des savoirs à acquérir (**Pour démarrer**) ;
- une gamme d'activités d'approche des savoirs à acquérir permettant à l'élève de construire lesdits savoirs (**Activités de découverte**) ;
- une institutionnalisation des savoirs construits sous la forme d'un **Cours** constituant la trace écrite de la leçon ;
- des **Méthodes et savoir-faire** à acquérir pour résoudre les exercices ;
- de nombreux exercices répartis entre différentes rubriques (**Activités d'application**, **Exercices d'approfondissement**) pour permettre de mobiliser et de réinvestir les savoirs acquis ;
- la rubrique **Bien comprendre, mieux rédiger** est une réponse au problème de la spécificité du langage mathématique, source de nombreux échecs chez nos élèves dans cette discipline ;
- des exercices issus des épreuves du BEPC afin de préparer les élèves à l'examen (**S'entraîner au BEPC**) (en fin de manuel, deux sujets complets et corrigés sont également proposés) ;
- toujours dans le sens de l'innovation, les **Activités d'intégration** présentent des problèmes de la vie courante, riches et motivants, dont la résolution permet **d'argumenter, de penser de façon autonome, et de communiquer** en langage mathématique.

Par sa présentation innovante et attractive pour les élèves comme pour les enseignants, ce nouvel outil devrait jouer pleinement son rôle de facilitateur de l'apprentissage des mathématiques dans les salles de classe.

Maquette de couverture : Marse
Maquette intérieure : ADN
Recherche iconographique : Brigitte Hammond
Mise en pages et schémas : Marse
Illustrations intérieures : Marse / Jean-Louis Goussé, sauf garçon et fille des bulles conseils de Florence Quintin

ISBN : 978.2.7531.0468.6

Sommaire

Compétences de base 1

COMPÉTENCES DE BASE 2

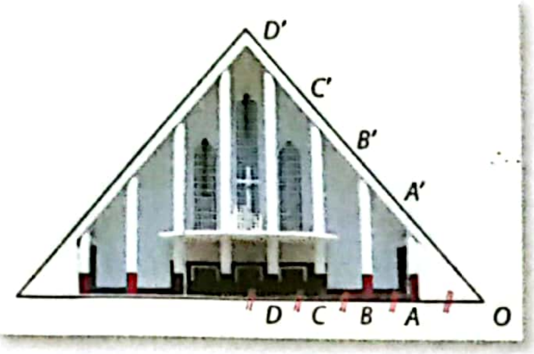
Pour un bon équilibre des apprentissages,
il est conseillé d'alterner un chapitre de géométrie et un chapitre de numération.

1 Les propriétés de Thalès

Pour démarrer

La cathédrale de Yaoundé

Nufi souhaite connaître la hauteur approximative de la cathédrale de Yaoundé. Il a schématisé la situation à partir de la photo.



1 a. Reproduis ce schéma à main levée.
b. Nufi a mesuré la hauteur du premier pilier, schématisé par [AA'], celui-ci mesure 5,6 m. Calcule la hauteur du deuxième pilier. (Pense au théorème des milieux.)

2 a. Calcule la hauteur du quatrième pilier.
b. Justifie que le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité. Précise son coefficient de proportionnalité.

OB	OB'	BB'	OD	OD'	DD'
OA	OA'	AA'	OB	OB'	BB'

c. Vérifie que $DD' = 4 \times AA'$.

3 Le faîtage (c'est-à-dire le point le plus haut du toit) est situé sur l'axe de symétrie de la façade. Calcule la hauteur de la cathédrale.

La cathédrale Notre-Dame des Victoires de Yaoundé fut construite en 1952.

Savoir-faire

À la fin de ce chapitre, tu sauras :
- reconnaître une figure en configuration de Thalès ;
- calculer une longueur grâce aux propriétés de Thalès ;
- étudier le parallélisme ;
- partager un segment selon un rapport donné.

1 La propriété de Thalès dans les triangles › Cours 1a

Philosophe et savant, Thalès de Milet est l'un des « sept sages » de la Grèce Antique.

1 Conjecture

a. Trace un triangle ABB' sur ton cahier. Place un point C sur $[AB]$ et note C' le point d'intersection de $[AB']$ et de la parallèle à (BB') passant par C.

b. Utilise ta règle graduée pour compléter le tableau. Arrondis les résultats à 0,1 près.

AB	AC	AB'	AC'	BB'	CC'	$\frac{AC}{AB}$	$\frac{AC'}{AB'}$	$\frac{CC'}{BB'}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…

c. Compare tes résultats avec ceux d'un camarade. Que remarques-tu ?

2 Démonstration

On cherche à démontrer que, dans la situation précédente, $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$.

a. Trace la hauteur issue de B dans le triangle BCC' et la hauteur issue de B' dans le triangle $B'CC'$. Explique pourquoi : aire (BCC') = aire $(B'CC')$.

b. Déduis-en que : aire (ABC') = aire $(AB'C)$.

c. Utilise la hauteur issue de C' dans les triangles ABC' et ACC' pour montrer que : $\frac{AC}{AB} = \frac{\text{aire}\,(ACC')}{\text{aire}\,(ABC')}$.

d. Utilise un raisonnement analogue pour montrer que : $\frac{AC'}{AB'} = \frac{\text{aire}\,(ACC')}{\text{aire}\,(AB'C)}$.

e. Justifie enfin que : $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$.

3 Pour aller plus loin

Reprend la question **2.** dans chacune des situations suivantes.

Situation 1 : le point C est sur $[AB)$ mais n'est pas sur $[AB]$.

Situation 2 : le point C est sur (AB) mais n'est pas sur $[AB)$.

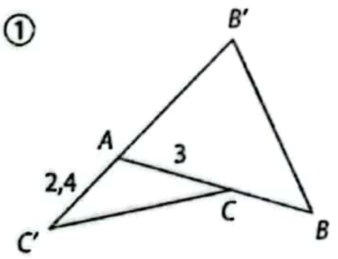
2 La propriété réciproque de Thalès dans les triangles › Cours 1b

1 Conjecture

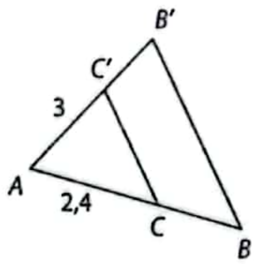
Pour les six schémas ci-dessous, l'unité utilisée est le cm.

$AB = 5$ cm et $AB' = 4$ cm

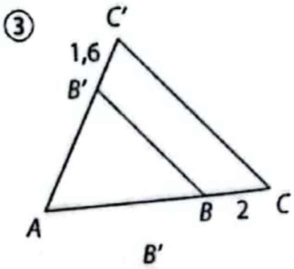
①



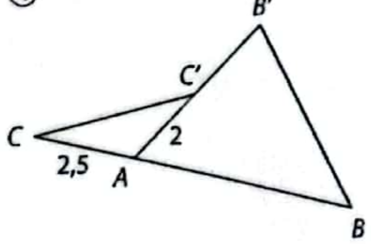
②



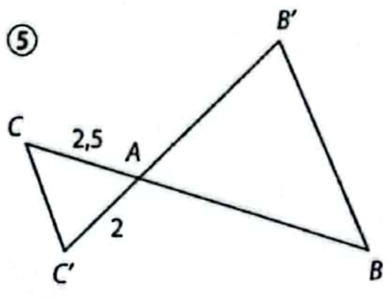
③



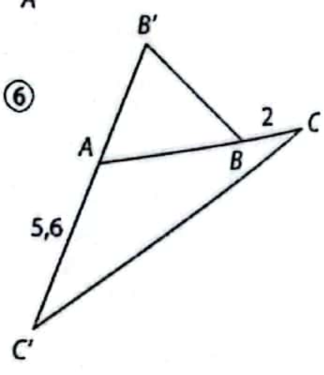
④



⑤



⑥



a. Pour chacun des schémas, complète le tableau ci-dessous.

	$\frac{AC}{AB}$	$\frac{AC'}{AB'}$	Ces rapports sont égaux : oui/non	(BB') semble parallèle à (CC') : oui/non
Schéma n° …	…	…	…	…

b. L'égalité entre les rapports $\frac{AC}{AB}$ et $\frac{AC'}{AB'}$ suffit-elle pour conclure que les droites (BB') et (CC') sont parallèles ? Quelle hypothèse faut-il ajouter ?

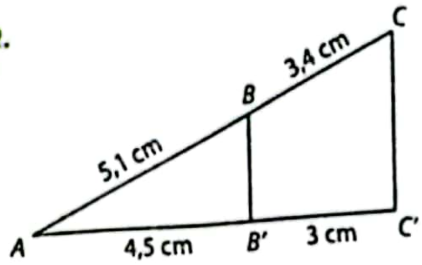
2 Énoncé d'une propriété

Recopie et complète :

ABB' est un triangle.
C est un point de (AB) et C' est un point de (AB') tel que ….
Si $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$, alors ….

3 Application

Utilise la propriété écrite au 2. pour montrer que les droites (BB') et (CC') ci-contre, sont parallèles.



3 La propriété de Thalès : le cas général › Cours 3

1 Observation

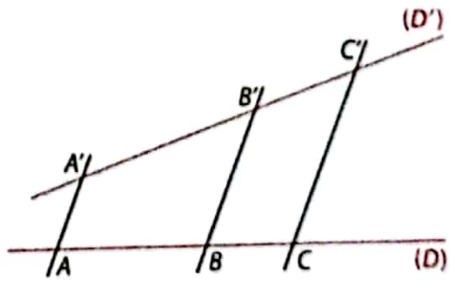
(D) et (D') sont deux droites sécantes. A, B et C sont trois points de (D). A', B', C' sont trois points de (D') tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient parallèles.

a. Reproduis une figure semblable sur ton cahier.

b. Utilise ta règle graduée pour comparer les rapports suivants, arrondis au dixième.

$\frac{AC}{AB}$ et $\frac{A'C'}{A'B'}$; $\frac{BC}{BA}$ et $\frac{B'C'}{B'A'}$; $\frac{CA}{CB}$ et $\frac{C'A'}{C'B'}$.

Qu'observes-tu ?



2 Démonstration

On souhaite démontrer que : $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$.

a. Trace la droite (D") parallèle à (D') et passant par le point A. (D") coupe (BB') en B" et (CC') en C".

b. Justifie que : $\frac{AC}{AB} = \frac{AC''}{AB''}$.

c. Quelle est la nature des quadrilatères AA'B'B" et AA'C'C" ?

d. Utilise les propriétés de ces quadrilatères pour monter que : $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$.

1 Cours

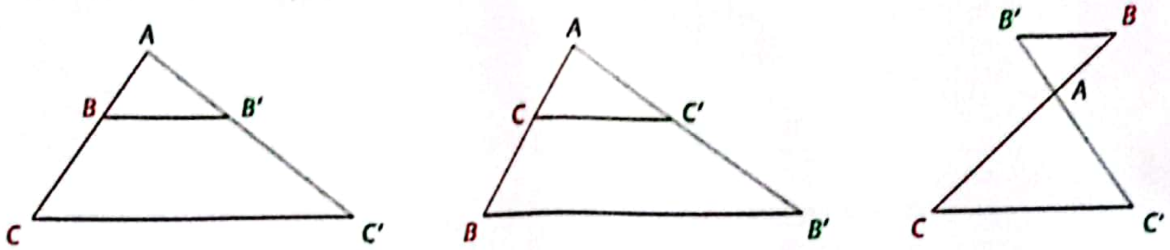
1 Les propriétés de Thalès : le cas particulier des triangles

a La propriété directe

Propriété ***ABB'* est un triangle. *C* est un point de (*AB*) et *C'* est un point de (*AB'*).**
Si les droites (*BB'*) et (*CC'*) sont parallèles, alors $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AC'}{AB'} = \dfrac{CC'}{BB'}$.

Triangles en configuration de Thalès

Lorsque l'on reconnait l'une de ces trois figures, dans lesquelles les droites (*BB'*) et (*CC'*) sont parallèles, on peut penser à utiliser la propriété de Thalès pour les triangles.



Exemple : Dans le triangle *ABB'*, *C* est un point de (*AB*), *C'* est un point de (*AB'*) et (*BB'*) // (*CC'*).

Donc, d'après la propriété, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AC'}{AB'} = \dfrac{CC'}{BB'}$,

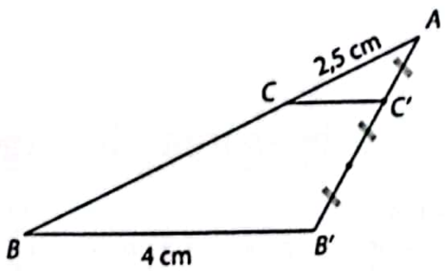
c'est-à-dire $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\frac{1}{3} \times AB'}{AB'} = \dfrac{CC'}{4}$,

ainsi, d'une part, $\dfrac{2{,}5}{AB} = \dfrac{1}{3}$,

donc $AB = 3 \times 2{,}5 = 7{,}5$ cm ;

et d'autre part, $\dfrac{1}{3} = \dfrac{CC'}{4}$.

donc $CC' = \dfrac{4}{3}$ cm.



Conséquence de la propriété de Thalès ***ABB'* est un triangle. *C* est un point de (*AB*) et *C'* est un point de (*AB'*).**
Si $\dfrac{AC}{AB} \neq \dfrac{AC'}{AB'}$ **alors les droites (*BB'*) et (*CC'*) ne sont pas parallèles.**

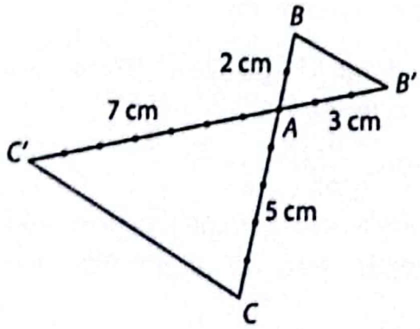
Remarque : Cette conséquence est la **contraposée** de la propriété de Thalès.

Exemple : Sur la figure ci-contre, les points *A*, *B*, *C* et les points *A*, *B'*,*C'* sont alignés.

Or $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{AC'}{AB'} = \dfrac{7}{3}$

donc $\dfrac{AC}{AB} \neq \dfrac{AC'}{AB'}$,

on en déduit, d'après la conséquence de la propriété de Thalès que les droites (*BB'*) et (*CC'*) ne sont pas parallèles.



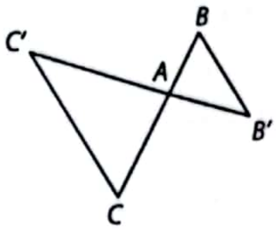
b La propriété réciproque

Propriété **ABB' est un triangle. C est un point de (AB) et C' est un point de (AB') tels que la position C par rapport à A et B soit la même que la position de C' par rapport à A et B'.**
Si $\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}$ alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

Remarque : Attention, comme le montre l'exemple ci-dessous, il ne suffit pas de vérifier que les rapports sont égaux pour déduire que les droites sont parallèles.
La position des points est importante.

Exemples : Pour chacune des figures ci-dessous, ABB' est un triangle. C est un point de (AB) et C' un point de (AB') tels que : $AB = 3$ cm ; $AC = 5$ cm ; $AB' = 4{,}5$ cm ; $AC' = 7{,}5$ cm.
On vérifie aisément que $\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}$.

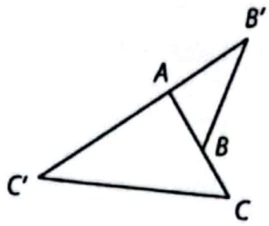
• Les triangles sont en configuration de Thalès.



En effet, la position de C par rapport à A et B est la même que la position de C' par rapport à A et B'.

D'après la propriété réciproque de Thalès, les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

• Les triangles ne sont pas en configuration de Thalès.



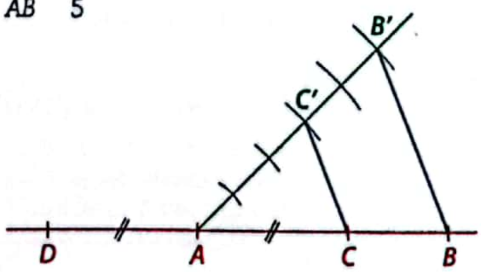
En effet, la position de C par rapport à A et B n'est pas la même que la position de C' par rapport à A et B'.
Même si on vérifie que $\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}$, les droites (BB') et (CC') ne sont pas parallèles.

2 Partager un segment selon un rapport donné

Principe **p et q sont deux nombres entiers naturels non nuls et $[AB]$ un segment.**
On souhaite placer un point C sur la droite (AB) qui vérifie $\frac{AC}{AB}=\frac{p}{q}$.

Méthode :
• Tracer la droite (AB) et une demi-droite issue de A non confondue avec (AB).
• Choisir un écartement de compas.
• Sur cette demi-droite issue de A, marquer à l'aide du compas :
le point B' tel que $AB' = q$;
le point C' tel que $AC' = p$.
• Tracer la droite (BB').
• La droite parallèle à (BB') qui passe par C' coupe $[AB]$ en C.

Exemple :
On souhaite placer le point C sur le segment $[AB]$ tel que $\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$.



Remarque : Le symétrique D du point C par rapport à A est un autre point de (AB) qui vérifie $\frac{AD}{AB}=\frac{p}{q}$.

3 Les propriétés de Thalès : le cas général

a La propriété directe

Propriété de Thalès **A, B, C sont trois points d'une droite (D) et A', B', C' sont trois points d'une droite (D') distincts de A, B, C.**

Si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles, alors $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{A'C'}{A'B'}$.

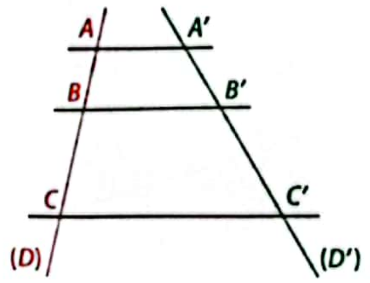
Remarque : On peut également déduire d'autres égalités de rapports :

$$\frac{BC}{BA} = \frac{B'C'}{B'A'} \text{ ou encore } \frac{CA}{CB} = \frac{C'A'}{C'B'}.$$

Exemple : Les droites (D) et (D') sont sécantes.
A, B, C sont trois points de (D) et A', B', C' trois points de (D') tels que :
$AB = 2$ cm ; $AC = 5$ cm ; $A'B' = 2{,}4$ cm ; $(AA') // (BB')$ et $(BB') // (CC')$.
D'après la propriété de Thalès, on en déduit que :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}.$$

Ainsi, $\dfrac{5}{2} = \dfrac{A'C'}{2{,}4}$ d'où $A'C' = 6$ cm.



Remarque : Attention, dans le cas général, il n'y a pas d'égalités avec des rapports de longueurs tels que $AA' = BB' = CC'$.

b La propriété « réciproque »

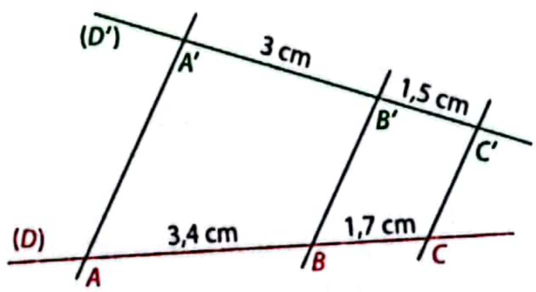
Propriété **A, B, C sont trois points d'une droite (D) et A', B', C' sont trois points d'une droite (D') distincts de A, B, C.**

Si les droites (AA') et (BB') sont parallèles et si $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{A'C'}{A'B'}$ alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

Exemple : Les droites (D) et (D') sont sécantes.
A, B, C sont trois points de (D) et A', B', C' trois points de (D') et $(AA') // (BB')$.

De plus, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{5{,}1}{3{,}4} = 1{,}5$ et $\dfrac{A'C'}{A'B'} = \dfrac{4{,}5}{3} = 1{,}5$.

Ainsi $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{A'C'}{A'B'}$, donc d'après la propriété réciproque de Thalès, on en déduit que $(BB') // (CC')$.



Comme dans le cas particulier des triangles, la propriété directe de Thalès sert à calculer des longueurs et la propriété réciproque de Thalès sert à démontrer le parallélisme de deux droites.

1 Apprendre à appliquer la propriété de Thalès

Énoncé

Utilise la propriété de Thalès pour calculer, dans chacun des cas, la longueur AM. L'unité est le cm.

(AC) // (BD)
(BD) // (MN)

Figure 1

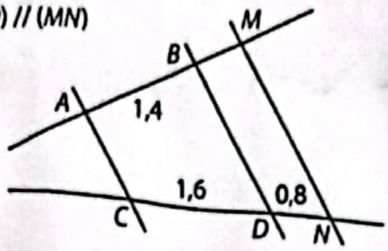
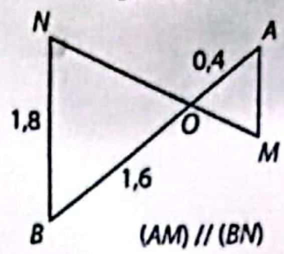


Figure 2



(AM) // (BN)

Solution

J'ai d'abord reconnu des configurations de Thalès. Pour appliquer la propriété, je commence par vérifier que chacune des hypothèses est vraie. Je peux alors écrire l'égalité des rapports de longueurs et trouver celle que je cherche.

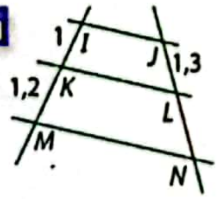
Figure 1 :
A, B, M sont trois points de (AM) et C, D, N trois points de (CN).
Je sais que $(AC) // (BD)$ et $(BD) // (MN)$,
donc $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{CN}{CD}$.
Ainsi $\dfrac{AM}{1,4} = \dfrac{2,4}{1,6}$ d'où $AM = \dfrac{2,4}{1,6} \times 1,4 = 2,1$ cm.

Figure 2 :
OAM est un triangle, N un point de (OM) et B un point de (OA).
Je sais que $(AM) // (BN)$,
donc $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OM}{ON} = \dfrac{AM}{BN}$.
Ainsi $\dfrac{0,4}{1,6} = \dfrac{AM}{1,8}$ d'où $AM = \dfrac{0,4}{1,6} \times 1,8 = 0,45$ cm.

S'exercer

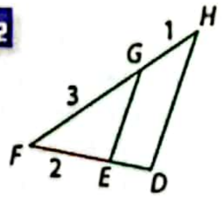
Pour les exercices 1 à 6, calcule la longueur du segment marqué en rouge. Arrondis au dixième. L'unité est le cm.

1



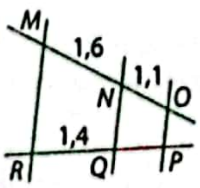
(IJ) // (KL) ; (KL) // (MN)

2



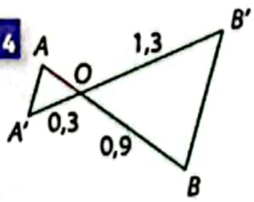
(EG) // (DH)

3



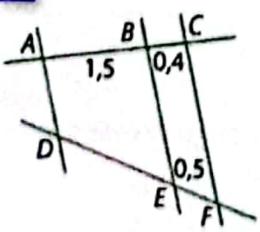
(MR) // (NQ) ; (NQ) // (OP)

4



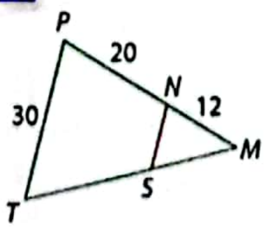
(AA') // (BB')

5



(AD) // (BE) ; (BE) // (CF)

6



(NS) // (TP)

7 Pour chacune des figures ci-dessous, $(EF) // (GH)$. Calcule la longueur EG.

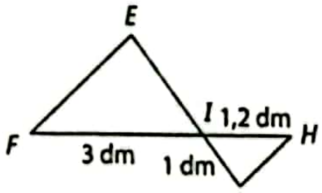
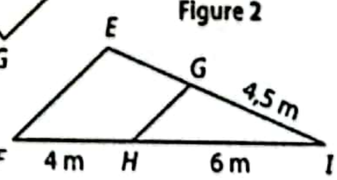


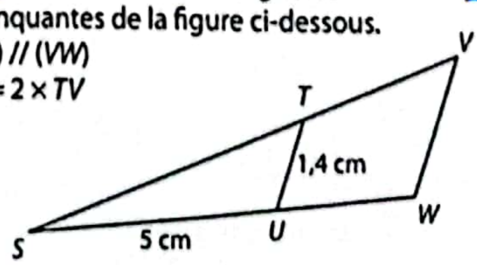
Figure 1

Figure 2



La longueur à calculer n'est pas toujours dans les rapports. Je dois parfois utiliser d'autres longueurs (ici EI et GI) pour la trouver.

8 Calcule toutes les longueurs manquantes de la figure ci-dessous.
$(TU) // (VW)$
$ST = 2 \times TV$



2 Apprendre à utiliser la propriété réciproque de Thalès

Énoncé

Utilise la propriété réciproque de Thalès pour montrer, dans chacun des cas, que (*EF*) // (*GH*).

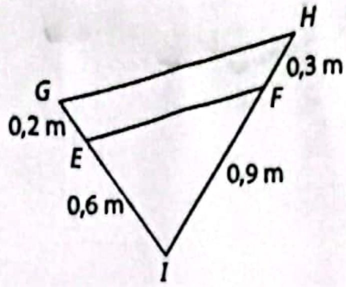


Figure 1

(*GH*) // (*IJ*)

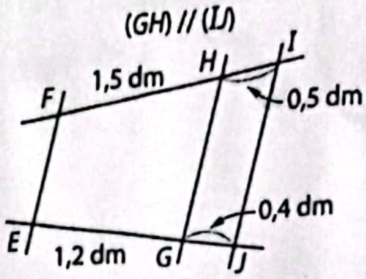


Figure 2

Solution

Je commence par vérifier chacune des hypothèses.
Si l'égalité des rapports est vérifiée, alors je peux conclure.

Pour la figure 1 :
IEF est un triangle, *G* un point de (*IE*) et *H* un point de (*IF*) tels que la position de *E* par rapport à *I* et *G* est la même que la position de *F* par rapport à *I* et *H*.

$\frac{IF}{IH} = \frac{0,9}{1,2} = \frac{3}{4}$ et $\frac{IE}{IG} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}$.

Donc $\frac{IF}{IH} = \frac{IE}{IG}$. Ainsi (*EF*) // (*GH*).

Pour la figure 2 :
F, *H*, *I* sont trois points de (*FI*) et *E*, *G*, *I* trois points de (*EJ*).
(*EF*) // (*GH*).

$\frac{IF}{IH} = \frac{2}{0,5} = 4$ et $\frac{JE}{JG} = \frac{1,6}{0,4} = 4$.

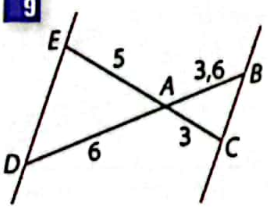
Donc $\frac{IF}{IH} = \frac{JE}{JG}$. Ainsi (*EF*) // (*GH*).

Je démontre l'égalité des rapports en deux étapes.

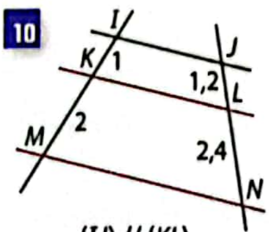
S'exercer

Pour les exercices 9 à 12, utilise la propriété réciproque de Thalès pour montrer que les droites colorées en rouge sont parallèles. L'unité est le cm.

9

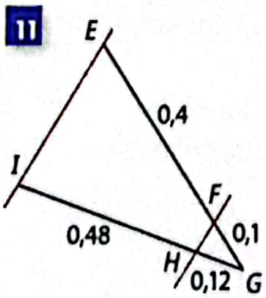


10

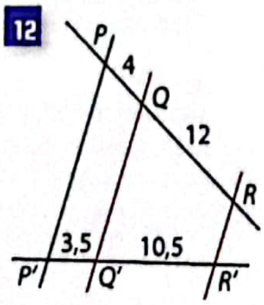


(*IJ*) // (*KL*)

11



12



(*PP'*) // (*QQ'*)

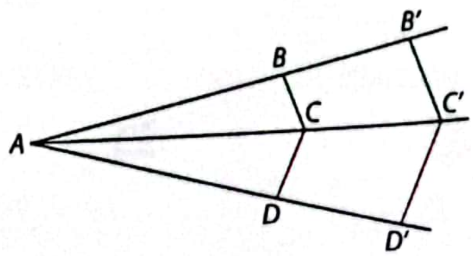
13 *EFG* est un triangle rectangle en *G*, *H* est un point de [*EG*] et *I* un point de [*EF*] tels que :

$EH = 8$ cm, $HG = 4$ cm,
$EF = 15$ cm, $IF = 5$ cm.

1. Construis une figure.
2. Démontre que (*FG*) // (*IH*).

Je suis attentif, je vérifie les bons rapports.

14 Dans la figure ci-dessous, les droites (*BC*) et (*B'C'*) sont parallèles, de même que les droites (*CD*) et (*C'D'*).

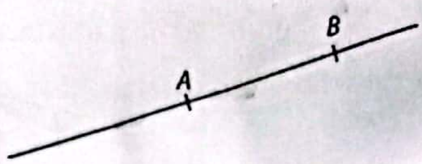


1. Utilise deux fois la propriété de Thalès pour montrer que $\frac{AB}{AB'} = \frac{AD}{AD'}$.
2. Déduis-en que (*BD*) // (*B'D'*).

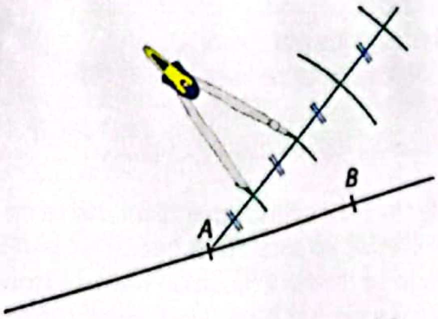
3 Apprendre à partager un segment

Énoncé

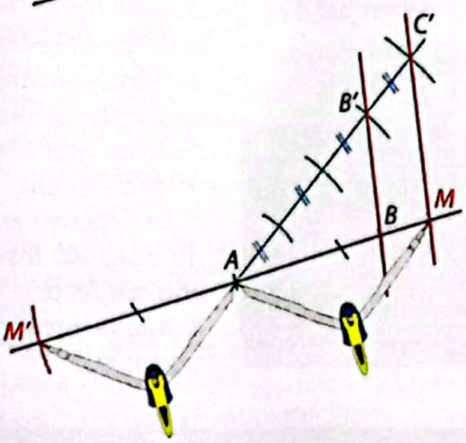
Reproduis la droite (AB) ci-contre. Utilise ta règle (non graduée) et ton compas, pour placer, sur la droite (AB), le point M tel que $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{3}$.



Solution



- Je trace la droite (AB) et une demi-droite issue de A.
- Je choisis un écartement de compas pour graduer la demi-droite.



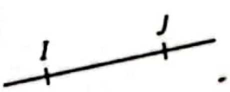
- Je place les points B' tel que $AB' = 3$ et C' tel que $AC' = 4$.
- Je trace (BB') et la parallèle à (BB') passant par C'.
- J'obtiens un premier point M sur (AB) puis un second point M', par symétrie par rapport à A.

Les points M et M' sont les points cherchés, en effet : $\frac{AM}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{4}{3}$ et $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AB} = \frac{4}{3}$.

S'exercer

Pour les exercices 15 à 20, utilise ta règle non graduée et ton compas pour placer, sur la droite, les points M correspondants.

15



$\frac{IM}{IJ} = \frac{7}{5}$

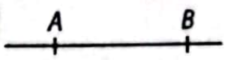
16

$\frac{EM}{EF} = \frac{2}{3}$

17

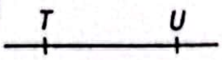
$\frac{SR}{SM} = \frac{2}{5}$

18



$\frac{MA}{BA} = \frac{5}{3}$

19

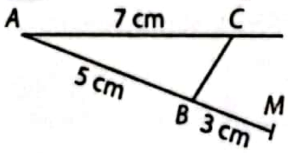


$\frac{UM}{UT} = \frac{2}{7}$

20

$\frac{HG}{MH} = \frac{3}{7}$

21 ABC est un triangle et M un point de (AB).

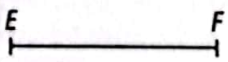


Je pense à me servir de toutes les données du schéma.

a. Construis le point N de (AC) tel que $\frac{AN}{8} = \frac{7}{5}$.

b. Calcule CN.

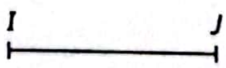
22



a. Construis le point G de $[EF]$ tel que $EG = \frac{1}{3}EF$.

b. Trace le cercle de centre F et de rayon $\frac{4}{3}EF$.

23



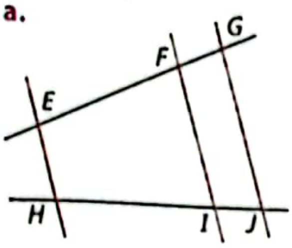
Trace le cercle de centre I et de rayon $\frac{7}{5}IJ$.

Activités d'application

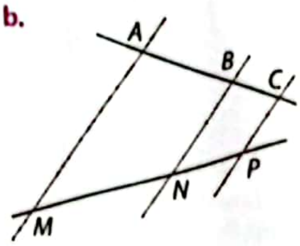
Calculs de longueurs

24 Pour chacune des figures ci-dessous, les droites rouges sont parallèles.
Indique, dans chaque cas, des rapports de longueurs qui sont égaux.

a.

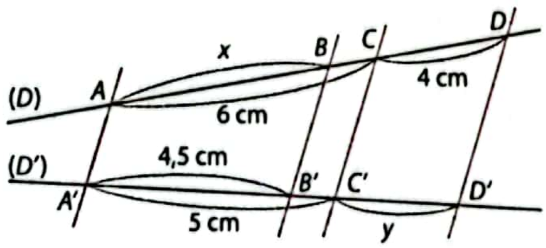


b.



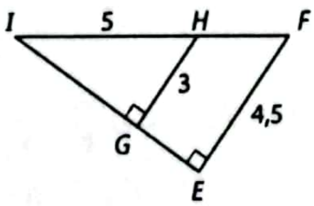
25 *ABC* est un triangle. *M* est un point de [*AB*] et *N* un point de [*AC*]. La parallèle à (*AC*) passant par *M* coupe (*BC*) en *P*. La parallèle à (*BC*) passant par *N* coupe (*AB*) en *Q*.
a. Fais une figure à main levée.
b. Écris les rapports de longueurs qui sont égaux.

26 *A*, *B*, *C* et *D* sont des points d'une droite (*D*) et *A'*, *B'*, *C'*, *D'* sont des points d'une droite (*D'*). Les droites rouges ci-dessous sont parallèles.



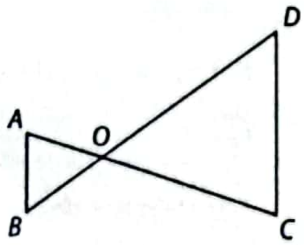
Calcule les longueurs *x* et *y*.

27 Les droites (*EF*) et (*GH*) sont perpendiculaires à la droite (*EG*). L'unité est le cm.



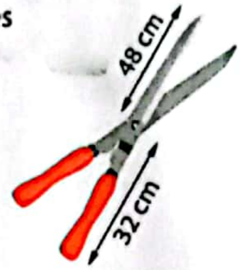
a. Calcule *IF*.
b. Calcule *IG* ; déduis-en *IE*.

28 *O* est le point d'intersection des droites (*AC*) et (*BD*).
(*AB*) // (*CD*) ;
OA = 10 cm ; *AC* = 35 cm ;
AB = 8 cm ; *OD* = 30 cm.
Calcule *CD* et *BD*.

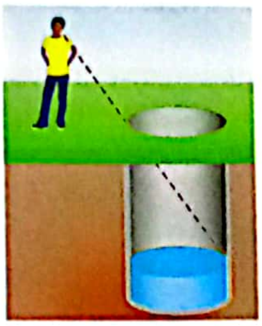


29 *ABC* est un triangle. *I* est le milieu de [*BC*] et *D* est un point de [*AB*]. La parallèle à (*BC*) passant par *D* coupe (*AI*) en *J* et (*AC*) en *E*.
a. Fais une figure.
b. Démontre que *J* est le milieu de [*DE*].

30 Paul a fabriqué des cisailles pour le jardinage.
Elles sont représentées ci-contre.
S'il écarte les poignées de 25 cm, quel sera l'écartement des lames ?
(Arrondis les résultats au cm).



31 Un trou cylindrique d'un mètre de diamètre a été creusé au sol pour préparer un puits.
Ndolo se trouve à 0,6 m du bord du trou. La hauteur de ses yeux par rapport au sol est 1,6 m.

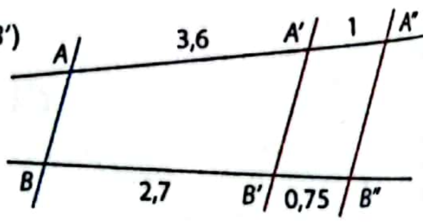


a. Schématise la situation par un dessin à main levée.
b. Jusqu'à quelle profondeur Ndolo peut-il voir ? Arrondis au dm.
c. En s'approchant à 0,4 m du bord du trou, Ndolo aperçoit l'eau.
À quelle profondeur se trouve l'eau ?

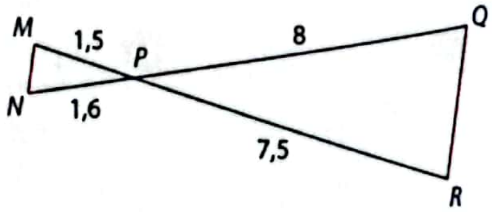
Étudier le parallélisme

Pour les exercices 32 à 34, démontre que les droites rouges sont parallèles. L'unité est le cm.

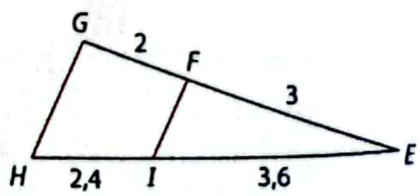
32 (*AB*) // (*A'B'*)



33

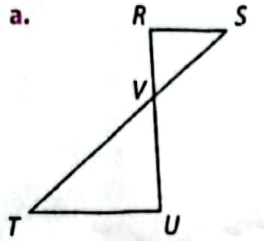


34



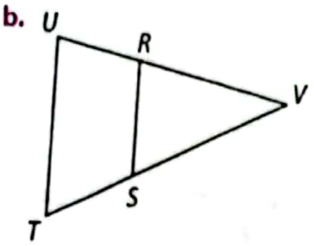
35 Dans chacun des cas ci-dessous, indique si les droites (RS) et (TU) sont parallèles. L'unité est le dm.

a.



$RV = 1{,}8$; $UV = 4{,}5$;
$SV = 3{,}6$; $TV = 7{,}9$.

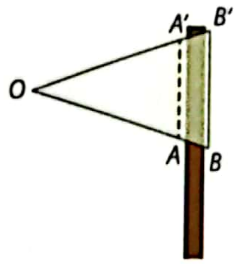
b.



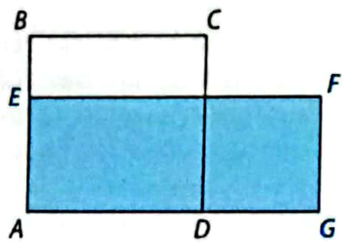
$RV = 3{,}6$; $UV = 4{,}8$;
$SV = 5{,}6$; $TV = 7{,}5$.

La propriété réciproque de Thalès permet de montrer que des droites sont parallèles mais c'est la contraposée de la propriété de Thalès qui permet de montrer quand elles ne le sont pas.

36 Pour la fête de son village, Kouma décide de coudre un drapeau de forme triangulaire le long d'un bâton. Après avoir cousu, Kouma mesure :
$OA' = 52$ cm ; $OB' = 57{,}8$ cm ;
$OA = 44$ cm ; $OB = 49{,}5$ cm.
a. La couture de Kouma est-elle parallèle à (BB') ?
b. Sachant que $BB' = 54$ cm, calcule la longueur AA'' de la couture si l'on souhaite qu'elle soit parallèle à (BB').

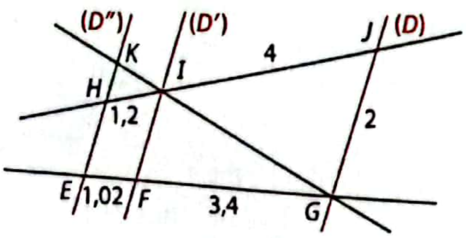


37 $ABCD$ est un carré. E est un point de $[AB]$, G un point de $[AD]$ et F le point tel que $EFGA$ soit un rectangle de même aire que le carré $ABCD$.



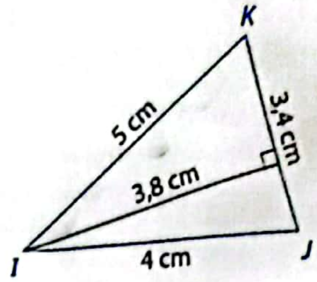
a. Démontre que $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AG}$.
b. Démontre que $(BG) // (DE)$.

38 Sur la figure ci-dessous, l'unité est le dm. Les droites (D) et (D') sont parallèles.



a. Démontre que $(D) // (D'')$.
b. Calcule la longueur HK.

39 IJK est un triangle.
M est le point de $[IJ]$ tel que $IM = 2{,}4$ cm et N est le point de $[IK]$ tel que $IK = 3$ cm.
a. Démontre que $(JK) // (MN)$.
b. Calcule la longueur de la hauteur issue de I dans le triangle IMN.



Partage d'un segment

40 Construis les deux points M de (AB) tels que : $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{8}$.

41 **a.** Construis le point P de $[ST]$ tel que $\frac{TP}{ST} = \frac{1}{5}$.

b. Construis le point H, n'appartenant pas à $[IJ]$, tel que : $\frac{JI}{IH} = \frac{3}{7}$.

42 Le professeur demande à ses élèves de construire les points C de (AB) tels que :
$\frac{AC}{AB} = \frac{8}{5}$.

Mbong déclare : « Aucun de ces points ne sera sur $[AB]$. »
Explique son raisonnement ; puis construis ces points.

43 **a.** Découpe ce segment en sept parts égales.

b. Découpe ce segment en cinq parts égales.

44 Utilise deux méthodes différentes pour découper ce segment en quatre parts égales.

Rappelle-toi comment construire le milieu d'un segment.

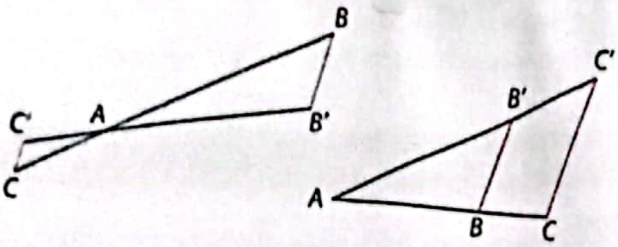
45 Atem a cinq enfants. Il possède un champ rectangulaire qu'il souhaite diviser en parts égales pour ses enfants.
Trace sur ton cahier un rectangle qui schématise le champ d'Atem ; puis aide Atem à faire ce partage.

Bien comprendre mieux rédiger

46 Choisir les bonnes longueurs

1. Le cas des triangles

Dans les figures ci-dessous, les droites rouges sont parallèles.



Ali souhaite utiliser la propriété de Thalès. Pour s'aider, il a dressé un tableau de proportionnalité.

AB	AB'	BB'
BC	B'C'	CC'

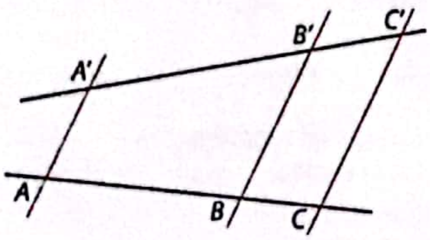
Ce ne sont pas des longueurs des triangles.

a. Explique la remarque du professeur.

b. Corrige l'erreur d'Ali.

2. Le cas général

Dans les figures ci-dessous, les supports des droites rouges sont parallèles.



Leke souhaite utiliser la propriété de Thalès. Pour s'aider, elle a dressé un tableau de proportionnalité.

AB	A'B'	BB'
AC	A'C'	CC'

Non, il ne faut pas confondre avec le cas particulier des triangles.

a. Explique la remarque du professeur.

b. Propose un deuxième tableau de proportionnalité.

47 Bien connaître les propriétés

EFG est un triangle tel que :

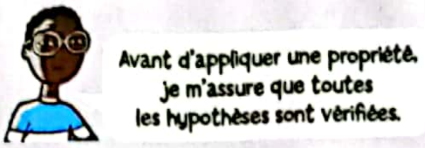
$EF = 5$ cm ; $EG = 3{,}5$ cm et $FG = 4$ cm.

M est un point de (EF) tel que $EM = 3$ cm et N est un point de (EG) tel que $EN = 2{,}1$ cm.

a. Vérifie que : $\dfrac{EM}{EF} = \dfrac{EN}{EG}$.

b. Peut-on en déduire que les droites (MN) et (FG) sont parallèles ?

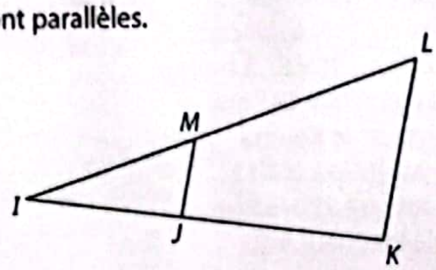
c. Construis cette figure de sorte que les droites (MN) et (FG) ne soient pas parallèles ; puis une deuxième figure où (MN) et (FG) sont parallèles.



48 Propriété réciproque et contraposée

1. Étapes de deux raisonnements

Dans la figure ci-dessous, toutes les longueurs sont connues. On cherche à savoir si les droites (MJ) et (LK) sont parallèles.



Complète les étapes des raisonnements ci-dessous :

① Je m'assure que les points sont alignés dans le bon ordre.

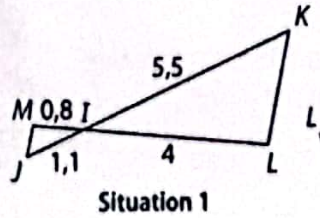
② Je calcule le rapport … ; puis le rapport … et je les compare.

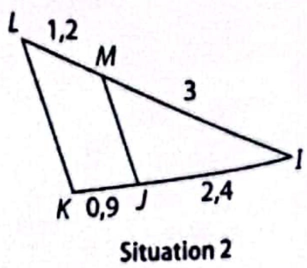
③ Si ces rapports sont égaux, alors j'utilise la propriété … de Thalès pour déduire que … .

③ Si ces rapports ne sont pas égaux, alors j'utilise la propriété … de Thalès pour déduire que … .

2. Applications

Dans les situations ci-dessous, les droites (MJ) et (LK) sont-elles parallèles ?

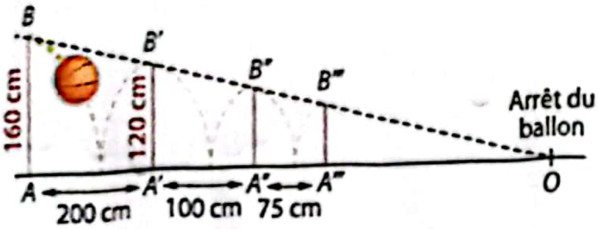




Rédige ta réponse avec soin et en détaillant les étapes de ton raisonnement.

49 Rebonds d'un ballon

Sur le schéma ci-dessous sont représentés les quatre rebonds d'un ballon.



1. Calcule la distance au sol parcourue par le ballon jusqu'à son arrêt, c'est-à-dire la distance $[AO]$.
2. Calcule la hauteur cumulée des quatre premiers rebonds du ballon.
3. On recommence le lancer en plaçant un obstacle de 70 cm de hauteur à 2 m avant le point d'arrêt. Le ballon passera-t-il cet obstacle ?

50 Recherche de points

Utilise ta règle (non graduée) et ton compas pour placer, sur la droite (AB) ci-dessous, les points M qui vérifient : $\frac{MA}{MB} = \frac{9}{5}$.

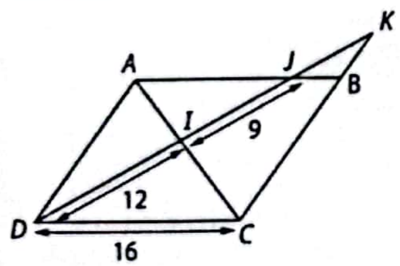
Je te conseille de tracer deux droites parallèles : l'une passant par A, l'autre par B, puis de graduer à l'aide du compas.

51 Une construction

1. a. Construis un triangle ABC tel que :
$AB = 6$ cm ; $BC = 5$ cm et $AC = 7$ cm.
b. Construis le trapèze $ABCD$ tel que la droite (AB) soit parallèle à la droite (CD), $CD = 8$ cm et les segments $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O.
2. a. Calcule le rapport : $\frac{OC}{OA}$.
b. Déduis-en la longueur OA.

52 Deux configurations

Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un parallélogramme et l'unité est le cm.



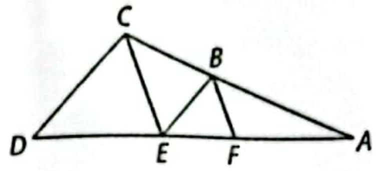
1. Calcule la longueur AJ.
2. Calcule la longueur JK.

S'entraîner au BEPC

53 Construire une charpente

La figure ci-dessous représente une ferme de charpente d'une maison.

$AF = 5$ m ;
$BC = 4$ m ;
$AF = 3{,}5$ m ;
$FE = 2{,}8$ m ;
$BF = 2{,}5$ m.



1. Montre que les droites (CE) et (BF) sont parallèles.
2. Calcule la distance CE.

BEPC 2010

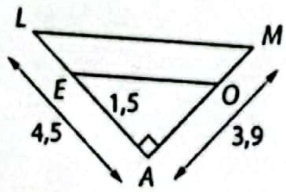
54 Au millimètre près

L'unité de longueur est le millimètre. Un triangle NTO est tel que : $NT = 45$, $NO = 36$ et $TO = 60$.
D est un point de la droite (NO) tel que :
N est entre O et D et $ND = \frac{1}{3}NO$.
E est le point d'intersection de la droite (NT) et de la parallèle à la droite (TO) passant par D.
1. Fais la figure.
2. Calcule NE et DE.

BEPC 2005

55 Aire du trapèze

Sur la figure ci-contre, on suppose que les droites (OE) et (LM) sont parallèles.
L'unité de longueur est le centimètre.

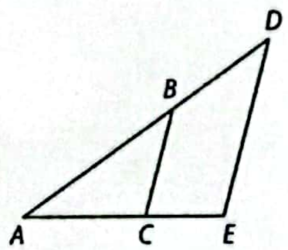


On donne $AE = 1{,}5$; $AL = 4{,}5$ et $AM = 3{,}9$.
1. Calcule AO.
2. Calcule l'aire du trapèze $OELM$.

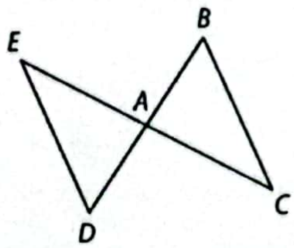
BEPC 2004

56 Deux situations différentes

Sur les figures ci-dessous, l'unité de longueur est le centimètre. Calcule x dans chacun des cas suivants :



(BC) est parallèle à (DE)
$AB = 8$; $AC = 7$;
$AE = 28$ et $AD = x$.



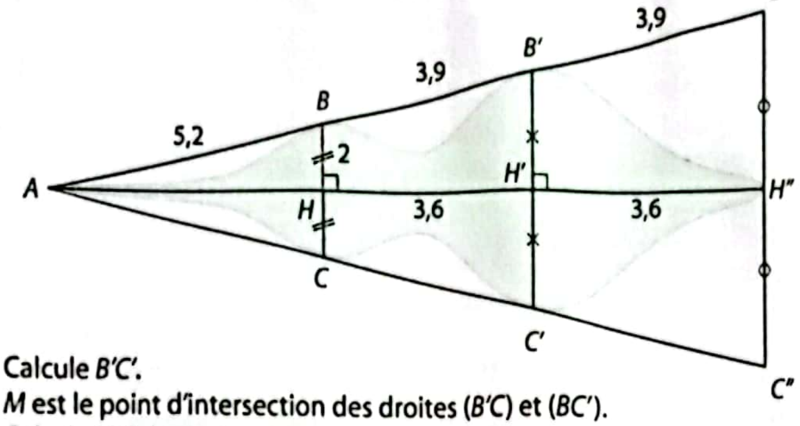
(BC) est parallèle à (DE)
$AC = 6$; $BC = 12$;
$AE = 5$ et $ED = x$.

BEPC 2003

Activités d'intégration

57 Pointe de flèche

Des pointes de flèches, datées du XVIIIe siècle et similaires à celle-ci, ont été retrouvées lors des fouilles effectuées à Kribi, au Cameroun. Elles ont été martelées et aplaties à partir d'une barre de fer. On peut inscrire la pointe de flèche ci-contre dans le triangle $AB''C''$ schématisé ci-dessous. L'unité est le cm.



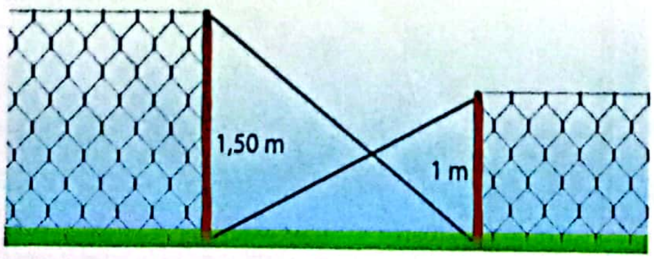
1. Calcule $B'C'$.
2. M est le point d'intersection des droites $(B'C)$ et (BC').
   a. Calcule HM. Arrondis au mm.
   b. Déduis-en la longueur AH ainsi que la longueur de la pointe de flèche.
3. On donne $B''C'' = 10$ (cette longueur a été arrondie au dixième de mm).
   a. Les droites (BC) et $(B''C'')$ sont-elles parallèles ?
   b. Calcule l'aire du triangle $AB''C''$.

58 L'enclos du zébu

Le père d'Oumar possède un superbe zébu M'bororo blanc.

L'entrée de l'enclos est schématisée par deux poteaux de 1 m et 1,50 m de haut. Oumar a fermé l'entrée avec deux bâtons.

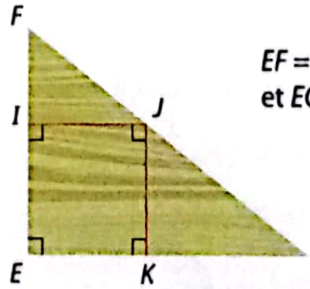
Ce zébu est assez grand pour enjamber une barrière de 50 cm de hauteur.



Le zébu du père d'Oumar peut-il sortir de son enclos ?

59 Pièce d'artisanat

Malun est spécialisé dans le travail du bois. Pour fabriquer une pièce d'artisanat, il souhaite découper dans la pièce ci-dessous le carré ayant la plus grande aire.



$EF = 9$ cm et $EG = 12$ cm.

1. a. Calcule FG.
   b. Justifie que le quadrilatère $EIJK$ est un rectangle.

Pour que $EIJK$ soit un carré, il suffit que $IE = IJ$.

2. a. Démontre que :

$$\frac{FI}{9} = \frac{FJ}{15} = \frac{IJ}{12}.$$

   b. Calcule FI pour que Malun puisse effectuer sa découpe. Arrondis au mm.

2 Trigonométrie dans le triangle rectangle

Pour démarrer

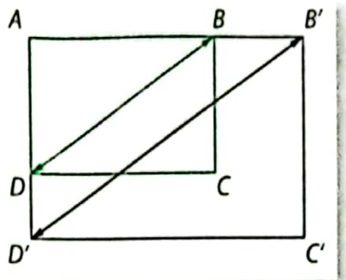
Image télévisée

La plupart des téléviseurs sont équipés d'écrans « 4 : 3 », c'est-à-dire que le rapport $\frac{\text{longueur de l'image}}{\text{largeur de l'image}}$ est égal à $\frac{4}{3}$.

Hier soir, deux amis ont regardé la télévision dans deux endroits différents :
Yves sur une télévision de largeur 42 cm et Claire sur une télévision de longueur 80 cm.

1 **a.** Calcule, au cm près, les dimensions des deux téléviseurs : largeur, longueur et diagonale.

b. Reproduis à l'échelle $\frac{1}{10}$ le schéma ci-contre sur lequel les deux écrans *ABCD* et *A'B'C'D'* sont superposés.



2 L'écran d'un troisième téléviseur dispose d'une diagonale de 120 cm.
Calcule ses autres dimensions. Justifie tes calculs.

3 Compare les rapports de longueurs :
$\frac{AD}{BD}$ et $\frac{AD'}{B'D'}$; puis $\frac{AB}{BD}$ et $\frac{AB'}{B'D'}$. Que constates-tu ?

Cette image est extraite d'un match de l'équipe du Cameroun, retransmis sur un téléviseur au format 4 : 3.

Savoir-faire

À la fin de ce chapitre, tu sauras :
- trouver le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle donné ;
- calculer une longueur à l'aide d'un angle ;
- trouver la mesure en degrés d'un angle aigu ;
- utiliser des formules de trigonométrie.

2 Activités de **découverte**

1 Constructions de triangles rectangles et calculs de longueurs
› Cours 1

1 Trace sur ton cahier quatre triangles rectangles donnés par les indications ci-dessous.
L'unité est le cm.

Triangle ① ABC rectangle en B tel que : $AB = 6{,}4$ et $BC = 4{,}8$

Triangle ② EFG triangle en F tel que : $EF = 4$ cm et mes $\widehat{E} = 30°$

Triangle ③ MNP rectangle en P tel que : $MN = 5{,}5$ et $NP = 3{,}3$

Triangle ④ TUV rectangle en V tel que : $TV = 7$ cm et mes $\widehat{T} = 40°$

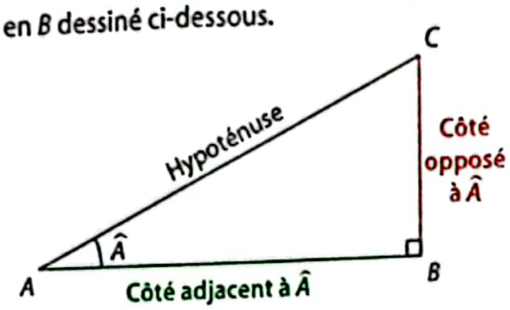
2 **a.** Dans chacun des cas ci-dessous, calcule, en justifiant, la longueur demandée.
Triangle ① : longueur AC ; Triangle ③ : longueur MP.

b. Dans les cas des triangles ② et ④, peux-tu calculer les longueurs manquantes des côtés des triangles ?

L'un des objectifs du chapitre est d'utiliser la trigonométrie pour calculer ces longueurs manquantes.

2 Compréhension du vocabulaire
› Cours 1

ABC est le triangle rectangle en B dessiné ci-dessous.

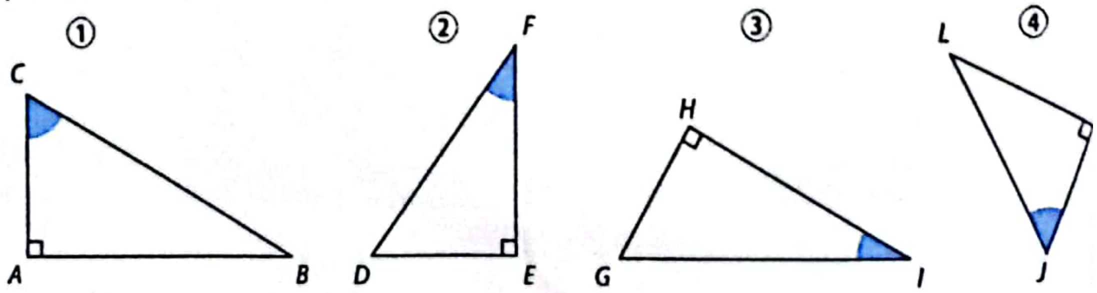


On appelle :
- *Longueur du côté adjacent à l'angle Â ou plus simplement **côté adjacent à Â**, la longueur* AB ;
- *Longueur du côté opposé à l'angle Â ou plus simplement **côté opposé à Â**, la longueur* BC.

1 Trace un triangle EFG rectangle en F tel que $EF = 5$ cm et $FG = 7$ cm.

2 Complète chacune des phrases ci-dessous.
Dans le triangle EFG,
a. *l'hypoténuse est ... ;*
b. *EF est le côté ... à Ê ;*
c. *le côté opposé à Ê est ... ;*
d. *le côté adjacent à Ĝ est ....*

3 **Applications**
Pour chacune des situations ci-dessous, indique l'hypoténuse du triangle rectangle ; puis les côtés adjacent et opposé à l'angle marqué en bleu.



3 Mesure d'un angle et rapports de longueurs › Cours 1

1 Observations

a. Trace sur ton cahier deux triangles ABC rectangles en B tels que :
pour le premier triangle : $AB = 8$ cm et mes$\widehat{A} = 30°$,
pour le second triangle : $AB = 8$ cm et mes$\widehat{A} = 40°$.

b. Pour chacun des triangles, place un point M sur la demi-droite $[AB)$ et le point N tel que la perpendiculaire à (AB) passant par M coupe la droite (AC) en N.

c. Utilise ta règle graduée, pour compléter, pour chaque triangle, le tableau ci-contre. Arrondis à 0,1 près.
Qu'observes-tu ?

$\frac{AB}{AC}$	$\frac{AM}{AN}$	$\frac{BC}{AC}$	$\frac{MN}{AN}$	$\frac{BC}{AB}$	$\frac{MN}{AM}$

2 Conclusion

a. Utilise la propriété de Thalès pour montrer que, dans chaque cas, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{AM}$.

b. Déduis-en les égalités observées en **1. c.**

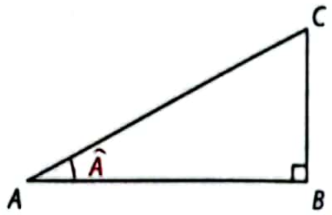
c. Réponds par vrai ou faux aux affirmations ci-dessous.

- Le rapport $\dfrac{AM}{AN}$ dépend de l'emplacement du point M. ☐ Vrai ☐ Faux
- Le rapport de $\dfrac{AM}{AN}$ dépend de la mesure de l'angle $\widehat{A}$. ☐ Vrai ☐ Faux

4 Des formules de trigonométrie › Cours 2

1 Encadrement

ABC désigne le triangle rectangle ci-dessous.



$\cos\widehat{A} = \dfrac{\text{côté adjacent à } \widehat{A}}{\text{hypoténuse}}$.

$\sin\widehat{A} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{A}}{\text{hypoténuse}}$.

$\tan\widehat{A} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{A}}{\text{côté adjacent à } \widehat{A}}$.

a. Utilise le rappel de cours ci-contre pour exprimer $\cos\widehat{A}$; puis $\sin\widehat{A}$, à l'aide des longueurs du triangle.

b. Complète les pointillés avec 0, AB et AC : ... ⩽ ... ⩽ .... Déduis en que : $0 \leqslant \cos\widehat{A} \leqslant 1$.

c. Procède de même pour montrer que : $0 \leqslant \sin\widehat{A} \leqslant 1$.

2 Lien entre cosinus et sinus

Notations : $\cos^2\widehat{A} = (\cos\widehat{A})^2$ et $\sin^2\widehat{A} = (\sin\widehat{A})^2$.

a. Utilise tes réponses à la question **1. a.** pour montrer que : $\cos^2\widehat{A} + \sin^2\widehat{A} = \dfrac{AB^2 + BC^2}{AC^2}$.

b. À l'aide de la propriété de Pythagore, déduis-en la valeur de : $\cos^2\widehat{A} + \sin^2\widehat{A}$.

3 Une autre formule pour la tangente

a. Exprime $\tan\widehat{A}$ à l'aide des longueurs du triangle en utilisant le rappel de cours ci-dessus.

b. Utilise tes réponses à la question **1. a.** pour simplifier le rapport : $\dfrac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}$.

c. Déduis-en que : $\tan\widehat{A} = \dfrac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}$.

4 Propriété des angles complémentaires

a. Exprime $\cos\widehat{C}$; puis $\sin\widehat{C}$, à l'aide des longueurs du triangle.

b. Compare tes réponses à celles de la question **1. a.**.

c. Explique pourquoi les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires.
Déduis-en une relation entre les cosinus et les sinus de deux angles complémentaires.

Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

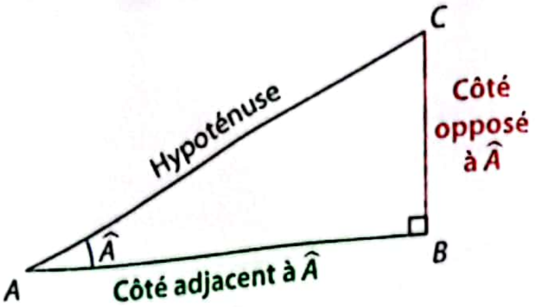
Définitions **Dans un triangle rectangle :**

- **le cosinus d'un angle aigu (ou de sa mesure) est le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse ;**
- **le sinus d'un angle aigu (ou de sa mesure) est le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse ;**
- **la tangente d'un angle aigu (ou de sa mesure) est le quotient du côté opposé à cet angle par le côté adjacent à cet angle.**

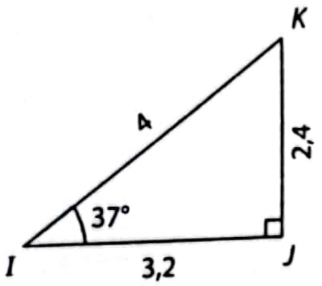
$$\cos \widehat{A} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{A}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin \widehat{A} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{A}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan \widehat{A} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{A}}{\text{côté adjacent à } \widehat{A}} = \frac{BC}{AB}$$



Exemple : Dans le triangle rectangle IJK ci-dessous, l'unité est le cm.



La mesure de l'angle $\widehat{JIK}$ a été arrondie au degré.

mes $\widehat{JIK} \approx 37°$;

$\cos \widehat{JIK} = \frac{IJ}{IK} = \frac{3,2}{4} = 0,8$; ainsi $\cos 37° \approx 0,8$;

$\sin \widehat{JIK} = \frac{JK}{IK} = \frac{2,4}{4} = 0,6$; ainsi $\sin 37° \approx 0,6$;

$\tan \widehat{JIK} = \frac{JK}{IJ} = \frac{2,4}{3,2} = 0,75$; ainsi $\tan 37° \approx 0,75$.

Relations trigonométriques

Propriétés **Pour tout angle aigu $\widehat{A}$:**

$0 \leqslant \cos \widehat{A} \leqslant 1$; $\quad 0 \leqslant \sin \widehat{A} \leqslant 1$;

$\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = 1$; $\quad \tan \widehat{A} = \frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}}$.

Remarque : $\cos^2 \widehat{A} = (\cos \widehat{A})^2 = \cos \widehat{A} \times \cos \widehat{A}$ et se lit « cosinus carré de l'angle $\widehat{A}$ » ;
$\sin^2 \widehat{A} = (\sin \widehat{A})^2 = \sin \widehat{A} \times \sin \widehat{A}$ et se lit « sinus carré de l'angle $\widehat{A}$ ».

Exemple : On sait que $\cos \widehat{A} = \frac{1}{3}$. On cherche $\sin \widehat{A}$; puis $\tan \widehat{A}$.

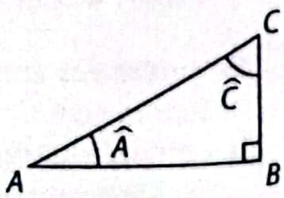
$\cos^2 \widehat{A} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, d'où $\frac{1}{9} + \sin^2 \widehat{A} = 1$, donc $\sin^2 \widehat{A} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Ainsi, $\sin \widehat{A} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. De plus, $\tan \widehat{A} = \frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{3}{1} = 2\sqrt{2}$.

Propriété **Lorsque $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont des angles complémentaires ($\widehat{A} + \widehat{C} = 90°$),**

$$\cos \widehat{A} = \sin \widehat{C}$$

$$\text{et } \sin \widehat{A} = \cos \widehat{C}.$$



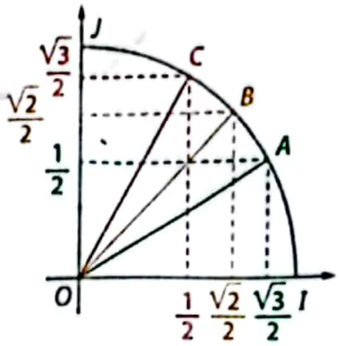
3 Les angles remarquables

Dans un repère orthonormé (O, I, J), M est un point du cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1.

Abscisse de $M = \cos \widehat{IOM}$; Ordonnée de $M = \sin \widehat{IOM}$

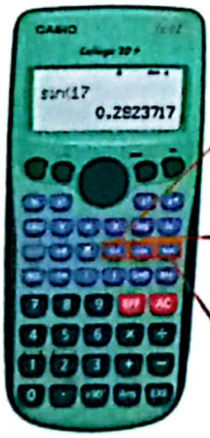
Mesure de l'angle	Cosinus	Sinus	Tangente
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

mes $\widehat{IOA} = 30°$;
mes $\widehat{IOB} = 45°$;
mes $\widehat{IOC} = 60°$.



4 Utilisation de la calculatrice

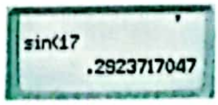
a Pour calculer un sinus, un cosinus ou une tangente



Exemples :

- Pour calculer sin 17 °, il faut taper :

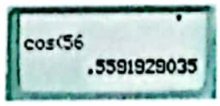
sin 1 7 EXE



Ainsi, sin 17° ≈ 0,292.

- Pour calculer cos 56°, il faut taper :

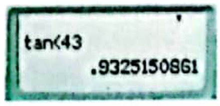
cos 5 6 EXE



Ainsi, cos 56° ≈ 0,559.

- Pour calculer tan 43°, il faut taper :

tan 4 3 EXE



Ainsi, tan 43° ≈ 0,933.

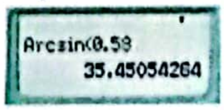
Remarque : Une table de trigonométrie, disponible en page 188, permet également de lire une valeur approchée du cosinus, du sinus ou de la tangente d'un angle.

b Pour calculer la mesure d'un angle connaissant son sinus, son cosinus ou sa tangente

Exemples :

- Pour calculer mes $\widehat{A}$, sachant que $\sin \widehat{A} = 0,58$, il faut taper :

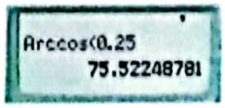
ALPHA Asn
sin 0 · 5 8 EXE



Ainsi, mes $\widehat{A} \approx 35,45°$.

- Pour calculer mes $\widehat{B}$, sachant que $\cos \widehat{B} = 0,25$, il faut taper :

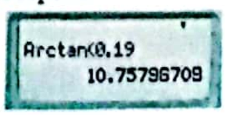
ALPHA Acs
cos 0 · 2 5 EXE



Ainsi, mes $\widehat{B} \approx 75,52°$.

- Pour calculer mes $\widehat{C}$ sachant que $\tan \widehat{C} = 0,19$, il faut taper :

ALPHA Atn
tan 0 · 1 9 EXE



Ainsi, mes $\widehat{C} \approx 10,76°$.

Remarque : Une table de trigonométrie, disponible en page 188, permet également de lire une valeur approchée de la mesure d'un angle dont on connaît le sinus, le cosinus ou la tangente.

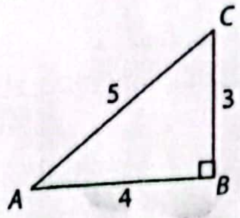
1 Apprendre à calculer un cosinus, un sinus, une tangente

Énoncé

ABC est le triangle rectangle en B ci-contre.

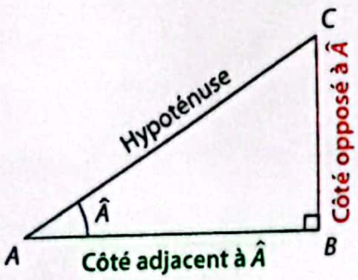
1. Exprime $\cos\widehat{A}$, $\sin\widehat{A}$, puis $\tan\widehat{A}$ à l'aide des longueurs du triangle.

2. Déduis-en la valeur de $\cos\widehat{A}$, de $\sin\widehat{A}$, puis de $\tan\widehat{A}$.



Solution

- **Je commence par marquer l'angle dans le triangle rectangle.**
- **J'indique ensuite l'hypoténuse, le côté adjacent à l'angle et le côté opposé à l'angle.**
- **J'applique alors les formules du cours 1.**



1. $\cos\widehat{A} = \dfrac{\text{côté adjacent à } \widehat{A}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{AC}$.

$\sin\widehat{A} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{A}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{BC}{AC}$.

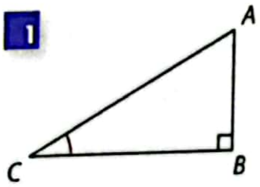
$\tan\widehat{A} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{A}}{\text{côté adjacent à } \widehat{A}} = \dfrac{BC}{AC}$.

2. $\cos\widehat{A} = \dfrac{4}{5}$; $\sin\widehat{A} = \dfrac{3}{5}$; $\tan\widehat{A} = \dfrac{3}{4}$.

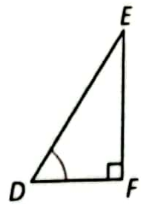
S'exercer

Pour les exercices 1 à 6, exprime le cosinus, le sinus puis la tangente de l'angle indiqué en rouge à l'aide des longueurs du triangle.

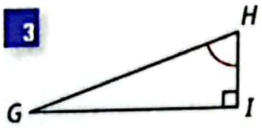
1



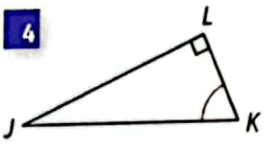
2



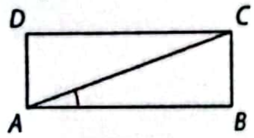
3



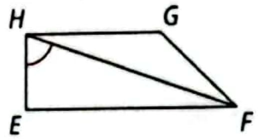
4



5 $ABCD$ est un rectangle.

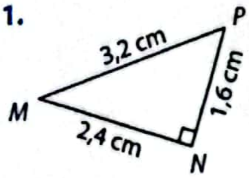


6 $EFGH$ est un trapèze rectangle.

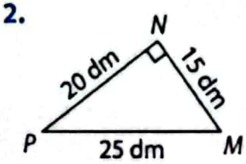


7 Pour chacun des triangles ci-dessous, indique la valeur exacte de $\cos\widehat{M}$, $\sin\widehat{M}$ puis $\tan\widehat{M}$.

1.



2.



8 EFG est un triangle rectangle en F tel que :

$EF = 6$ cm et $EG = 8$ cm.

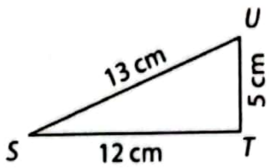
1. À l'aide du théorème de Pythagore, calcule la longueur FG. Arrondis à 0,01 près.

2. Déduis-en une valeur arrondie à 0,1 près de $\cos\widehat{E}$, de $\sin\widehat{E}$ puis de $\tan\widehat{E}$.

9 **1.** Vérifie que le triangle STU ci-contre est rectangle.

2. Déduis-en une valeur approchée à 0,1 près de :

a. $\cos\widehat{S}$; **b.** $\tan\widehat{S}$; **c.** $\tan\widehat{U}$.



10 **1.** Sur ton cahier, trace un triangle équilatéral ABC de coté 4 cm et place le point H, pied de sa hauteur issue de A.

2. Explique pourquoi $\cos\widehat{B} = \dfrac{1}{2}$.

3. a. Calcule la valeur exacte de AH.

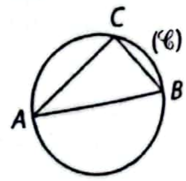
b. Déduis-en la valeur de $\sin\widehat{B}$, puis de $\tan\widehat{B}$.

11 $[AB]$ est le diamètre d'un cercle $(\mathscr{C})$ de rayon 6 cm. C est un point de $(\mathscr{C})$ tel que $BC = 2\sqrt{11}$ cm.

1. Calcule la longueur AC.

2. Déduis-en une valeur approchée à 0,1 près de $\cos\widehat{BAC}$ et de $\sin\widehat{BAC}$.

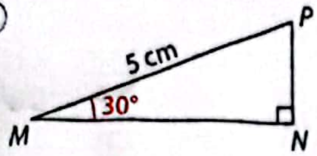
(On donne $\sqrt{11} \approx 3{,}3$.)

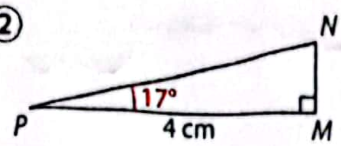


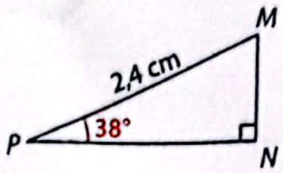
2 Apprendre à calculer une longueur

Énoncé

Dans chacun ces cas suivants *MNP* désigne un triangle rectangle.
Calcule une valeur arrondie au centième de la longueur *MN*.

① 

② 

③ 

Solution

- Je commence par exprimer la longueur cherchée à l'aide du cosinus, du sinus ou de la tangente de l'angle indiqué.
- J'utilise ensuite l'une des trois méthodes présentées ci-dessous.

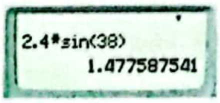
① • Dans le triangle *MNP* rectangle en *N* : $\cos 30° = \dfrac{MN}{NP}$, donc $MN = 5 \times \cos 30°$.
• Or 30° est un angle remarquable (voir le cours 3) :
$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ainsi, $MN = 5 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 8{,}66$ cm.

② • Dans le triangle *MNP* rectangle en *M* : $\tan 17° = \dfrac{MN}{PM}$, donc $MN = 4 \times \tan 17°$.
• Par lecture de la table trigonométrique page 188 :

degrés	sin	cos	tan
17	0,292	0,956	0,306

Ainsi, $MN \approx 4 \times 0{,}306 \approx 1{,}22$ cm.

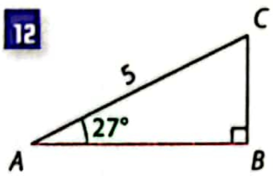
③ • Dans le triangle *MNP* rectangle en *N* : $\sin 38° = \dfrac{MN}{PM}$, donc $MN = 2{,}4 \times \sin 38°$.
• À l'aide d'une calculatrice :

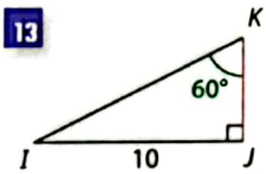


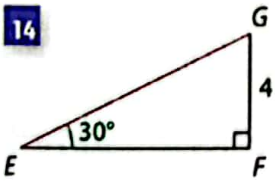
Ainsi, $MN \approx 1{,}48$ cm.

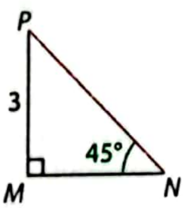
S'exercer

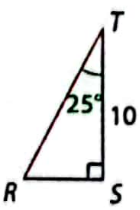
Pour les exercices 12 à 19, calcule une valeur approchée à 0,01 près de la longueur du segment coloré en rouge. L'unité est le cm.

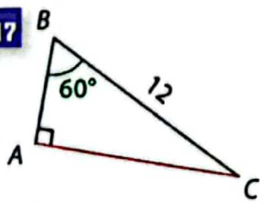
12 

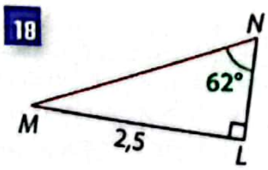
13 

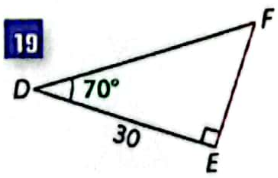
14 

15 

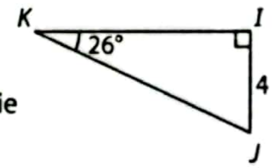
16 

17 

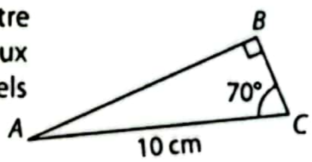
18 

19 

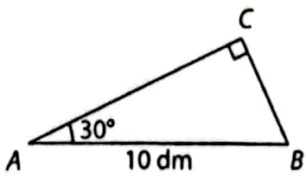
20 *IJK* est le triangle rectangle en *I* ci-contre. Calcule une valeur arrondie au dixième de *IJ* et de *JK*.

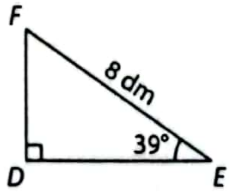


21 Encadre le périmètre de ce triangle entre deux nombres entiers naturels consécutifs.

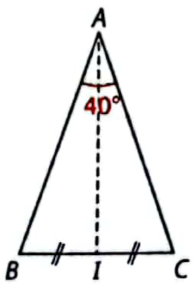


22 Lequel de ces deux triangles rectangles possède la plus grande aire ?





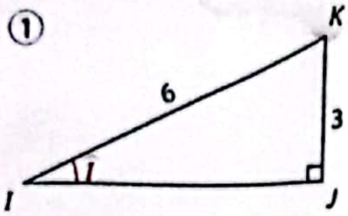
23 *ABC* est le triangle isocèle en *A* dessiné ci-contre.
$BC = 6$ cm.
1. Calcule les longueurs *AI* et *AB* arrondies au mm.
2. Déduis-en l'aire et le périmètre de ce triangle arrondis au dixième.

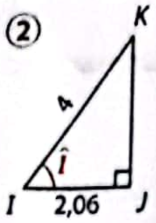


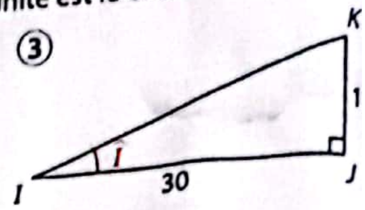
3 Apprendre à déterminer la mesure d'un angle

Énoncé

Dans chacun des cas, IJK désigne un triangle rectangle en J.
Détermine une valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle $\hat{I}$. L'unité est le cm.

① 

② 

③ 

Solution

- Je commence par exprimer le cosinus ou le sinus ou la tangente de l'angle à l'aide des longueurs données dans l'énoncé.
- J'utilise ensuite l'une des trois méthodes présentées ci-dessous.

① • Dans le triangle IJK rectangle en J :

$$\sin \hat{I} = \frac{KJ}{KI} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

• Or $\frac{1}{2}$ est le sinus d'un angle remarquable (voir le cours 3) :

$$\sin 30° = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, mes $\hat{I} = 30°$.

② • Dans le triangle IJK rectangle en J :

$$\cos \hat{I} = \frac{IJ}{IK} = \frac{2{,}06}{4} = 0{,}515.$$

• Par lecture de la table trigonométrique page 188 :

0,515	0,857	0,601	1,664	59
cos	sin	cos	tan	degrés

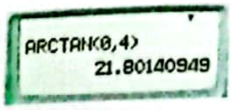
Ainsi, mes $\hat{I} = 59°$.

③ • Dans le triangle IJK rectangle en J :

$$\tan \hat{I} = \frac{JK}{IJ} = \frac{12}{30} = 0{,}4.$$

• À l'aide d'une calculatrice :

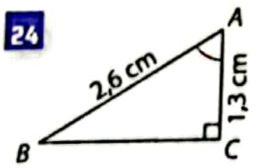
je tape Arctan ou Atn :

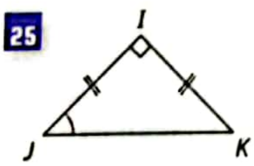


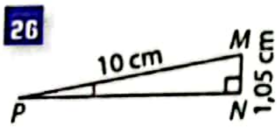
Ainsi, mes $\hat{I} \approx 22°$.

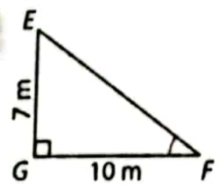
S'exercer

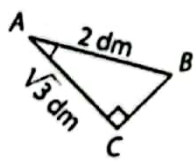
Pour les exercices 24 à 31, calcule une valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle marqué en rouge.

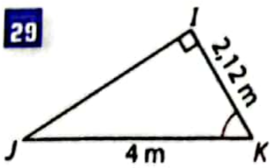
24 

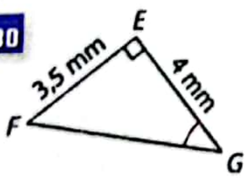
25 

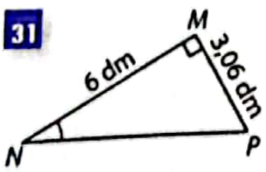
26 

27 

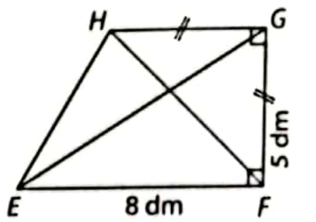
28 

29 

30 

31 

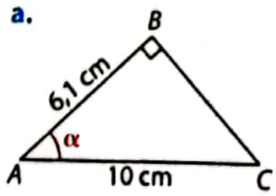
32 $EFGH$ est le trapèze rectangle dessiné ci-contre.



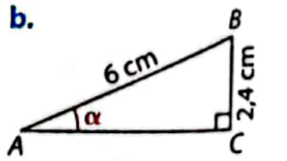
a. Détermine la mesure arrondie à l'unité des angles $\widehat{GHF}$; puis $\widehat{EGF}$.

b. Déduis-en la mesure des angles $\widehat{GFH}$; puis $\widehat{GEF}$.

33 Complète avec deux nombres entiers naturels consécutifs :

a. 

… < mes α < …

b. 

… < mes α < …

Lorsque la valeur n'est pas dans la table de trigonométrie, je l'encadre avec les deux valeurs les plus proches.

Recherche d'une longueur, d'un angle

34 Utilise la table de trigonométrie ou ta calculatrice pour donner :

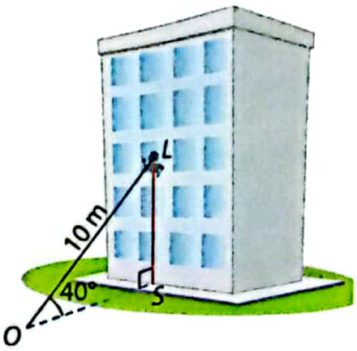
1. les arrondis d'ordre 3 de :
• cos 35° • sin 70° • tan 27° • cos 18° • tan 61° • sin 28°

2. la mesure, arrondie à l'entier le plus proche, des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, et $\widehat{C}$ tels que :
• $\cos\widehat{A} = 0{,}483$ • $\sin\widehat{B} = 0{,}831$ • $\tan\widehat{C} = 4$

35 Complète avec deux nombres entiers naturels consécutifs.

1. *$\cos\hat{I} = 0{,}2$ donc … < mes $\hat{I}$ < ….*
2. *$\sin\hat{J} = 0{,}8$ donc … < mes $\hat{I}$ < ….*
3. *$\tan\hat{K} = 0{,}4$ donc … < mes $\hat{I}$ < ….*

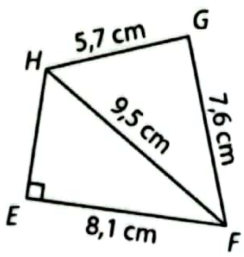
36 De la fenêtre du deuxième étage de son immeuble, Linda aperçoit un objet sur le sol.



1. À quelle distance du pied de cet immeuble, cet objet se trouve-t-il ? Arrondis au dm.

2. Sachant que chaque étage mesure 2,50 m, calcule la taille de Linda, arrondie au dm.

37 **1.** Démontre que le triangle *FGH* est rectangle.



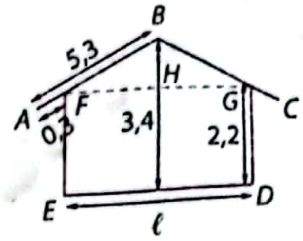
2. Calcule la longueur *EH*, arrondie au mm.

3. Détermine, un arrondi à l'unité, de la mesure de chacun des angles de la figure.

38 Cet avion de la Cameroun Airlines mesure 55 m de long.
À cet instant précis du décollage, les hauteurs au sol sont indiquées sur le schéma.

Détermine, au degré près, la mesure de l'angle entre l'avion et le sol.

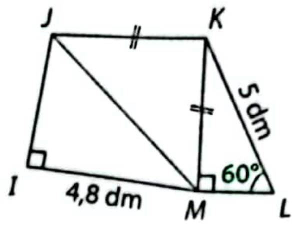
39 Le plan ci-contre est celui d'une maison en construction.
L'unité est le m.



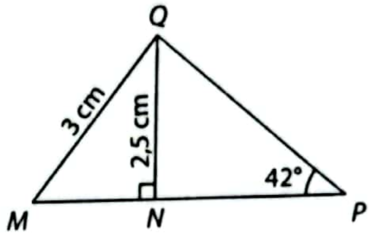
1. Détermine, au degré près, la mesure de l'angle $\widehat{HFB}$ du toit.

2. Calcule la largeur ℓ de cette maison.
Arrondis au cm.

40 Détermine les mesures, arrondies à l'unité, des angles manquants et calcule chaque longueur manquante, arrondie au dixième.



41 **1.** Calcule la valeur exacte de *MN*.



2. Utilise une autre méthode pour calculer un arrondi d'ordre 2 de *MN*.

3. Calcule un arrondi d'ordre 2 de *MP*.

Formules de trigonométrie

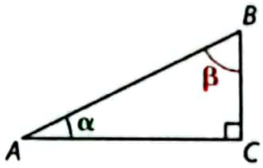
42 Dans chacun des cas ci-dessous, détermine la valeur exacte de cos α ; puis de tan α.

a. $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ **b.** $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ **c.** $\sin\alpha = \frac{1}{9}$

43 Dans chacun des cas ci-dessous, détermine la valeur exacte de sin α ; puis de tan α.

a. $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ **b.** $\cos\alpha = \frac{2}{7}$ **c.** $\cos\alpha = \frac{5}{11}$

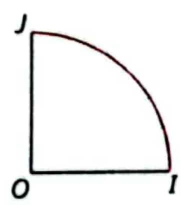
44 **1.** Complète cette phrase « *Les angles α et β sont des angles … car …* ».



2. Exprime cos α, puis sin β à l'aide des longueurs du triangle.
Déduis-en une formule de trigonométrie.

3. Démontre que $\tan\alpha \times \tan\beta = 1$.

45 Reproduis le quart de cercle de rayon 1 dm ci-contre et construis à la règle et au compas, les angles remarquables :
• $\widehat{IOM} = 30°$ • $\widehat{ION} = 60°$ • $\widehat{IOP} = 45°$



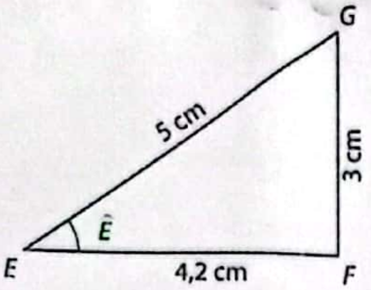
2

Bien comprendre mieux rédiger

46 Vérifier les hypothèses

1. Première situation

L'énoncé d'un exercice de trigonométrie commence par la donnée du triangle *EFG* ci-dessous.



Pour s'aider pour la suite de l'exercice, Aurélien a écrit les formules suivantes :

$\cos \hat{E} = \frac{EF}{EG}$; $\sin \hat{E} = \frac{FG}{EG}$; $\tan \hat{E} = \frac{FG}{EF}$

Non ! As-tu vérifié la nature du triangle EFG ?

Explique la remarque du professeur et effectue la vérification demandée.

2. Deuxième situation

Les longueurs *EG* et *FG* restent inchangées mais on prend désormais $EF = 4$ cm.

a. Calcule la valeur exacte de $\cos \hat{E}$.

b. Détermine un arrondi au degré près de la mesure de l'angle $\hat{E}$.

47 Bien lire la table de trigonométrie

Pour chacune des questions ci-dessous, deux élèves ont utilisé la table de trigonométrie page 188 pour répondre à la question posée. Indique l'élève qui a commis une erreur et explique d'où vient cette erreur.

1. Question : Détermine cos 55°.

Élève 1 : « cos 55° = 0,819 ».

Élève 2 : « cos 55° = 0,574 ».

2. Question : Encadre, entre deux entiers consécutifs, la mesure de l'angle $\hat{A}$ tel que $\cos \hat{A} = 0{,}847$.

Élève 1 : « 31 < mes $\hat{A}$ < 32 ».

Élève 2 : « 32 < mes $\hat{A}$ < 33 ».

48 Utiliser les formules de trigonométrie

ABC est le triangle ci-contre.

1. Utilise les codes de la figure pour donner la valeur de $\cos \hat{A}$.

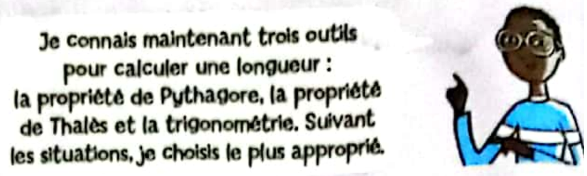
2. Indique la formule de trigonométrie qui permet à partir de $\cos \hat{A}$, de déduire :

• $\sin \hat{A}$ • $\tan \hat{A}$ • $\sin \hat{C}$.

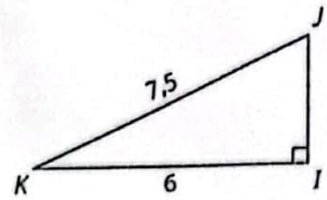
49 Utiliser le bon outil

Dans chacune des situations ci-dessous, calcule longueur *IJ*, arrondie au centième, et précise quel notion du cours de tu choisis d'utiliser.

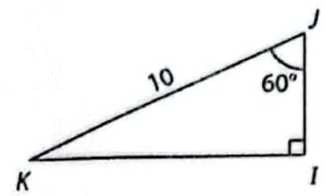
L'unité est le cm.



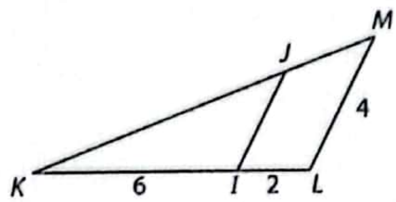
① *IJK* est le triangle rectangle en *I* ci-dessous.



② *IJK* est le triangle rectangle en *I* ci-dessous.



③ *IJK* est le triangle ci-dessous, *L* est un point de (*I*… et *M* le point d'intersection de (*KJ*) et de la parallè… à (*IJ*) passant par *L*.



50 Rédiger un programme de constructio…

[*AB*] est le segment ci-dessous.

1. Le professeur demande à ses élèves de rédiger … programme permettant de construire, sans rapporte… un point *C* tel que mes $\widehat{BAC} = 60°$.

Recopie et complète les étapes :

① *Je trace un quart de cercle de centre A et de rayon …*

② *Je marque le milieu I du segment … .*

③ *La perpendiculaire à … passant par … coupe … au point C.*

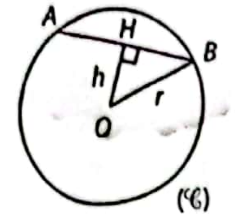
④ *Je trace [AC].*

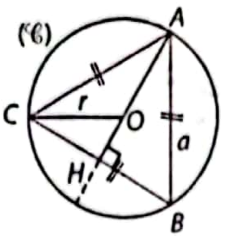
2. Écris un algorithme analogue pour construire, sa… rapporteur, un point *D* tel que mes $\widehat{BAD} = 30°$.

51 Des formules générales

Dans chacun des cas ci-dessous, démontre la formule proposée avec la méthode indiquée.

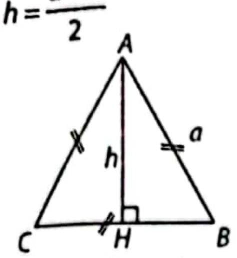
1. $AB = 2\sqrt{r^2 - h^2}$ **2.** $a = r\sqrt{3}$

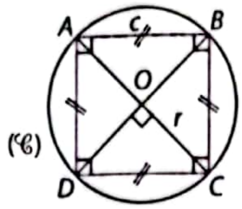




Propriété de Pythagore **Trigonométrie**

3. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **4.** $c = r\sqrt{2}$

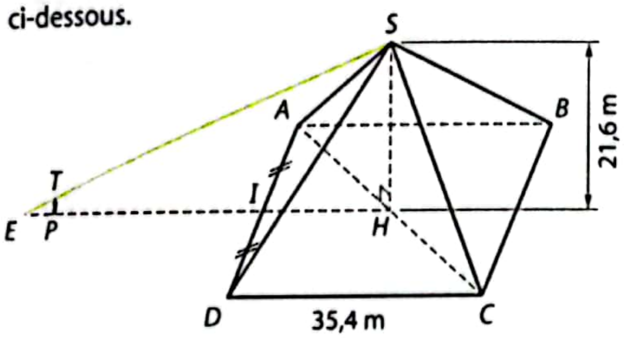




Propriété de Pythagore **Trigonométrie**

52 La pyramide du Louvre

Construite devant le musée, la pyramide du Louvre est une pyramide à base carrée. Elle est schématisée ci-dessous.



1. Calcule l'arrondi au dm de la longueur AC.

2. a. Détermine la mesure, au degré près, de l'angle $\widehat{SAH}$.

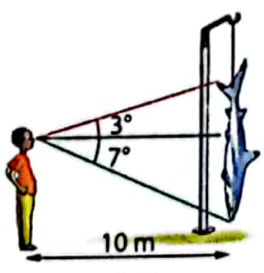
b. Calcule l'arrondi au m de la longueur AS.

3. Un rayon de soleil rase le sommet de la pyramide et un touriste mesurant 2 m. Sachant que $EH = 50$ m, calcule la distance, arrondie au m, entre le touriste et la pyramide c'est-à-dire la distance PI.

53 Pêche au requin

Le père d'Ali a pêché un superbe requin.

Ali le regarde comme indiqué sur le schéma.



1. Quelle est la taille, arrondie au cm, de ce poisson ?

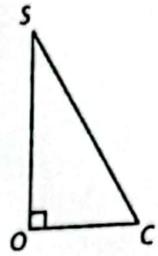
2. Si Ali s'éloigne de 10 m de plus et regarde à nouveau le requin, la mesure des angles vert et rouge sera-t-elle diminuée de moitié ? Justifie.

S'entraîner au BEPC

54 Avec les angles remarquables

La figure ci-contre représente un triangle SOC rectangle en O.

L'angle $\widehat{OSC}$ mesure 30° et $OC = 5$ cm.



1. Calcule SC.

2. Démontre que $OS = 5\sqrt{3}$.

N. B. : $\sin 30° = \cos 60° = 0{,}5$;

$\sin 30° = \cos 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

BEPC 2000

55 Mesure d'un angle au degré près

ADE est un triangle rectangle en D tel que : $AD = 12$ cm et $ED = 8$ cm.

1. Construis cette figure en vraie grandeur.

2. Démontre que $EA = 4\sqrt{13}$ cm.

3. a. Calcule la tangente de l'angle $\widehat{AED}$.

b. Donne un encadrement d'amplitude 1 degré de la mesure de l'angle $\widehat{AED}$.

On donne :

x en degré	54	55	56	57	58	59
tan x	1,37	1,42	1,48	1,53	1,60	1,66

D'après BEPC 2001

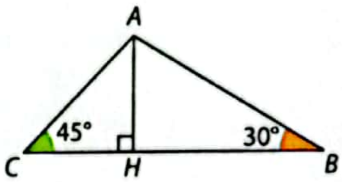
56 Aire d'un triangle

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle tel que :

mes $\widehat{ABC} = 30°$;

mes $\widehat{ACB} = 45°$ et

$AH = 5$ cm ;



où H est le pied de la hauteur issue de A.

1. Détermine HC et HB.

2. Calcule l'aire du triangle ABC.

BEPC 2009

57 Points situés sur un même cercle

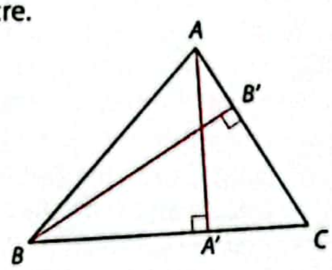
Observe la figure ci-contre.

On donne $AB = 7$ cm ;

mes $\widehat{BAC} = 58°$ et

mes $\widehat{BAA'} = 42°$.

(BB') et (AA') sont les hauteurs issues respectivement de B et de A.



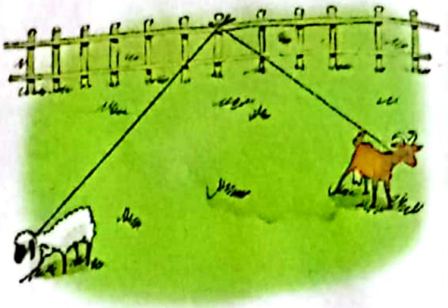
1. Calcule des valeurs approchées de AB' et BA', arrondis au mm.

2. Montre que A, B, B' et A' sont les points d'un même cercle dont on donnera le diamètre.

N. B. : $\cos 58° \approx 0{,}53$; $\sin 42° \approx 0{,}67$.

BEPC 2006

58 Le berger et ses chèvres



Tidjane est berger. Il a attaché une chèvre et un mouton le long d'une barrière, la chèvre avec une corde de 8 m et le mouton avec une corde de 10 m.

1. Lorsqu'ils tirent sur leur corde et se déplacent, quelle est la figure géométrique décrite par les deux animaux ?

2. Les deux cordes sont tendues. La chèvre se situe à 6,8 m de la barrière et le mouton à 5,85 m.

a. Réalise deux figures différentes qui peuvent schématiser cette situation.

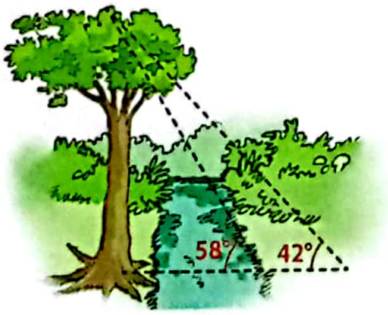
b. Détermine une mesure au degré près des angles entre la barrière et chacune des cordes.

c. Vérifie que, dans l'une des situations, on peut supposer que le triangle formé par la chèvre, le mouton et le point d'attache est rectangle.

Sous cette hypothèse, quelle distance, arrondie au dm, sépare la chèvre et le mouton ?

59 L'okoumé et la rivière

En bordure d'une rivière se trouve un bel okoumé. De la berge située en face de l'arbre, on mesure un angle de 58°. Si l'on s'éloigne de l'arbre de 10 m supplémentaire, l'angle est alors de 42°.

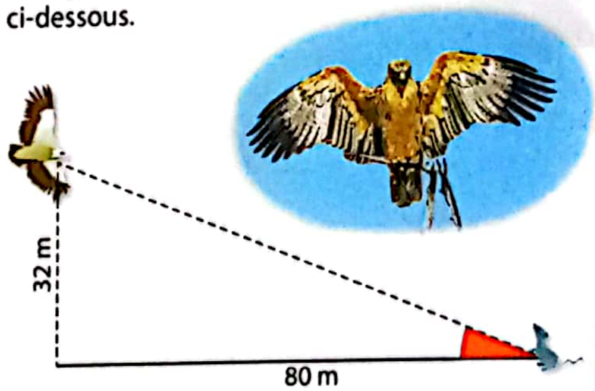


1. Calcule un arrondi au dm de la largeur de la rivière.

2. Quelle est la taille, arrondie au dm, de cet okoumé ?

60 L'aigle et la proie

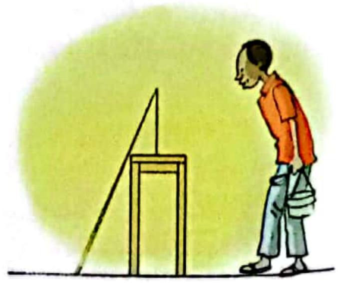
Un aigle du Cameroun et sa proie sont schématisés ci-dessous.



a. Détermine la mesure, arrondie à l'unité, de l'angle coloré en rouge.

b. Détermine, de deux façons différentes, la distance arrondie au m, qui sépare l'aigle de sa proie ?

61 La préparation du pêcheur



Yannick prépare ses appâts pour aller à la pêche.
Il a posé sa canne à pêche contre une table carrée.
Le fil pend verticalement au centre de la table.
Les dimensions de la table sont : 80 cm de haut et 40 cm de côté.

1. L'angle entre le sol et la canne à pêche mesure 65°.

a. Calcule au cm près la distance du pied de la canne à pêche au pied de la table.

b. À quelle distance du sol se trouve le haut de la canne à pêche ? Arrondis au cm.

2. Le pied de la canne à pêche a légèrement glissé, de sorte que le haut de la canne à pêche se trouve désormais à 96 cm du sol.

Détermine une mesure, arrondie au degré près, de l'angle entre le sol et la canne à pêche.

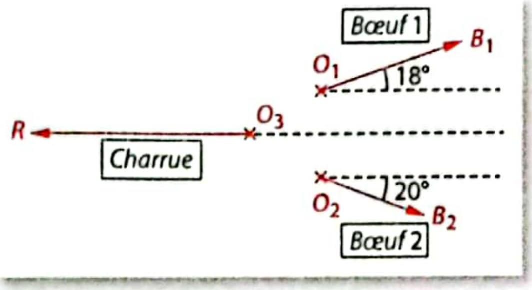
3 L'outil vectoriel

Pour démarrer

Le labour d'un champ

Pour labourer son champ, un fermier utilise ses deux bœufs. L'un a atteint sa taille adulte et est très vigoureux, l'autre est plus jeune et a moins de force.
Les forces de traction des deux bœufs sont représentées par les vecteurs $\overrightarrow{O_1 B_1}$ et $\overrightarrow{O_2 B_2}$. La résistance au sol qui s'exerce sur la lame de la charrue est représentée par le vecteur $\overrightarrow{O_3 R}$.

1 **a.** Reproduis le schéma ci-contre en vraie grandeur sachant que les droites en pointillés noirs sont parallèles, que $O_1 B_1 = 4$ cm, $O_2 B_2 = 3$ cm, $O_3 R = 6$ cm et que le triangle $O_1 O_2 O_3$ est équilatéral, de côté 1 cm.
b. En-dessous de ce premier schéma, place un point O et les points B'_1, B'_2 et R' tels que : $\overrightarrow{OB'_1} = \overrightarrow{O_1 B_1}$; $\overrightarrow{OB'_2} = \overrightarrow{O_2 B_2}$; $\overrightarrow{OR'} = \overrightarrow{O_3 R}$.



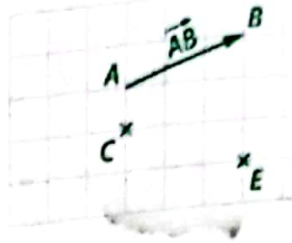
2 **a.** Représente le vecteur $\overrightarrow{OB'_1} + \overrightarrow{OB'_2}$, laisse apparaître les traits de constructions.
b. Peut-on affirmer que les bœufs ont suffisamment de force pour faire avancer la charrue ? Justifie par des observations.
c. Le fermier doit-il exercer une force latérale pour s'assurer que le sillon reste droit ? Justifie par des observations.

Les historiens estiment que l'homme a commencé à utiliser le bœuf comme animal de labour dès le IVe millénaire avant J.-C.

Savoir-faire

À la fin de ce chapitre, tu sauras :
- construire un représentant d'un vecteur $k\vec{u}$;
- utiliser l'outil vectoriel pour étudier le parallélisme, l'orthogonalité ;
- déterminer les coordonées d'un vecteur, d'une somme de vecteurs, d'un vecteur $k\vec{u}$ dans un repère ;
- calculer la distance entre deux points à l'aide des coordonnées.

1 Une nouvelle notation › Cours 1



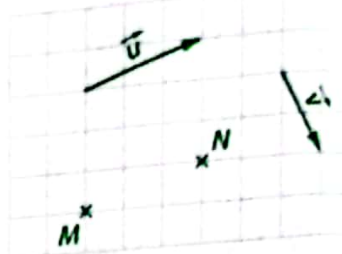
1 $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur, C et E deux points du plan.

a. Construis les points D et F, images des points C et E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b. Complète la phrase : « $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ car ces vecteurs ont même …, même … et même … »

c. Construis un autre vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On note ce vecteur $\vec{u}$ et on dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$… sont des représentants d'origine A, C… du vecteur $\vec{u}$.

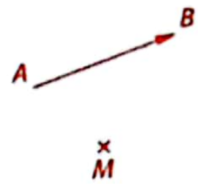


2 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, M et N sont des points du plan.

a. Construis les représentants d'origine M des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Utilise la règle du parallélogramme pour tracer le vecteur $\overrightarrow{MP} = \vec{u} + \vec{v}$.

b. Construis le représentant d'origine M du vecteur $\vec{u}$ et le représentant d'origine N du vecteur $\vec{v}$. Utilise la relation de Chasles pour tracer le vecteur $\overrightarrow{MP} = \vec{u} + \vec{v}$. (Rappel : selon la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.)

2 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel › Cours 1



1 $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur et M un point du plan. $AB = 4$ cm.

a. Construis le point N du plan tel que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.

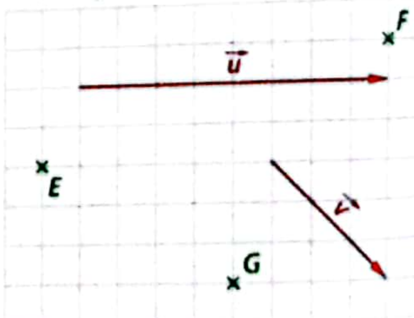
Le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$ est noté $2\overrightarrow{AB}$.

b. Compare les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{AB}$ (direction, sens, longueur).

c. Construis le point P du plan tel que : $MABP$ est un trapèze non croisé avec $(AB) // (MP)$ et $MP = 1{,}5AB$.

Le vecteur $\overrightarrow{MP}$ est noté $1{,}5\overrightarrow{AB}$; le vecteur $\overrightarrow{PM}$ est noté $-1{,}5\overrightarrow{AB}$.

d. Compare les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PM}$, puis $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MP}$ (direction, sens, longueur).



2 $\vec{u}$ est un vecteur et E, F, G sont trois points du plan.

a. Construis le représentant d'origine E du vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$; puis du vecteur $3\left(\frac{1}{2}\vec{u}\right)$.

b. Construis le représentant d'origine E du vecteur $\left(3 \times \frac{1}{2}\right)\vec{u}$. Que constates-tu ?

c. Complète la formule :

Pour k et k' deux nombres réels et $\vec{u}$ un vecteur, $k(k'\vec{u}) = (\ldots \times \ldots)\vec{u}$.

3 a. Construis le représentant d'origine F du vecteur $2\vec{u}$; puis du vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$ et enfin du vecteur $2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u}$.

b. Construis le représentant d'origine F du vecteur $\left(2 + \frac{1}{2}\right)\vec{u}$. Que constates-tu ?

c. Complète la formule : *Pour k et k' deux nombres réels et $\vec{u}$ un vecteur, $(k + k')\vec{u} = \ldots + \ldots$*

4 a. Construis le représentant d'origine G du vecteur $2\vec{u} + 2\vec{v}$.

b. Construis le représentant d'origine G du vecteur $2(\vec{u} + \vec{v})$. Que constates-tu ?

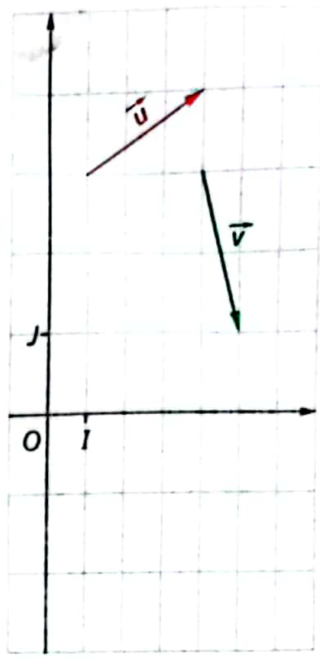
c. Complète la formule : *Pour k un nombre réel et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs, $k(\vec{u} + \vec{v}) = \ldots + \ldots$*

3 Coordonnées dans un repère

› Cours 2

Définition : *Dans un repère (O, I, J) du plan, les coordonnées (x ; y) d'un vecteur $\vec{u}$ sont celles du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. On note $\vec{u}(x ; y)$.*

(O, I, J) est le repère ci-contre, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs.



1 **a.** Construis les points M et N tels que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$.
b. Utilise la définition ci-dessus pour en déduire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2 **a.** Construis les représentants d'origine O des vecteurs :
$$\vec{u} + \vec{v}, \ \vec{u} - \vec{v} \ \text{ et } \ 2\vec{u}.$$
b. Déduis-en les coordonnées de ces trois vecteurs.
Peut-on déduire ces coordonnées directement à l'aide des coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$?

3 **a.** Dans le repère ci-contre, place deux points au hasard :
$$A(x_A ; y_A) \ \text{ et } \ B(x_B ; y_B).$$
Construis le vecteur $\overrightarrow{OC}$, représentant d'origine O du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
b. Déduis-en les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de x_A, x_B, y_A et y_B.

4 Vecteurs colinéaires, vecteurs orthogonaux

› Cours 2 et 3

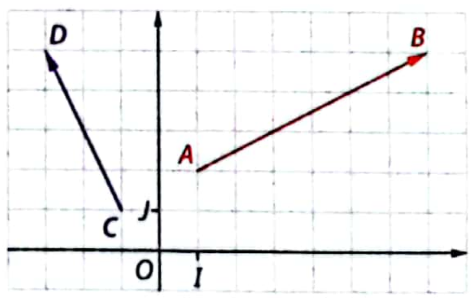
1 $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ sont deux vecteurs d'un repère (O, I, J).
Si nécessaire, aide-toi d'exemples, trace un repère (O, I, J) pour répondre aux questions ci-dessous.
a. k désigne un nombre réel.
Quelles sont les coordonnées du vecteur $k\vec{v}$?
b. Lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires que peux-tu dire :
• du tableau ci-contre ?

x	y
x'	y'

• du résultat du calcul $xy' - x'y$?

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe un nombre réel k tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$.

2 Dans le plan muni du repère **orthonormé** (O, I, J), on donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}(6 ; 3)$ et $\overrightarrow{CD}(-2 ; 4)$.
a. Vérifie à l'aide de ton équerre ou de ton rapporteur que $(AB) \perp (CD)$.
b. Calcule $6 \times (-2) + 3 \times 4$.



3 Plus généralement, on note $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ deux vecteurs orthogonaux non nuls de ce repère et on note M et N les points tels que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$.
a. Utilise l'info-bulle ci-contre pour déterminer la nature du triangle OMN.
b. Justifie que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $x' - x$ et $y' - y$.
c. Applique la propriété de Pythagore pour montrer que : $xx' + yy' = 0$.

Deux vecteurs sont orthogonaux lorsqu'ils ont des directions orthogonales ou que l'un d'eux est le vecteur nul.

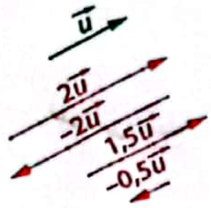
3 Cours

1 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

a Définition et premières propriétés

Définition **Le produit $k\vec{u}$ d'un vecteur non nul $\vec{u}$ par un nombre réel non nul k est le vecteur $\vec{v}$ tel que :**
- **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction ;**
- **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont $\begin{cases} \text{le même sens si } k > 0 \\ \text{des sens contraires si } k < 0 \end{cases}$;**
- **$\|\vec{v}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$, où $|k|$ désigne la valeur absolue de k.**

Exemples :



Notation : $\|\vec{u}\|$ désigne la **norme du vecteur $\vec{u}$**, c'est-à-dire sa longueur.
Remarque : Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $k = 0$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

Propriétés **$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ désignent des vecteurs, k et k' désignent des nombres réels.**

$$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u} \qquad k\vec{u} + k'\vec{u} = (k+k')\vec{u} \qquad k\vec{u} + k\vec{u}' = k(\vec{u} + \vec{u}')$$

Exemples : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ désignent des vecteurs, $k = \dfrac{1}{3}$ et $k' = 2$.

Construisons le point D tel que :

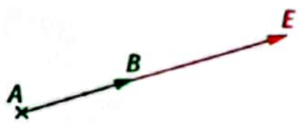
$\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{3}(2\overrightarrow{AB})$

$= \left(\dfrac{1}{3} \times 2\right)\overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Construisons le point E tel que :

$\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB}$

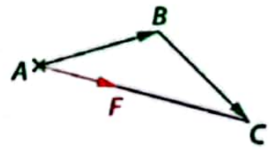
$= \left(\dfrac{1}{3} + 2\right)\overrightarrow{AB} = \dfrac{7}{3}\overrightarrow{AB}$



Construisons le point F tel que :

$\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

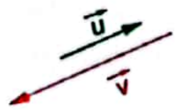
$= \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$



b Vecteurs colinéaires

Définition **Deux vecteurs sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction ou que l'un de ces vecteurs est nul.**

Exemple :



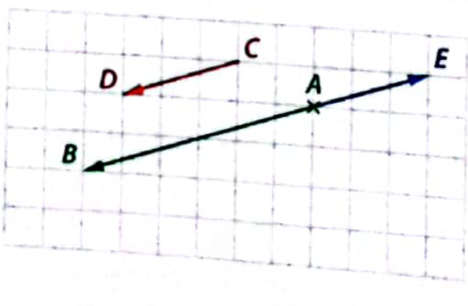
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs.**
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires **équivaut à** **il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.**

Droites parallèles **Les droites (AB) et (CD) sont parallèles** **équivaut à** **les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.**

Points alignés **Les points A, B et E sont alignés** **équivaut à** **les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.**

Exemples :



- $\overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc il existe $k = \dfrac{1}{2}$ tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.
Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. On en déduit que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AE}$, donc il existe $k = -2$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AE}$.
Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires. On en déduit que les points A, B et E sont alignés.

2 Coordonnées d'un vecteur

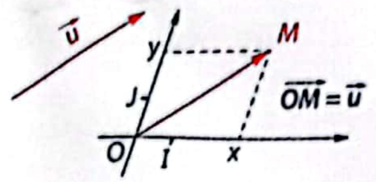
Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

En posant $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, on peut parler indifféremment du repère (O, I, J) ou du repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

a Coordonnées d'un vecteur

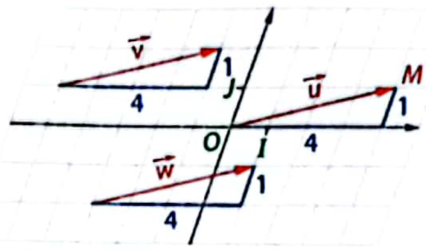
Définitions et notation **$\vec{u}$ désigne un vecteur.**

- **Dans le repère (O, I, J), les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées $(x\,;y)$ du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.**
- **Notation : Pour $M(x\,;y)$, on note $\vec{u}\,(x\,;y)$.**
- **x est l'abscisse du vecteur $\vec{u}$ et y l'ordonnée du vecteur $\vec{u}$.**



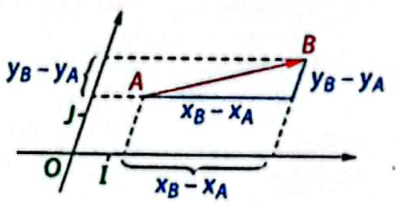
Propriété **Deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont égaux ⟨équivaut à⟩ $x = x'$ et $y = y'$.**

Exemple : Les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ tracés ci-contre sont égaux.
$\vec{u} = \vec{v} = \vec{w} = \overrightarrow{OM}$ or les coordonnées du point M sont $(4\,;1)$
donc $x_{\vec{u}} = x_{\vec{v}} = x_{\vec{w}} = 4$
et $y_{\vec{u}} = y_{\vec{v}} = y_{\vec{w}} = 1$.
On note $\vec{u}\,(4\,;1)$, $\vec{v}\,(4\,;1)$ et $\vec{w}\,(4\,;1)$.

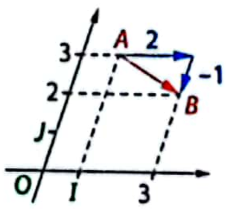


Propriété **$A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ désignent deux points du repère (O, I, J).**
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A).$$



Exemple : Dans un repère, on donne $A\,(1\,;3)$ et $B\,(3\,;2)$
les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :
$x_B - x_A = 3 - 1 = 2$ et $y_B - y_A = 2 - 3 = -1$.
On note $\overrightarrow{AB}(2\,;-1)$.



b Opérations sur les vecteurs

Propriété **Somme de deux vecteurs**
Si $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$, alors $\vec{u} + \vec{v}\,(x + x'\,;y + y')$.

Propriété **Multiplication d'un vecteur par un nombre réel**
k désigne un nombre réel. Si $\vec{u}\,(x\,;y)$, alors $k\vec{u}\,(kx\,;ky)$.

Exemples :
- On donne $\vec{u}\,(3\,;-4)$ et $\vec{v}\,(5\,;7)$.
$\vec{u} + \vec{v}\,(3 + 5\,;-4 + 7)$
c'est-à-dire $\vec{u} + \vec{v}\,(8\,;3)$.
- On donne $\vec{u}\,(-3\,;5)$ et $k = 2$.
$2\vec{u}\,(2 \times (-3)\,;2 \times 5)$
c'est-à-dire $\vec{u}\,(-6\,;10)$.

c Colinéarité de deux vecteurs

Propriété **Deux vecteurs $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$ sont colinéaires ⟨équivaut à⟩ $xy' - x'y = 0$.**

Exemple : On donne $\vec{u}\,(0{,}4\,;1)$ et $\vec{v}\,(-2\,;-5)$.
$xy' - x'y = 0{,}4 \times (-5) - (-2) \times 1 = -2 + 2 = 0$.
Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Contre-exemple : On donne $\vec{u}\,(3\,;7)$ et $\vec{v}\,(4\,;6)$.
$xy' - x'y = 3 \times 6 - 4 \times 7 = 18 - 28 = -10 \neq 0$.
Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

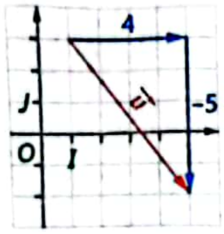
3 Calculs dans un repère orthonormé

Dans tout ce paragraphe, le plan est muni d'un repère (O, I, J) **orthonormé**, c'est-à-dire tel que $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ = 1$.

a Norme d'un vecteur, distance entre deux points

Propriété **Dans le repère (O, I, J), si $\vec{u}(x\,;y)$, alors $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$.**

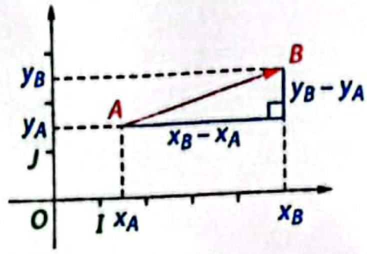
Exemple :



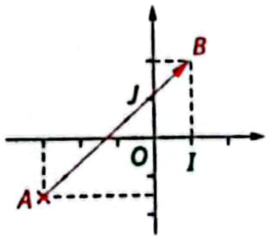
Dans le repère orthonormé (O, I, J) ci-contre,
$\vec{u}(4\,;-5)$ donc $\|\vec{u}\|^2 = 4^2 + (-5)^2 = 16 + 25 = 41$.
On peut dire également que $\|\vec{u}\| = \sqrt{41}$.

Propriété **Dans le repère (O, I, J), si $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$, alors :**

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$



Exemple :



Dans le repère orthonormé (O, I, J) ci-contre, on a :
$A\left(-3\,;-\dfrac{3}{2}\right)$ et $B(1\,;2)$.

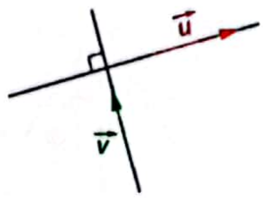
Donc $AB = \sqrt{(1-(-3))^2 + \left(2-\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{(1+3)^2 + \left(2+\dfrac{3}{2}\right)^2}$

d'où $AB = \sqrt{4^2 + \left(\dfrac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \dfrac{49}{4}} = \sqrt{\dfrac{113}{4}} = \dfrac{\sqrt{113}}{2}$.

b Orthogonalité de deux vecteurs

Définition **Deux vecteurs sont dits orthogonaux lorsqu'ils ont des directions orthogonales ou que l'un de ces vecteurs est le vecteur nul.**

Exemple :



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Propriété **Deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont orthogonaux équivaut à $xx' + yy' = 0$.**

Exemple : On donne $\vec{u}(0{,}2\,;4)$ et $\vec{v}\left(-10\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

$xx' + yy' = 0{,}2 \times (-10) + 4 \times \dfrac{1}{2} = -2 + 2 = 0$.

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Contre-exemple : On donne $\vec{u}(4\,;-5)$ et $\vec{v}\left(-\dfrac{1}{4}\,;2\right)$.

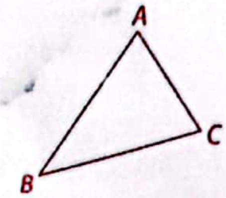
$xx' + yy' = 4 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) + (-5) \times 2 = -1 - 10 = -11 \neq 0$.

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

1 Apprendre à utiliser la colinéarité

Énoncé

ABC est le triangle ci-contre.

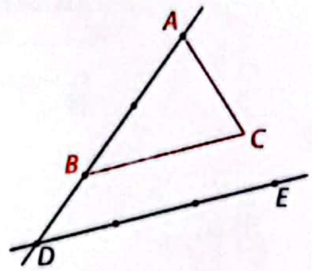


1. Construis les points *D* et *E* tels que $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

2. a. Utilise la relation de Chasles pour démontrer que : $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.
b. Déduis-en que les points *A*, *C* et *E* sont alignés.

Solution

- Pour la construction des points, j'utilise la définition du cours 1.a page 34.
- Pour démontrer que trois points sont alignés ou que deux droites sont parallèles, je montre que des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel *k* tel que : $\vec{u}=k\vec{v}$ ou $\vec{v}=k\vec{u}$.



1. • Les points *A*, *B* et *D* vont être alignés car, d'après la définition, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ ont la même direction : je trace la droite (*AB*).
$k=\frac{3}{2}>0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont le même sens, ainsi le point *D* appartient à la demi-droite [*AB*).
Enfin l'égalité des longueurs $AD=\frac{3}{2}AB$ permet de placer le point *D*.
• Je procède de la même façon pour le point *E*, en commençant par tracer la parallèle à (*BC*) passant par *D*.

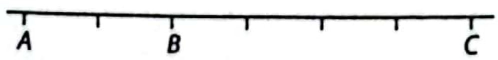
2. a. D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.
Or $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Ainsi, $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.
b. D'après le a., il existe un nombre réel $k=\frac{3}{2}$ tel que $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AC}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
J'en déduis que les points *A*, *C* et *E* sont alignés.

S'exercer

1 1. Trace un segment [*IJ*] de longueur 5 cm.
2. Place les points *K*, *L*, *M* et *N* tels que :
a. $\overrightarrow{IK}=2\overrightarrow{IJ}$; b. $\overrightarrow{IL}=\frac{5}{2}\overrightarrow{IJ}$; c. $\overrightarrow{JM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$; d. $\overrightarrow{JN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.

2 1. Trace un triangle équilatéral *EFG* de 3 cm de côté.
2. Place les points *H*, *I*, *J* et *K* tels que :
a. $\overrightarrow{EH}=3\overrightarrow{EG}$; b. $\overrightarrow{HI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$;
c. $\overrightarrow{JG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{FE}$; d. $\overrightarrow{HK}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$.

3 *A*, *B* et *C* sont trois points de l'axe gradué ci-dessous.

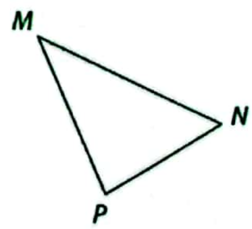


Dans chaque cas détermine le nombre réel *k* tel que :
1. $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$; 2. $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{BA}$; 3. $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{CB}$.

4 Parmi les relations ci-dessous, indique celles qui caractérisent le milieu *I* d'un segment [*AB*].
1. $\overrightarrow{IA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 2. $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$; 3. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$;
4. $IA=IB$; 5. $IA+IB=0$; 6. $\overrightarrow{BI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

5 On donne les égalités vectorielles :
$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$ et $-\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}=\frac{4}{5}\overrightarrow{EF}$.
1. Exprime le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{EF}$.
2. Qu'en déduis-tu pour les droites (*AB*) et (*EF*) ?

6 *MNP* est le triangle ci-contre.



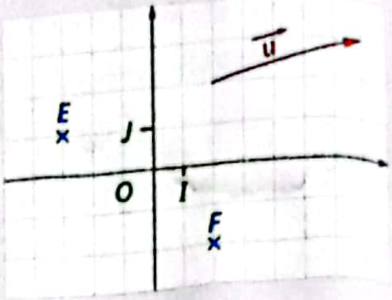
1. Construis les points *A* et *B* tels que :
$3\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{NM}$ et $3\overrightarrow{NB}=2\overrightarrow{NP}$.
2 Exprime le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MP}$.
3. Qu'en déduis-tu pour les droites (*AB*) et (*MP*) ?

2 Apprendre à déterminer les coordonnées

Énoncé

Dans le repère (O, I, J) ci-contre, on a placé les points $E(-3\,;1)$, $F(2\,;-2)$ et on a tracé un vecteur $\vec{u}$.

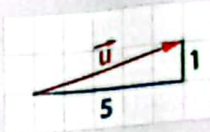
1. Détermine, par lecture graphique, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.
2. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FI}$.
3. Calcule les coordonnées du point G qui vérifie $\overrightarrow{EG} = \vec{u}$.
4. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$ et $3\overrightarrow{FI}$.



Solution

À partir de l'origine du vecteur, je me déplace parallèlement à la droite (OI) pour déterminer l'abscisse, puis parallèlement à la droite (OJ) pour déterminer l'ordonnée.

1.



Je lis $\vec{u}(5\,;1)$.

2. J'applique le cours : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,; y_B - y_A)$.

• $x_F - x_E = 2 - (-3) = 5$;
$y_F - y_E = -2 - 1 = -3$.
Donc $\overrightarrow{EF}(5\,;-3)$
• $x_I - x_F = 1 - 2 = -1$;
$y_I - y_F = 0 - (-2) = 2$.
Donc $\overrightarrow{FI}(-1\,;2)$

3. J'utilise la propriété : $\vec{u}(x\,;y) = \vec{v}(x'\,;y')$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.

On note $G(x_G\,;y_G)$.
Ainsi $\overrightarrow{EG}(x_G - (-3)\,; y_G - 1)$,
c'est-à-dire $\overrightarrow{EG}(x_G + 3\,; y_G - 1)$.
Donc $\overrightarrow{EG} = \vec{u}$ équivaut à
$x_G + 3 = 5$ et $y_G - 1 = 1$.
Ainsi, $x_G = 2$ et $y_G = 2$.

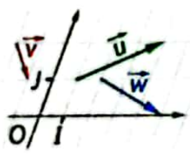
4. J'applique les propriétés sur les opérations $\vec{u} + \vec{v}(x + x'\,; y + y')$ et $k\vec{u}\,(kx\,; ky)$.

• On sait que $\overrightarrow{EF}(5\,;-3)$,
de plus $\overrightarrow{EG} = \vec{u}$, donc $\overrightarrow{EG}(5\,;1)$.
Ainsi, $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}(5 + 5\,; -3 + 1)$,
c'est-à-dire $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}(10\,;-2)$.
• On sait que $\overrightarrow{FI}(-1\,;2)$,
donc $3\overrightarrow{FI}(3 \times (-1)\,; 3 \times 2)$,
c'est-à-dire $3\overrightarrow{FI}(-3\,;6)$.

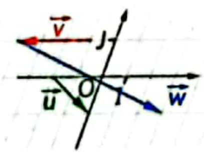
S'exercer

Pour les exercices 7 à 10, détermine, par lecture graphique, les coordonnées de chaque vecteur.

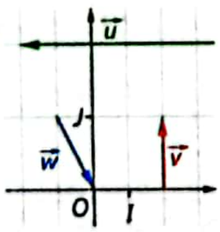
7



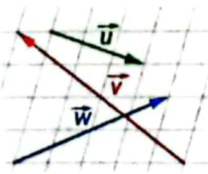
8



9

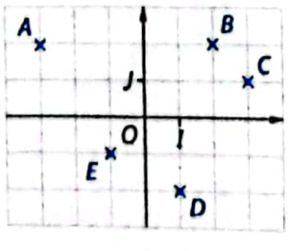


10



11 Calcule les coordonnées des vecteurs ci-dessous :

1. a. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
b. $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{CE}$.
2. a. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DC}$.
b. $-\overrightarrow{AB}$ et $5\overrightarrow{BC}$.



12 Dans un repère (O, I, J) du plan, on donne : $K(-5\,;4)$, $L(2\,;0)$, $M(1\,;3)$, $N(3\,;-1)$.

1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{MN}$.
2. a. Place ces quatre points et trace ces deux vecteurs dans un repère.
b. Trace le représentant d'origine O du vecteur $\overrightarrow{KL}$.

Pour les exercices 13 à 16, calcule les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

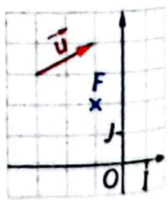
13 $A(3\,;-4)$ et $\vec{u}(1\,;2)$.

14 $A(-1\,;0)$ et $\vec{u}(10\,;3)$.

15 $A(-1\,;2)$ et $\vec{u}(5\,;-3)$.

16 $A(4\,;7)$ et $\vec{u}(3\,;-4)$.

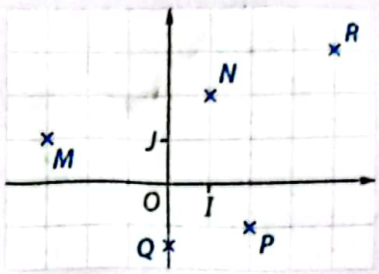
17 1. a. Détermine, par lecture graphique, les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{FE} = \vec{u}$.
b. Retrouve ces résultats par le calcul.
2. a. Détermine, par lecture graphique, les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{FG} = 2\vec{u}$.
b. Retrouve ces résultats par le calcul.



3 Apprendre à étudier le parallélisme, l'orthogonalité

Énoncé

Dans le repère orthonormé (O, I, J) ci-contre, on a placé les points $M(-3\,;1)$, $N(1\,;2)$, $P(2\,;-1)$, $Q\left(0\,;-\frac{3}{2}\right)$, et $R(4\,;3)$.



1. a. Démontre que les droites (MN) et (QP) sont parallèles.
b. Les points M, N et R sont-ils alignés ? Justifie.
2. a. Démontre que les droites (RN) et (NP) sont orthogonales.
b. Le triangle NPQ est-il rectangle en P ? Justifie.

Solution

Pour étudier le parallélisme ou l'alignement, je cherche à savoir si deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires et je vérifie si $xy' - x'y$ est égal ou non à 0.

1. a. $\overrightarrow{MN}(4\,;1)$ et $\overrightarrow{QP}\left(2\,;\frac{1}{2}\right)$.
Or, $4 \times \frac{1}{2} - 2 \times 1 = 2 - 2 = 0$,
donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$ sont colinéaires, j'en déduis que les droites (MN) et (QP) sont parallèles.
b. $\overrightarrow{MN}(4\,;1)$ et $\overrightarrow{MR}(7\,;2)$.
Or, $4 \times 2 - 7 \times 1 = 8 - 7 = 1 \neq 0$,
donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MR}$ ne sont pas colinéaires, j'en déduis que les points M, N et R ne sont pas alignés.

Dans un repère orthonormé, pour étudier l'orthogonalité, je cherche à savoir si deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont orthogonaux et je vérifie si $xx' + yy'$ est égal ou non à zéro.

2. a. $\overrightarrow{RN}(-3\,;-1)$ et $\overrightarrow{NP}(1\,;-3)$.
Or, $-3 \times 1 + (-1) \times (-3) = -3 + 3 = 0$,
donc les vecteurs $\overrightarrow{RN}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont orthogonaux, j'en déduis que les droites (RN) et (NP) sont orthogonales.
b. $\overrightarrow{NP}(1\,;-3)$ et $\overrightarrow{QP}\left(2\,;\frac{1}{2}\right)$.
Or, $1 \times 2 + (-3) \times \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$,
donc les vecteurs $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{QP}$ ne sont pas orthogonaux, j'en déduis que les droites (NP) et (QP) ne sont pas orthogonales et que le triangle NPQ n'est pas rectangle en P.

S'exercer

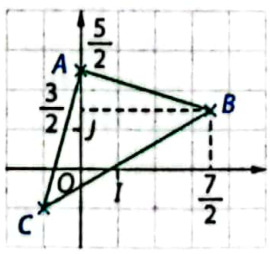
Pour les exercices 18 à 20, le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans chacun des cas, détermine si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, orthogonaux ou ni l'un, ni l'autre.

18 **1.** $\vec{u}(2\,;-3)$ et $\vec{v}(4\,;5)$ **2.** $\vec{u}(0\,;4)$ et $\vec{v}(0\,;-3)$

19 **1.** $\vec{u}(3\,;-1)$ et $\vec{v}\left(-\frac{3}{4}\,;\frac{1}{4}\right)$ **2.** $\vec{u}(10\,;20)$ et $\vec{v}(-4\,;2)$

20 **1.** $\vec{u}(5\,;1)$ et $\vec{v}\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$ **2.** $\vec{u}\left(\frac{1}{3}\,;-\frac{5}{7}\right)$ et $\vec{v}\left(3\,;\frac{7}{5}\right)$

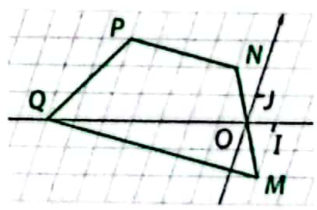
21 Le repère (O, I, J) ci-contre est orthonormé.
1. Conjecture la nature du triangle ABC.
2. Démontre cette conjecture par un calcul.



Dans un repère orthonormé, pour calculer une longueur, j'utilise la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

22 **1.** Dans un repère, place les points $E(-4\,;2)$, $F(3\,;1)$ et $G(13\,;5)$. Que peux-tu conjecturer ?
2. Valide ou invalide cette conjecture par un calcul.

23 Dans le repère (O, I, J) ci-contre, on a placé les points $M(1\,;-2)$, $N(-1\,;2)$, $P(-5\,;3)$ et $Q(-7\,;0)$.



1. Conjecture la nature du quadrilatère $MNPQ$.
2. Démontre cette conjecture par un calcul.

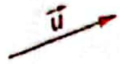
24 Dans chacun des cas ci-dessous, calcule la valeur de m pour laquelle les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
1. $\vec{u}(m\,;3)$ et $\vec{v}(-4\,;5)$ **2.** $\vec{u}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$ et $\vec{v}(-3\,;m)$

25 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Calcule la valeur de m pour laquelle les vecteurs $\vec{u}(m\,;-1)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{3}\,;5\right)$ sont orthogonaux.

Activités d'application

Constructions de vecteurs

26 Reproduis le vecteur $\vec{u}$ ci-contre sur ton cahier, puis trace les vecteurs :

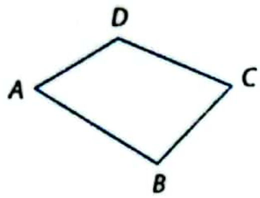


- $2\vec{u}$;
- $-3\vec{u}$;
- $\frac{1}{2}\vec{u}$;
- $-\frac{2}{3}\vec{u}$.

27 **1.** Trace sur ton cahier un vecteur $\vec{u}$ et un vecteur $\vec{v}$, non colinéaire à $\vec{u}$.
2. a. Trace les vecteurs suivants : $3\vec{u}$; $\frac{1}{2}\vec{u}$; $-\vec{v}$.
b. Trace les vecteurs suivants :

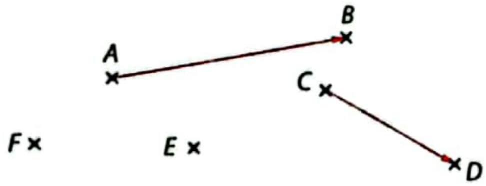
- $\vec{u}+\vec{v}$;
- $\vec{u}-\vec{v}$;
- $3\vec{u}+\vec{v}$;
- $\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}$.

28 *ABCD* est le quadrilatère ci-dessous.



1. Reproduis la figure puis construis :
a. le représentant d'origine *D* du vecteur $\overrightarrow{BC}$;
b. le représentant d'origine *B* du vecteur $\overrightarrow{DA}$.
2. Trace le représentant d'origine *A* du vecteur $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$.

29



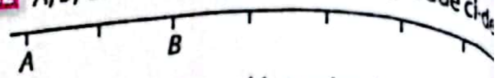
Utilise ta règle et ton compas pour tracer :
1. le représentant d'origine *C* du vecteur $\overrightarrow{AB}$;
2. le représentant d'extrémité *E* du vecteur $\overrightarrow{CD}$;
3. le représentant d'origine *A* du vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$;
4. le représentant d'origine *F* du vecteur $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

30 **1.** Trace sur ton cahier deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires et de normes différentes.
Place un point *A*.
2. Construis les représentants d'origine *A* des vecteurs :
a. $\vec{u}+\vec{v}$; **b.** $\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$; **c.** $\vec{u}-\vec{v}$.

31 *A, B, C, D* sont quatre points du plan.
1. Construis les points *M* et *N* tels que :
$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
2. a. Démontre que $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AM}$.
b. Quelle est la nature du quadrilatère *AMNC* ?

Vecteurs colinéaires

32 *A, B, C* sont trois points de l'axe gradué ci-de



Dans chacun des cas, détermine le nombre ré que $\vec{u}=k\vec{v}$.
1. $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$
2. $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$
3. $\vec{u}=\overrightarrow{BA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CB}$
4. $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\frac{3}{7}$

33 **1. a.** *A, B, C* sont trois points du plan tels
$5(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})=3\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.
Exprime $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
b. Que peux-tu dire des points *A, B* et *C* ?
2. a. *E, F, G, H* sont quatre points du plan tels
$-3(\overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{HF})=5(2\overrightarrow{EG}-\frac{3}{2}\overrightarrow{HF})$.
Exprime $\overrightarrow{EG}$ en fonction de $\overrightarrow{HF}$.
b. Que peux-tu dire des droites (*EG*) et (*FH*) ?

34 *A, B, C* sont trois points non alignés.
1. Construis les points *E* et *F* tels que :
$\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
2. Exprime $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
Justifie que (*EF*) // (*AC*).

35 *I, J, K* sont trois points non alignés.
1. Construis les points *M* et *N* tels que :
$\overrightarrow{JM}=2\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{JK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{JN}$.
2. Exprime $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{IK}$.
Justifie que (*MN*) // (*IK*).

36 *ABC* est un triangle. *D* et *E* sont les points tels que : $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BE}$.
Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

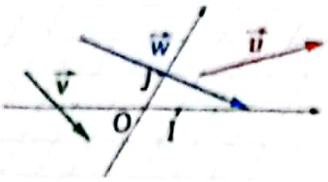
Pense à décomposer : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}$

37 *MNP* est le triangle équilatéral ci-contre et *A* un point extérieur à ce triangle.

1. Construis les points *M'*, *N'* et *P'* tels que :
$\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$ $\overrightarrow{AN'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$
$\overrightarrow{AP'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$.
2. Démontre que les droites (*MN*) et (*M'N'*) sont lèles.

Calculs dans un repère

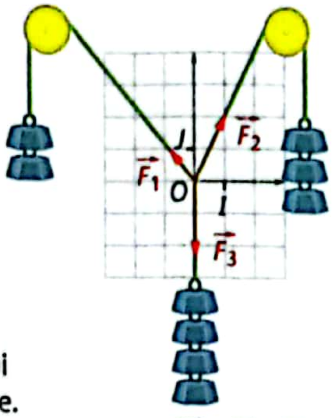
38 1. Lis les coordonnées de chacun des vecteurs dans le repère (O, I, J) ci-contre.



2. Déduis-en les coordonnées des vecteurs :
• $\vec{u}+\vec{v}$; • $\vec{v}+\vec{w}$; • $2\vec{u}$; • $5\vec{v}-3\vec{w}$.

39 Dans un repère, on donne les points $A(3\,;4)$, $B(5\,;2)$, $C(-1\,;-3)$.
1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $3\,\overrightarrow{BC}$.
2. Calcule les coordonnées des points E, F et G tels que :
a. $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ b. $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ c. $\overrightarrow{AG}=3\,\overrightarrow{BC}$.

40 En sciences physiques, un système est en équilibre lorsque la somme des forces qui s'exercent sur ce système est égale au vecteur nul.

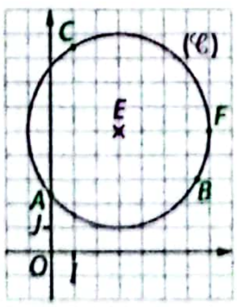


1. Lis les coordonnées des forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ qui s'exercent sur ce système.
2. Calcule les coordonnées du vecteur $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}$. Que peux-tu en déduire ?

41 Dans un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points $A(-4\,;1)$, $B(8\,;5)$ et $C(10\,;1)$.
1. Calcule les distances AB, AC et BC.
2. Utilise la propriété réciproque de Pythagore pour montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

42 Dans un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points $E(-8\,;3)$, $F(2\,;5)$ et $G(3\,;-1)$.
1. Calcule les distances EF, EG et FG.
2. Utilise la contraposée de la propriété de Pythagore pour montrer que le triangle EFG n'est pas rectangle en F.

43 Dans le repère orthonormé (O, I, J) ci-contre, on donne :
$A\left(0\,;\frac{5}{2}\right)$, $B\left(\frac{13}{2}\,;3\right)$, $C\left(1\,;\frac{17}{2}\right)$, $E(3\,;5)$, $F(7\,;5)$.
$(\mathscr{C})$ est le cercle de centre E et de rayon EF.

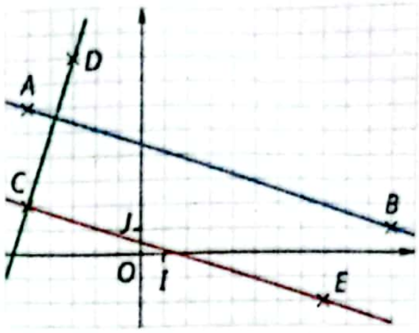


Les points A, B, C appartiennent-ils au cercle $(\mathscr{C})$? Justifie chacune de tes réponses par un calcul.

Colinéarité et orthogonalité dans un repère

44 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous sont-ils colinéaires, orthogonaux ou ni l'un, ni l'autre ? Justifie.
1. $\vec{u}\left(3\,;\frac{7}{2}\right)$ et $\vec{v}(-6\,;7)$ 2. $\vec{u}\left(\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{6}\right)$ et $\vec{v}(3\,;6)$
3. $\vec{u}(-1\,;-4)$ et $\vec{v}(0{,}2\,;0{,}8)$ 4. $\vec{u}\left(\frac{2}{7}\,;\frac{1}{5}\right)$ et $v(14\,;-10)$

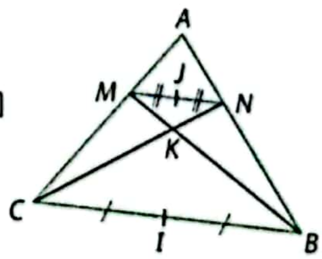
45 Le repère ci-contre est orthonormé.



1. Les droites (AB) et (CE) sont-elles parallèles ? Justifie.
2. Les droites (AB) et (CE) sont-elles orthogonales ? Justifie.

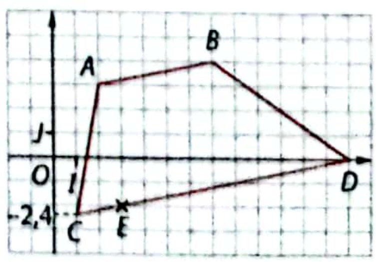
46 Dans un repère orthonormé, on donne les points : $A(-2\,;7)$, $B(6\,;5)$, $C(5\,;1)$ et $D(-3\,;3)$.
1. a. Place ces points dans un tel repère.
b. Conjecture la nature du quadrilatère $ABCD$.
2. Démontre cette conjecture :
a. en utilisant les calculs de longueurs et la propriété réciproque de Pythagore ;
b. en utilisant les vecteurs.

47 ABC est le triangle ci-contre. M est le point de $[AC]$ et N le point de $[AB]$ tels que $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.



I est le milieu de $[BC]$, J le milieu de $[MN]$ et K le point d'intersection des droites (CN) et (BM).
1. a. Détermine les coordonnées des points A, B, C, I dans le repère $(C\,;\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.
b. Utilise la propriété de Thalès pour déterminer les coordonnées des points M et N ; déduis-en celles de J.
2. Démontre que les points A, I et J sont alignés.

48 Le repère ci-contre d'unité 1 cm est orthonormé.

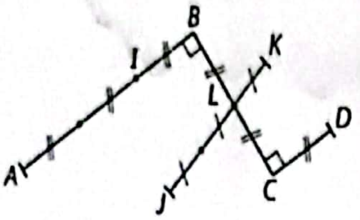


1. Détermine la nature du quadrilatère $ABCD$.
2. Que peut-on dire du segment $[AE]$ pour ce quadrilatère ?
3. Calcule l'aire arrondie à l'unité du quadrilatère $ABCD$. (On donne : $\sqrt{26}\approx 5{,}1$ et $\sqrt{145{,}76}\approx 12{,}2$.)

Bien comprendre mieux rédiger

49 Des codes aux égalités vectorielles

1. La figure ci-contre a été codée.



Utilise ces codes pour compléter les égalités vectorielles :

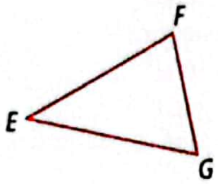
$\overrightarrow{AI} = \ldots\ \overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC} = \ldots$

$\overrightarrow{LJ} = \ldots\ \overrightarrow{LK}$ $\qquad$ $\overrightarrow{DC} + \ldots\ \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

2. *EFG* est le triangle ci-contre.

a. Place les points *M* et *N* tels que :

$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{GM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{GN}$



b. Code la figure.

50 Choisir la bonne méthode

Ali récapitule les méthodes dont il dispose pour calculer la longueur d'un segment :

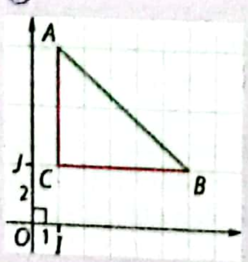
- la propriété de Pythagore
- la propriété de Thalès
- la trigonométrie
- les coordonnées dans un repère.

Dans chacune des quatre situations ci-dessous :

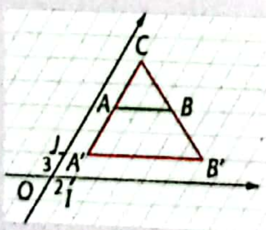
1. utilise l'une des méthodes rappelées par Ali pour calculer la longueur *AB*.

2. indique si une autre méthode peut convenir et explique pourquoi les autres ne conviennent pas.

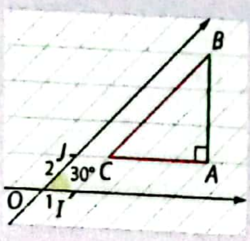
①



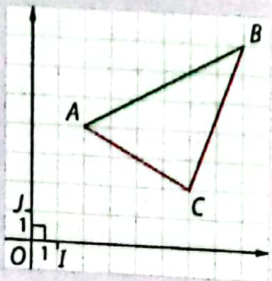
②



③



④



51 Utiliser la relation de Chasles

E, F, G, H, I sont cinq points tels que $\overrightarrow{EH} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EI} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{EG}$. Complète le raisonnement suivant :

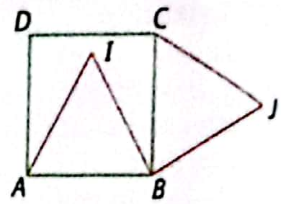
D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{\ldots E} + \overrightarrow{E\ldots}$, or $\overrightarrow{IE} = \ldots\ \overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{EH} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{EF}$, donc $\overrightarrow{IH} = \ldots + \ldots = \ldots\ \overrightarrow{GF}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont …, donc les droites … et … sont parallèles.

52 Introduire un repère pour démontrer

Dans certains exercices, il peut être intéressant de choisir un repère pour résoudre un problème.

ABCD est le carré de côté 4 cm ci-contre. *ABI* et *BCJ* sont deux triangles équilatéraux.
On cherche à démontrer que les points *D*, *I* et *J* sont alignés.



1. a. Complète les pointillés pour que le repère suivant soit orthonormé : $(\ldots\ ;\ \ldots\ \overrightarrow{AB}, \ldots\ \overrightarrow{AC})$.

b. Détermine les coordonnées des points *A*, *B*, *C* et *D* dans ce repère.

c. Utilise les propriétés des triangles équilatéraux pour déterminer les coordonnées des points *I* et *J*.

2. Démontre que les points *D*, *I* et *J* sont alignés.

53 Un peu de logique

Pour les diagrammes ci-dessous, relie les points par une flèche sachant que :

La flèche : $\mathcal{P} \bullet\!\longrightarrow\!\bullet\ \mathcal{Q}$ signifie que $\mathcal{P}$ entraîne $\mathcal{Q}$;

La double flèche : $\mathcal{P} \bullet\!\longleftrightarrow\!\bullet\ \mathcal{Q}$ signifie que $\mathcal{P}$ équivaut à $\mathcal{Q}$.

1. *A* et *B* désignent deux points distincts du plan.

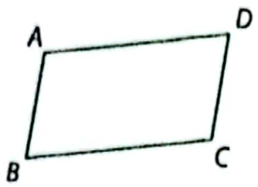
I est le milieu de [*AB*] •	• $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
$IA = \dfrac{1}{2}AB$ •	• $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires
I, *A* et *B* sont alignés •	• $\overrightarrow{IA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé. $\vec{u}(x\ ;y)$ et $\vec{v}(x'\ ;y')$ désignent deux vecteurs de ce repère.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux •	• $xy' = x'y$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires •	• $xx' = -yy'$
il existe un nombre réel *k* tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ •	• $\vec{u} = 5\vec{v}$
$\vec{u} = \vec{0}$ •	• $\vec{v} = \vec{0}$

54 Alignement de points

$ABCD$ est le parallélogramme ci-contre.



On note E et F les points tels que : $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.

1. a. Reproduis ce parallélogramme et place les points E et F.

b. Que peux-tu conjecturer concernant les points C, E et F ?

2. a. Démontre que : $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$;

puis que : $\overrightarrow{EF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$.

b. Justifie la conjecture émise à la question **1. b.**

55 Intérieur et extérieur d'un cercle

Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan, on donne les points $M(-2 ; -1)$, $N(2 ; 1)$, $P(4 ; 1)$, $Q(4 ; -2)$. L'unité est le cm.

1. a. Place ces points dans le repère (O, I, J).

b. Calcule les coordonnées du points S milieu du segment $[NQ]$; puis place-le dans le repère.

c. Calcule les coordonnées du point T tel que : $5\overrightarrow{TN} + \overrightarrow{TM} = \vec{0}$; puis place-le dans le repère.

2. On note $(\mathscr{C})$ le cercle de centre S et de rayon SQ. Complète chacune des phrases ci-dessous à l'aide d'un des points parmi M, P et R ; puis justifie par un calcul :

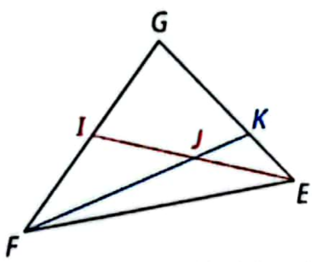
a. le point … est situé à l'intérieur du cercle $(\mathscr{C})$;

b. le point … est situé à l'extérieur du cercle $(\mathscr{C})$;

c. le triangle NQT est rectangle en … (propose deux méthodes pour justifier).

56 Introduire un repère

Dans le triangle EFG ci-contre, I est le milieu de $[FG]$ et J le milieu de $[EI]$. La droite (FJ) coupe la droite (EG) au point K.



1. Détermine les coordonnées des points E, G, I et J dans le repère $(F ; \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG})$.

2. On note $(a ; b)$ les coordonnées du point K dans ce repère.

a. Utilise l'alignement des points F, J, K d'une part et E, K, G d'autre part, pour calculer a et b.

b. Démontre que $\overrightarrow{EG} = 3\overrightarrow{EK}$.

57 Double condition

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u}(2m ; -3)$, $\vec{v}(6 ; 5m + 4)$ et $\vec{w}(-3 ; -2m)$.

Existe-t-il une valeur de m pour laquelle les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires ?

S'entraîner au BEPC

58 Égalité vectorielle

$ABCD$ est un parallélogramme dans le plan. E est le point tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$. Démontre que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DC}$.

BEPC 2001

59 Étude d'un quadrilatère

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1 ; 3)$, $B(3 ; \sqrt{5})$, $C(2 ; -3)$ et $D(-2 ; -\sqrt{5})$.

I est le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$.

1. Calcule les coordonnées respectives de I et J.

2. Déduis-en que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

3. a. Calcule AC et BD.

b. Déduis-en que $ABCD$ est un rectangle.

BEPC 2006

60 Avec de la trigonométrie

L'unité de longueur est le centimètre ; dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan, on donne les points $A(3 ; 2)$, $B(-1 ; 3)$ et $C(2 ; -2)$.

1. Place les points A, B et C dans le repère (O, I, J).

2. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3. Calcule les distances AB, BC et AC et déduis-en la nature du triangle ABC.

4. Donne la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$; puis calcule son cosinus.

5. a. Calcule les coordonnées du milieu K de $[BC]$.

b. Calcule les coordonnées du point D symétrique du point A par rapport à K.

6. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Justifie ta réponse.

BEPC 2010

61 Des triangles superposables

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $I(-5 ; 3)$, $J(2 ; 2)$ et $K(1 ; -5)$.

1. a. Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$.

b. Déduis-en que $IJ = IK$.

c. Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont orthogonaux.

d. Déduis-en la nature exacte du triangle IJK.

2. Soit Q le milieu de $[IK]$ et P le symétrique de J par rapport à Q.

a. Détermine les coordonnées de Q.

b. Montre que P a pour coordonnées le couple $(-6 ; -4)$.

c. Déduis-en la nature exacte du quadrilatère $IJKP$.

3. a. Montre que les triangles IQP et IQK sont superposables (c'est-à-dire dont les côtés sont deux à deux égaux).

b. Détermine le cosinus et le sinus de l'angle $\widehat{JIK}$.

c. Déduis-en la mesure en degrés de cet angle.

BEPC 2005

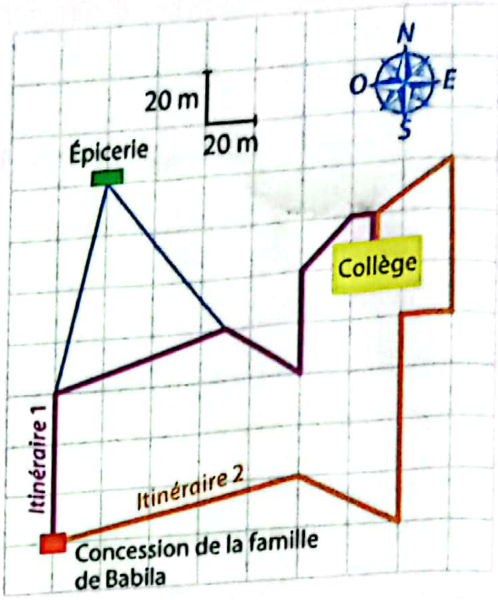
Activités d'intégration

G2 Le chemin du collège

Babila habite une ville du nord du Cameroun.
Chaque matin, pour se rendre au collège, elle choisit l'un des deux itinéraires schématisés ci-contre.
Babila marche à une vitesse moyenne de 3 km /h.

1. a. Détermine par le calcul, l'itinéraire le plus court, arrondis la longueur du parcours au mètre près.
b. Calcule les durées, arrondies à la minute, de ces deux itinéraires.

2. Parfois, le matin, Babila passe à l'épicerie pour s'acheter à manger.
a. Calcule la longueur du détour que représente ce passage à l'épicerie.
b. Déduis-en le temps perdu par Babila lorsqu'elle décide de passer par l'épicerie.

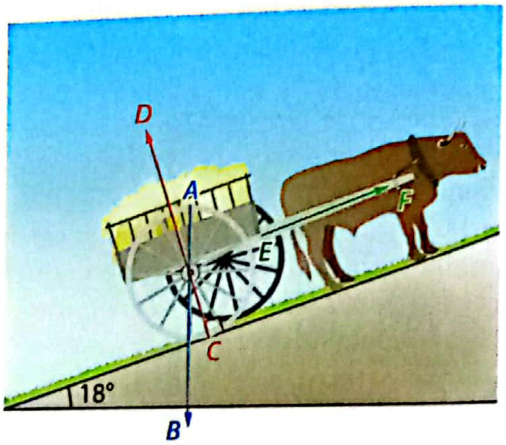


G3 Une montée difficile

En route pour le marché, Kamga espère que son bœuf aura assez de force pour gravir la route. La situation est schématisée ci-contre. Les forces, représentées par des vecteurs sont :

- $\overrightarrow{AB}$: le poids de la charette ;
- $\overrightarrow{CD}$: la résistance de la route ;
- $\overrightarrow{EF}$: la traction du bœuf.

On donne $AB = 5,3$ cm ; $CD = 5$ cm ; $EF = 2$ cm.
Reproduis ces forces à l'aide de tes outils de géométrie.
Construis le vecteur somme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
Tes observations permettent-elles d'affirmer que le bœuf de Kamga va monter la route ? Justifie ta réponse.



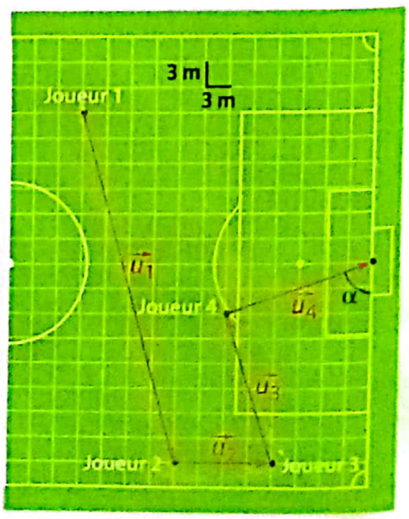
G4 Le match de foot

Sur le schéma ci-contre, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ et $\overrightarrow{u_4}$ représentent les trois dernières passes et le tir qui ont amené le but de ton équipe préférée. Toutes les longueurs seront arrondies au m.

1. a. Place sur ce schéma un repère (O, I, J) approprié qui te permettra d'effectuer tes calculs.
b. À quelle distance du rond central se trouve le joueur 1 ? Arrondis au m.

2. a. Calcule la longueur, en m, de chacune des passes et du tir.
b. La première et la troisième passe avaient-elles des trajectoires parallèles ? Justifie par un calcul.
c. La troisième passe et le tir avaient-ils des trajectoires orthogonales ? Justifie par un calcul.

3. Détermine une mesure, arrondie au degré près, de l'angle α entre le tir et la ligne de but.



4 Équations de droites

Pour démarrer

Les cartons à remplir

Catherine doit remplir des cartons avec des tomates et des pommes de terre de sorte qu'ils fassent tous 3 kg. Chaque tomate pèse 100 g et chaque pomme de terre pèse 150 g.

Elle souhaite savoir combien de tomates et combien de pommes de terre il est possible de mettre dans un carton.
Elle note pour cela x le nombre de tomates et y le nombre de pommes de terre.

1 Explique pourquoi on a $100x + 150y = 3\,000$.

2 a. Catherine a mis 6 tomates dans un carton.
Combien peut-elle encore mettre de pommes de terre ?
b. Catherine a mis 8 pommes de terre dans un autre carton.
Combien peut-elle encore mettre de tomates ?

3 Catherine décide de faire un carton avec uniquement des tomates et un carton avec uniquement des pommes de terre. Combien y aura-t-il de tomates et de pommes de terre dans chacun de ces deux cartons ?

4 Catherine peut-elle remplir un carton avec 3 pommes de terre et le reste de tomates ?

Sur les marchés, les vendeurs doivent organiser leurs marchandises afin d'en présenter le plus possible.

Savoir-faire

À la fin de ce chapitre, tu sauras :
- tracer une droite dans un repère ;
- vérifier si un point appartient à une droite ;
- déterminer un vecteur directeur et un coefficient directeur ;
- écrire une équation cartésienne de droite ;
- vérifier si deux droites sont parallèles ;
- vérifier si deux droites sont perpendiculaires.

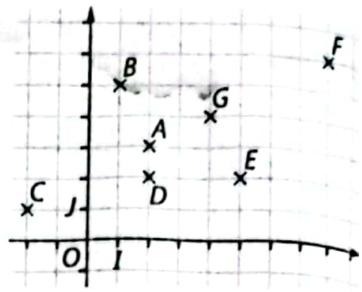
1 Équations cartésiennes d'une droite › COURS 1

Le plan ci-dessous est muni du repère (O, I, J). On cherche à connaître l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient l'égalité $x-2y+4=0$.

1 Les coordonnées $(x\,;y)$ du point A vérifient-elles l'égalité : $x-2y+4=0$?

2 Complète le tableau suivant avec tous les points du repère.

Point	Coordonnées $(x\,;y)$	A-t-on $x-2y+4=0$?
A	$(2\,;3)$	oui
B	...	...
...	...	...



3 **a.** Que peut-on remarquer pour les points dont les coordonnées vérifient l'égalité $x-2y+4=0$?
b. Teste avec un autre point qui te semble convenir.
c. Complète la phrase :

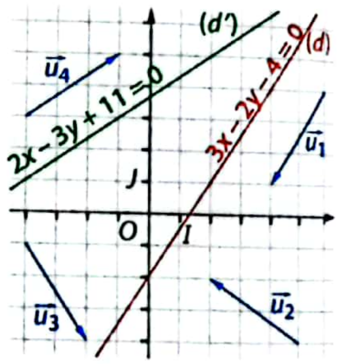
L'ensemble des points dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient l'égalité $x-2y+4=0$ est une ....

*On dit alors que $x-2y+4=0$ est une **équation cartésienne** de la droite (AG).*

4 Vérifie que $x+3y=16$ est une équation cartésienne de la droite (BG).

2 Vecteur directeur › COURS 1

1 **a.** Lis les coordonnées du vecteur $\vec{u_1}$ dans le repère (O, I, J) ci-contre.
b. Peut-on trouver deux points A et B de la droite (d) tels que $\vec{u_1}=\overrightarrow{AB}$? Si oui, donne les coordonnées des points A et B.
*On dit que $\vec{u_1}$ est un **vecteur directeur** de la droite (d).*
c. Compare les coordonnées du vecteur $\vec{u_1}$ avec les nombres figurant dans l'équation de la droite (d).



2 La droite (d') possède-t-elle un vecteur directeur parmi ceux représentés ci-contre ? Si oui, donne son nom et lis ses coordonnées ; puis compare-les avec les nombres figurant dans l'équation de la droite (d').

3 Conjecture les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite d'équation $px+qy+r=0$.

3 Équation du type $y=ax+b$ › COURS 2

(d) désigne la droite d'équation cartésienne $5x-2y+3=0$.
A, B, C et D sont des points de (d) d'abscisses respectives 3, –2, 4 et –5.

1 On souhaite calculer l'ordonnée du point A.
a. Remplace x par 3 dans l'égalité $5x-2y+3=0$.
b. Résous l'équation ainsi obtenue et déduis-en l'ordonnée de A.

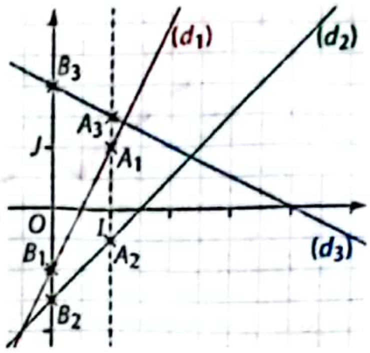
2 Calcule l'ordonnée du point B.

3 Utilise tes réponses aux questions précédentes pour tracer la droite (d) dans un repère (O, I, J).

4 **a.** M désigne un point de la droite (d) de coordonnées $(x\,;y)$. Exprime y en fonction de x.
*On dit que $y=2{,}5x+1{,}5$ est l'**équation réduite de la droite** (d).*
b. Calcule les ordonnées respectives des points C et D en utilisant l'équation réduite de (d).

4 Coefficient directeur et ordonnée à l'origine › Cours 2

Dans le repère (O, I, J) ci-contre, les points A_1, A_2 et A_3 ont tous pour abscisse 1 et sont respectivement sur les droites $(d_1) : y = 2x - 1$; $(d_2) : y = x - 1{,}5$ et $(d_3) : y = -0{,}5x + 2$.
Les points B_1, B_2 et B_3 sont les points d'intersection des droites (d_1), (d_2) et (d_3) avec l'axe des ordonnées.



1 **a.** Calcule l'ordonnée de B_1.
*On appelle cette valeur **l'ordonnée à l'origine** de (d_1).*
b. Calcule l'ordonnée du point A_1.
c. Déduis-en que le vecteur $\overrightarrow{B_1A_1}$ a pour coordonnées $(1 ; 2)$.
*L'ordonnée du vecteur $\overrightarrow{B_1A_1}$ est appelée **coefficient directeur** de (d_1). Il vaut donc 2.*

2 Recopie et complète le tableau suivant.

Droite (d_i)	Équation de (d_i)	Coordonnées de $\overrightarrow{B_iA_i}$	Coefficient directeur de (d_i)	Ordonnée à l'origine de (d_i)
(d_1)	$y = 2x - 1$	...	...	...
(d_2)	$y = x - 1{,}5$	...	...	...
(d_3)	$y = -0{,}5x + 2$	...	...	...

3 a et b désignent des nombres réels. (d) est la droite d'équation $y = ax + b$.
Indique, en fonction de a et de b, les coordonnées d'un vecteur directeur de (d) ; le coefficient directeur de (d) ; puis l'ordonnée à l'origine de (d).

5 Droites parallèles › Cours 3

1 **a.** Dans un repère (O, I, J), trace les droites $(d_1) : y = 1{,}5x + 3$; $(d_2) : y = 1{,}5x + 1$ et $(d_3) : y = 1$ … 2.
b. Que peux-tu conjecturer pour ces trois droites ?

2 **a.** Donne un vecteur directeur de chacune des droites (d_1), (d_2) et (d_3).
b. Démontre que ces vecteurs sont colinéaires deux à deux.
c. Que peux-tu en déduire pour les droites (d_1), (d_2) et (d_3) ?

Rappel : Dans un repère : $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ colinéaires ⟨équivaut à⟩ $xy' - x'y = 0$.

3 Les lettres a, a', b et b' désignent des nombres réels.
(d) et (d') sont les droites d'équation $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

Complète la phrase : *« (d) et (d') sont parallèles ⟨équivaut à⟩ … »*

6 Droites perpendiculaires › Cours 3

Le plan est muni d'un **repère (O, I, J) orthonormé.**

1 Les lettres p, q et r, ainsi que les lettres p', q' et r', désignent des nombres réels.
(d) est la droite d'équation $px + qy + r = 0$ et (d') est la droite d'équation $p'x + q'y + r' = 0$.
a. Utilise les lettres p, q, p' et q' pour donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de (d) et d'un vecteur directeur $\vec{u}'$ de (d').
b. À quelle condition, portant sur leurs coordonnées, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont-ils orthogonaux ?
c. Déduis-en une condition, en utilisant les lettres p, p', q et q', pour que les droites (d) et (d') soient perpendiculaires.

2 **Application :** Les droites (d') d'équation $8x + 3y + 9 = 0$ et (d'') d'équation $3x + y - 6 = 0$ sont-elles perpendiculaires à la droite (d) d'équation $2x - 6y + 4 = 0$?

4 Cours

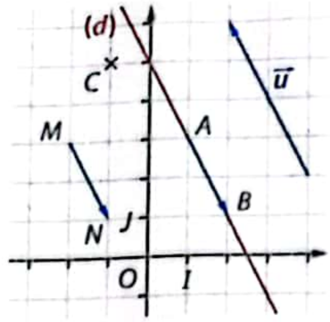
Dans tout le cours, le plan est muni d'un repère (O, I, J). Les lettres p, q et r désignent des nombres réels.

1 Équations cartésiennes d'une droite

a Équations cartésiennes d'une droite

Propriétés • **L'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient l'égalité $px+qy+r=0$ est une droite (d).**
• **Réciproquement, toute droite du plan admet une équation de la forme $px+qy+r=0$.**

Exemple : L'ensemble des points dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient l'égalité $4x+2y-10=0$ est une droite (d).
$A(1\,;3)$ est sur la droite (d) car $4\times1+2\times3-10=0$.
$B(2\,;1)$ est sur la droite (d) car $4\times2+2\times1-10=0$.
$C(-1\,;5)$ n'est pas sur la droite (d) car $4\times(-1)+2\times5-10=-4\neq0$.



Définition **On dit que $px+qy+r=0$ est une équation cartésienne de la droite (d). On note $(d): px+qy+r=0$.**

Exemple : La droite (AB) a pour équation cartésienne $4x+2y-10=0$.

Remarque : Si $4x+2y-10=0$ alors on a aussi $8x+4y-20=0$ ou bien encore $2y=-4x+10$.
Ce sont aussi des équations cartésiennes de la droite (d).
Ainsi, une même droite admet une infinité d'équations cartésiennes.

b Vecteurs directeurs d'une droite

Définition **On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ non nul est un vecteur directeur d'une droite (d) quand il existe deux points distincts A et B de (d) tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.**

Exemple : Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux. Donc $\overrightarrow{MN}$ est un vecteur directeur de (d).

Propriété **(d) désigne une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.**
Un vecteur non nul $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (d) ⟨équivaut à⟩ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Remarque : Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs.

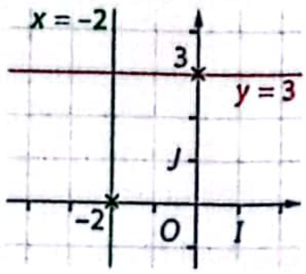
Propriété **Le vecteur $\vec{u}(-q\,;p)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $px+qy+r=0$.**

Exemple : Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-2\,;4)$ est un vecteur directeur de la droite $(d): 4x+2y-10=0$.

c Droites particulières

Propriétés **Les lettres b et c désignent des nombres réels.**
• **La droite d'équation cartésienne $y=b$ est parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe l'axe des ordonnées en b.**
• **La droite d'équation cartésienne $x=c$ est parallèle à l'axe des ordonnées. Elle coupe l'axe des abscisses en c.**

Exemples : • La droite (d) d'équation $y=3$ est parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe l'axe des ordonnées en 3.
• La droite (d') d'équation $x=-2$ est parallèle à l'axe des ordonnées. Elle coupe l'axe des abscisses en -2.



2 Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

a et b *désignent des nombres réels.*

a Équation cartésienne de la forme $y = ax + b$

Propriété **Si (d) est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors elle possède une unique équation cartésienne de la forme $y = ax + b$ où a et b désignent des nombres réels.**

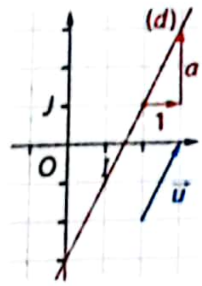
Définitions • **a s'appelle le coefficient directeur de la droite (d).**
• **b s'appelle l'ordonnée à l'origine de la droite (d).**

Exemple : • (d) est la droite d'équation cartésienne $-4x + 2y + 6 = 0$.
On peut aussi écrire son équation : $2y = 4x - 6$ ou bien encore $y = 2x - 3$.
$y = 2x - 3$ est parfois appelée **équation réduite** de la droite (d).
• Le coefficient directeur de (d) vaut 2.
• L'ordonnée à l'origine de (d) vaut -3.

b Propriété des équations de la forme $y = ax + b$

Propriété **La droite d'équation $y = ax + b$:**
- **coupe l'axe des ordonnées en b ;**
- **admet le vecteur $\vec{u}(1 ; a)$ comme vecteur directeur.**

Exemple : La droite (d) d'équation $y = 2x - 3$ coupe l'axe des ordonnées en -3 et admet le vecteur $\vec{u}(1 ; 2)$ comme vecteur directeur.



c Calcul du coefficient directeur

Propriété **Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points du plan tels que $x_A \neq x_B$ alors le coefficient directeur a de la droite (AB) est égal à :**
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Exemple : Dans un repère, on donne les points $A(-2 ; 3)$ et $B(2 ; 1)$.
Le coefficient directeur a de la droite (AB) est égal à :
$$a = \frac{1-3}{2-(-2)} = \frac{-2}{4} = -0{,}5.$$

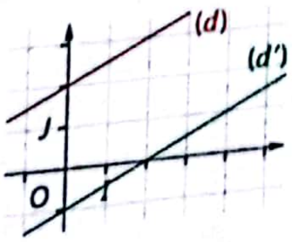
3 Droites parallèles et perpendiculaires

a Droites parallèles

Propriété **(d) désigne une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et (d') une droite de vecteur directeur $\vec{u}'$.**
(d) et (d') sont parallèles ⟨équivaut à⟩ $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

Propriété **Deux droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont parallèles ⟨équivaut à⟩ $a = a'$.**

Exemple : Les droites $(d) : y = 0{,}5x + 2$ et $(d') : y = 0{,}5x - 1$ sont parallèles car leurs coefficients directeurs sont tous les deux égaux à 0,5.

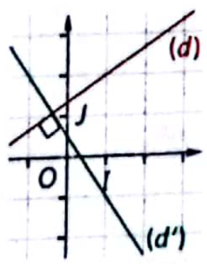


b Droites perpendiculaires

Propriété **(d) désigne une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et (d') une droite de vecteur directeur $\vec{u}'$.**
(d) et (d') sont perpendiculaires ⟨équivaut à⟩ $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux.

Propriété **Dans un repère (O, I, J) orthonormé, deux droites d'équations respectives $px + qy + r = 0$ et $p'x + q'y + r' = 0$ sont perpendiculaires ⟨équivaut à⟩ $pp' + qq' = 0$.**

Exemple : Les droites $(d) : 2x - 3y + 4 = 0$ et $(d') : 9x + 6y - 3 = 0$ sont perpendiculaires car $2 \times 9 + (-3) \times 6 = 18 - 18 = 0$.



1 Apprendre à tracer une droite

Énoncé

1. (d) est la droite d'équation cartésienne $5x+7y+11=0$. Les points suivants appartiennent-ils à (d) ?
a. $R(2\,;-3)$ **b.** $S(-1\,;-1)$

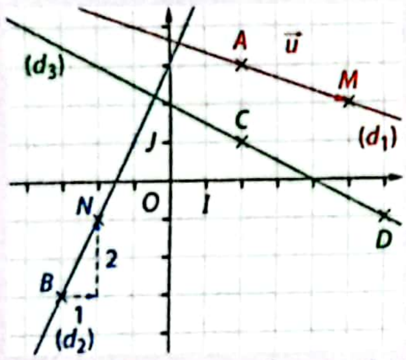
2. Dans un repère (O, I, J), trace :
a. la droite (d_1) passant par le point $A(2\,;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3\,;-1)$;
b. la droite (d_2) passant par le point $B(-3\,;-3)$ et de coefficient directeur 2 ;
c. la droite (d_3) d'équation cartésienne $x+2y-4=0$.

Solution

1. a. $5\times2+7\times(-3)+11=10-21+11=0$.
Donc R appartient à la droite (d).
b. $5\times(-1)+7\times(-1)+11=-5-7+11=-1\neq0$.
Donc S n'appartient pas à la droite (d).

Pour vérifier si un point appartient ou non à une droite, je remplace ses coordonnées dans l'équation de la droite.

2.



a. Pour tracer (d_1) :
- je place le point $A(2\,;3)$;
- je place le point M tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$;
- je trace la droite (AM) qui est la droite (d_1).

b. Pour tracer (d_2) :
- je place le point $B(-3\,;-3)$;
- à partir de B, je me décale de 1 unité vers la droite et je monte de 2 unités ;
- j'obtiens ainsi un point N ;
- je trace la droite (BN) qui est la droite (d_2).

c. Pour $x=2$, on a :
$2+2y-4=0$
$2y=2$
$y=1$
Donc (d_3) passe par $C(2\,;1)$.

Pour $x=6$, on a :
$6+2y-4=0$
$2y=-2$
$y=-1$
Donc (d_3) passe par $D(6\,;-1)$.

Pour tracer (d_3) :
- je donne une valeur à x ;
- je calcule la valeur de y correspondante ;
- j'obtiens les coordonnées d'un point C de la droite (d_3) ;
- je recommence en donnant une autre valeur à x pour obtenir les coordonnées d'un point D de la droite (d_3) ;
- je trace la droite (CD) qui est la droite (d_3).

S'exercer

1 Parmi les points ci-dessous, indique ceux qui appartiennent à la droite $(d): 2x-3y+4=0$.
a. $A(1\,;2)$; **b.** $B(-1\,;3)$; **c.** $C(4\,;4)$.

2 Parmi les points ci-dessous, indique ceux qui appartiennent à la droite $(d): y=3x-7$.
a. $M(-1\,;1)$; **b.** $N(3\,;2)$; **c.** $P\left(\frac{2}{3}\,;-\frac{5}{3}\right)$.

3 On donne la droite $(d): 3x-2y+2=0$.
Dans chaque cas, calcule x pour que le point A appartienne à la droite (d).
a. $A(x\,;1)$; **b.** $A(x\,;4)$; **c.** $A(x\,;-5)$.

4 On donne la droite $(d): 5x+4y-1=0$.
Dans chaque cas, calcule y pour que le point B appartienne à la droite (d).
a. $B(4\,;y)$; **b.** $B(-6\,;y)$; **c.** $B(9\,;y)$.

Pour les exercices 5 et 6, trace les droites données dans un repère (O, I, J).

5 **a.** (d_1) passant par $A(1\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3\,;2)$.
b. (d_2) passant par $B(-1\,;4)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(1\,;-3)$.

6 **a.** (d_1) passant par $A(3\,;-1)$ et de coefficient directeur 3.
b. (d_2) passant par $B(-1\,;2)$ et de coefficient directeur -2.

Pour les exercices 7 à 10, trace dans un repère (O, I, J) les droites données par leurs équations.

7 **a.** $(d_1): x-2y+1=0$; **b.** $(d_2): 2x-3y+5=0$.

8 **a.** $(d_1): 3x+2y-1=0$; **b.** $(d_2): -x+2y+1=0$.

9 **a.** $(d_1): x=2$; **b.** $(d_2): y=-1$.

10 **a.** $(d_1): y=2x-3$; **b.** $(d_2): y=-3x+5$.

2 Apprendre à déterminer une équation cartésienne de droite

Énoncé

Détermine une équation cartésienne de la droite :

a. (d_1) passant par le point $A(2\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3\,;2)$;

b. (d_2) passant par le point $D(2\,;1)$ et de coefficient directeur -3 ;

c. (d_3) passant par le point $E(3\,;2)$ et perpendiculaire à une droite de vecteur directeur $\vec{w}(3\,;4)$.

Solution

a. $M(x\,;y)$ désigne un point de (d_1).
Donc les vecteurs $\vec{u}(3\,;2)$ et $\overrightarrow{AM}(x-2\,;y+1)$ sont colinéaires.
Donc $3\times(y+1)-2\times(x-2)=0$
$$3y+3-2x+4=0$$
$$-2x+3y+7=0$$
Donc une équation de (d_1) est $-2x+3y+7=0$.

J'utilise le critère de colinéarité de deux vecteurs.
$\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{u}'(x'\,;y')$ sont colinéaires équivaut à $xy'-x'y=0$.

Dans une équation du type $y=ax+b$, a désigne le coefficient directeur.

b. (d_2) a une équation de la forme $y=-3x+b$.
(d_2) passe par $D(2\,;1)$ donc :
$1=-3\times2+b$
$7=b$
Donc (d_2) a pour équation $y=-3x+7$.
Ou encore $(d_2) : 3x+y-7=0$.

J'utilise le critère d'orthogonalité de deux vecteurs. Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{u}'(x'\,;y')$ sont orthogonaux équivaut à $xx'+yy'=0$.

c. $M(x\,;y)$ désigne un point de (d_3).
Donc les vecteurs $\vec{w}(3\,;4)$ et $\overrightarrow{EM}(x-3\,;y-2)$ sont orthogonaux.
Donc $3\times(x-3)+4\times(y-2)=0$
$$3x-9+4y-8=0$$
$$3x+4y-17=0$$
Donc une équation de (d_3) est $3x+4y-17=0$.

S'exercer

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) orthonormé. Pour les exercices 11 à 18, détermine une équation cartésienne des droites (d) et (d').

11 **a.** (d) passant par $A(-2\,;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;4)$.
b. (d') passant par $B(-5\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(2\,;1)$.

12 **a.** (d) passant par $C(-2\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-3\,;1)$.
b. (d') passant par $D(0\,;4)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(-2\,;-5)$.

13 **a.** (d) passant par $A(2\,;4)$ et $B(3\,;7)$.
b. (d') passant par $C(-1\,;3)$ et $D(4\,;5)$.

14 **a.** (d) passant par $R(0\,;2)$ et $S(-3\,;1)$.
b. (d') passant par $T(4\,;3)$ et $U(1\,;3)$.

15 **a.** (d) passant par $A(3\,;-1)$ et de coefficient directeur 3.
b. (d') passant par $B(-1\,;2)$ et de coefficient directeur -2.

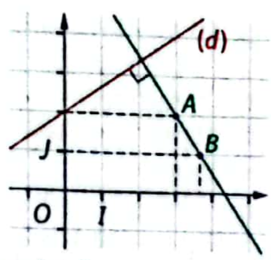
16 **a.** (d) passant par $P(-4\,;0)$ et de coefficient directeur 1,5.
b. (d') passant par $Q(-1\,;-1)$ et de coefficient directeur 1.

17 **a.** (d) passant par $A(3\,;1)$ et perpendiculaire à (Δ) de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;4)$.
b. (d') passant par $B(1\,;-1)$ et perpendiculaire à (Δ') de vecteur directeur $\vec{v}(-2\,;1)$.

18 **a.** (d) passant par $E(1\,;-2)$ et perpendiculaire à (Δ) de vecteur directeur $\vec{u}(-1\,;5)$.
b. (d') passant par $F(1\,;2)$ et perpendiculaire à (Δ') de vecteur directeur $\vec{v}(0\,;3)$.

19 On donne les points $A(-1\,;2)$, $B(8\,;3)$ et $C(0\,;4)$.
1. Détermine une équation pour chacune des droites (AB), (AC) et (BC).
2. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Déduis-en une équation de la droite :
a. (d) de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ et passant par C ;
b. (d') perpendiculaire à (AB) et passant par C.

20 Dans le repère orthonormé (O, I, J) ci-contre, (d) a pour équation $-2x+3y-6=0$.
a. Détermine une équation de la droite (AB).
b. Déduis-en l'abscisse du point B.



Activités d'application

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Appartenance à une droite

21 **1.** Parmi les points ci-dessous, détermine ceux qui sont sur la droite $(d_1) : -3x + 2y - 1 = 0$.
a. $A(3 ; 5)$; **b.** $B(-3 ; -4)$; **c.** $C(0 ; 1)$;
d. $D(2 ; 3)$; **e.** $E(-1 ; -2)$; **f.** $F(1 ; 2)$.
2. Suis la même consigne avec la droite (d_2) d'équation $2x - y - 1 = 0$.

22 **1.** Détermine les droites qui passent par le point $A(2 ; -3)$ parmi celles ci-dessous.
a. $(d_1) : 4x - y - 11 = 0$; **b.** $(d_2) : -2x + 3y + 12 = 0$;
c. $(d_3) : y = 2x - 5$; **d.** $(d_4) : y = -3x + 3$;
e. $(d_5) : x = 3$; **f.** $(d_6) : y = -3$.
2. Suis la même consigne avec le point $B(3 ; 1)$.

23 **1.** Recopie et complète le tableau par un O (oui) ou un N (non) selon que chacun des points donnés appartient ou non à chacune des droites données.

	$A(2 ; 1)$	$B(-2 ; -1)$	$C(-4 ; 4)$
$(d_1) : x + 2y - 4 = 0$			
$(d_2) : y = 0{,}5x$			
$(d_3) : y = -2{,}5x - 6$			

2. Déduis du tableau le point d'intersection des droites :
a. (d_1) et (d_2) ; **b.** (d_2) et (d_3) ; **c.** (d_3) et (d_1).

24 La droite (AB) admet pour équation $4x + 5y - 7 = 0$.
1. L'abscisse de A est -2. Calcule son ordonnée.
2. L'ordonnée de B est -1. Calcule son abscisse.
3. Trace la droite (AB) dans un repère.

25 **1.** Calcule les coordonnées du point d'intersection de la droite $(d_1) : -3x - 4y + 12 = 0$ avec :
a. l'axe des abscisse. ; **b.** l'axe des ordonnées.
2. Suis la même consigne avec la droite (d_2) d'équation $5x - 3y + 15 = 0$.
3 Trace les droites (d_1) et (d_2) dans un repère.

Vecteur directeur et équations de droite

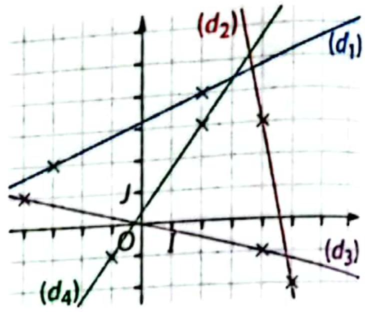
26 **1.** Rappelle les propriétés du cours qui donnent les coordonnées d'un vecteur directeur d'une droite :
a. d'équation $px + qy + r = 0$;
b. d'équation $y = ax + b$.
2. Donne un vecteur directeur de chacune des droites suivante.
a. $(d_1) : 5x - 2y + 1 = 0$; **b.** $(d_2) : y = -2x + 4$;
c. $(d_3) : y = -1{,}4x + 3$; **d.** $(d_4) : -2x + 3y + 7 = 0$;
e. $(d_5) : x = -1$; **f.** $(d_6) : y = 2$.

27 Associe chacune des droites à un vecteur directeur.

$(d_1) : 3x - 4y + 1 = 0$ •	• $\vec{t}(3 ; -4)$
$(d_2) : -3x - 4y = 0$ •	• $\vec{u}(-4 ; -3)$
$(d_3) : -4x - 3y + 3 = 0$ •	• $\vec{v}(-3 ; -4)$
$(d_4) : -4x + 3y - 1 = 0$ •	• $\vec{w}(4 ; -3)$

28 **1.** Dans un repère, place les points $A(3 ; -2)$, $B(5 ; 4)$, et $C(6 ; -1)$.
2. Détermine une équation de chacune des droites ci-dessous ; puis trace-les dans le repère :
a. (d_1) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; 0)$;
b. (d_2) passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}(0 ; -1)$;
c. (d_3) passant par C et de coefficient directeur 0.

29 Les droites (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4) sont tracées dans le repère (O, I, J) ci-contre.

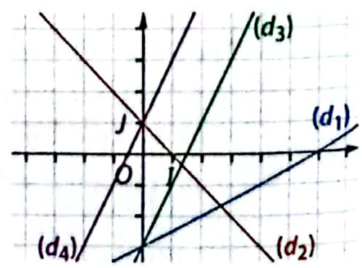


1. Associe chacune des droites à un vecteur directeur parmi ceux ci-dessous :
a. $\vec{t}(8 ; -2)$; **b.** $\vec{u}(-5 ; -2)$; **c.** $\vec{v}(3 ; 4)$; **d.** $\vec{w}(1 ; -5)$.
2. Détermine une équation cartésienne de chacune des droites.

30 Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
On donne les points A et B et le vecteur $\vec{u}$ tels que : $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$; $\overrightarrow{OB} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{u} = -\vec{i} + 5\vec{j}$.
1. Quelles sont les coordonnées de A, de B et de $\vec{u}$?
2. Déduis-en une équation de :
a. la droite (AB) ;
b. la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Équation cartésienne du type $y = ax + b$

31 Associe chaque droite du graphique à son équation.



a. $y = 2x - 3$;
b. $y = -x + 1$;
c. $y = 0{,}5x - 3$;
d. $y = 2x + 1$.

32 Détermine l'équation réduite $y = ax + b$ de chacune des droites suivantes :
a. $(d_1) : 3x - 2y + 5 = 0$; **b.** $(d_2) : 5x - y + 2 = 0$;
c. $(d_3) : 10x + 4y - 1 = 0$; **d.** $(d_4) : 3y + 6 = 0$.

33 1. On donne les points $A(2\,;2)$ et $B(6\,;3)$.
a. Calcule le coefficient directeur de la droite (AB).
b. Déduis-en l'ordonnée à l'origine de la droite (AB).
c. Déduis-en l'équation de (AB) du type $y = ax + b$?
2. Dans chacun des cas, détermine une équation du type $y = ax + b$ de la droite (AB).
a. $A(-2\,;4)$ et $B(3\,;1)$; b. $A(-3\,;-2)$ et $B(-4\,;2)$;
c. $A(3\,;-1)$ et $B(-2\,;-2)$; d. $A(-4\,;3)$ et $B(2\,;3)$.

34 Détermine l'équation du type $y = ax + b$ de chacune des droites suivantes :
a. (AB) telle que $A(-1\,;4)$ et $B(2\,;6)$;
b. (CD) telle que $C(-5\,;10)$ et $D(1\,;-4)$;
c. (EF) telle que $E\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{2}\right)$ et $F\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{5}\right)$.

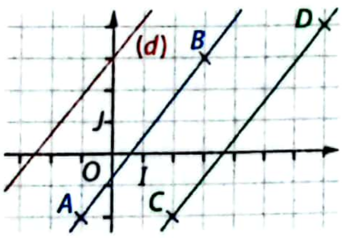
Droites parallèles

35 Dans chacun des cas suivants, détermine si les droites (d) et (d') sont parallèles.
a. $(d) : y = 1{,}5x - 1$ et $(d') : y = 1{,}5x - 3$;
b. $(d) : y = -2x + 4$ et $(d') : y = -3x + 4$;
c. $(d) : y = -x + 2$ et $(d') : y = -x - 1$.

36 (d') est la droite parallèle à la droite (d) d'équation $y = -3x + 5$ et passant par le point $A(2\,;1)$.
1. Quel est le coefficient directeur de la droite (d') ?
2. Calcule l'ordonnée à l'origine de la droite (d').
3. Déduis-en une équation de la droite (d').

37 Détermine une équation de la droite :
a. (d'_1) parallèle à (d_1) d'équation $y = 2x - 1$ et passant par le point $B(5\,;-12)$;
b. (d'_2) parallèle à (d_2) d'équation $y = -1{,}5x$ et passant par le point $C(-5\,;0)$.

38 La droite (d) a pour équation $y = 1{,}2x + 3$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles à (d) ?



39 On donne les points $E(-2\,;5)$, $F(0\,;1)$ et $G(8\,;3)$. M est le milieu de $[EF]$ et N le milieu de $[EG]$.
1. Fais une figure.
2. Calcule les coordonnées de M et N.
3. Détermine une équation du type $y = ax + b$ de :
a. la droite (FG) ;
b. la droite (d), parallèle à (FG) passant par M.
4. a. Vérifie par un calcul que le point N est sur la droite (d).
b. Quelle propriété permettait de prévoir le résultat ?

40 Dans chacun des cas suivants, détermine une équation de la droite parallèle à (BC) passant par le point A :
a. $A(-2\,;2)$, $B(-1\,;-2)$ et $C(4\,;1)$;
b. $A(2\,;3)$, $B(-1\,;2)$ et $C(2\,;-1)$;
c. $A(-3\,;4)$, $B(1\,;2)$ et $C(5\,;2)$.

Droites perpendiculaires

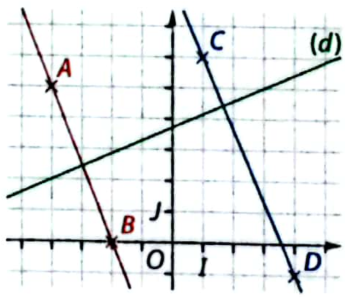
*Dans tous les exercices de cette partie, le plan est muni d'un repère **orthonormé** (O, I, J).*

41 Dans chacun des cas suivants, détermine si les droites (d) et (d') sont perpendiculaires :
a. $(d) : 3x - 2y + 1 = 0$ et $(d') : 4x + 6y - 2 = 0$;
b. $(d) : x - 5y + 2 = 0$ et $(d') : 5x + y - 2 = 0$;
c. $(d) : 7x + 3y - 1 = 0$ et $(d') : 6x + 14y - 5 = 0$.

42 (d) est la droite d'équation $3x + 4y - 1 = 0$.
1. Explique pourquoi la droite (d') d'équation $4x - 3y + r = 0$ (où r désigne un nombre réel) est une droite perpendiculaire à (d).
2. Calcule r pour que (d') passe par le point $A(5\,;1)$.
3. Déduis-en une équation cartésienne de la droite (d').

43 Détermine une équation de la droite :
a. (d'_1) perpendiculaire à $(d_1) : 2x - 5y + 4 = 0$ et passant par le point $B(-1\,;6)$;
b. (d'_2) perpendiculaire à $(d_2) : x - 2y + 2 = 0$ et passant par le point $C(0\,;-2)$.

44 La droite (d) a pour équation $-3x + 7y - 2 = 0$. Détermine si chacune des droites (AB) et (CD) est perpendiculaire à (d).



45 On donne les points $A(2\,;6)$, $B(-2\,;3)$ et $C(4\,;0)$.
1. Fais une figure.
2. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3. Détermine une équation de :
a. la hauteur issue de C dans le triangle ABC ;
b. la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
4. Vérifie que le point $H(1\,;4)$ est l'orthocentre du triangle ABC.

46 Dans chacun des cas suivants, détermine une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à (BC) passant par le point A :
a. $A(1\,;4)$, $B(-1\,;1)$ et $C(4\,;2)$;
b. $A(-3\,;2)$, $B(2\,;1)$ et $C(1\,;-1)$;
c. $A(-4\,;-2)$, $B(-1\,;2)$ et $C(3\,;-2)$.

Bien comprendre mieux rédiger

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère (O, I, J).

47 Les bons termes

On donne les droites $(d) : y = -3x + 2$ et $(d') : 3x - 2y + 7 = 0$.

Recopie et complète les phrases suivantes par :
• (d) • (d') • *cartésienne* • *du type* y = ax + b
• *le coefficient directeur* • *l'ordonnée à l'origine.*

a. $y = -3x + 2$ est l'équation … de (d).
b. $3x - 2y + 7 = 0$ est une équation … de (d').
c. 2 est … de (d). **d.** -3 est … de (d).
e. Le vecteur $\vec{u}(2 ; 3)$ est un vecteur directeur de … .
f. Le vecteur $\vec{v}(1 ; -3)$ est un vecteur directeur de … .

48 Des équations, une équation

La droite (d) admet pour équation cartésienne :

$$4x + 2y - 6 = 0.$$

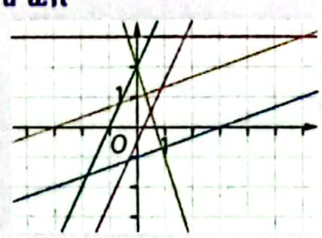
Recopie et complète les phrases suivantes par *l'* ou *une*.
a. $8x + 4y - 12 = 0$ est … autre équation de (d).
b. $y = -2x + 3$ est … équation de (d) du type $y = ax + b$.

49 Tracer précisément

1. On souhaite tracer la droite $(d) : y = 0{,}25x + 3$.
a. En quelle valeur la droite (d) coupe-t-elle l'axe des ordonnées ?
Dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1 cm, marque le point correspondant sur l'axe des ordonnées.
b. Cite la propriété de la leçon qui permet de déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de (d) ; puis écris les coordonnées de $\vec{u}$.
c. Pourquoi est-il difficile de représenter $\vec{u}$?
d. Calcule les coordonnées des vecteurs $2\vec{u}$, $3\vec{u}$, $4\vec{u}$ et $5\vec{u}$.
e. Que représentent ces vecteurs pour la droite (d) ?
f. Lequel de ces vecteurs est-il facile de représenter ?
g. Déduis-en un tracé précis de la droite (d).
2. Utilise la méthode vue dans la question **1.** pour tracer précisément les droites d'équations :
a. $y = 0{,}6x + 1$; **b.** $y = -1{,}25x + 3$; **c.** $y = -0{,}2x - 3$.

50 D'un seul coup d'œil

Utilise les coefficients directeurs et les ordonnées à l'origine pour associer, à chaque équation ci-dessous, la droite qui lui correspond.



• $y = \frac{1}{3}x - 1$ • $y = 2x + 2$ • $y = 3$
• $y = \frac{1}{3}x + 1$ • $y = 2x - \frac{1}{2}$ • $y = -3x + 2$.

51 Bien appliquer une formule

On donne les points $E(1 ; 3)$ et $F(4 ; 9)$. On a demandé à Fatoumata et Francis de calculer le coefficient directeur de la droite (EF). Voici leurs résultats :

Travail de Fatoumata

$a = \frac{3 - 1}{9 - 4}$

$a = \frac{2}{5}$

$a = 0{,}4.$

Tu as confondu abscisses et ordonnées.

Travail de Francis

$a = \frac{9 - 3}{1 - 4}$

$a = \frac{6}{-3}$

$a = -2.$

Tu n'as pas respecté l'ordre des points.

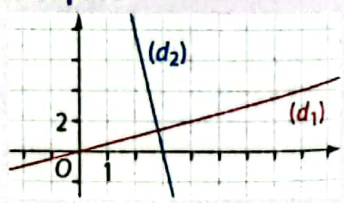
1. Rappelle la formule permettant de calculer le coefficient directeur de la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$ dans un repère.
2. Explique l'erreur commise par chaque élève.
3. Calcule le coefficient directeur de la droite (EF), puis trace la droite (EF) dans un repère afin de vérifier ta réponse.

52 Obtenir une équation cartésienne

1. On donne les points $A(2 ; 5)$ et $B(6 ; 8)$. On veut obtenir une équation cartésienne de la droite (AB).
a. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
b. Explique pourquoi une équation de (AB) peut s'écrire $-3x + 4y + r = 0$.
c. Utilise les coordonnées du point A pour calculer r.
d. Déduis-en une équation cartésienne de (d).
2. Détermine de la même façon une équation cartésienne des droites suivantes :
a. (d_1) passant par les points $C(-3 ; 2)$ et $D(5 ; -7)$;
b. (d_2) passant par les points $K(4 ; 1)$ et $L(-2 ; 6)$;
c. (d_3) passant par les points $R(-2 ; 4)$ et $S(-5 ; 1)$.

53 L'importance du repère

Dans le repère ci-contre, on donne les droites $(d_1) : -2x + 4y = 0$ et (d_2) : $8x + y + 24 = 0$.

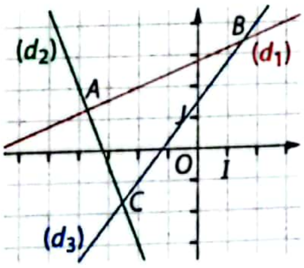


Sali affirme : « Les droites (d_1) et (d_2) qui sont tracées sont perpendiculaires ».
Acha lui répond : « Non car $-2 \times 8 + 4 \times 1 = -12$ et -12 est différent de zéro ».
1. a. Lequel de ces deux élèves a raison ?
b. Quelle est l'erreur commise par l'autre élève ?
2. a. Trace ces deux droites dans un repère orthonormé.
b. Obtient-on des droites perpendiculaires ?

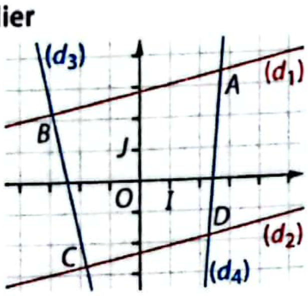
54 Critère de parallélisme
Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
1. On donne les droites suivantes :
• (d): $px+qy+r=0$;
• (d') : $p'x+q'y+r'=0$.
où les lettres p, q et r et les lettres p', q' et r' désignent des nombres réels.
a. Pour chacune de ces droites, écris les coordonnées d'un vecteur directeur.
b. Complète la propriété :
« deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires équivaut à .... »
c. Démontre que (d) et (d') sont parallèles équivaut à $pq'-p'q=0$.
2. Dans chaque cas, détermine si les droites (d) et (d') sont parallèles en utilisant le résultat de la question **1. c.**
a. $(d): 3x-5y+1=0$ et $(d'): -6x+10y-7=0$;
b. $(d): 6x+3y+2=0$ et $(d'): 8x+4y-3=0$.

55 Équation de médiatrice
Dans un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points $A(9\,;-1)$ et $B(1\,;3)$.
1 Fais une figure que tu complèteras au fur et à mesure de l'exercice.
2. a. Calcule les coordonnées du milieu K de $[AB]$.
b. Détermine une équation de la droite (AB).
c. Déduis-en une équation de la médiatrice (d) de $[AB]$.
3. D est le point de (d) de même abscisse que A.
a. Calcule l'ordonnée de D.
b. Déduis-en les longueurs AD et BD.

56 Triangle particulier
Dans le repère ci-contre, on a tracé les droites :
$(d_1): 2x-5y+14=0$;
$(d_2): 50+20y+32=0$;
$(d_3): -5x+4y-6=0$.
Démontre que ABC est un triangle rectangle.



57 Quadrilatère particulier
Dans le repère orthonormé (O, I, J) ci-contre, on a tracé les droites d'équations :
$(d_1): -2x+9y-26=0$;
$(d_2): -9x-2y-22=0$;
$(d_3): 4x-18y-42=0$;
$(d_4): 27x-2y-66=0$.



1. Associe chaque droite à son équation cartésienne.
2. Quelle semble être la nature du quadrilatère $ABCD$?
3. Démontre cette conjecture.

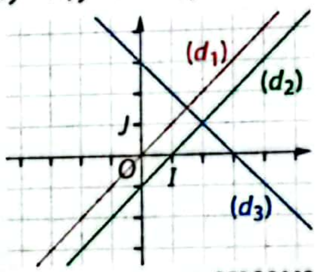
S'entraîner au BEPC

58 Déterminer une équation
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
On donne le point $A(1\,;2)$ et le vecteur $\vec{v}=-2\vec{i}-\vec{j}$.
Écris une équation cartésienne de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$.
BEPC 2001

59 Parallélisme et orthogonalité
(d_1), (d_2) et (d_3) sont des droites du plan définies par leurs équations respectives suivantes :
$(d_1): 2x-3y+4=0$; $(d_2): y=\dfrac{3}{2}x-5$; $(d_3): y=-\dfrac{3}{2}x+1$.
Une seule proposition est juste parmi les quatre ci-dessous. Laquelle ?
a. $(d_1)\perp(d_2)$ **b.** $(d_2)\,//\,(d_3)$ **c.** $(d_3)\perp(d_1)$ **d.** $(d_2)\perp(d_3)$
BEPC 2004

60 À chaque droite son équation
Soient trois droites (d_1), (d_2) et (d_3) construites dans le repère orthonormé ci-dessous.
On donne trois équations : $y=x$; $y=x-1$; $y=-x+3$.
Recopie et complète le tableau suivant :

Droite	Équation
(d_1)	
(d_2)	
(d_3)	



BEPC 2002

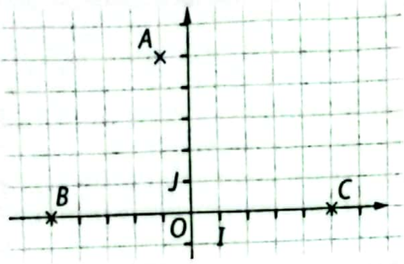
61 Alignements de points et orthogonalité
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(-2\,;1)$, $B(1\,;2)$ et $C(-3\,;0)$.
1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifie.
3. Donne un vecteur directeur de la droite (D) d'équation cartésienne $y=-3x+1$.
4. Montre que les droites (D) et (AB) sont perpendiculaires.
BEPC 2011

62 Une situation problème
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On donne les points $A(2\,;-1)$, $B(-2\,;3)$, $C(0\,;3)$ et $D(-2\,;0)$.
1. Place ces points dans le plan.
2. Écris une équation cartésienne de la droite (AB).
3. Détermine les coordonnées des points I, J, K et L, milieux respectifs des segments $[BC]$, $[BD]$, $[DA]$ et $[AC]$.
4. Démontre que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.
5. L'unité de longueur étant le centimètre, calcule le périmètre du quadrilatère $ACBD$.
BEPC 2007

63 L'antenne relais

Une compagnie de téléphonie mobile décide de construire une antenne relais pouvant couvrir trois villages en même temps. Pour ce faire, elle devra être située à égale distance des trois villages.

Les personnels techniques en charge de son installation souhaitent déterminer la position exacte de cette antenne en utilisant la carte ci-contre.



1. Reproduis le repère ainsi que les positions des trois villages représentés par les points A, B et C.

2. a. Trace les médiatrices du triangle ABC.

b. Quelles semblent être, par lecture graphique, les coordonnées de la position de l'antenne relais.

3. Un des techniciens propose de confirmer cette lecture par un calcul.

a. Il affirme tout d'abord que l'antenne relais sera nécessairement sur l'axe des ordonnées.
Explique son raisonnement.

b. Il calcule ensuite :

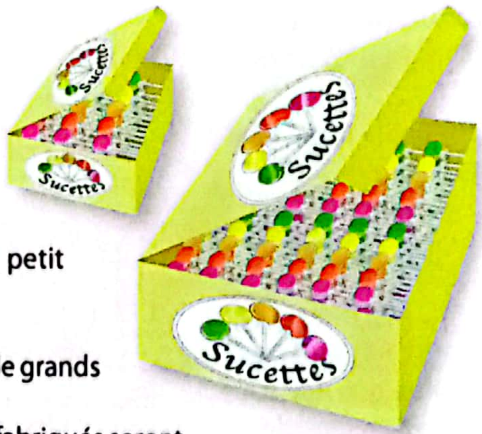
- les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$;
- les coordonnées du milieu K de $[AB]$;
- une équation cartésienne de la droite (d), médiatrice de $[AB]$;
- les coordonnées du point R de (d) qui est sur l'axe des ordonnées.

Effectue le travail de ce technicien.

c. Les coordonnées de la position de l'antenne relais ainsi calculées correspondent-elles à la lecture graphique effectuée à la question **2. b.** ?

d. Détermine par le calcul une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AC]$; puis vérifie qu'elle passe par le point R.

64 Optimiser une production



Une entreprise fabrique des sucettes. Les sucettes sont conditionnées dans des cartons pouvant contenir 100 sucettes (petit carton) ou 200 sucettes (grand carton).

Les petits cartons sont vendus 1 500 F CFA l'unité et les grands cartons sont vendus 2 500 F CFA l'unité.

Chaque heure, il faut mobiliser 2 employés pour fabriquer un petit carton et 3 employés pour un grand carton.

L'entreprise compte 31 employés.

On cherche à savoir le nombre x de petits cartons et le nombre y de grands cartons à fabriquer chaque heure pour obtenir le chiffre d'affaires le plus élevé. On suppose que tous les cartons fabriqués seront vendus.

1. a. Explique pourquoi les 31 employés peuvent fabriquer 8 petits cartons et 5 grands cartons en une heure.

b. Comment s'exprime le nombre d'employés fabriquant les petits cartons en fonction de x ?

c. Comment s'exprime le nombre d'employés fabriquant les grands cartons en fonction de y ?

d. Déduis-en que x et y vérifient l'égalité $2x + 3y = 31$.

2. a. Dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1 cm, trace la droite d'équation $2x + 3y = 31$.

b. Vérifie graphiquement ta réponse à la question **1. a.**

c. Détermine graphiquement tous les autres couples de valeurs possibles pour x et y.

3. a. Pour chaque couple de valeurs trouvé dans la question **2. c.**, détermine le chiffre d'affaires correspondant.

b. Déduis-en le nombre de petits cartons et le nombre de grands cartons à fabriquer chaque heure pour obtenir le chiffre d'affaires le plus élevé.

5 Angles inscrits, au centre Polygones réguliers

Pour démarrer

Cercles et polygones

1 **a.** Trace un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon 6 cm.
Place un point A appartenant au cercle ($\mathscr{C}$) et trace le rayon $[OA]$.
b. Sur le cercle ($\mathscr{C}$), place le point B tel que mes $\widehat{AOB} = 30°$;
puis trace le rayon $[OB]$.
c. Construis de la même façon qu'au **b.**, les points suivants : C, D, E, jusqu'à revenir au point A.

2 **a.** En reliant un point sur deux par un segment, quel polygone connu obtiens-tu ?
b. Quelle est la nature du triangle AOC ? Justifie.
c. Détermine la longueur AC.

3 **a.** En reliant un point sur quatre par un segment, quel polygone connu obtiens-tu ?
b. Quelle est la nature du triangle AOD ? Justifie.
c. Détermine la longueur AD.

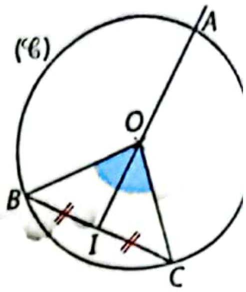
La fleur de grenadille est généralement constituée de dix pétales blancs dont les extrémités forment un décagone et de cinq étamines vertes en forme de pentagone.

Savoir-faire

À la fin de ce chapitre, tu sauras :
– justifier une égalité entre deux angles ;
– déterminer la mesure d'un angle inscrit dans un cercle et celle d'un angle au centre d'un cercle ;
– construire certains polygones réguliers inscrits dans un cercle donné.

1 Angles inscrits, angles au centre › Cours 1 et 2

Dans la figure ci-contre, $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O et de rayon 4 cm. Les points B et C appartiennent au cercle $(\mathscr{C})$ et sont tels que la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$ est 80°. Le point I est le milieu de $[BC]$ et A est le point d'intersection de la demi-droite $[IO)$ et du cercle $(\mathscr{C})$.



1 Reproduis la figure sur ton cahier.

2 a. Montre que (OI) est la médiatrice du segment $[BC]$; puis que (OI) est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$.
b. Déduis-en la mesure des angles $\widehat{IOC}$, $\widehat{COA}$ et $\widehat{BOA}$.
c. Utilise le triangle OAC et tes réponses à la question **b.** pour en déduire la mesure de l'angle $\widehat{OAC}$.
d. Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{IAC}$.

3 a. Dans la symétrie orthogonale d'axe (OI), quel est le symétrique :
• du point C ? • du point A ? • de l'angle $\widehat{CAI}$?
b. Déduis en la mesure de l'angle $\widehat{CAB}$.
c. Recopie et complète : mes $\widehat{BAC} = \ldots$ mes $\widehat{BOC}$.

$\widehat{BAC}$ est appelé angle inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$ et $\widehat{BOC}$ angle au centre associé à $\widehat{BAC}$.

4 a. Utilise le triangle AIB rectangle en I pour montrer que : mes $\widehat{IBA} = 70°$.
b. Déduis-en mes $\widehat{CBA}$. Puis, en utilisant tes réponses à la question **2. b.**, complète : mes $\widehat{CBA} = \ldots$ mes $\widehat{COA}$.
c. De même, complète : mes $\widehat{BCA} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{B \ldots A}$.

5 a. Reproduis et complète le tableau de proportionnalité ci-dessous.

mes $\widehat{BOC}$	mes $\widehat{COA}$	mes $\widehat{BOA}$
mes $\widehat{\ldots}$	mes $\widehat{\ldots}$	mes $\widehat{\ldots}$

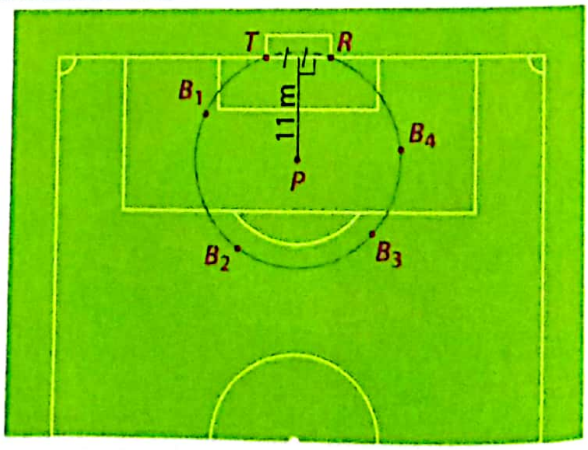
$\times \ldots$

b. Complète la propriété :

Si $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit dans un cercle de centre O, alors mes $\widehat{BAC} = \ldots$.

2 Angles qui interceptent le même arc › Cours 3

Un footballeur s'entraîne pour améliorer ses frappes. Il a placé quatre ballons B_1, B_2, B_3 et B_4 sur le cercle dont le centre est le point de penalty P et qui passe par les poteaux du but T et R.
On appelle angle de tir, l'un des angles $\widehat{TBR}$.



1 Reproduis sur ton cahier la figure ci-contre à l'échelle $\frac{1}{200}$, en sachant que $TR = 7{,}30$ m.
Tu placeras les points : B_1, B_2, B_3 et B_4 où tu veux.

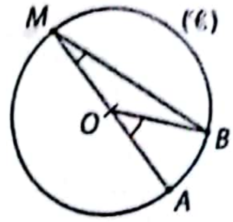
2 a. À l'aide de ton rapporteur, mesure les quatre angles de tir, $\widehat{TB_1R}$, $\widehat{TB_2R}$, $\widehat{TB_3R}$ et $\widehat{TB_4R}$.
Qu'observes-tu ?
On dit que ces quatre angles interceptent le même arc $\overset{\frown}{TR}$ sur le cercle.
b. Complète la propriété :

« Si des points M et N sont situés sur un même cercle et que les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$, alors … »

3 Démontrer des propriétés › Cours 2 et 3

Partie Ⓐ : Propriété de l'angle inscrit et de l'angle au centre associé

1 Un cas particulier



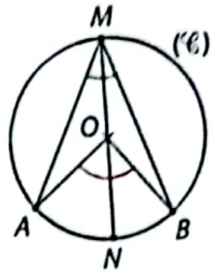
a. Sur la figure ci-contre, $[AM]$ est un diamètre du cercle $(\mathscr{C})$.

Utilise le triangle isocèle MOB pour montrer que : mes $\widehat{OMB} = \dfrac{180 - \text{mes } \widehat{MOB}}{2}$.

b. Montre que : $180° -$ mes $\widehat{MOB} =$ mes $\widehat{AOB}$.

c. Déduis en que : mes $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.

2 Le cas général



Sur la figure ci-contre $[MN]$ est un diamètre du cercle $(\mathscr{C})$.
Complète la démonstration suivante :

D'après le **1.** mes $\widehat{NMB} = \ldots$ mes $\widehat{NOB}$ et mes $\widehat{NMA} = \dfrac{1}{2}$ mes … .

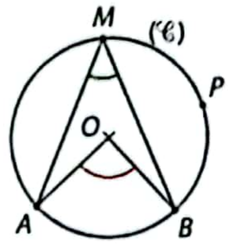
Or, mes $\widehat{AMB} =$ mes $\widehat{AMN} +$ mes $\widehat{\ldots}$.

On en déduit que :

mes $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2} \ldots + \dfrac{1}{2} \ldots = \dfrac{1}{2}(\ldots + \ldots)$.

Ainsi, mes $\widehat{AMB} = \ldots$ mes $\widehat{AOB}$.

Partie Ⓑ : Propriété des angles inscrits



On note P un point de $(\mathscr{C})$ situé sur le même arc $\widehat{AB}$ que le point M.

1 Applique la propriété de la partie Ⓐ, au point M ; puis au point P.

2 Déduis-en que : mes $\widehat{AMB} =$ mes $\widehat{APB}$.

4 Un nouveau polygone régulier › Cours 4

Partie Ⓐ : Construction d'un pentagone régulier

1 Trace sur ton cahier le polygone $ABCDE$ en suivant pas à pas ce programme de construction :

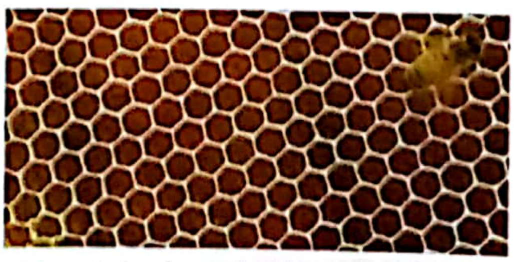
a. trace un segment $[AB]$ tel que $AB = 6$ cm ;
b. place un point E tel que $AE = 6$ cm et mes $\widehat{BAE} = 108°$;
c. place un point D tel que $ED = 6$ cm et mes $\widehat{AED} = 108°$;
d. place un point C tel que $DC = 6$ cm et mes $\widehat{ECD} = 108°$;
e. trace le polygone $ABCDE$.

Tu viens de construire un polygone à cinq côté appelé pentagone.

2 a. Construis les cercles circonscrits aux triangles ABC et ADE.
Quelle remarque peux-tu faire ?
b. Utilise ta règle graduée et ton rapporteur pour vérifier que $ABCDE$ est un pentagone régulier.

Partie Ⓑ : Pavage et polygones réguliers

Les alvéoles de ce nid d'abeilles ont la forme d'hexagones réguliers. Ils permettent aux abeilles d'obtenir un pavage, c'est-à-dire de recouvrir le plan sans laisser d'espace vide.



1 Trace un hexagone régulier et construis sur chacun de ses côtés six autres hexagones identiques au premier.

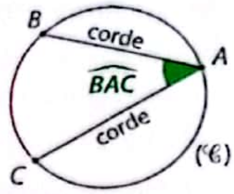
2 a. Trace chacun des polygones ci-dessous ; puis sur chacun des côtés, des polygones identiques :
- un triangle équilatéral
- un parallélogramme
- un carré
- un pentagone régulier

b. Parmi les polygones ci-dessus, indique ceux qui peuvent être utilisés pour un pavage.

5 Cours

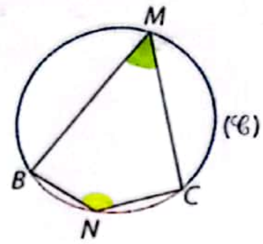
1 Arc intercepté par un angle inscrit

Définitions **Le secteur angulaire $\widehat{BAC}$ est dit inscrit dans le cercle ($\mathscr{C}$) lorsque les segments $[AB]$ et $[AC]$ sont des cordes de ($\mathscr{C}$).**
On dit plus simplement que $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit dans le cercle ($\mathscr{C}$).



Remarque :
La corde $[BC]$ du cercle ($\mathscr{C}$) ci-contre, détermine deux arcs de cercle :
le petit arc (en rouge) et le grand arc (en bleu).

Définitions • **L'angle $\widehat{BMC}$ est un angle inscrit dans le cercle ($\mathscr{C}$) interceptant le petit arc $\overset{\frown}{BC}$.**
• **L'angle $\widehat{BNC}$ est un angle inscrit dans le cercle ($\mathscr{C}$) interceptant le grand arc $\overset{\frown}{BC}$.**



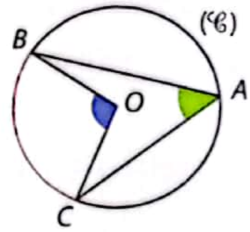
2 Secteur angulaire au centre

A, B et C désignent trois points distincts d'un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.

Définitions **Le secteur angulaire $\widehat{BOC}$ est appelé secteur angulaire au centre du cercle ($\mathscr{C}$) lorsque $[OB]$ et $[OC]$ sont des rayons du cercle ($\mathscr{C}$).**
On dit plus simplement que $\widehat{BOC}$ est un angle au centre du cercle ($\mathscr{C}$).

Propriété **La mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.**

$$\text{mes } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{BOC}$$

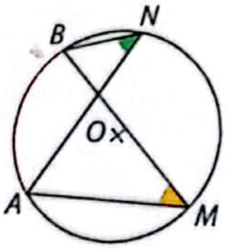


3 Propriétés des angles inscrits

Propriété **A, N, M et B désignent quatre points distincts d'un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.**

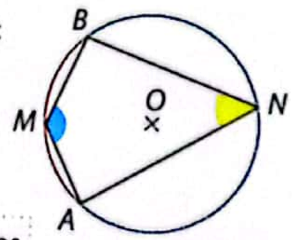
1er cas : Si M et N appartiennent au même arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ (ou $\overset{\frown}{AB}$), alors les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ ont la même mesure :

$$\text{mes } \widehat{ANB} = \text{mes } \widehat{AMB}$$

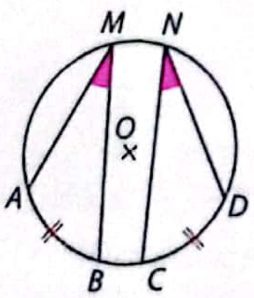


2^{e} cas : Si M et N appartiennent l'un au petit arc $\overset{\frown}{AB}$ et l'autre au grand arc $\overset{\frown}{AB}$, alors les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires :

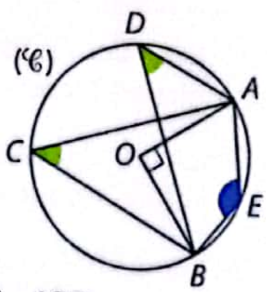
$$\text{mes } \widehat{ANB} + \text{mes } \widehat{AMB} = 180°$$



Propriété **Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent deux arcs de même longueur ont la même mesure.**



Exemple :
A, B, C, D, E sont des points du cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.
$(OA) \perp (OB)$.
Puisque mes $\widehat{AOB} = 90°$,
on en déduit que mes $\widehat{ACB} = 45°$
et mes $\widehat{ADB} = 45°$.
Puis, que mes $\widehat{AEB} = 180° - 45° = 135°$.



4 Polygones réguliers

a Généralités

Définition **Un polygone régulier est un polygone dont les côtés ont la même longueur et dont tous les angles ont la même mesure.**

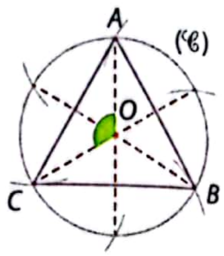
Propriété **Tout polygone régulier est inscriptible dans un cercle.**

Dans la suite, (𝒞) désigne le cercle de centre *O* et de rayon *R* dans lequel le polygone régulier est inscrit.

b Triangle équilatéral

Construction

- On place un point *A* sur un cercle (𝒞) ;
- on choisit une ouverture de compas correspondant au rayon du cercle (𝒞) et on marque successivement les points sur (𝒞) en partant de *A* ;
- on joint un point sur deux pour obtenir le triangle équilatéral *ABC*.

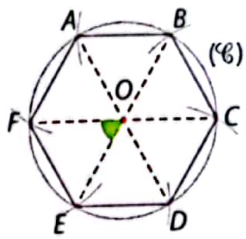


Propriété **L'angle au centre d'un triangle équilatéral mesure 120° et son côté mesure $\sqrt{3}R$.**

c Hexagone

Construction

- On place un point *A* sur un cercle (𝒞) ;
- on choisit une ouverture de compas correspondant au rayon du cercle (𝒞) et on marque successivement les points sur (𝒞) en partant de *A* ;
- on joint tous les points pour obtenir l'hexagone régulier *ABCDEF*.

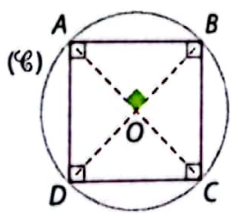


Propriété **L'angle au centre d'un hexagone régulier mesure 60° et son côté mesure *R*.**

d Carré

Construction

- On trace deux diamètres perpendiculaires d'un cercle (𝒞) ;
- on joint les quatre points pour obtenir le carré *ABCD*.

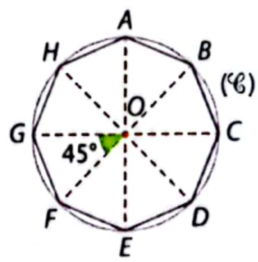


Propriété **L'angle au centre d'un carré mesure 90° et son côté mesure $\sqrt{2}R$.**

e Octogone

Construction

- On trace deux diamètres perpendiculaires d'un cercle (𝒞) ;
- on trace les bissectrices des angles droits ;
- on joint les huit points pour obtenir l'octogone régulier *ABCDEFGH*.

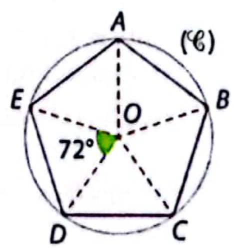


Propriété **L'angle au centre d'un octogone régulier mesure 45°.**

f Pentagone

Construction

- On place un point *A* sur un cercle (𝒞) ;
- on place le point *B* sur le cercle (𝒞) tel que mes $\widehat{AOB} = 72°$;
- on place de la même façon trois autres points *C*, *D* et *E* pour obtenir le pentagone régulier *ABCDE*. (On peut également reporter, à partir de *B*, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ à l'aide du compas.)



Propriété **L'angle au centre d'un pentagone régulier mesure 72°.**

g Cas général

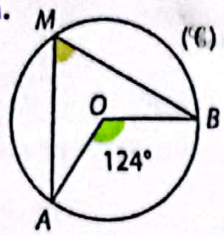
Propriété **L'angle au centre d'un polygone régulier à *n* côtés mesure $\frac{360°}{n}$.**

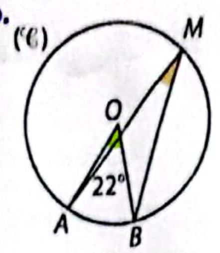
5 Méthodes et savoir-faire

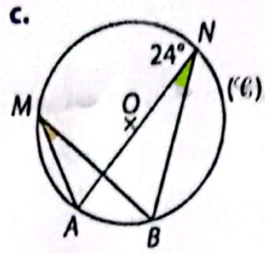
1 Apprendre à calculer la mesure d'un angle

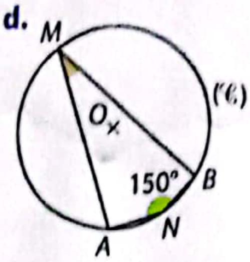
Énoncé

Dans chacun des cas suivants, détermine la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$.

a.


b.


c.


d.


Solution

Je reconnais un angle au centre qui intercepte le même arc qu'un angle inscrit.
J'applique la propriété du cours 2 page 60.

a. L'angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$.

Donc, mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.

Ainsi, mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \times 124° = 62°$.

b. L'angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$.

Donc, mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.

Ainsi, $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \times 22° = 11°$.

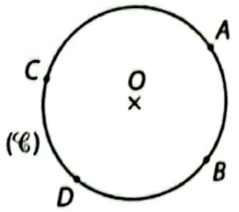
- Je reconnais deux angles inscrits qui interceptent le même arc.
- J'applique la propriété du cours 3 page 60.

c. L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{ANB}$.
Donc, mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ANB}$.
Ainsi, mes $\widehat{AMB} = 24°$.

d. $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent les deux arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AB}$.
Donc, mes $\widehat{AMB}$ + mes $\widehat{ANB} = 180°$.
Ainsi, $150°$ + mes $\widehat{AMB} = 180°$.
D'où, mes $\widehat{AMB} = 180° - 150° = 30°$.

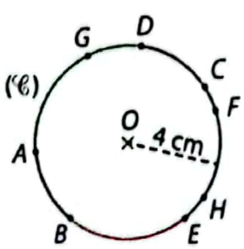
S'exercer

1 Dans la figure ci-contre (𝒞) est le cercle de centre O. A, B, C et D sont quatre points du cercle (𝒞). Nomme l'angle au centre qui intercepte le même arc que les angles inscrits suivants.

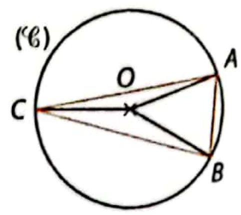


- $\widehat{ACB}$ • $\widehat{BDC}$ • $\widehat{CBD}$ • $\widehat{ABD}$

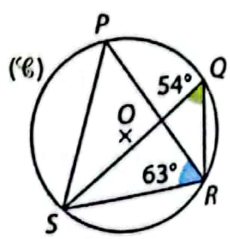
2 **a.** Reproduis la figure ci-contre.
b. Trace et nomme tous les angles inscrits dans (𝒞) qui interceptent l'arc vert.
c. Trace et nomme tous les angles inscrits dans (𝒞) qui interceptent l'arc rouge.



3 Dans la figure ci-contre, (𝒞) est le cercle circonscrit au triangle ABC.
mes $\widehat{AOB} = 50°$
et mes $\widehat{BOC} = 150°$.
a. Détermine la mesure des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{BAC}$.
b. Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.



4 P, Q, R et S sont quatre points du cercle (𝒞) de centre O ci-contre.
a. Nomme un angle inscrit qui intercepte le même arc que l'angle $\widehat{SQR}$.
b. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{SPR}$.
c. Montre que SPR est un triangle isocèle.



2 Apprendre à construire un polygone régulier

Énoncé

1. a. Trace un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon 6 cm. Place deux points A et B sur le cercle ($\mathscr{C}$) tels que mes $\widehat{AOB} = 45°$.

b. Place le point C situé sur le cercle ($\mathscr{C}$) tel que mes $\widehat{BOC} = 45°$.

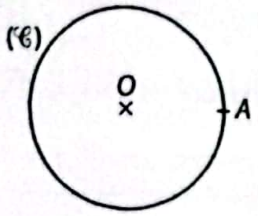
c. Poursuis cette construction en justifiant le retour au point A.

2. Indique le nom du polygone régulier obtenu.

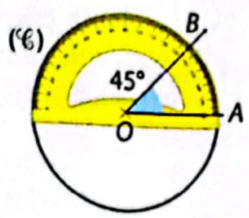
Solution

1. a.

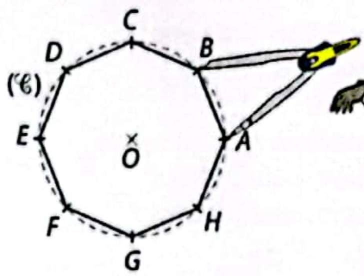
Je trace un cercle de centre O et je place A un point sur le cercle.



À l'aide du rapporteur, je trace un angle de 45° de sommet O, j'obtiens le point B.



b. Je prends comme écartement au compas la longueur AB, je reporte cet écartement sur le cercle ($\mathscr{C}$) pour obtenir le point C, et ainsi de suite...



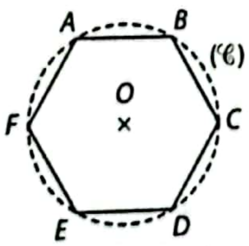
c. $8 \times 45° = 360°$, donc en reportant huit fois un angle au centre de mesure 45°, on effectue un tour complet du cercle ($\mathscr{C}$) et on retourne au point A.

2. Le polygone obtenu a huit côtés de même longueur, les angles au centre sont égaux, c'est un octogone régulier.

S'exercer

5 **1.** Trace un cercle de centre O et de rayon 5 cm. Place un point A sur le cercle.
2. Donne la mesure de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ de telle sorte que A et B soient deux sommets consécutifs d'un pentagone régulier.
3. Construis le pentagone régulier $ABCDE$.

6 $ABCDEF$ est l'hexagone régulier de centre O représenté ci-contre.

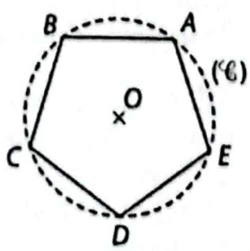


1. Quelle est la nature du triangle AOB ?
2. Montre que les points A, O et D sont alignés.
3. a. Donne les mesures des angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{ADE}$.
b. En utilisant les angles alterne-interne, montre que $(AB) // (ED)$.
4. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$.

7 **1. a.** Construis un carré $ABCD$ de côté 8 cm.
b. Place les milieux de chacun des côtés.
2. Construis un octogone régulier dont quatre des sommets sont les milieux du carré $ABCD$.

8 O et A sont deux points tels que $OA = 3$ cm. On souhaite construire un triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle de centre O.
1. Indique la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$; puis de l'angle $\widehat{AOC}$.
2. Construis le triangle ABC.
3. Quelle est la longueur AB ?

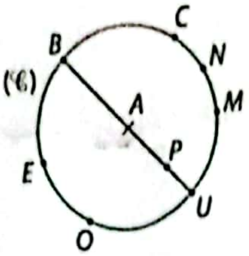
9 $ABCDE$ est un pentagone régulier inscrit dans le cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.



1. a. Rappelle la mesure de l'angle $\widehat{AOE}$.
b. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ACE}$.
2. De même, calcule la mesure de l'angle $\widehat{ECD}$; puis de l'angle $\widehat{BCA}$.
3. Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{BCD}$?
4. Quelle est la mesure de chacun des angles de ce pentagone ?

Arc et angles

10 Les points de la figure ci-contre sont situés sur le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A.



1. Les angles cités ci-après sont-ils des angles au centre du cercle $(\mathscr{C})$?

a. $\widehat{CPU}$ b. $\widehat{NAM}$

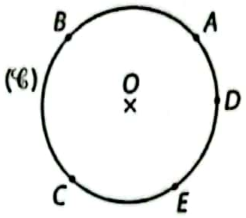
c. $\widehat{MAE}$ d. $\widehat{ANU}$

2. Les angles cités ci-après sont-ils des angles inscrits du cercle $(\mathscr{C})$?

a. $\widehat{CAE}$ b. $\widehat{BCN}$ c. $\widehat{BEC}$ d. $\widehat{EOB}$

3. Cite tous les angles inscrits interceptant l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

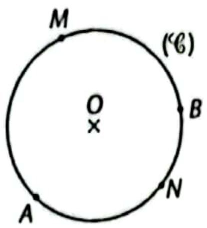
11 A, B, C, D et E sont des points du cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.



Indique les angles au centre qui correspondent aux angles inscrits suivants :

- $\widehat{BDC}$ • $\widehat{CBD}$
- $\widehat{BAC}$ • $\widehat{CBE}$

12 A, M, N, et B sont quatre points du cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.



En utilisant la figure, complète les phrases avec les mots : *angle*, *arc*, *obtu*, *aigu* ou *au centre*.

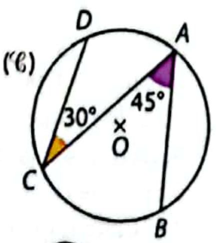
- L'angle $\widehat{AMB}$ est un angle ..., il intercepte le petit ... $\overset{\frown}{AB}$.
- L'angle $\widehat{MOB}$ est un angle ..., il intercepte l'... $\overset{\frown}{MB}$.
- L'angle $\widehat{BNA}$ est un angle ..., il intercepte le grand ... $\overset{\frown}{AB}$.

13 1. Trace un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O de rayon 5 cm, place quatre points A, B, C et D sur $(\mathscr{C})$.

2. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ interceptent-ils le même arc ? Est-ce toujours le cas ?

Angles inscrits – Angles au centre

14 Sur la figure ci-contre, A, B, C et D sont quatre points d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.

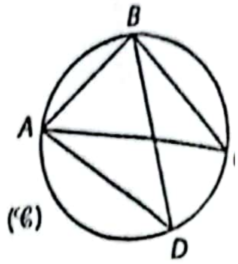


1. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$.
2. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{DOA}$.
3. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ODA}$.

15 A, B, C et D sont quatre points du cercle $(\mathscr{C})$ ci-contre tels que :

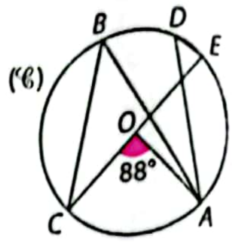
mes $\widehat{BAC} = 50°$ et

mes $\widehat{ADB} = 40°$.



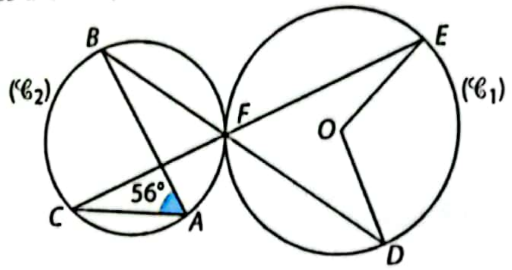
1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifie.
2. Que dire du segment $[AC]$ pour le cercle $(\mathscr{C})$? Justifie.

16 A, B, C, D et E sont des points du cercle $(\mathscr{C})$ de centre O ci-contre.



1. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
2. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{AOE}$.
3. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{EDA}$.

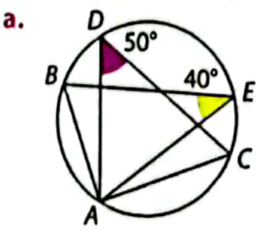
17 Sur la figure ci-dessous, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ sont deux cercles tangents en F. O est le centre du cercle $(\mathscr{C}_1)$ et les droites (BD) et (EC) se coupent en F.



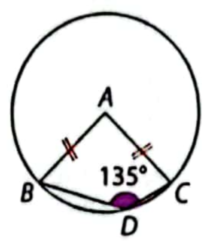
Détermine la mesure de l'angle $\widehat{DOE}$.

18 Démontre, pour chacune des deux figures ci-dessous, que le triangle ABC est un triangle rectangle.

a.



b.

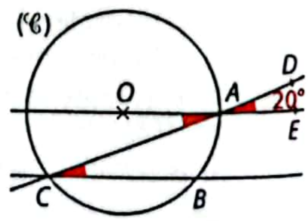


A est le centre du cercle

19 A, B et C désignent trois points du cercle $(\mathscr{C})$ ci-contre.

D est un point de (AC) et E un point de (OA).

Les droites (AE) et (BC) sont parallèles.



a. Justifie que les angles colorés en vert ont la même mesure.

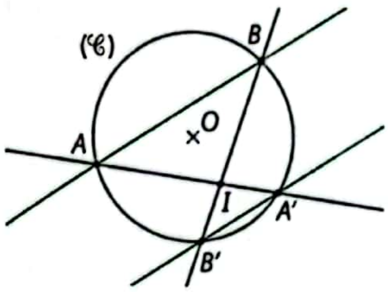
b. Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

20 1. Trace un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.
Trace deux diamètres perpendiculaires $[AC]$ et $[BD]$ de ce cercle ($\mathscr{C}$).
Place un point M qui appartient à l'arc $\overset{\frown}{DC}$.
2. Montre que la demi-droite $[MB)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMC}$.

21 ABC est un triangle isocèle en A, tel que $AB = 4$ cm.
($\mathscr{C}$) est le cercle circonscrit au triangle ABC.
1. Construis une telle figure sur ton cahier.
2. Construis la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$; puis celle de l'angle $\widehat{ACB}$. Elles coupent ($\mathscr{C}$) respectivement en M et en N.
3. Démontre que : mes $\widehat{ANC}$ = mes $\widehat{AMB}$.

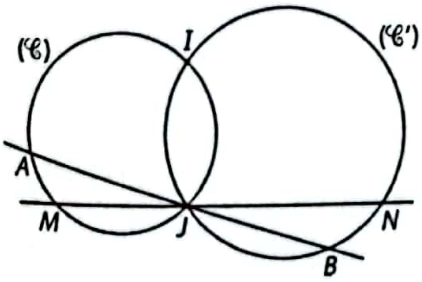
22 ($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O, $[AB]$ est une corde ne passant pas par O, E est un point du grand arc $\overset{\frown}{AB}$ et F est le point d'intersection de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et de la bissectrice de l'angle au centre $\widehat{AOB}$.
1. Trace une telle figure sur ton cahier.
2. Exprime mes $\widehat{AOF}$ en fonction de mes $\widehat{AEB}$.

23 Sur la figure ci-dessous, (AB) et $(A'B')$ sont deux droites parallèles. O est le centre du cercle ($\mathscr{C}$) qui passe par les quatre points A, B, A' et B' et I est le point d'intersection des droites (AA') et (BB').



1. Montre que le triangle ABI est isocèle en I.
2. Démontre que la droite (OI) est perpendiculaire à la droite (AB).

24 ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) sont deux cercles qui se coupent aux points I et J. (MN) et (AB) sont deux droites qui se coupent en J.

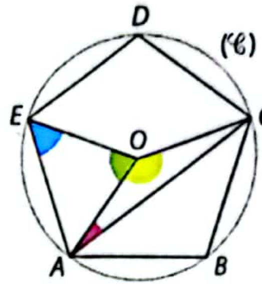


1. Cite deux angles inscrits dans ($\mathscr{C}$) qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{AM}$.
2. Cite deux angles inscrits dans ($\mathscr{C}'$) qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{NB}$.
3. Montre que : mes $\widehat{AIB}$ = mes $\widehat{MIN}$.

Polygones réguliers

25 Réponds par vrai ou faux. Justifie tes réponses.
$ABCDE$ est un pentagone régulier de centre O.
1. L'angle au centre $\widehat{AOB}$ mesure 76°.
2. L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ mesure 45°.
3. L'angle $\widehat{DBA}$ mesure 44°.

26 $ABCDE$ est le pentagone régulier ci-contre, inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.
Indique, en justifiant, la mesure de chacun des angles suivants.
- $\widehat{AOE}$
- $\widehat{OEA}$
- $\widehat{AOC}$
- $\widehat{OAC}$



27 1. a. Trace un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon 6 cm.
b. Place sur ce cercle un point A et construis l'hexagone $ABCDEF$ régulier inscrit dans ce cercle.
2. Quelle est la nature du triangle ACE ?
3. a. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{EAC}$.
b. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ACE}$.

28 $ABCDEFGH$ est un octogone régulier inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.
1. Trace la figure sur ton cahier en prenant $OA = 5$ cm.
2. a. Quelle est la nature du triangle OEF ?
b. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{EOF}$; déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{OEF}$.
3. a. Quelle est la nature du triangle FED ?
b. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{FED}$; déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{EDF}$.
4. a. Quelle est la nature du triangle ADE ?
b. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{DAE}$; déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{DEA}$.

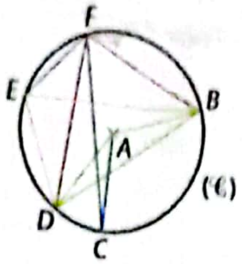
29 1. Trace deux droites (d) et (d') perpendiculaires en A.
2. Trace le cercle ($\mathscr{C}$) de centre A et de rayon 4 cm. Il coupe (d) en B et C et (d') en D et E de sorte que le quadrilatère $BDCE$ ne soit pas croisé.
3. Explique pourquoi le quadrilatère $BDCE$ est un polygone régulier.

30 Calcule la distance notée d entre deux sommets consécutifs de la tête hexagonale de l'écrou ci-contre.

Bien comprendre mieux rédiger

31 Connaître le vocabulaire

La figure ci-dessous représente un cercle (𝒞) de centre *A*. Les points *B*, *C*, *D*, *E* et *F* appartiennent au cercle (𝒞).



Complète les phrases ci-dessous en utilisant les mots : *inscrit*, *au centre*, *arc* ou des noms des angles de la figure.

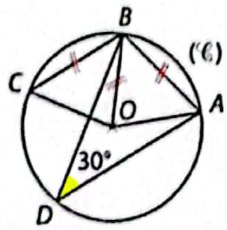
1. L'angle $\widehat{CAB}$ est un angle … qui intercepte … $\overset{\frown}{BC}$.
De plus, mes $\widehat{CFB} = \frac{1}{2} \times \dots$.

2. L'angle $\widehat{BED}$ est un angle … qui intercepte … $\overset{\frown}{BD}$.
De plus, mes $\widehat{BED} = \dots$ soit mes $\widehat{BAD} = 2 \times \dots$.

3. L'angle $\widehat{EDB}$ intercepte … .
L'angle $\widehat{EFB}$ intercepte le grand … .
Donc, mes … + … = … °.

32 Une copie à corriger

Sur la figure ci-dessous (𝒞) est un cercle de centre O. *A*, *B*, *C* et *D* sont quatre points de (𝒞) tels que : mes $\widehat{ADB} = 30°$ et $AB = BC$.



Le professeur demande à ses élèves de justifier que les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{ADC}$ ont même mesure.
Voici la réponse d'un élève et les remarques du professeur

La mesure de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ est 60°.
à justifier
Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ interceptent le ~~même arc~~
vocabulaire
car $AB = BC$, donc ils sont égaux.
mes $\widehat{ADC}$ = mes $\widehat{ADB}$ + mes $\widehat{BDC}$
= 30° + 30° = 60°.
à justifier

Rédige ce raisonnement correctement en tenant compte des remarques du professeur.

33 Les angles dans les polygones réguliers

Les polygones réguliers cités dans le tableau ci-dessous sont tous inscrits dans un cercle (𝒞) de centre *O* ; *A*, *B* et *C* désignent trois sommets consécutifs des polygones. Recopie et complète le tableau ci-dessous.

Polygone régulier	mes $\widehat{AOB}$	mes $\widehat{ABC}$
Triangle équilatéral	…	…
…	…	90°
Pentagone	…	…
…	60°	…
Octogone	…	…

34 Deux constructions pour un même polygone

Complète les programmes de construction ci-dessous afin d'obtenir, dans les deux cas, un pentagone régulier.

① Je trace … (𝒞) de centre *O*.

② Je place un point *A* sur … et un point *B* sur … tels que mes $\widehat{AOB} = \dots°$.

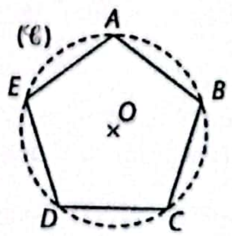
③ Je place le point *C* sur … tel que : mes $\widehat{BOC} = \dots°$.

③' À l'aide du compas, je place le point *C* sur …, tel que $AB = \dots$.

④ Je recommence … fois l'étape 3 afin d'obtenir le … régulier *ABCDE*.

35 Rédiger une démonstration

ABCDE est un pentagone régulier inscrit dans le cercle (𝒞) de centre O ci-dessous.

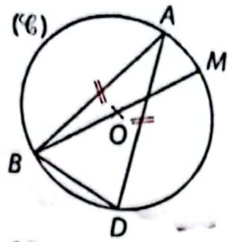


On cherche à montrer que la mesure de chacun des angles de ce pentagone est 108 °.
Complète la démonstration :

- *ABCDE* étant un pentagone …, mes $\widehat{AOE} = \dots$.
- De plus, l'angle au centre … intercepte le même … que l'angle inscrit $\widehat{ACE}$ donc mes $\widehat{ACE} = \frac{1}{2} \times \dots = \dots$.
- En tenant le même raisonnement, je montre que : mes $\widehat{ACB} = \dots$; puis que mes $\widehat{ECD} = \dots$.
- Ainsi, mes $\widehat{BCD} = \dots + \dots + \dots = \dots$.
- Enfin par définition d'un … régulier, chaque angle mesure aussi 108°.

36 **Triangle isocèle et cercle**

Dans la figure ci-contre ABD est un triangle isocèle en A tel que mes $\widehat{ABD} = 75°$, $(\mathscr{C})$ est le cercle circonscrit au triangle ABD, O est le centre de $(\mathscr{C})$ et $[BM]$ est un diamètre de $(\mathscr{C})$.



$BD = 5{,}6$ cm
$BM = 11{,}2$ cm

1. Quelle est la nature du triangle BMD ? Justifie.

2. a. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$.

b. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{BMD}$.

3. Calcule la longueur DM (arrondie au dixième).

37 **Pyramide à base hexagonale**

ABC est un triangle équilatéral de côté a.

1. Relie une dimension du triangle et une expression.

La hauteur •	• $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Le rayon du cercle circonscrit •	• $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
L'aire •	• $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$

2. Un hexagone régulier est inscrit dans un cercle de rayon r, montre que l'aire de cet hexagone est $\dfrac{3r^2\sqrt{3}}{2}$.

3. Réalise un patron d'une pyramide régulière de 10 cm de hauteur et dont la base est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 4 cm.

Un patron d'une pyramide est constitué d'une base polygonale et de triangles isocèles.

4. Calcule le volume de cette pyramide.

38 **Trigonométrie**

$ABCD$ est un losange.

1. a. Justifie que la droite (BD) est la médiatrice du segment $[AC]$.

b. De même, justifie que (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$.

c. Déduis-en une propriété connue sur les diagonales d'un losange.

2. I est un point d'intersection des diagonales du losange $ABCD$.

a. Exprime $\cos\widehat{IBC}$; puis $\cos\widehat{ICB}$, en fonction de IB, IC et BC.

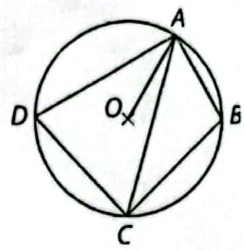
b. Quelle condition dois-tu imposer à IB et IC pour que $\widehat{IBC}$ et $\widehat{ICB}$ soient de même mesure ? Montre alors que $AC = BD$ et déduis-en la nature du losange $ABCD$.

3. Un losange est-il un polygone régulier ?

S'entraîner au BEPC

39 **Dans un cercle**

Sur la figure ci-contre, les points A, B, C et D appartiennent au cercle de diamètre $[BD]$ et de centre O. Le triangle OAB est équilatéral. Recopie et complète le tableau suivant.



Angle	$\widehat{OAB}$	$\widehat{ACB}$	$\widehat{BAD}$	$\widehat{AOD}$
Mesure en degré				

BEPC 2010

40 **Dans un repère**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$

1. Place les points $A(2\,;1)$; $B(-2\,;-2)$ et $C(0\,;-3)$.

2. Calcule les longueurs AB, AC et BC.

3. Démontre que le triangle ABC est rectangle en C.

4. a. Donne les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.

b. Construis le cercle circonscrit au triangle ABC.

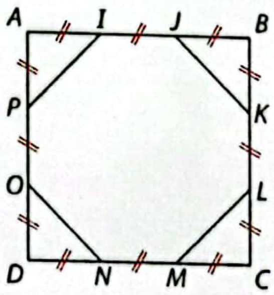
c. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

d. Donne une mesure de l'angle au centre associé à l'angle $\widehat{BAC}$.

BEPC 2011

41 **Quadrature du cercle**

Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré de côté 9 cm.



1. Fais une figure en vraie grandeur.

2. a. Calcule JK.

b. L'octogone $IJKLMNOP$ est-il un octogone régulier ? Justifie.

c. Calcule l'aire de cet octogone.

3. S est le point d'intersection des diagonales de $ABCD$.

a. Place le point S et trace le cercle de centre S de diamètre 9 cm.

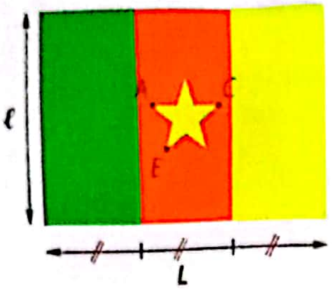
b. Le disque de centre S et de diamètre 9 cm a-t-il une aire supérieure à l'aire de l'octogone ?

Extrait DNB 2010

Activités d'intégration

42 Le drapeau du Cameroun

Kouda souhaite tracer sur son cahier une réduction à l'échelle $\frac{1}{10}$ du drapeau du Cameroun ci-dessous.



$\ell = 50$ cm
$L = 99$ cm
$AC = 25$ cm

1. Trace sur ton cahier un segment $[AC]$ horizontal et le segment $[CE]$ tel que $CE = CA$ et mes $\widehat{ACE} = 36°$.

2. Construis le cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ACE, nomme O son centre.

3. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{AOE}$.

4. a. Place les points B et D de sorte que $ABCDE$ soit un pentagone régulier.

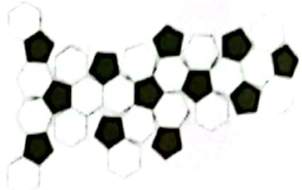
b. Complète ta figure afin d'obtenir l'étoile du drapeau du Cameroun, puis le drapeau tout entier.

43 Le ballon de foot

La figure ci-contre est appelée polyèdre. Autour de chaque sommet s'assemblent deux hexagones réguliers et un pentagone régulier.

1. Construis un pentagone régulier et sur chaque côté de ce pentagone construis cinq hexagones réguliers.

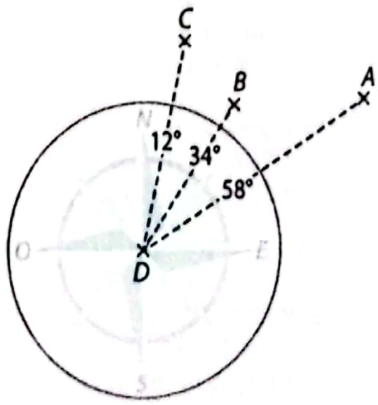
2. Le long d'un côté sur deux de chaque hexagone, trace un pentagone régulier comme schématisé ci-contre.



Pour obtenir le patron d'un ballon de foot, il faudrait que tu traces 12 pentagones et 20 hexagones.

44 Position d'un cargo

Pour signaler sa position aux gardes côtes, le commandant d'un cargo effectue trois mesures d'angles par rapport au Nord comme le montre la figure ci-contre.



Le point D est la position du cargo et les points A, B, C la position de trois phares.

1. Explique pourquoi de D, le commandant voit le segment $[AB]$ sous un angle de 24° et le segment $[BC]$ sous un angle de 22°.

2. Un garde côte affirme que D se trouve à l'intersection de deux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ tels que :

- Le cercle $(\mathscr{C}_1)$, de centre noté O_1, passe par les points A, B et D et mes $\widehat{AO_1B} = 48°$.
- Le cercle $(\mathscr{C}_2)$, de centre noté O_2, passe par les points B, C et D et mes $\widehat{BO_2C} = 44°$.

Justifie ces affirmations à l'aide d'une propriété du cours.

3. Place trois points A, B et C sur ton cahier et construis les deux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$, sans oublier que O_1 est équidistant de A et B et O_2 est équidistant de B et C.

4. Indique sur ton schéma l'emplacement du cargo.

6 Applications du plan

Pour démarrer

Le marabout

Un photographe animalier souhaite publier la photo d'un marabout dont les dimensions sont : $h = 8{,}4$ cm et $L = 11{,}4$ cm.

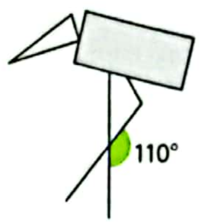
1 Pour être publiée, la photo doit être redimensionnée de la manière suivante :

$h' = 2{,}8$ cm et $L' = 3{,}8$ cm.

h	L
h'	L'

a. Vérifie que le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité. Précise son coefficient.

b. Le marabout pris en photo peut être schématisé comme ci-contre.

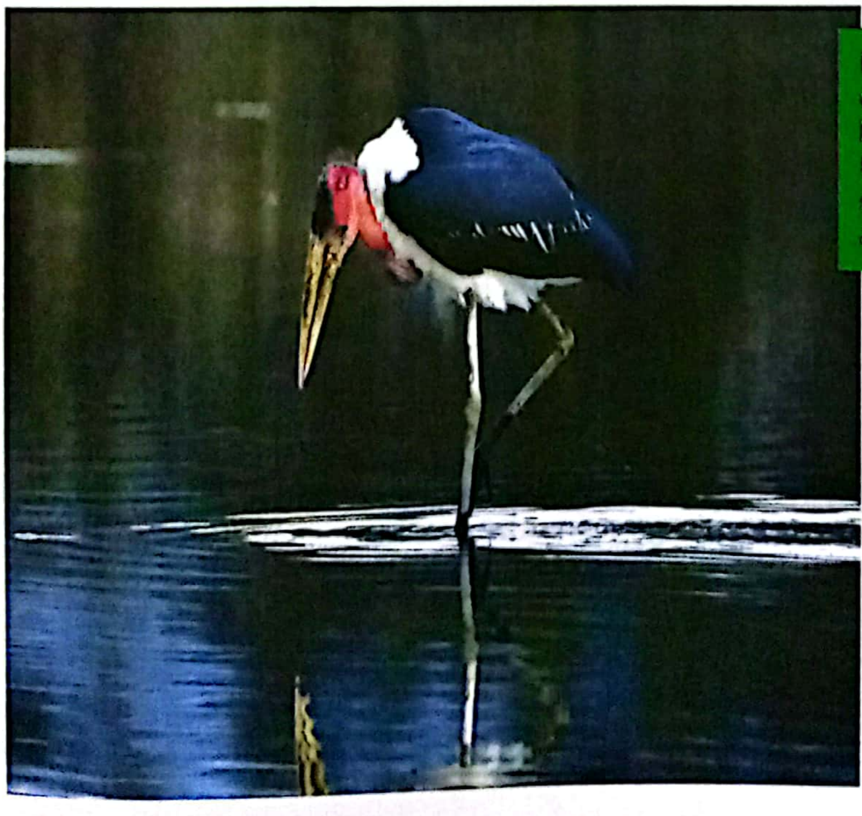


Sur la photo obtenue après développement, le rectangle gris représentant le corps avait une aire de $2{,}5$ cm^2.
Quelle est l'aire de ce corps dans la photographie publiée dans le journal ?

2 Pour les besoins d'une exposition, le photographe doit multiplier par 12 les dimensions de la photo développée afin d'obtenir un poster.

a. Calcule l'aire de ce poster.

b. Sur la photo développée, l'angle qui schématisait la patte pliée mesurait 110°. Sans justifier, indique la mesure de cet angle sur le poster.



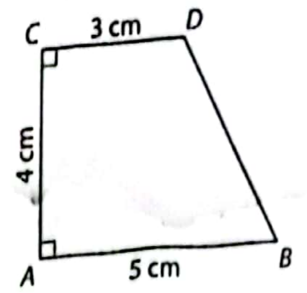
Le marabout est un oiseau tropical de la famille des échassiers. Selon les espèces, son envergure peut atteindre 2,50 mètres.

Savoir-faire

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

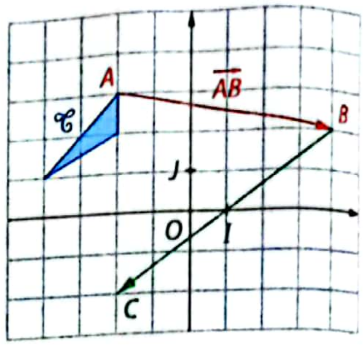
- utiliser les symétries, les translations, les rotations et les homothéties et justifier un programme de construction ;
- construire l'image de points et de figures simples par une rotation, une homothétie ou la composée de deux symétries orthogonales ;
- utiliser une rotation pour inscrire un polygone régulier dans un cercle.

1 Retour sur la symétrie centrale, la translation › Cours 1



1 **a.** Sur ton cahier, représente la figure ci-contre, puis construis $\mathscr{C}_1$ image de $\mathscr{C}$ par la symétrie centrale de centre O.
b. Si A_1 et B_1 sont les images de A et B par cette symétrie centrale, quelle est la nature du quadrilatère ABA_1B_1 ? Justifie.

2 Trace un repère orthonormé (O, I, J) sur ton cahier et construis :
- la figure $\mathscr{C}'$, image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;
- la figure $\mathscr{C}''$, image de $\mathscr{C}'$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

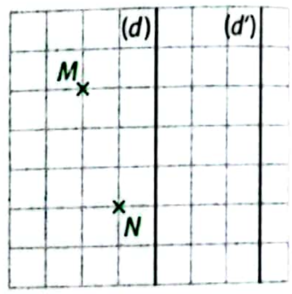


3 Par quelle transformation passe-t-on de la figure $\mathscr{C}$ à la figure $\mathscr{C}''$?

4 M est le point de coordonnées $(-1 ; 1)$.
On nomme M' l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et M'' l'image de M' par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
a. Détermine la nature des quadrilatères $ABM'M$ et $BCM''M'$.
b. Déduis-en la nature du quadrilatère $ACM''M$.
c. Quelle est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$?

2 Successions de symétries orthogonales › Cours 2 et 3

Partie Ⓐ : Avec des axes parallèles : $(d) \,//\, (d')$

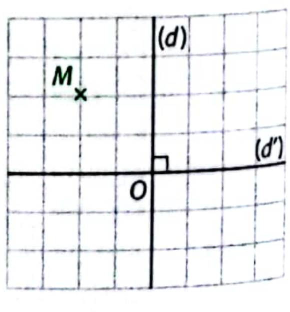


1 **a.** Reproduis sur ton cahier la figure ci-contre dans laquelle $(d) \,//\, (d')$.
b. Construis les points M' et N' symétriques de M et N par rapport à la droite (d), puis les points M'' et N'' symétriques de M' et N' par rapport à la droite (d').

2 **a.** Montre que $(MM') \perp (d)$; puis que $(M'M'') \perp (d')$.
b. Déduis-en que les points M, M' et M'' sont alignés ; puis que $(MM'') \perp (d')$.
c. De même, montre que $(NN'') \perp (d')$. Déduis-en que $(MM'') \,//\, (NN'')$.

3 **a.** On note I et I' les points d'intersection de (MM'') avec (d) et (d') ; J et J' les points d'intersection de (NN'') avec (d) et (d').
b. Montre que $MM'' = 2II'$; puis que $NN'' = 2JJ'$.
c. Justifie que le quadrilatère $II'J'J$ est un rectangle ; déduis-en que $MM'' = NN''$.
d. Quelle est la nature du quadrilatère $MM''N''N$? Déduis-en que $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{NN''} = 2\overrightarrow{II'} = 2\overrightarrow{JJ'}$.

Partie Ⓑ : Avec des axes perpendiculaires : $(d) \perp (d')$



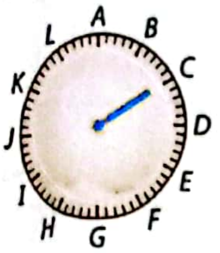
1 **a.** Reproduis sur ton cahier la figure ci-contre dans laquelle $(d) \perp (d')$.
b. Construis le point M' symétrique de M par rapport à la droite (d) ; puis le point M'' symétrique de M' par rapport à la droite (d').

2 **a.** Montre que $OM = OM'$; puis que $OM' = OM''$.
Déduis-en que O est le centre du cercle circonscrit au triangle $MM'M''$.
Trace ce cercle.
b. Montre que $(M'M'') \,//\, (d)$; puis que $(M'M'') \perp (MM')$. Déduis-en la nature du triangle $MM'M''$.
c. Montre que O est le milieu de $[MM'']$ et déduis-en l'image de M par la symétrie centrale de centre O.

3 Mouvement de rotation › Cours 4, 5 et 6

Partie Ⓐ : Avec une aiguille

Sur l'horloge ci-dessous, on a remplacé les nombres par des lettres.

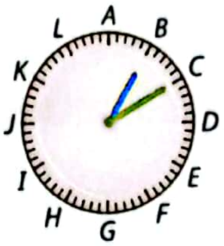


1 Si l'aiguille se déplace de 10 min, quel sera le point d'arrivée sachant que le point de départ est :
a. le point C ? **b.** le point G ? **c.** le point K ?

2 Si l'aiguille se déplace de 25 min, quel sera le point d'arrivée sachant que le point de départ est :
a. le point A ? **b.** le point E ? **c.** le point J ?

Partie Ⓑ : Avec deux aiguilles

On dispose désormais de deux aiguilles qui marquent toutes les deux les minutes.
L'aiguille bleue indique le point B et la verte marque le point C.



1 **a.** Nomme les points d'arrivée si les aiguilles se déplacent de 15 min.
b. Compare les longueurs du segment de départ $[BC]$ et du segment d'arrivée.

2 On replace les aiguilles sur les points B et C comme initialement.
a. Nomme les points d'arrivée si les aiguilles se déplacent de 25 min.
b. Compare les longueurs du segment de départ $[BC]$ et du segment d'arrivée.

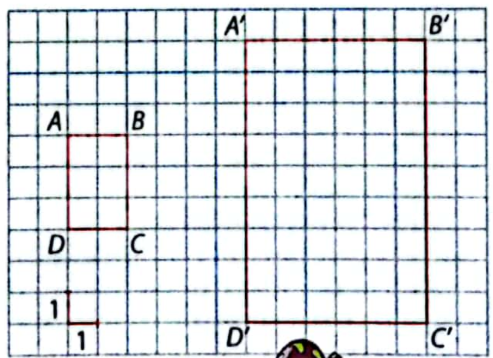
Partie Ⓒ : Sans aiguille

1 **a.** Trace sur ton cahier un triangle ABC et place un point O situé à l'intérieur du triangle ABC.
b. Trace les cercles de centre O passant l'un par le point A, l'autre par le point B et le dernier par le point C.
c. Construis les points A', B' et C' situés sur chacun des cercles tels que
mes $\widehat{AOA'}$ = mes $\widehat{BOB'}$ = mes $\widehat{COC'}$ = 50°.

2 À l'aide de la règle graduée, compare les longueurs AB et $A'B'$; AC et $A'C'$; BC et $B'C'$.
Que constates-tu ?

4 Homothétie › Cours 7

Sur le quadrillage ci-contre, le rectangle $A'B'C'D'$ est un agrandissement du rectangle $ABCD$. L'unité est le cm.



1 **a.** Reproduis cette figure sur ton cahier.
b. Trace les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD').
Que remarques-tu ? On note O le point d'intersection des droites (AA') et (BB').
c. Vérifie que le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité.
On note k le rapport.

$A'B'$	$A'D'$	$A'C'$	OA'	OB'
AB	AD	AC	OA	OB

La transformation qui envoie le point A sur le point A', le point B sur le point B'... est appelée **homothétie de centre O et de rapport k**.

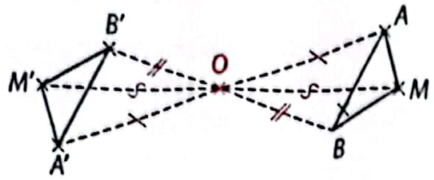
2 **a.** Calcule l'aire de chacun des rectangles.
b. Complète l'égalité en utilisant le rapport k : Aire $(A'B'C'D')$ = … × Aire $(ABCD)$.

3 **a.** À l'aide de ton rapporteur, donne une valeur arrondie au degré de la mesure des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{A'C'B'}$.
b. Que peux-tu dire de la mesure de l'angle $\widehat{A'C'B'}$, image de l'angle $\widehat{ACB}$ par l'homothétie de centre O et de rapport k ?

6 Cours

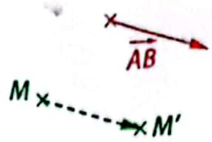
1 Symétrie centrale, translation (rappels)

Définition Deux points distincts M et M' sont symétriques par rapport à un point O lorsque O est le milieu du segment $[MM']$.



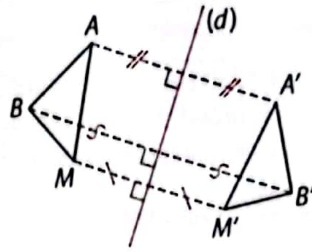
Remarque : Le point O est le milieu des segments $[AA']$ et $[BB']$ donc $ABA'B'$ est un parallélogramme.

Définition A, B et M désignent trois points distincts. L'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point M' tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$.



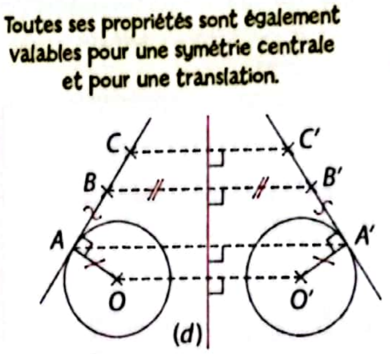
Remarque : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$ signifie que $ABM'M$ est un parallélogramme.

2 Symétrie orthogonale (rappels)



Définition Deux points distincts M et M' sont symétriques par rapport à une droite (d) lorsque (d) est la médiatrice du segment $[MM']$.

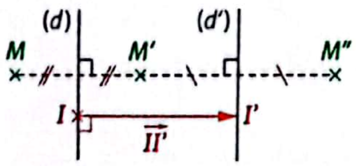
Propriétés Par une symétrie orthogonale :
- des points alignés ont pour image des points alignés ;
- un segment a pour image un segment de même longueur ;
- un angle a pour image un angle de même mesure ;
- un cercle a pour image un cercle de même rayon ;
- une figure d'aire donnée a pour image une figure de même aire ;
- deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles ;
- deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.



3 Composée de symétries orthogonales

Définition Composer deux symétries orthogonales consiste à appliquer successivement deux symétries orthogonales.

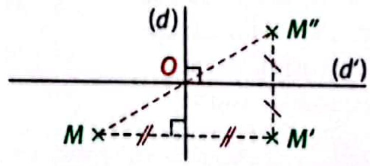
- **Avec des axes parallèles**



M'' est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (d) suivie de la symétrie orthogonale d'axe (d').

Propriété La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles correspond à la translation de vecteur $2\overrightarrow{II'}$, où I est un point de (d) et I' un point de (d') tels que $(II') \perp (d)$.

- **Avec des axes perpendiculaires**

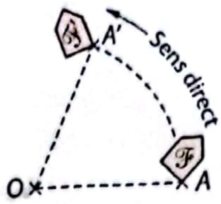


M'' est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (d) suivie de la symétrie orthogonale d'axe (d').

Propriété La composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires correspond à la symétrie centrale de centre O, où O est le point d'intersection des droites (d) et (d').

4 Rotation

OAA' désigne un triangle isocèle en O.



Principe En faisant tourner la figure $\mathcal{F}$ autour du point O, et de A jusqu'à A', on obtient la figure $\mathcal{F}'$. On dit que la figure $\mathcal{F}$ a pour image la figure $\mathcal{F}'$ par la rotation qui transforme A en A'.

5 Image d'un point par une rotation

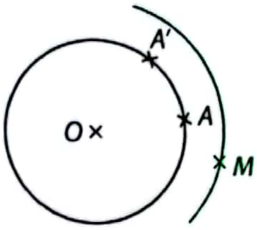
Définitions A, A' et M désignent trois points. L'image du point M par la rotation de centre O qui transforme A en A' est le point M' tel que :
- $OM = OM'$;
- mes $\widehat{MOM'}$ = mes $\widehat{AOA'}$;
- le sens de rotation de M vers M' est le même que celui de A vers A'.

L'angle $\widehat{AOA'}$ est appelé angle de la rotation.

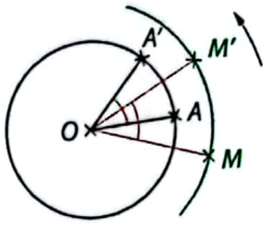
Remarque : Seul le point O a pour image lui-même.

Construction

1re étape
- Avec le compas on construit le cercle de centre O et qui passe par les points A et A' ; puis le cercle de centre O qui passe par le point M.



2e étape
- Pour ne pas se tromper, on indique sur la figure le sens de la rotation : de A vers A' par une flèche.
- En respectant le sens de déplacement, on utilise le rapporteur pour placer le point M' sur le cercle tel que mes $\widehat{MOM'}$ = mes $\widehat{AOA'}$.



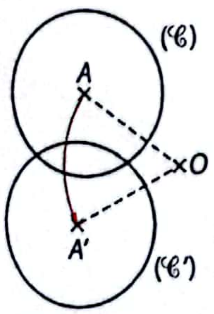
6 Images de figures élémentaires par une rotation

Dans chaque cas, on considère la rotation de centre O qui transforme A en A'.

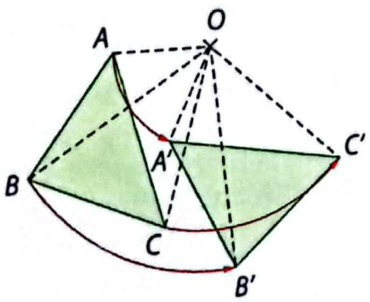
a Propriétés de conservation

Propriétés Par une rotation :
- un segment a pour image un segment de même longueur ;
- un cercle a pour image un cercle de même rayon ;
- une figure d'aire donnée a pour image une figure de même aire.

Exemples :



- (𝒞') a le même rayon que (𝒞)

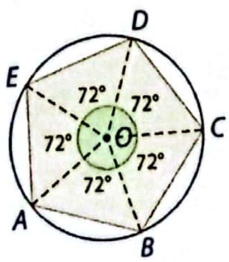


- $AB = A'B'$
- $\mathcal{A}\,(ABC) = \mathcal{A}\,(A'B'C')$

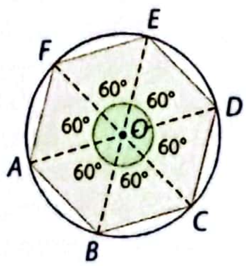
b Rotation et polygones réguliers

Propriété Pour construire un polygone régulier de centre O à n côtés, on construit les images successives d'un sommet quelconque du polygone par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{360°}{n}$ jusqu'à revenir au sommet de départ.

Exemples :
- **Pentagone régulier**
  $n = 5$ côtés, donc l'angle de rotation est :
  mes $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{5} = 72°$.



- **Hexagone régulier**
  $n = 6$ côtés, donc l'angle de rotation est :
  mes $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{6} = 60°$.



7 Homothétie

a Image d'un point

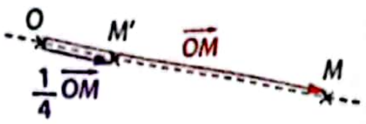
Définition **O désigne un point du plan et k un nombre réel positif et non nul.**
L'image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport k est le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k \times \overrightarrow{OM}$.

Ainsi : $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ ont la même direction, le même sens et $OM' = k \times OM$.

Remarque : Seul le point O a pour image lui-même.

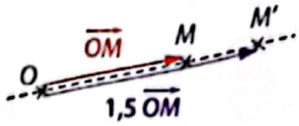
Exemples de construction

$k = \frac{1}{4}$



- On trace la demi-droite $[OM)$;
- on multiplie la longueur OM par $\frac{1}{4}$;
- on place le point M'.

$k = 1,5$



- On trace la demi-droite $[OM)$;
- on multiplie la longueur OM par $1,5$;
- on place le point M'.

b Images de figures élémentaires

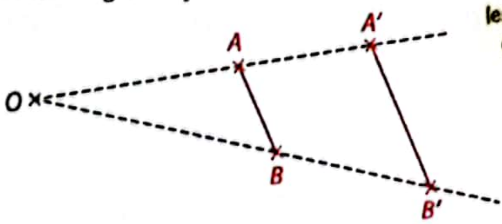
Dans chaque cas, on considère l'homothétie de centre O et de rapport $k > 0$.

• Image d'un segment

Propriétés • **Par une homothétie, l'image d'un segment est un segment dont la longueur est multipliée par k.**
• **Par une homothétie, l'image d'une droite est une droite parallèle.**

• Il suffit de construire les images des points A et B.

$A'B' = k \times AB$
$(AB) // (A'B')$

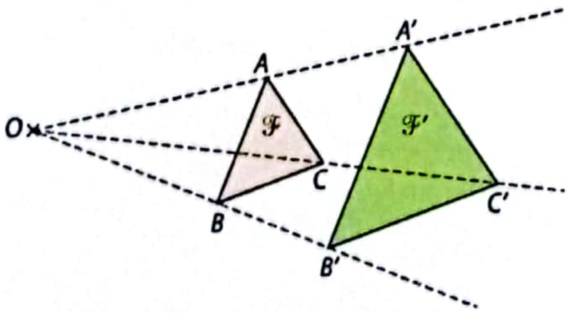


Tu peux observer que les triangles OAB et $O'A'B'$ sont en configuration de Thalès.

• Image d'une figure

Propriété **Par une homothétie de rapport k, l'image d'une figure est une figure dont l'aire est multipliée par k^2.**

Exemple : • Il suffit de construire les images des sommets de la figure $\mathcal{F}$.

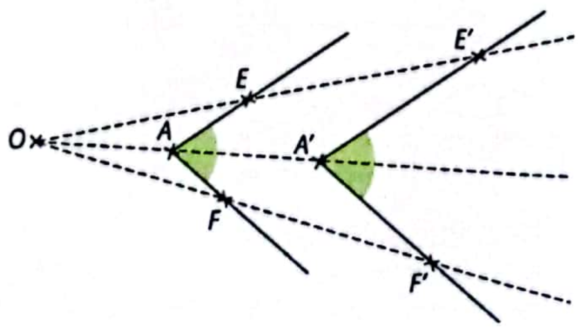


Aire $(\mathcal{F}') = k^2 \times$ Aire $(\mathcal{F})$

• Image d'un angle

Propriété **Par une homothétie, l'image d'un angle est un angle de même mesure.**

Exemple : • Il suffit de construire l'image du sommet de l'angle et d'un point sur chaque demi-droite.



mes $\widehat{E'A'F'}$ = mes $\widehat{EAF}$

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à utiliser les propriétés des translations et des symétries

Énoncé

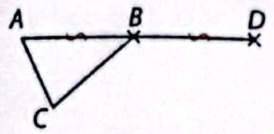
1. a. Trace un triangle ABC tel que :
$AB = 1{,}5$ cm ; $BC = 1{,}4$ cm et $AC = 1$ cm.
b. Construis le point D symétrique de A par rapport à B.
c. Construis le point E symétrique de A par rapport à C.
d. Construis le point F image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2. a. Quelle est l'image du segment $[BC]$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?
b. Quelle est l'image du segment $[BC]$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$?
3. Justifie que $EF = DF$.

Solution

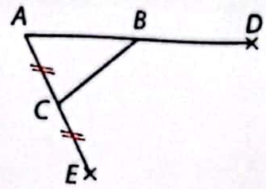
J'utilise les définitions du cours pour construire les images des points.

1. a. et b.



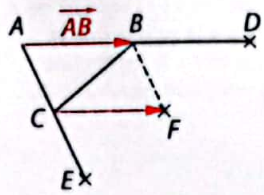
D symétrique de A par rapport à B donc B milieu de $[AD]$.

c.



E symétrique de A par rapport à C donc C milieu de $[AE]$.

d.



F image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc $ABFC$ parallélogramme.

- *Je résume les données de l'énoncé dans un tableau.*
- *Je sais que, par une translation ou par une symétrie centrale, deux points et leurs images sont les sommets d'un parallélogramme.*

2. a. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$:

B	C	$[BC]$
D	F	$[DF]$

a pour image

b. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$:

B	C	$[BC]$
F	E	$[FE]$

a pour image

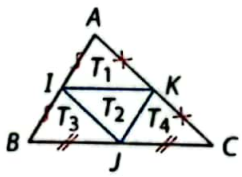
3. D'après le **2. a.** $BC = DF$, d'après **2. b.** $BC = FE$ donc $DF = EF$.

S'exercer

1 **1.** Trace le triangle ABC tel que :
$AB = 3$ cm ; $AC = 4$ cm et $BC = 5$ cm.
Construis le point D image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
2. a. Justifie que $ACDB$ est un parallélogramme.
b. Quelle est la nature du triangle ABC ?
c. Déduis-en que $ACDB$ est un rectangle.

2 **1. a.** Trace un triangle ABC isocèle en A tel que $AB = 7$ cm et $BC = 5$ cm.
b. Place les points I et J milieux de $[BC]$ et $[AB]$.
c. Construis les symétriques des points A, B, I et J par rapport à C. On les nomme D, E, K et L.
2. a. Détermine la longueur DE.
b. Calcule le périmètre du triangle CDE.
c. Démontre que (DE) // (AB)
d. Démontre que K est le milieu de $[CE]$.
3. a. Justifie que $(AI) \perp (BC)$.
b. Démontre que $(DK) \perp (CK)$.

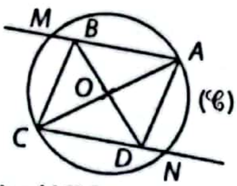
3 Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle et I, J et K sont les milieux des côtés du triangle ABC.



1. Par quelle translation le triangle T_1, a-t-il pour image :
- le triangle T_3 ?
- le triangle T_4 ?

2. a. Justifie que les quatre triangles T_1, T_2, T_3 et T_4 ont la même aire $\mathcal{A}$.
b. Montre que l'aire du triangle ABC est égale à $4\mathcal{A}$.

4 Sur cette figure, $ABCD$ est un parallélogramme et $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de diamètre $[AC]$.

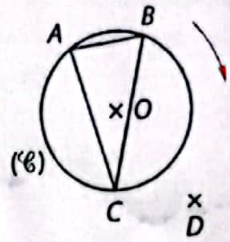


1. Par la symétrie de centre O :
a. quelle est l'image de la droite (AB) ?
b. quelle est l'image du cercle $(\mathscr{C})$?
c. quelle est l'image du point M ?
2. Déduis-en la nature du quadrilatère $AMCN$.

2 Apprendre à construire l'image d'une figure par une rotation

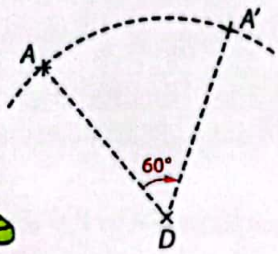
Énoncé

ABC est un triangle, $(\mathscr{C})$ est le cercle circonscrit à ABC et D est un point.
On considère la rotation de centre D et d'angle de mesure 60° dont le sens de rotation est celui indiqué par la flèche.
Construis l'image par cette rotation :
a. du point A ; **b.** de la droite (BC) ; **c.** du cercle $(\mathscr{C})$.

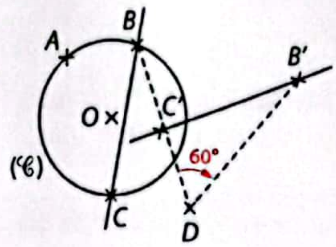


Solution

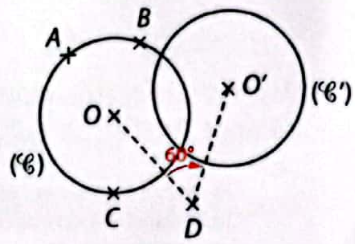
a. Pour construire l'image de A, je trace un arc de cercle de centre D partant de A dans le sens donné et je place le rapporteur pour que mes $\widehat{ADA'} = 60°$.



b. Pour construire l'image de la droite (BC), je construis les images B' et C' des points B et C.

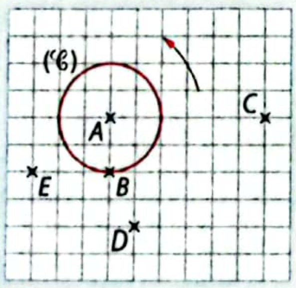


c. Pour construire l'image du cercle $(\mathscr{C})$, je construis l'image du centre O puis je trace le cercle de centre O' et de même rayon que $(\mathscr{C})$.



S'exercer

Pour les exercices 5 à 8,
1. Reproduis sur ton cahier la figure du quadrillage ci-contre.
2. Construis l'image du point A, de la droite (BC), puis du cercle $(\mathscr{C})$ par la rotation dont le sens est celui indiqué par la flèche.



5 Centre de rotation : D ;
mesure de l'angle de la rotation : 30°.

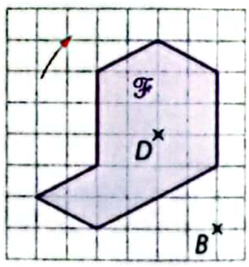
6 Centre de rotation : E ;
mesure de l'angle de la rotation : 60°.

7 Centre de rotation : B ;
mesure de l'angle de la rotation : 10°.

8 Centre de rotation : C ;
mesure de l'angle de la rotation : 90°.

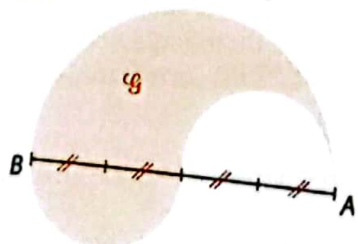
9 **1.** Construis un triangle OAB rectangle et isocèle en O. On note r, la rotation de centre O qui transforme A en B.
2. Construis les points C et D images de B et C par cette rotation r.
3. Que peux-tu dire du quadrilatère $ABCD$?

10 **1.** Reproduis, sur un quadrillage, la figure ci-contre.



2. Transforme $\mathscr{F}$ par la rotation de centre B et de mesure d'angle 90° dans le sens indiqué par la flèche.
3. Transforme $\mathscr{F}$ par la rotation de centre D et de mesure d'angle 45° dans le sens contraire.

11 **1.** Reproduis la figure ci-dessous.



L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

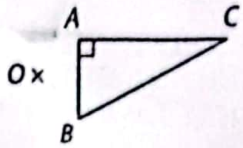
2. Construis l'image de $\mathscr{G}$ par la rotation de centre A et de mesure d'angle 120° dans le sens des aiguilles d'une montre. On la note $\mathscr{G}'$.
3. Construis l'image de $\mathscr{G}$ par la rotation de centre A et de mesure d'angle 120° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On la note $\mathscr{G}''$.
4. Quelle rotation permet de transformer $\mathscr{G}'$ en $\mathscr{G}''$? Précise son centre et la mesure de son angle.

3 Apprendre à utiliser une homothétie pour agrandir ou réduire

Énoncé

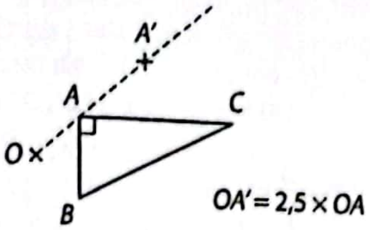
ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ cm et $AC = 6$ cm. O est un point donné.

1. Construis une figure semblable sur ton cahier.
2. On considère l'homothétie de centre O et de rapport $k = 2{,}5$.
Construis l'image par cette homothétie :
a. du point A ; b. du segment $[BC]$.
3. Déduis-en l'aire du triangle obtenu.

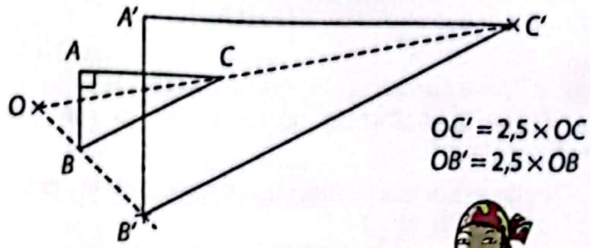


Solution

1. et 2. a. J'utilise la demi-droite $[OA)$, puis je reporte la longueur $2{,}5 \times OA$ à partir de O. J'obtiens A'.



2. b. Pour construire l'image du segment $[BC]$, je construis les images des points B et C puis je trace le segment $[B'C']$.



3. $\mathscr{A}(ABC) = \dfrac{6 \times 3}{2} = 9 \text{ cm}^2$ donc l'aire du triangle image par cette homothétie est donnée par :
$\mathscr{A}'(A'B'C') = 2{,}5^2 \times 9 = 56{,}25 \text{ cm}^2$.

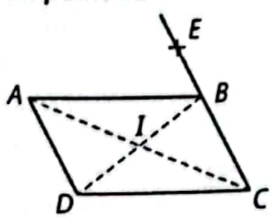
Je sais que si $\mathscr{F}$ est une figure d'aire $\mathscr{A}$, alors son image par une homothétie de rapport k a pour aire : $\mathscr{A}' = k^2 \times \mathscr{A}$.

S'exercer

12 1. Place sur ton cahier deux points A et I.
2. Construis l'image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2. On la note B.
3. Construis l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{2}$. Quel est ce point ?

13 1. Construis un triangle ABC tel que :
$AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm et $AC = 4$ cm.
2. Construis l'image de ce triangle par l'homothétie de centre I, milieu de $[AB]$, et de rapport 2.

14 1. a. Reproduis la figure ci-dessous sur laquelle le point E est un point de la demi-droite $[CB)$.



b. Construis les images des points A, B, C, D et E par l'homothétie de centre I et de rapport 1,5.
2. Reproduis de nouveau la figure et construis son image par l'homothétie de centre C et de rapport 0,5.

15 Pour illustrer la couverture de son cahier de géographie, Nufi a collé cette photographie.

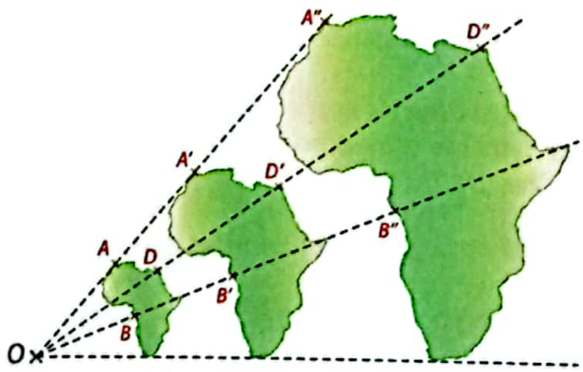
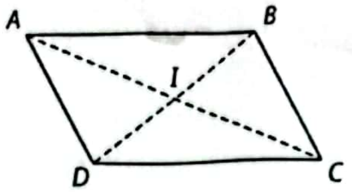


Figure ① Figure ② Figure ③

1. On utilise l'homothétie qui transforme la figure ① en la figure ③.
a. Quelle est l'image du point B ?
b. Quelle est l'image du segment $[AD]$?
c. En mesurant OA et OA'', calcule le rapport de cette homothétie.
2. Réponds aux mêmes questions avec l'homothétie qui transforme la figure ② en la figure ①.

Symétries – Translations

16 Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un parallélogramme de centre I.

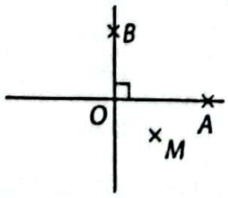


Complète les phrases suivantes :
- D … A *par la translation de vecteur* $\overrightarrow{BC}$.
- D … C *par la translation de vecteur* $\overrightarrow{BA}$.
- I … D *par la translation de vecteur* $\overrightarrow{BI}$.
- B … C *par la translation de vecteur* $\overrightarrow{BC}$.
- I … A *par la translation de vecteur* $\overrightarrow{IC}$.

17 **1.** Trace sur ton cahier deux cercles ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) de centres O et O' et de même rayon 4 cm tels que $OO' = 10$ cm.
2. Quelle est la translation qui transforme le cercle ($\mathscr{C}$) en le cercle ($\mathscr{C}'$) ?
3. Quelle est la symétrie orthogonale qui transforme le cercle ($\mathscr{C}$) en le cercle ($\mathscr{C}'$) ?
4. Quelle est la symétrie centrale qui transforme le cercle ($\mathscr{C}$) en le cercle ($\mathscr{C}'$) ?
5. Construis l'image d'un point A du cercle ($\mathscr{C}$) par les trois transformations trouvées en **2.**, **3.** et **4.**

18 $ABCD$ est un carré de centre O, les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.
1. Détermine les images des points O, D, L et K par la symétrie orthogonale d'axe (AC) suivie de celle d'axe (BD).
2. Détermine les images des points O, K, L et D par la symétrie orthogonale d'axe (AC) suivie de celle d'axe (IJ).

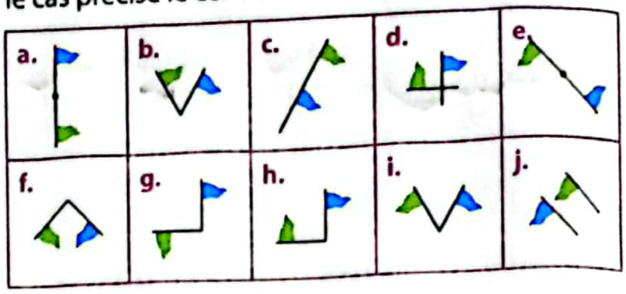
19 **1.** Reproduis la figure ci-dessous sur ton cahier.



2. a. Construis l'image M_1 de M par la symétrie orthogonale d'axe (OA).
b. Construis l'image M' de M_1 par la symétrie orthogonale d'axe (OB).
3. Que peux-tu dire :
- des distances OM et OM' ? Justifie.
- de la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$? Justifie.

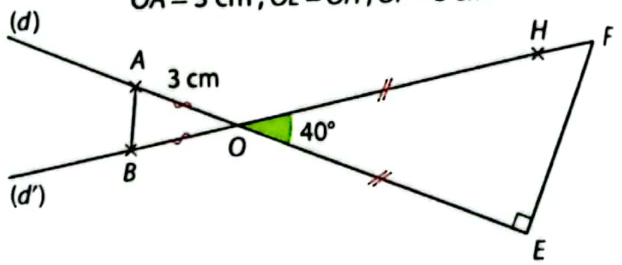
Rotations

20 Dans chacun des cas, indique si on peut passer du fanion bleu au fanion vert par une rotation. Si c'est le cas précise le centre et le sens de la rotation.



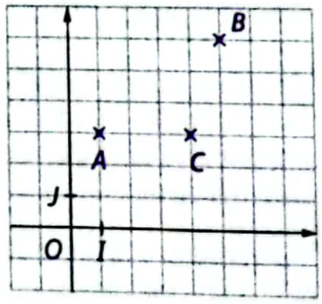
21 Reproduis la figure ci-dessous sur ton cahier en sachant que (d) et (d') se coupent en O, A et E sont des points de (d), B et F des points de (d') tels que AOB est isocèle en O et OEF est rectangle en E.

$OA = 3$ cm ; $OE = OH$; $OF = 5$ cm



1. Construis les images des différents points de la figure par la rotation de centre O qui transforme A en B.
2. Reproduis de nouveau la figure et construis les images des points de la figure par la rotation de centre O qui transforme H en E.

22 Dans le repère (O, I, J) ci-dessous, on donne : $A(1\ ;3)$; $B(5\ ;6)$ et $C(4\ ;3)$.



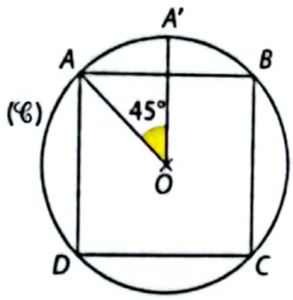
1. a. Détermine les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{OC}$.
b. Déduis-en la nature du quadrilatère $OABC$.
2. a. Construis le repère et place les points A, B et C.
b. Construis le quadrilatère $OA'B'C'$, image du quadrilatère $OABC$ par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).
c. Construis le quadrilatère $OA_1B_1C_1$, image du quadrilatère $OABC$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.
d. Construis le quadrilatère $OA_2B_2C_2$, image du quadrilatère $OABC$ par la rotation de centre O qui transforme le point J en le point I.

23 1. Dans un repère d'origine O, place les points $A(3\,;4)$, $B(-2\,;1)$ et $C(2\,;-1)$.
2. Justifie que O est le milieu de $[BC]$.
3. Construis l'image du triangle ABC par la rotation de centre O et d'angle de mesure 60° dans le sens des aiguilles d'une montre.
On nomme $A'B'C'$ l'image du triangle ABC. Prouve que O est le milieu de $[B'C']$.

24 1. Construis un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 6 cm.
2. Place deux points A et B appartenant à $(\mathscr{C})$ tels que mes $\widehat{AOB} = 40°$.
3. Construis l'image C du point B par la rotation de centre O qui transforme A en B.
4. a. Construis, par cette même rotation, l'image D du point C ; puis l'image E du point D et ainsi de suite. Combien de points peux-tu construire ainsi ?
b. Démontre que la figure obtenue est un polygone régulier.

25 1. Trace un triangle équilatéral ABC de côté 6 cm puis place le point O intersection des trois médianes.
2. Construis les points A', B' et C' images des points A, B et C par la rotation de centre O et d'angle de mesure 60° dans le sens des aiguilles d'une montre.
3. Montre que le polygone $AA'BB'CC'$ est un hexagone régulier.

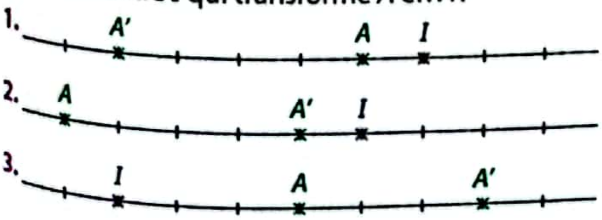
26 Dans la figure ci-contre $ABCD$ est un carré, $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O circonscrit au carré $ABCD$.



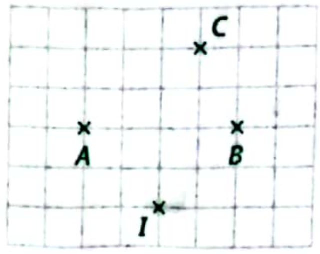
1. Construis, sur ton cahier, une figure semblable à celle ci-contre.
2. Quelle est l'image du carré $ABCD$ par la rotation de centre O qui transforme A en B ?
3. Construis $A'B'C'D'$ image du carré $ABCD$ par la rotation de centre O qui transforme A en A'.
4. Montre que le polygone $AA'BB'CC'DD'$ est un octogone régulier.

Homothéthies

27 Dans chaque cas, détermine le rapport de l'homothétie de centre I qui transforme A en A'.



28 1. Reproduis le dessin ci-dessous.

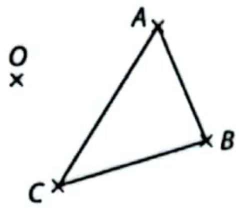


2. Trace en rouge les images A', B' et C' des points A, B et C par l'homothétie de centre I et de rapport 2.
3. Trace en vert les images A'', B'' et C'' des points A, B et C par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$.
4. a. Complète les égalités ci-dessous :

$$\overrightarrow{IA'} = \dots\,\overrightarrow{IA}\,;\quad \overrightarrow{IB'} = \dots\,\overrightarrow{IB}\,;\quad \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'I} + \overrightarrow{\dots B'}.$$

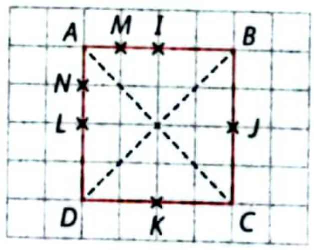
b. Déduis-en $\overrightarrow{A'B'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

29 O est un point du plan. ABC est un triangle tel que $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm et $AC = 6$ cm.



1. Construis, sur ton cahier, une figure semblable à celle ci-contre.
2. Construis l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport 0,6.
3. Quel est le rapport des aires entre ces deux triangles ?

30 Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré de centre O, les points I, J, K et L sont les milieux des côtés de ce carré et les points M et N sont les milieux des segments $[AI]$ et $[AL]$.



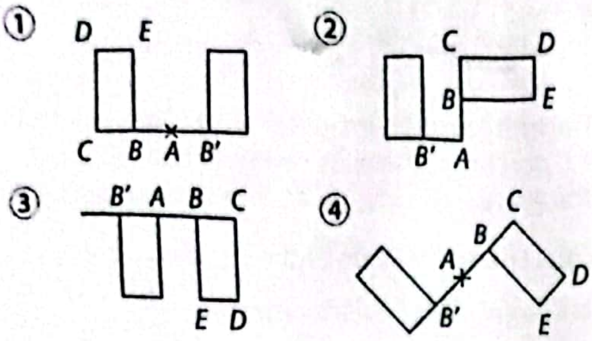
$AB = 4$ cm

1. Trouve l'image du point A par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$.
2. Trouve l'image du point A par l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{3}{4}$.
3. a. Quelle est l'image du triangle BIJ par l'homothétie de centre B et de rapport 2 ?
b. Calcule l'aire du triangle BIJ et déduis-en l'aire de son triangle image.
4. Le triangle AMN est l'image du triangle ABD par une homothétie de centre A, quel est le rapport de cette homothétie ?
5. Quelle homothétie transforme le triangle AMN en le triangle AIL ?

Bien comprendre mieux rédiger

31 Les éléments caractéristiques

Pour chacune des figures ci-dessous, B' est l'image du point B par une transformation.

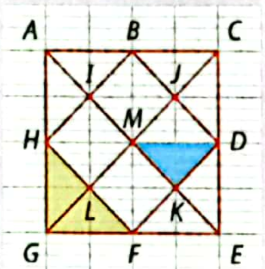


Complète le tableau ci-dessous.

Numéro de la figure	Transformation	Éléments caractéristiques
	Symétrie centrale	de centre …
	Translation	de …
	Symétrie axiale	d'axe …
	Rotation	de … et de…

32 Repérer à l'œil nu

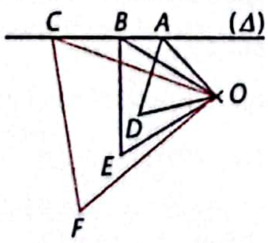
1. Quelle est l'image du triangle MDK par :
- la symétrie de centre M ?
- la symétrie d'axe (GC) ?
- la translation de vecteur $\overrightarrow{CJ}$?
- la rotation de centre M qui transforme K en L ?



2. Quel est le rapport de l'homothétie qui transforme le triangle HGF en le triangle AGE ?

33 Raisonnement à compléter

Sur la figure ci-dessous, les points A, B et C sont alignés et les triangles OAD, OBE et OCF sont équilatéraux.



Complète le raisonnement suivant :
- *J'utilise la … de … O qui transforme A en D.*
- *B a pour image …, car … .*
- *… a pour image F, car … .*
- *Or l'image par une …, de trois points … sont trois points alignés.*
- *Donc les points … sont alignés.*

34 Fiche résumé

Wei veut résumer le programme de construction des polygones réguliers qu'il connaît. Complète sa fiche.

① Je trace un … ($\mathscr{C}$) de centre O.
② Je place sur ($\mathscr{C}$) un point A : premier sommet de mon polygone.
③ Je place sur ($\mathscr{C}$) le point B : image de A par … de centre … et de mesure indiquée dans le tableau :

Polygone régulier	Nombre de côtés	Mesure de l'angle de rotation
Triangle équilatéral		
Carré		
Pentagone		
Hexagone		
Octogone		

④ Je reprends l'étape ③ jusqu'à revenir au point A.

35 Erreurs à corriger

Voici un passage du raisonnement d'un élève.

A', B' et C' sont les images de A, B et C par l'homothétie de rapport $k = \frac{1}{2}$, donc :

- $AB = \frac{1}{2} \times A'B'$ Non, attention à ne pas inverser image et point.
- $\mathscr{A}(A'B'C') = \cancel{\frac{1}{2}} \times \mathscr{A}(ABC)$
- mes $\widehat{A'B'C'} = \cancel{\frac{1}{2}} \times$ mes $\widehat{ABC}$

Revois les propriétés du cours.

1. Corrige les erreurs relevées par le professeur.
2. Énonce les trois propriétés qui te permettent de justifier tes corrections.

36 Bien comprendre l'importance du rapport

1. Construis un triangle ABC tel que $AB = 2{,}6$ cm ; $BC = 3$ cm et $CA = 4$ cm. Place un point O extérieur à ce triangle.

2. Choisis un nombre réel k strictement supérieur à 1 ; puis construis l'image $A'B'C'$ du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport k.

3. Choisis un nombre réel k strictement compris entre 0 et 1 ; puis construis l'image $A''B''C''$ du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport k.

4. a. Complète les phrases ci-dessous :
- *Lorsque $0 < k < 1$, le triangle image est … du triangle de départ ;*
- *Lorsque k …, le triangle image est un agrandissement du triangle de départ.*

b. Cite trois paires de triangles qui sont en configuration de Thalès.

37 Construction d'un carré

Construis ADC, un triangle rectangle et isocèle en A tel que $AC = 5$ cm.

1. a. Place le point B, image de D par la rotation de entre A et d'angle de mesure 60°. Tu choisiras le sens de rotation tel que B soit à l'extérieur du triangle ABC.

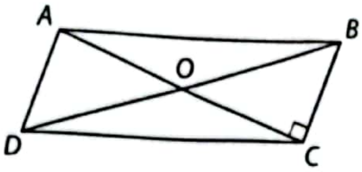
b. Démontre que le triangle ADC est équilatéral.

2. a. Place E, image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

b. Démontre que le quadrilatère $ACED$ est un carré.

38 Points alignés

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.
$(BC) \perp (AC)$.



1. Trace le cercle qui contient les trois points O, B et C. Justifie la position de son centre I.

2. Place les points M et P tels que :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ $\quad$ $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OD}$

3. a. Par quelle transformation a-t-on à la fois : O a pour image C et B a pour image M ?

b. Montre que, par cette transformation, le point D a pour image le point P.

c. Montre que les points P, C et M sont alignés.

39 Points cocycliques

1. Construis un segment $[AC]$ de longueur 6 cm et place le point O milieu de $[AC]$.

2. a. Construis les points B et D images des points A et C par la rotation de centre O et d'angle de mesure 60° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

b. Démontre que $ABCD$ est un rectangle.

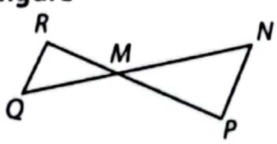
3. a. Construis le point E image du point O par la translation de vecteurs $\overrightarrow{AB}$.

b. Construis F image de C par la rotation du **2. a.**

c. Montre que A, B, C, D, E et F sont sur un même cercle.

40 Agrandissement d'une figure

Dans la figure ci-contre, $(RQ) \,//\, (NP)$, mes $\widehat{MPN} = 70°$, $RM = 4$ cm, $MP = 7{,}2$ cm et $NP = 6$ cm.



1. Reproduis sur ton cahier cette figure.

2. Montre que le triangle MNP est une réduction du triangle MQR.

3. Quelle homothétie transforme le triangle MNP en le triangle MQR ?

4. a. Place les points S et T tels que :
$S \in [MN]$ et $MS = 4{,}5$ cm ; $T \in [MP]$ et $MT = \frac{3}{5}MP$.

b. Montre que le triangle MNP est un agrandissement du triangle MST.

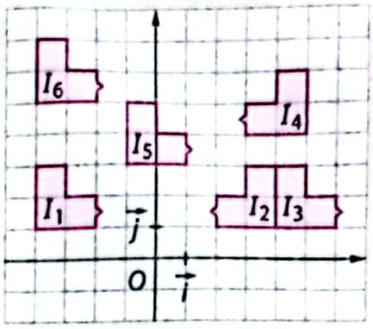
c. Complète et justifie : aire de $MNP = \ldots$ aire de MST.

S'entraîner au BEPC

41 Reconnaître une application

Le plan $(\mathscr{P})$ est muni d'un repère orthonormé. En te servant de la figure ci-dessous précise dans chaque cas la nature de la transformation f.

(Exemple : $f(I_1) = I_6$, f est la translation de vecteur $4\vec{j}$).



1. a. $f(I_1) = I_2$;

b. $f(I_3) = I_2$;

c. $f(I_1) = I_5$.

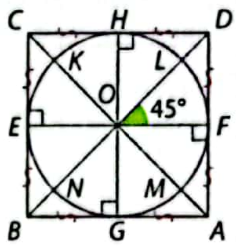
2. On considère les points $A(3\,;-2)$ et $B(1\,;4)$.

Détermine une équation cartésienne de la droite (AB).

BEPC 2008

42 Propriété des rotations

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ et $EHFG$ sont les carrés de centre O. $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O et de diamètre $[EF]$. La rotation R de centre O et d'angle de mesure 45° transforme F en L et on note $R(F) = L$.



1. Recopie et complète le tableau suivant :

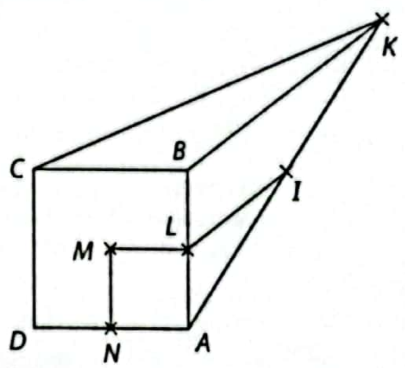
$R(F)$	$R(M)$	$R(H)$	$R(K)$	$R(G)$
L				

2. Quelle est la mesure en degré de l'angle $\widehat{FHG}$? Justifie ta réponse.

BEPC 2007

43 Propriété des homothéties

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ et $MNAL$ sont des carrés, les droites (LI) et (BK) sont parallèles, $AI = 2$ et $AK = 4$.



1. Justifie que : $\dfrac{AL}{AB} = \dfrac{1}{2}$.

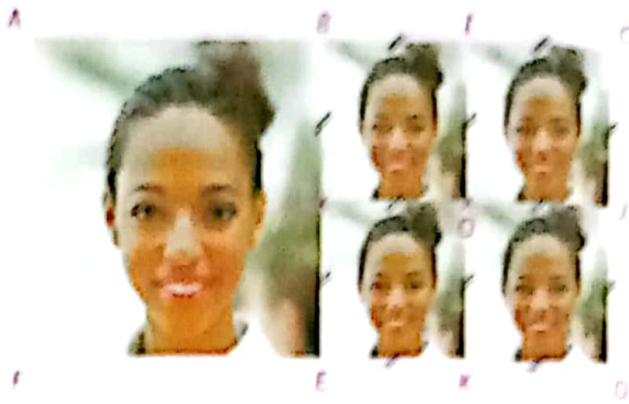
2. Soit h l'homothétie de centre A qui transforme L en B ; détermine le rapport k.

3. s et s' désignent respectivement les aires des carrés $ABCD$ et $MNAL$.

Détermine le rapport $\dfrac{s'}{s}$.

Brevet 2011

44 Photomaton



On appelle photomaton la transformation qui, à partir d'une image carrée crée quatre images carrées plus petites, extraites de l'image de départ.

1. a. Construis *ABEF* et *BCDE* deux carrés de côtés 8 cm puis place les points *O*, *I*, *J*, *K* et *L* comme la figure ci-contre.

b. Détermine le rapport et le centre de chaque homothétie qui transforme *ABEF* en : • *BIOL* • *LOKE*

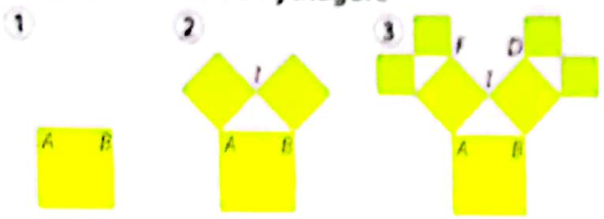
2. a. Construis, dans le carré *ABEF*, un hexagone régulier dont le centre est celui du carré *ABEF* et dont un sommet est *L*. Puis construis les deux images de cet hexagone par les homothéties trouvées en **1. b.** As-tu fabriqué un photomaton de ton hexagone de départ ?

b. Construis les deux images des deux hexagones obtenus en **2. a.** par la translation de vecteur $\overrightarrow{LO}$.

45 Fractales

Les images fractales peuvent être obtenues par un processus récursif qui consiste à appliquer une transformation à un ou plusieurs côtés d'une figure géométrique simple.

Partie A : L'arbre de Pythagore



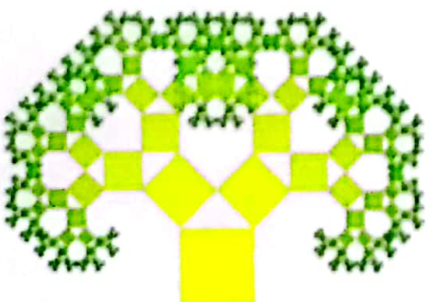
1. a. Construis un carré de côté 4 cm : figure 1.

b. Construis les images du segment [*AB*] par la rotation de centre *B* d'angle de mesure 45° dans le sens des aiguilles d'une montre puis par la rotation de centre *A* d'angle de mesure 45° dans l'autre sens et construis les deux carrés comme le montre la figure 2 en utilisant le point d'intersection *I* des deux images du segment [*AB*].

c. Calcule la somme des aires des carrés de la 2ᵉ étape.

2. Recommence cette construction avec les deux segments [*CD*] et [*EF*] comme le montre la figure 3.

En répétant un certain nombre de fois la construction précédente, tu peux obtenir cette figure appelée « l'arbre de Pythagore ».



Partie B : Le flocon de neige

1. a. Construis un triangle équilatéral *ABC* de côté 9 cm.

b. Construis les images de chaque sommet par une homothétie de centre un autre sommet et de rapport $\frac{1}{3}$ pour obtenir la figure 1.

c. Construis l'image du segment [*A'B'*] par la rotation de centre *B'* d'angle de mesure 60° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Utilise d'autres rotations que tu préciseras pour obtenir la figure 2.

2. À partir de chaque côté obtenu à la figure 2, reproduis l'enchaînement, homothétie de rapport $\frac{1}{3}$ puis rotation d'angle de mesure 60° pour d'obtenir la figure 3.

En répétant un certain nombre de fois la construction précédente, tu peux obtenir cette figure appelée « le flocon de Von Koch ».

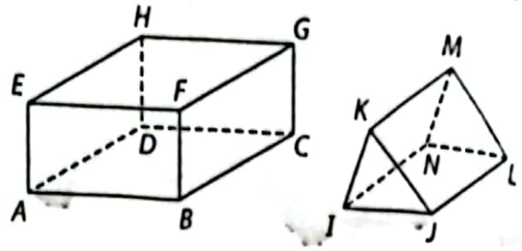
7 Pyramides et cônes de révolution

Pour démarrer

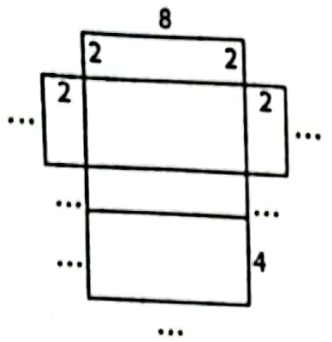
La boîte de Petri est un dispositif inventé à la fin du XIX^e siècle. Elle facilite la culture et l'étude des micro-organismes, des bactéries ou des cellules.

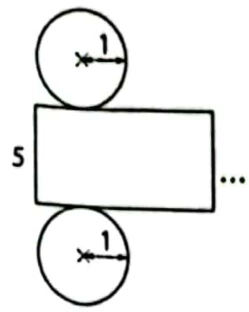
1 Vocabulaire et patrons des solides (rappels)

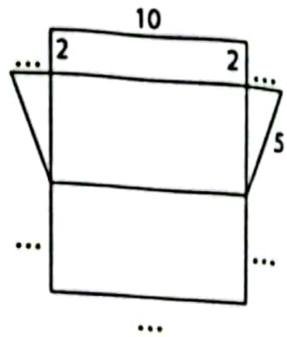
1 **a.** Indique le nom de chacun des solides ci-contre.
b. Complète avec les expressions :
base, face latérale, arête latérale et *hauteur*.
[FB] est … ; JKML est … ; EABF est … ; [JL] est … .



2 Complète les patrons ci-dessous avec les longueurs manquantes afin de les associer à des solides que tu connais, l'unité est le cm.





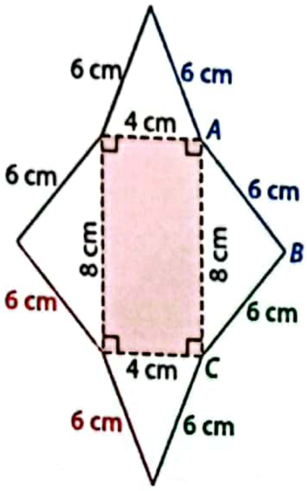


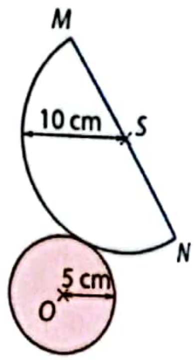
2 Découper pour observer et décrire

› Cours 1 et 2

1 **a.** Sur du papier légèrement cartonné, reproduis, en vraie grandeur, les dessins ci-contre.
b. Découpe ces dessins suivant les traits pleins et effectue les pliages suivant les pointillés pour le premier dessin.
c. Avec du ruban adhésif, fixe les bords de couleur identique.

Tu viens de fabriquer une pyramide et un cône de révolution.





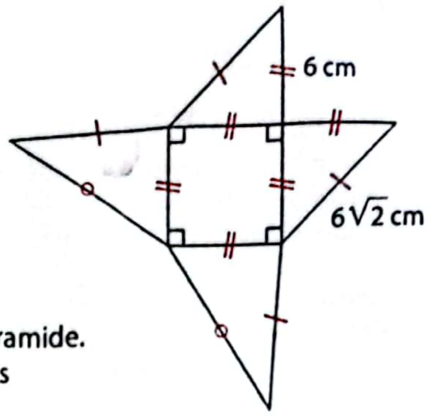
2 *La face colorée en rouge se nomme la **base** ; les autres faces se nomment les **faces latérales**.*
Quelle est la nature :
a. de la base de la pyramide ?
b. de la base du cône de révolution ?

3 Pose la pyramide sur sa base.
a. Combien a-t-elle de faces latérales ? d'arêtes latérales ?
b. On conserve la même base, mais on modifie la longueur de deux arêtes latérales : $AB = 10$ cm et $BC = 7$ cm.
c. Modifie les longueurs des autres arêtes latérales afin d'obtenir le patron d'une nouvelle pyramide. Construis cette pyramide.

4 **a.** Justifie que le périmètre du cercle de centre O et de rayon 5 est égal à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MN}$.
Rappelle la valeur de ce périmètre.
b. Pose le cône de révolution sur sa base.
Mesure avec ta règle la hauteur approximative de ce cône.
c. Retrouve la valeur exacte de cette hauteur en utilisant la propriété de Pythagore dans le triangle OMS rectangle en O.

3 Aire et volume d'une pyramide › Cours 1 et 2

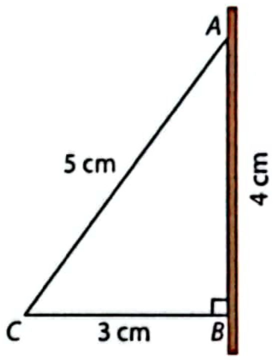
1 **a.** Sur du papier légèrement cartonné, reproduis, le patron de pyramide ci-contre.
Tu prendras : $\sqrt{2}$ cm ≈ 1,4 cm.
b. Calcule la somme des aires des faces latérales de cette pyramide.
Cette somme est appelée ***aire latérale de la pyramide.***
c. Calcule l'aire de la base, puis ajoute cette aire à l'aire latérale.
Cette nouvelle aire est appelée ***aire totale de la pyramide.***



2 **a.** Découpe ce patron, et avec du ruban adhésif, construis la pyramide.
Recommence cette opération deux fois (ou utilise les pyramides de tes voisins) afin d'obtenir trois pyramides identiques.
b. À l'aide de tes trois pyramides, reconstitue un cube.
Calcule le volume de ce cube. Déduis-en celui d'une de tes pyramides.
c. On admet la formule suivante qui donne la volume d'une pyramide de hauteur h et dont l'aire de la base est $\mathcal{B}$: $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$.
Applique cette formule pour l'une de tes pyramides et retrouve le résultat du **b.**

4 Section par un plan parallèle à la base › Cours 3

1 **a.** Sur du papier cartonné, reproduis puis découpe le triangle rectangle *ABC* ci-contre.
Fixe un bâton le long du segment [*AB*] comme indiqué sur la figure.
b. En faisant pivoter le triangle autour du bâton, quel solide obtiens-tu ? Précise sa hauteur et la nature de sa base.

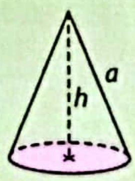


2 **a.** Sur le segment [*AB*], place le point *M* tel que *AM* = 1 cm.
Trace la parallèle à (*BC*) passant par *M*, elle coupe (*AC*) en *N*.
b. Justifie que le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité.

Longueur en cm	*AB*	*AC*	*BC*
Longueur en cm	*AM*	*AN*	*MN*

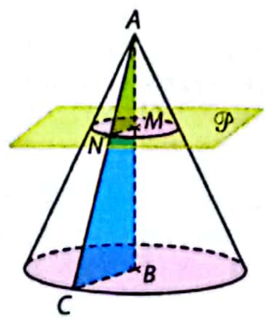
Précise le coefficient de proportionnalité *k* qui permet de passer de la ligne 1 à la ligne 2.
Calcule la longueur *MN*.

On note $\mathcal{P}$ le périmètre de la base et $\mathcal{B}$ l'aire de ce cône de révolution.
Aire latérale : $\frac{1}{2}\mathcal{P}a$
Volume : $\frac{1}{3}\mathcal{B}h$



3 **a.** Utilise la bulle info ci-contre pour calculer l'aire latérale ; puis le volume du cône de révolution $\mathcal{C}_1$ obtenu à partir du triangle *ABC*.
Arrondis les résultats au dixième.
b. Calcule de même l'aire latérale ; puis le volume du cône de révolution $\mathcal{C}_2$ obtenu à partir du triangle *AMN*.
Arrondis les résultats au dixième.
On dit que le grand cône a été sectionné par un plan ($\mathcal{P}$) parallèle à sa base et passant par M.
c. Complète avec deux nombres entiers naturels :

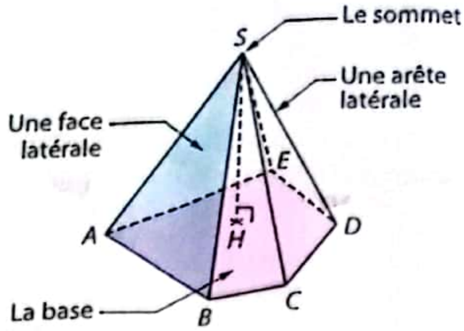
Aire latérale de $\mathcal{C}_1$ = … × Aire latérale de $\mathcal{C}_2$
Volume de $\mathcal{C}_1$ = … × Volume de $\mathcal{C}_2$.



1 Pyramide

a Cas général

Définitions **Une pyramide est un solide qui a :**
- **une face polygonale à n côtés, appelée la base ;**
- **n faces triangulaires, appelées faces latérales ;**
- **un point n'appartenant pas à la base, appelé sommet.**



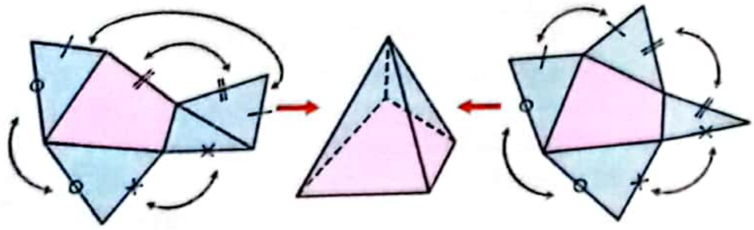
Exemple : On a représenté ci-contre une pyramide $ABCDES$.
- $ABCDE$ est la base de la pyramide ;
- ABS, BCS, CDS, DES et EAS sont les cinq faces latérales ;
- S est le sommet.

Définition **La hauteur d'une pyramide est la droite qui passe par son sommet et qui est perpendiculaire à sa base.**

Exemple : Dans l'exemple ci-dessus, (SH) est la hauteur de la pyramide $ABCDES$.
Remarque : Selon le contexte, la hauteur désigne la droite (SH), le segment $[SH]$ ou la longueur SH.

b Patron d'une pyramide

Exemple : Voici deux patrons d'une pyramide dont la base est un quadrilatère.



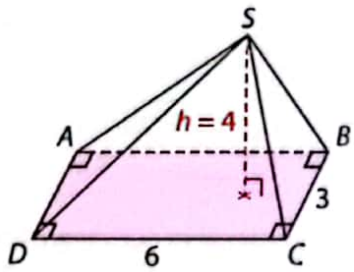
Description **Le patron d'une pyramide est constitué :**
- **d'un polygone à n côtés (sa base)**
- **de n triangles (ses faces latérales).**

c Aires, volume

Définitions • ***L'aire latérale* d'une pyramide est la somme des aires de ses faces latérales.**
• ***L'aire totale* d'une pyramide est la somme de l'aire de sa base et de son aire latérale.**

Propriété ***$\mathcal{V}$* est le volume de la pyramide, *$\mathcal{B}$* l'aire de la base et *h* la hauteur :** $\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h}$.

Exemple : La pyramide $SABCD$ ci-dessous est à base rectangulaire.
L'unité est le cm.
On donne les aires suivantes :
$\mathcal{A}(SAB) = 10\ \text{cm}^2$,
$\mathcal{A}(SBC) = 7\ \text{cm}^2$,
$\mathcal{A}(SDC) = 10\ \text{cm}^2$,
$\mathcal{A}(SAD) = 8\ \text{cm}^2$.



- L'aire latérale de la pyramide est :
$$\mathcal{A} = 10 + 7 + 10 + 8 = 35\ \text{cm}^2.$$
- Le volume de la pyramide est :
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 6 \times 3 \times 4 = 24\ \text{cm}^3.$$

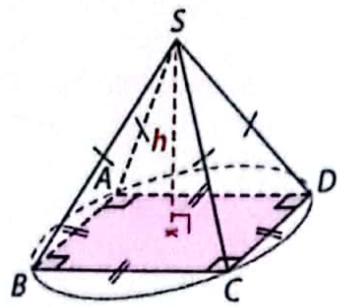
d Cas particulier

Définition **Une pyramide est *régulière* lorsque sa base est un polygone régulier et que ses faces latérales sont des triangles isocèles.**

Propriété **Si une pyramide est régulière alors sa hauteur passe par le centre du cercle circonscrit à sa base.**

Exemple : La pyramide $SABCD$ ci-contre est régulière car sa base $ABCD$ est un carré.

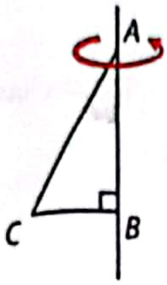
Rappel : En perspective cavalière, un carré est représenté par un parallélogramme.

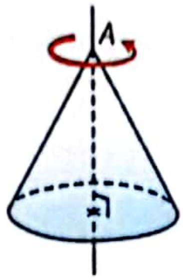


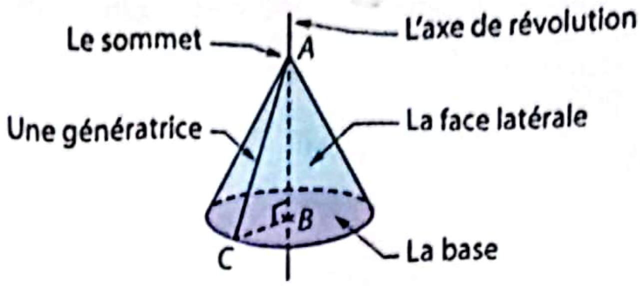
Cône de révolution

a Description

ABC est un triangle rectangle en *B*. En faisant pivoter ce triangle autour de la droite (*AB*), on décrit un **cône de révolution**.





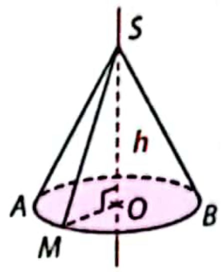


Définition **La hauteur d'un cône est la droite qui passe par son sommet et qui est perpendiculaire à sa base.**

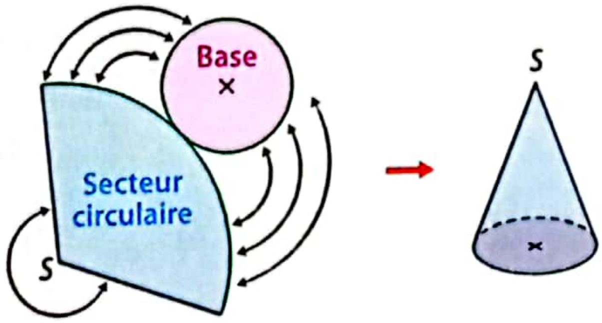
Propriétés **La base d'un cône de révolution est un disque et son axe de révolution, qui passe par le centre du disque, est la hauteur du cône.**

Exemple : Dans le cône de révolution ci-contre :
- le sommet est le point S ;
- l'axe de révolution est la droite (OS) et c'est également sa hauteur ;
- la base est le disque de centre O et de rayon OM ;
- les droites (SA), (SB), (SM) sont des génératrices.

Remarque : Selon le contexte, la hauteur désigne la droite (OS), le segment $[OS]$ ou la longueur OS.



b Patron d'un cône de révolution



Description **Le patron d'un cône de révolution est constitué :**
- **d'un disque (sa base) ;**
- **d'un secteur circulaire dont la longueur de l'arc de cercle est égale au périmètre de la base.**

c Aires, volume

Définitions • **L'aire latérale d'un cône de révolution est l'aire du secteur circulaire.**
• **L'aire totale d'un cône de révolution est la somme de l'aire de sa base et de son aire latérale.**

Propriétés **Dans un cône de révolution :**
a est la longueur d'une génératrice,
h est la hauteur, $\mathcal{B}$ est l'aire de la base
et $\mathcal{P}$ le périmètre du cercle de base.
Le volume $\mathcal{V}$ du cône de révolution est :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$$

L'aire latérale $\mathcal{A}$ du cône de révolution est :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{P}a$$

Exemple :
Sur le cône de révolution ci-contre, l'unité est le cm.
- $\mathcal{B} = \pi r^2 = \pi \times 3^2 \approx 28 \text{ cm}^2$

donc

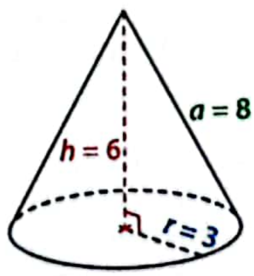
$$\mathcal{V} \approx \frac{1}{3} \times 28 \times 6 \approx 56 \text{ cm}^3.$$

- $\mathcal{P} = 2\pi r \approx 19$ cm

donc

$$\mathcal{A} \approx \frac{1}{2} \times 19 \times 8 \approx 76 \text{ cm}^2.$$

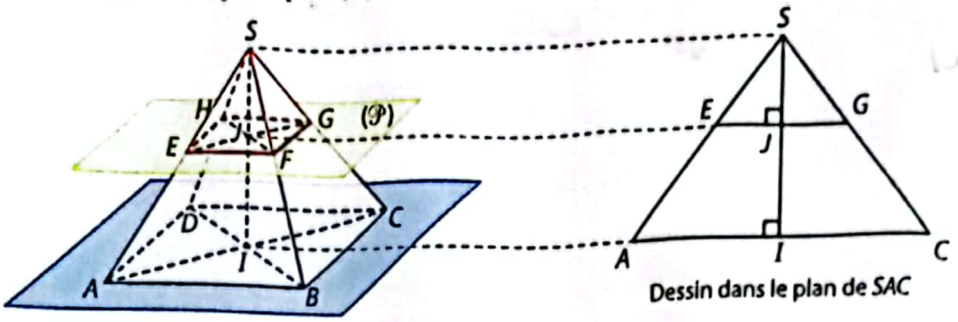
- L'aire totale est $\mathcal{A}_T = \mathcal{A} + \mathcal{B} \approx 104 \text{ cm}^2$.



3 Section de pyramide et de cône

a Section d'une pyramide régulière par un plan parallèle à sa base

Exemple : $SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée. E est le point de $[SA]$ tel que $SE = 0,4\ SA$.
L'unité est le cm. I est le centre de la base $ABCD$.
Le plan $(\mathcal{P})$ parallèle à la base $ABCD$, passant par E, coupe la pyramide suivant le quadrilatère $EFGH$: c'est la section de la pyramide par le plan $(\mathcal{P})$.



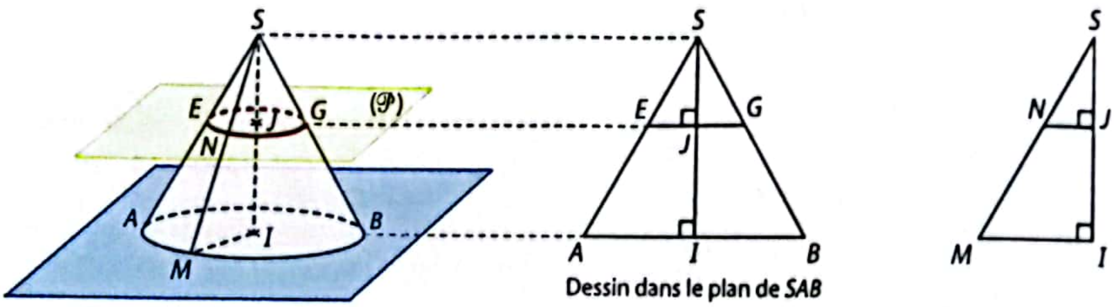
Dessin dans le plan de SAC

Propriété **La section d'une pyramide régulière par un plan parallèle à sa base est un polygone régulier de même nature que la base et dont les côtés sont parallèles à ceux de la base.**

Exemple : Dans l'exemple ci-dessus, $EFGH$ est un carré et $(EF) // (AB)$, $(FG) // (BC)$, ...

b Section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base

Exemple : Le cône de révolution ci-dessous a pour sommet S et pour base le disque de centre I et de diamètre $[AB]$.
E est le point de la génératrice $[SA]$ tel que $SE = 0,4\ SA$. L'unité est le cm.
Le plan $(\mathcal{P})$ parallèle à la base, passant par E, coupe la génératrice $[SB]$ en G.



Dessin dans le plan de SAB

Propriété **La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est un cercle.**

Exemple : Dans l'exemple ci-dessus, la section du cône avec le plan $(\mathcal{P})$ est le cercle de centre J et de diamètre $[EG]$.

c Propriété de réduction

Propriété **Lorsqu'on coupe une pyramide ou un cône par un plan parallèle à sa base, on obtient une réduction de la pyramide ou du cône.**
Si les longueurs sont multipliées par k alors les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3.

Exemple : Pour la pyramide du paragraphe a,
$SE = 0,4\ SA$, donc $k = 0,4$.
On admet que Aire $(SABCD) = 10\text{ cm}^2$
et que Volume $(SABCD) = 30\text{ cm}^3$.
Ainsi, Aire $(SEFGH)$ = Aire $(SABCD) \times 0,4^2$
$= 10 \times 0,16 = 1,6\text{ cm}^2$.
et, Volume $(SEFGH)$ = Volume $(SABCD) \times 0,4^3$
$= 30 \times 0,064 = 1,92\text{ cm}^3$.

Exemple : Pour le cône du paragraphe b,
$SE = 0,4\ SA$, donc $k = 0,4$.
On admet que Aire (cône) $= 20\text{ cm}^2$
et que Volume (cône) $= 60\text{ cm}^3$.
Ainsi, Aire (petit cône) = Aire (cône) $\times 0,4^2$
$= 20 \times 0,16 = 3,2\text{ cm}^2$.
et, Volume (petit cône) = Volume (cône) $\times 0,4^3$
$= 60 \times 0,064 = 3,84\text{ cm}^3$.

1 Apprendre à décrire et à tracer une pyramide régulière

Énoncé

Une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée $ABCD$ a pour hauteur 5 cm.
La base est telle que $AB = 4$ cm. On note I le centre de la base

1. Représente cette pyramide en perspective cavalière.

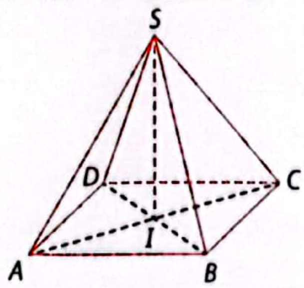
2. a. Représente le dessin de la base de la pyramide.

b. Représente à main levée le dessin de la figure dans le plan (SAC).

Solution

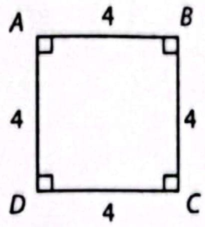
Pour représenter un carré (ou un rectangle) en perspective cavalière, je trace un parallélogramme. Je sais que la hauteur passe par le centre de la base.

1.

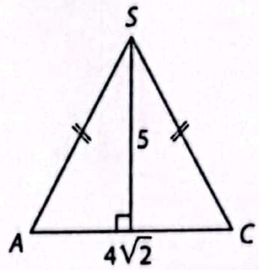


Je n'oublie pas d'indiquer sur le dessin les longueurs que je connais et les éventuels angles droits.

2. a. La base de la pyramide est le carré $ABCD$.



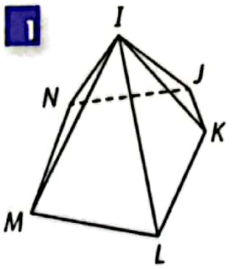
b. La diagonale [AC] a pour longueur : $4 \times \sqrt{2} \approx 5{,}6$ cm.



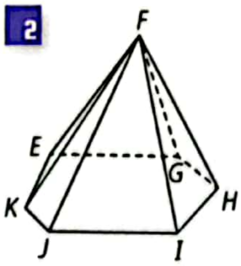
S'exercer

Pour les exercices 1 et 2, nomme le sommet, la base, les faces latérales et les arêtes latérales de la pyramide.

1

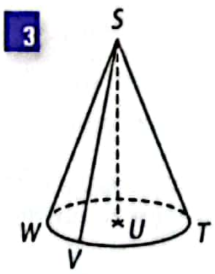


2

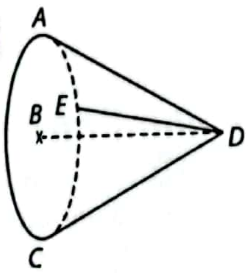


Pour les exercices 3 et 4, nomme le sommet, la base, l'axe de révolution et trois génératrices du cône de révolution.

3



4



5 Réponds par vrai ou faux.

1. Une pyramide possède autant de faces latérales que d'arêtes latérales.

2. Un cône ne possède que deux génératrices.

Pour les exercices 6 à 9, représente en perspective cavalière la pyramide à base carrée $SABCD$, de sommet S dont on a indiqué la hauteur h et la longueur a d'un côté du carré.

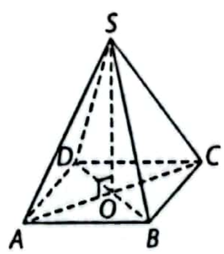
6 $h = 3$ cm ; $a = 4$ cm.

7 $h = 10$ cm ; $a = 5$ cm.

8 $h = 2$ cm ; $a = 6$ cm.

9 $h = 5$ cm ; $a = 3$ cm.

10 $SABCD$ est une pyramide à base carrée telle que $OS = 3$ cm et $OA = 1{,}5$ cm. L'unité est le cm. Représente en vraie grandeur le dessin de la pyramide dans le plan (SAC).

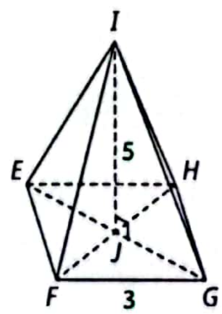


11 $EFGHI$ est la pyramide à base carrée ci-contre. L'unité est le cm. Représente en vraie grandeur :

a. la base $EFGH$;

b. le dessin de la pyramide dans le plan (IEG).

(On prendra : $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.)



2 Apprendre à calculer une longueur, une aire, un volume

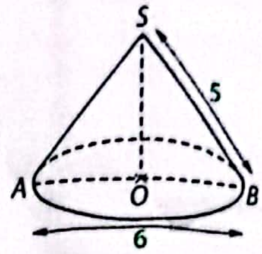
Énoncé

Un cône de révolution de sommet S est représenté ci-contre.
Le cercle de base a pour diamètre $[AB]$. L'unité est le cm.

1. Représente à main levée le dessin de la figure dans le plan (SAB).

2. a. Calcule la hauteur de ce cône.

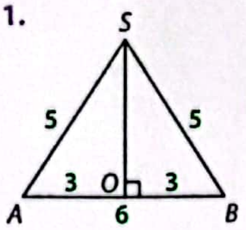
b. Déduis-en les valeurs arrondies au dixième de l'aire de la base, de l'aire latérale, puis du volume du cône. (Tu prendras $\pi \approx 3{,}14$.)



Solution

J'ai remarqué que ces dessins font apparaître des triangles rectangles. Je n'oublie pas d'indiquer l'angle droit et les longueurs connues.

1.



2. a. Dans le triangle SOB rectangle en O, d'après la propriété de Pythagore :
$SB^2 = SO^2 + OB^2$
donc $SO^2 = SB^2 - OB^2$
$= 5^2 - 3^2 = 16.$
D'où $SO = 4$ cm.
La hauteur est de 4 cm.

Pour le calcul de l'aire $\mathcal{B}$ de la base, j'utilise l'aire d'un disque : $\pi \times r^2$; de l'aire latérale $\mathcal{A}$ j'utilise $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{P}a$ où $\mathcal{P} = 2\pi r$ et pour le volume, j'utilise $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$.

b. • $\mathcal{B} = \pi \times OB^2 = 9\pi \text{ cm}^2 \approx 28{,}3 \text{ cm}^2$

• $\mathcal{P} = 2\pi \times OB = 6\pi$ cm,

donc $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{P}a = \frac{1}{2} \times 6\pi \times SB = 3\pi \times 5 = 15\pi$

d'où $\mathcal{A} \approx 47{,}1 \text{ cm}^2$.

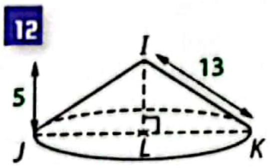
• D'après le a., $h = 4$ cm,

donc $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h = \frac{1}{3} \times 9\pi \times 4 = 12\pi \approx 37{,}7 \text{ cm}^3$.

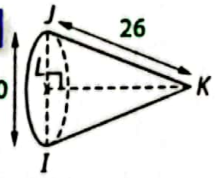
S'exercer

Pour les exercices 12 et 13, l'unité est le cm.
1. Représente à main levée le dessin de la figure dans le plan (IJK).
2. a. Calcule la longueur LK.
b. Déduis-en le volume, arrondi à l'unité, du cône de révolution.

12

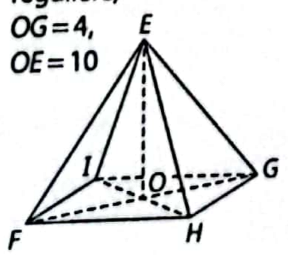


13

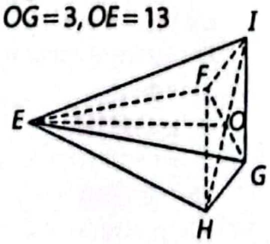


Pour les exercices 14 et 15, l'unité est le cm.
1. Calcule la longueur GH ; déduis-en l'aire de la base.
2. a. Représente à main levée le dessin de la figure dans le plan (EFG).
b. Calcule le volume de la pyramide régulière.

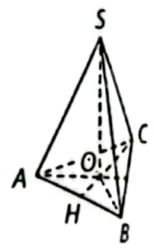
14 $EFHGI$ pyramide régulière,
$OG = 4$,
$OE = 10$



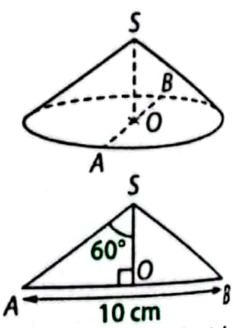
15 $EFHGI$ pyramide régulière,
$OG = 3$, $OE = 13$



16 $SABC$ est la pyramide régulière à base triangulaire ABC ci-contre.
$AS = 5$ cm, $AB = 6$ cm.
1. Représente en vraie grandeur, un patron de cette pyramide.
2. Calcule l'aire latérale, puis l'aire totale de cette pyramide.



17 Les dessins ci-contre représentent un cône de révolution de sommet S et de base le disque de diamètre $[AB]$; ainsi que sa section dans le plan (SAB).
1. Calcule la longueur OS.
Arrondis au dixième en prenant $\sqrt{3} \approx 1{,}7$.
2. Déduis-en le volume de ce cône, arrondi à l'unité.



18 Complète le tableau ci-dessous qui concerne un cône de révolution. Les longueurs sont données en cm.

Rayon r	Arête a	Hauteur h	Aire base $\mathcal{B}$	Aire latérale $\mathcal{A}$	Volume $\mathcal{V}$
4	5	3			
5				65π	100π

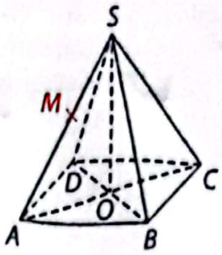
3 Apprendre à représenter une section et un tronc

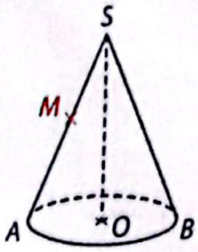
Énoncé

Une pyramide régulière à base carrée et un cône de révolution sont représentés ci-contre. M est un point du segment $[SA]$. Ces deux solides sont coupés par un plan $(\mathcal{P})$, passant par M et parallèle à leur base.

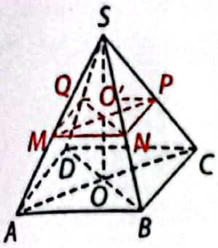
1. Indique la nature de la section de chacun des solides par le plan $(\mathcal{P})$; puis représente en rouge cette section sur la pyramide et le cône.

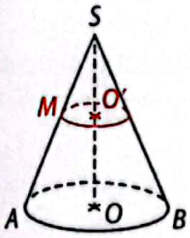
2. Représente les troncs de pyramide et de cône obtenus après la section.





Solution





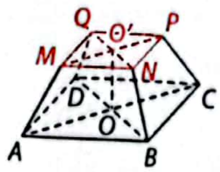
Je retiens que la section par un plan parallèle à la base est une figure plane de même nature que la base.

1. • Pour la pyramide régulière à base carrée, la section est le carré $MNPQ$ de centre O'.

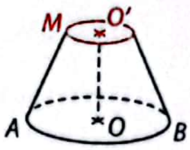
• Pour le cône de révolution, la section est le cercle : de centre O' et de rayon $O'M$.

Le tronc d'un solide est le solide que j'obtiens lorsque la section par un plan parallèle à sa base a été effectuée. Sur la partie « supérieure » du tronc, je reconnais la section, représentée en perspective cavalière.

2.



Tronc de pyramide



Tronc de cône

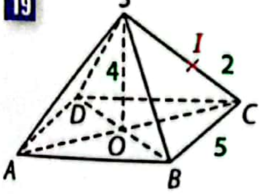
S'exercer

Pour les exercices **19** à **22**, les solides représentés sont des pyramides régulières ou des cônes de révolution. $(\mathcal{P})$ est un plan parallèle à la base passant par le point I. L'unité est le cm.

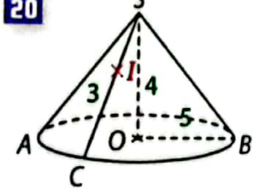
1. Indique la nature de la section de chacun des solides et représente cette section en rouge sur le solide.

2. Représente le tronc du solide obtenu.

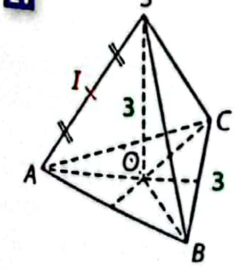
19



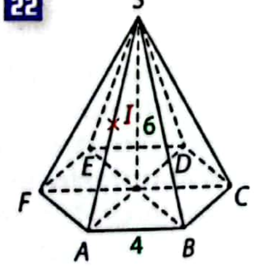
20



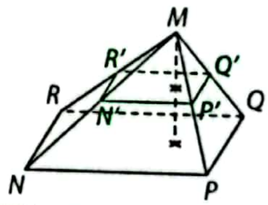
21



22



23 $MNQR$ est la grande pyramide ci-contre $MN'Q'R'$ est la petite pyramide obtenue après section par un plan parallèle à la base $NPQR$.



On donne $MN = 10$ cm et $MN' = 6$ cm.

Complète chacune des phrases par un nombre.

• $MN' = \ldots \times MN$ • $R'N' = \ldots \times RN$

• Aire latérale de $MP'N'Q'R' = \ldots \times$ Aire latérale de $MPNQR$

• Volume de $MP'N'Q'R' = \ldots \times$ Volume de $MPNQR$

24 Pour se confectionner une jupe, Safi a cousu une étoffe en forme de cône qu'elle a ensuite découpé parallèlement à la base.

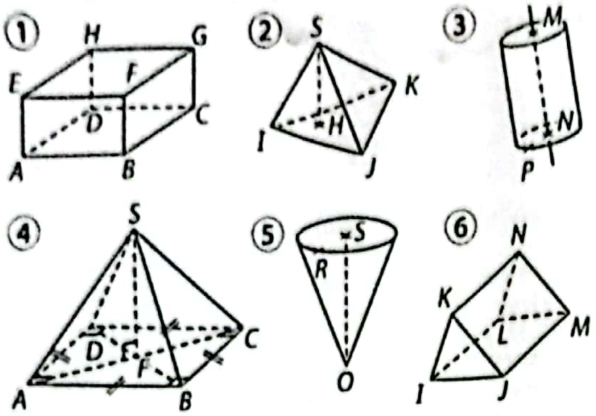
1. Calcule l'aire latérale et le volume du petit cône de tissu, arrondis à l'unité.

2. Déduis-en l'aire latérale et le volume du grand cône de tissu, arrondis à l'unité.

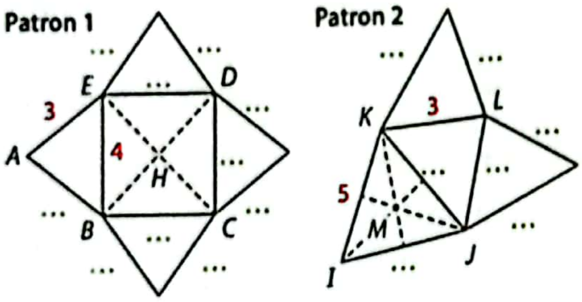
Activités d'application

Description et construction de solides

25 Indique le nom et décris chacun des solides ci-dessous.



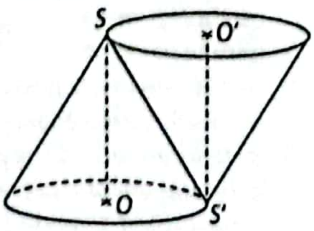
26 Les patrons ci-dessous sont ceux de deux pyramides régulières.
L'unité est le cm.



1. Pour chacun de ces patrons, complète les pointillés par des longueurs.
2. Reproduis ces patrons en vraie grandeur sur une feuille légèrement cartonnée ; puis découpe-les afin de reconstituer les solides
3. Complète le tableau.

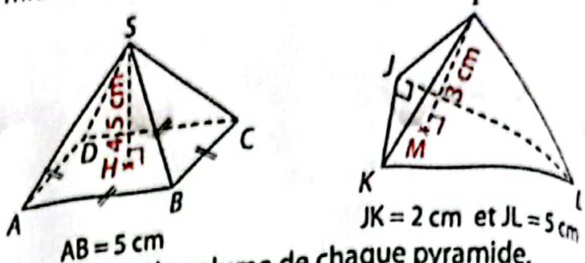
	Patron 1	Patron 2
Nom de la base	...	...
Nom de la hauteur	...	...
Nom d'une face latérale	...	...
...	4 × Aire (*ABE*)	...

27 Les deux cônes de révolution ci-dessous sont collés l'un à l'autre suivant le segment [*SS'*].
Pour chacun des cônes, indique :
– le nom de l'axe de révolution ;
– la hauteur ;
– la base ;
– une génératrice.



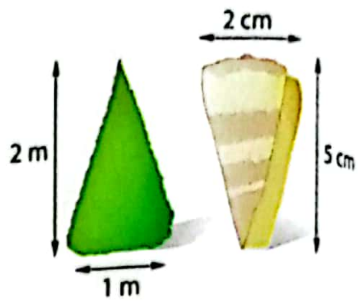
Calculs d'aires et de volumes

28 **1.** Calcule l'aire de la base de chacune des pyramides ci-dessous.



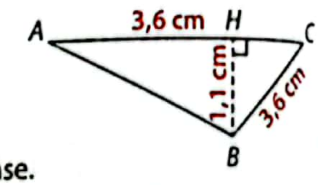
2. Déduis-en le volume de chaque pyramide.

29 Cet arbuste sculpté et ce coquillage présent dans les eaux africaines peu profondes peuvent être assimilés à des cônes de révolution.



Dans chaque cas, calcule la valeur arrondie au dixième :
1. de l'aire de la base ; **2.** du volume du cône.

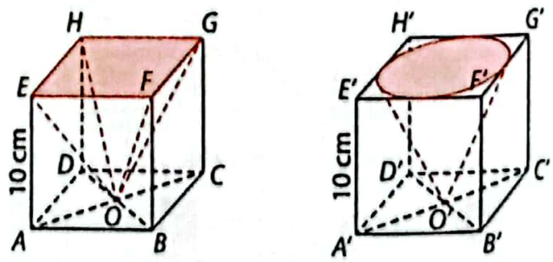
30 Une pyramide de hauteur 10 cm a pour base le triangle *ABC* ci-contre.



1. Calcule l'aire de la base.
2. Déduis-en le volume de la pyramide.

31 **1.** Calcule l'aire de la base d'un cône de révolution de rayon 5 cm et de hauteur 9 cm.
2. Déduis-en son volume arrondi à l'unité.

32 Oumar qui aime travailler le bois, a découpé dans un premier cube, une pyramide, et dans un second, un cône de révolution. Les résultats seront arrondis à l'unité.



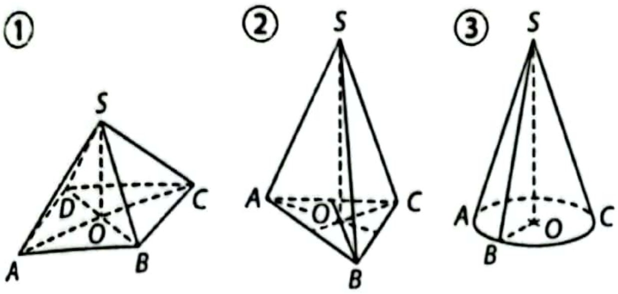
1. Calcule l'aire de la base de la pyramide ; puis du cône.
2. Déduis-en le volume de bois restant pour chacun des cubes après les découpes.
3. Oumar utilise du bois d'acajou dont la masse volumique est 700 g/dm^3. Quelle est la masse de chacun des cubes après les découpes ? Arrondis au gramme.

33 1. Représente, en perspective cavalière, une pyramide régulière $SABCD$ dont la base est un carré $ABCD$ de centre O.
2. Complète le tableau ci-dessous

Pyramide $SABCD$	①	②	③
AB	4 cm	...	...
Hauteur OS	5 cm	3 m	...
Aire de la base	...	25 m^2	81 dm^2
Volume	...	...	162 dm^3

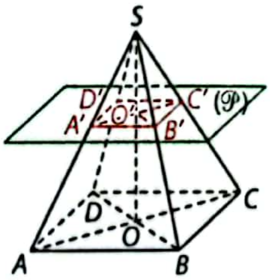
Section par un plan

34 Pour chacun des solides ci-dessous, M est un point de $[SA]$ et $(\mathscr{P})$ un plan parallèle à la base, passant par M.



1. Dans chacun des cas, indique la nature de la section du solide par le plan $(\mathscr{P})$.
2. Dans chacun des cas, représente à main levée, le tronc de pyramide ou de cône obtenu.

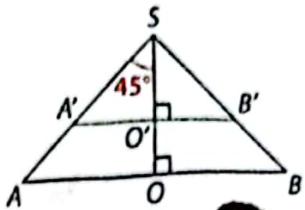
35 La pyramide régulière à base carrée $SABCD$ ci-contre a été sectionnée par un plan $(\mathscr{P})$ parallèle à sa base. On donne :
$OS = 12$ cm, $O'S = 4$ cm,
$OB = 9$ cm, $O'B' = 3$ cm.



1. Représente le dessin de la figure dans le plan (SAC).
2. Calcule les longueurs exactes des arêtes latérales de la petite puis de la grande pyramide.

36 $MNOPQ$ est une pyramide régulière de hauteur 8 cm et de base le carrée $MNOP$ de centre R et de côté 5 cm.
1. Représente cette pyramide en perspective cavalière.
2. Un plan $(\mathscr{P})$ parallèle à la base sectionne cette pyramide en passant par le point S de $[QR]$ tel que $QS = 2$ cm. Représente le dessin de la figure dans le plan (QMO). Tu prendras $\sqrt{2} \approx 1,4$.
3. Le plan $(\mathscr{P})$ coupe l'arête $[QM]$ au point M'. Utilise la propriété de Thalès pour calculer $M'S$ (arrondis au dixième).

37 Un cône de révolution de sommet S, et dont la base a pour diamètre $AB = 8$ cm a été sectionné par un plan $(\mathscr{P})$ parallèle à sa base et passant par le point O' de $[OS]$ tel que : $SO' = 5$ cm. Le dessin ci-contre est celui de la figure dans le plan (SAB). Arrondis les résultats au dixième.

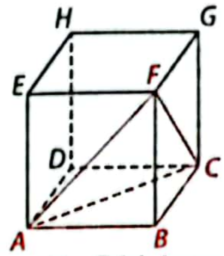


$\sqrt{2} \approx 1,4$

$\cos 45° = \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

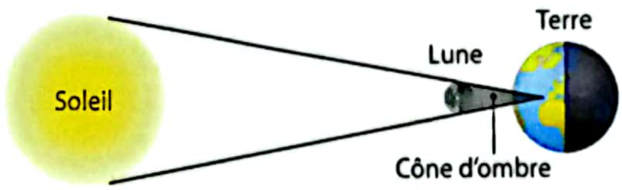
1. Utilise la trigonométrie pour calculer les longueurs SA' et OS.
2. Calcule le volume du grand cône. Déduis-en le volume du petit cône.

38 Dans le cube ci-contre d'arête 10 cm, on a découpé la pyramide $FABC$.



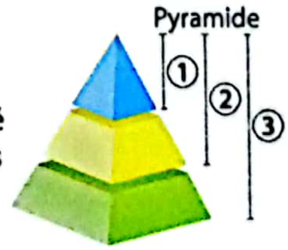
1. Calcule l'aire totale et le volume de cette pyramide.
2. On note I le milieu de $[FB]$. Un plan $(\mathscr{P})$ parallèle au plan (ABC) et passant par I coupe la pyramide. Déduis-en l'aire totale et le volume de la petite pyramide.

39 Lors d'une éclipse totale du soleil, on peut schématiser l'alignement des trois objets célestes ainsi.



Le rayon du Soleil est $R_S = 700$, celui de la Lune est $R_L = 1,7$ et la distance de Terre-Lune est $d = 385$. L'unité est le millier de km.
1. Calcule le volume, arrondi au milliard de km^3, du cône d'ombre.
2. Utilise la propriété d'agrandissement pour en déduire, à la calculatrice, le volume arrondi du grand cône du Soleil à la Terre.

40 Les arêtes latérales de la pyramide régulière à base carrée ci-contre ont été partagées en trois segments de même longueur.



Calcule les rapports :

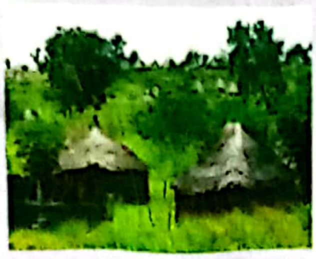
1. $\dfrac{\text{Aire totale pyramide ①}}{\text{Aire totale pyramide ②}}$ 2. $\dfrac{\text{Aire latérale pyramide ③}}{\text{Aire latérale pyramide ①}}$

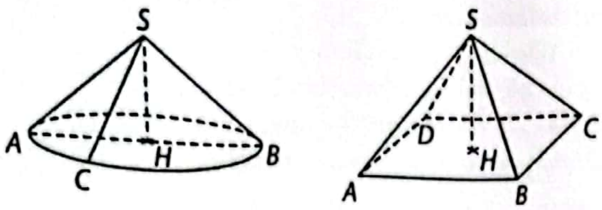
3. $\dfrac{\text{Volume pyramide ②}}{\text{Volume pyramide ①}}$ 4. $\dfrac{\text{Volume pyramide ①}}{\text{Volume pyramide ③}}$

Bien comprendre mieux rédiger

41 Observer et décrire

Les toits de ces cases du Nord-Cameroun s'apparentent à des cônes de révolution et à des pyramides régulières à base carrée.

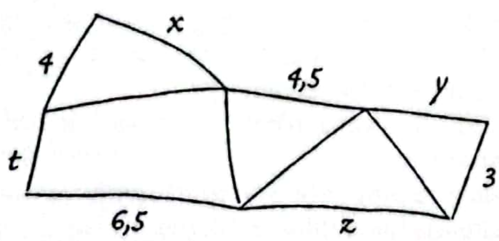




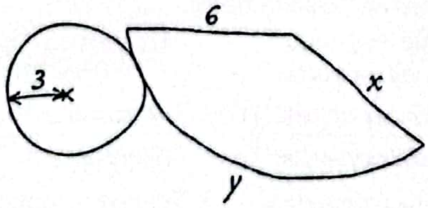
1. a. Nomme les hauteurs de ces deux solides.
b. Ces hauteurs passent-elles par le centre de la base ? Justifie en utilisant le cours.
2. Dans chaque cas, indique si le point H appartient au plan (SAC).
3. Pour le cône de révolution :
a. indique le nom de trois génératrices ;
b. nomme quatre triangles rectangles.
4. Pour la pyramide régulière :
a. indique les noms des faces latérales ;
b. nomme six triangles rectangles.

42 Repérer les côtés correspondants

L'unité est le cm.
1. Voici le patron d'une pyramide régulière réalisé à main levée.



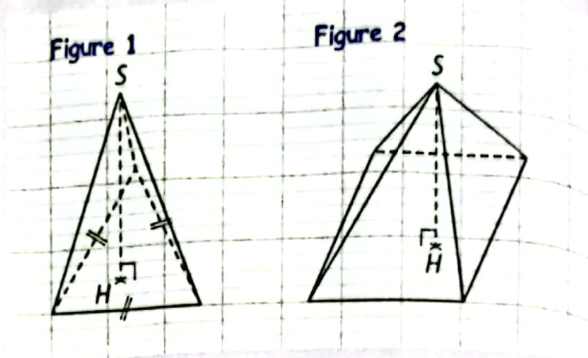
Recopie et complète :
$x = \ldots$ cm ; $y = \ldots$ cm ; $z = \ldots$ cm ; $t = \ldots$ cm.
2. Voici le patron d'un cône de révolution réalisé à main levée.



Recopie et complète : $x = \ldots$ cm ; $y = \ldots$ cm.

43 Représenter correctement

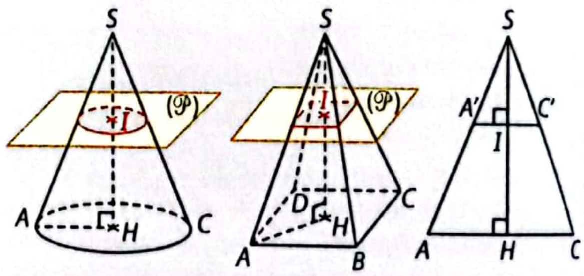
Le professeur a demandé à ses élèves de représenter en perspective cavalière deux pyramides régulières de hauteur $SH = 2{,}5$ cm.
La première est à base triangulaire, de côté 2 cm ; la seconde est à base carrée, de côté 2 cm.
Voici les figures réalisées par Fouda.



1. Pour chaque figure, explique deux erreurs commises par Fouda.
2. Représente correctement chacune des pyramides.

44 Utiliser la bonne propriété

Le cône de révolution et la pyramide régulière à base carrée ci-dessous sont coupés au point I par un plan $(\mathcal{P})$ parallèle à leur base.
Sabine a représenté à droite le dessin de la coupe des deux solides dans le plan (SAC).

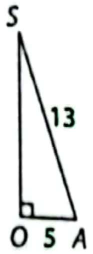


L'objectif est de calculer la longueur AH.
Dans chacun des cas ci-dessous, Sabine a précisé les données fournies par l'énoncé et a indiqué la propriété qu'elle compte utiliser.
Détaille son raisonnement et calcule la longueur AH.

① L'énoncé donne $AS = 10$ cm et $SH = 8$ cm.
Sabine : « Je vais utiliser la propriété de Pythagore ».
② L'énoncé donne $AS = 5$ cm et mes $\widehat{ASH} = 30°$.
Sabine : « Je vais utiliser la trigonométrie dans le triangle rectangle ».
③ L'énoncé donne $SH = 12$ cm, $IA' = 2$ cm et $IS = 4$ cm.
Sabine : « Je vais utiliser la propriété de Thalès ».

45 Fabrication de savons

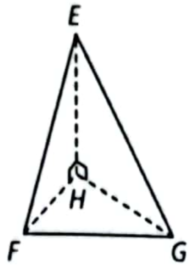
Le triangle SOA ci-contre est rectangle en O. L'unité est le cm.
On fait tourner le triangle SOA autour de l'axe (OS) et on obtient un solide de l'espace.



1. Quelle est la nature du solide obtenu ? Indique sa base, son axe de révolution et une génératrice.
2. a. Calcule la hauteur de ce solide.
b. Déduis-en le volume, arrondi au cm^3, du solide.
3. Ce solide sert de récipient pour la fabrication de savons. Combien peut-on fabriquer de savons de cette forme si on dispose de 4 L de savon liquide ?

46 Les trois triangles rectangles

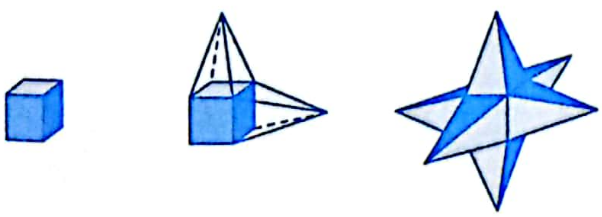
$EFGH$ est la pyramide de sommet E et de base FGH ci-contre, dans laquelle les triangles EFH et EGH sont rectangles en H.
On donne :
EH = 65 mm ; FH = 32 mm ;
GH = 60 mm ; FG = 68 mm.



1. a. Démontre que le triangle FGH est rectangle.
b. Calcule le volume de la pyramide $EFGH$.
c. Trace un patron de cette pyramide.
2. Un plan $(\mathcal{P})$, parallèle à la base FGH coupe la pyramide en un point I de $[EH]$ tel que $EI = 26$ mm.
a. Calcule le volume de la petite pyramide obtenue.
b. Représente à main levée le tronc de pyramide obtenu.

47 Étoile de bois

Ali est menuisier. Il souhaite réaliser, puis peindre une étoile en bois. Pour cela, il réalise d'abord un cube de 10 cm d'arête, puis, sur chacune des faces, il fixe une pyramide régulière dont la base est une face du cube et dont la hauteur est 12 cm.

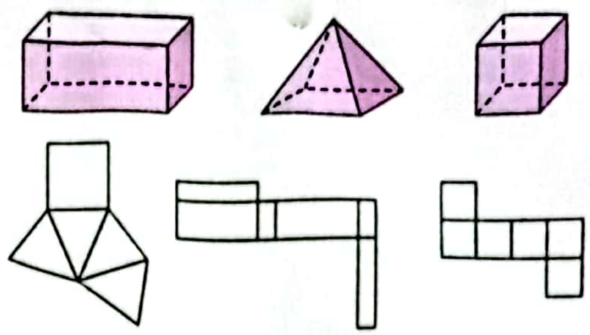


1. a. Calcule le volume du cube et de chacune des pyramides.
b. Pour toute l'étoile, Ali utilise un même bois de masse volumique 0,8 g/cm^3.
Calcule la masse de l'étoile d'Ali.
2. a. Calcule l'aire apparente de l'étoile d'Ali.
b. Ali utilise une peinture qui couvre 1 m^2 pour 10 cL utilisés. Combien de cL Ali va-t-il utiliser pour peindre son étoile ?

S'entraîner au BEPC

48 Reconnaître un patron

Voici trois solides et trois patrons.



1. Donne la nature exacte de chacun de ces solides.
2. Sur ta feuille de composition associe chaque solide à son patron.

BEPC 2005

49 Volume d'un cône de révolution

Un cône de révolution a une base circulaire d'aire $S = 19{,}625$ m^2. La longueur d'une génératrice est de 6,5 m. On prendra $\pi = 3{,}14$.
1. Calcule la hauteur du cône.
2. Calcule le volume du cône.

BEPC 2006

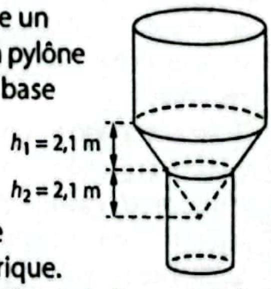
50 Volume d'une pyramide

$ABCDE$ est une pyramide de base rectangulaire $ABCD$ et de sommet E. I désigne le centre du rectangle $ABCD$ et EI la hauteur de la pyramide. On donne, en centimètres, $AB = 5$; $BC = 12$ et $AE = 7$.
On admet que le triangle AIE est rectangle en I.
1. Calcule AI.
2. Déduis-en que $EI = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
3. En prenant $\sqrt{3} = 1{,}73$, calcule le volume de la pyramide.

BEPC 2002

51 Le château d'eau

La figure ci-contre représente un château d'eau composé d'un pylône cylindrique en béton, dont la base est un disque de 1 m de rayon, au-dessus duquel se trouve un réservoir composé d'un tronc de cône surmonté d'une cuve cylindrique.

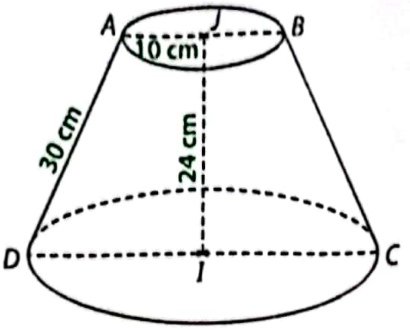


1. Montre que le rayon de la base de la cuve cylindrique du réservoir est égal à 2 m.
2. Sachant que la hauteur du réservoir est 7,1 m, calcule :
a. le volume de sa partie cylindrique ;
b. le volume de sa partie tronconique.
3. Montre que la capacité du réservoir est de 78 186 L.
(On prendra $\pi \approx 3{,}14$.)

BEPC 2011

62 La satisfaction du client

Yene travaille au marché. Il vend différents modèles de bassines en plastique. Retournée sur le sol, l'une de ses bassines est un tronc de cône de révolution. Il est schématisé ci-dessous.



1. a. Représente à l'échelle $\frac{1}{4}$ le dessin de ce tronc de cône dans le plan (ABC).

b. On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ADI.
Calcule la longueur HD. Déduis-en le rayon du cercle de base, ainsi que l'aire totale de la bassine.

2. Un client cherche une bassine pouvant contenir 25 L d'eau.
La bassine de Yene peut-elle convenir à ce client ?

3. Si l'on complète ce tronc de cône pour obtenir le cône complet, quelle serait la hauteur du cône ainsi obtenu ?

53 La pyramide de Kheops

La pyramide du pharaon Kheops, construite par les Égyptiens il y a plus de 4500 ans, a la forme d'une pyramide régulière à base carrée. Dans l'Égypte ancienne, l'unité de mesure était la coudée royale. La pyramide de Kheops est haute de 280 coudées royales et large de 440 coudées royales.

1. a. Représente la pyramide de Kheops en perspective cavalière, en prenant comme échelle 1 cm pour 80 coudées royales.

b. Calcule la longueur de ses arêtes latérales.

c. Avec la même échelle, trace un patron de cette pyramide.

2. Un mètre correspond environ à 1,9 coudées royales.

a. Convertis, au mètre près, la hauteur, la longueur d'une arête latérale et la largeur de la pyramide.

b. Déduis-en son volume, arrondi au m³.

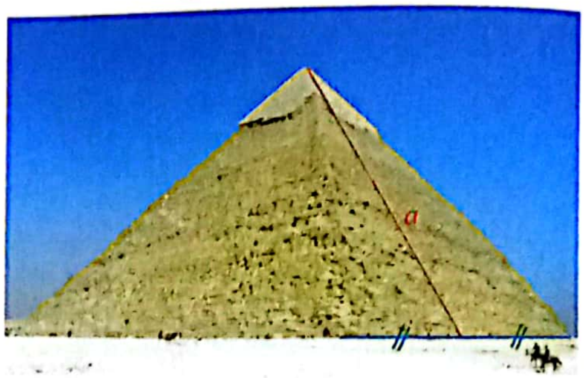
3. L'apothème de la pyramide est la longueur a indiquée sur l'image. Utilise ta calculatrice pour :

a. calculer la longueur a, arrondie à une coudée royale ;

b. calculer un arrondi au centième du rapport : $\frac{\text{apothème}}{\text{demi-largeur}}$.

c. calculer un arrondi au centième du rapport : $\frac{\text{demi-périmètre de la base}}{\text{hauteur}}$.

Quels nombres connus retrouves-tu ?



La pyramide de Kheops est l'une des sept merveilles du monde.

Info : le nombre d'or, présent dans les arts, la nature... est le nombre
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.

8 Racine carrée

Pour démarrer

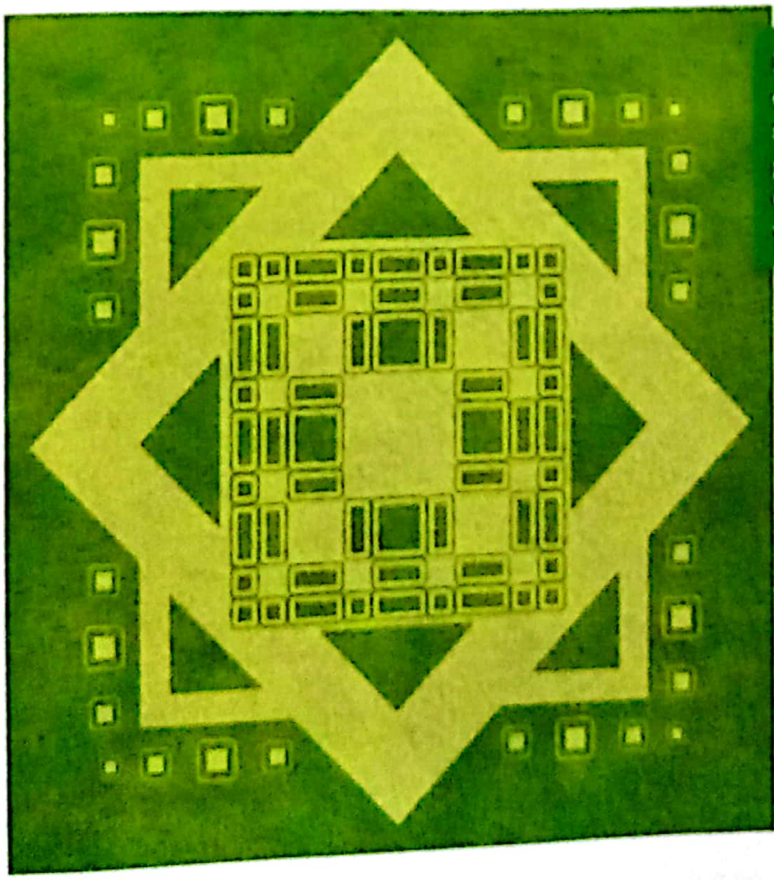
Art géométrique

Durant ses loisirs, Mafo fait de la peinture. Il a réalisé le tableau ci-contre constitué de carrés superposés de différentes couleurs.
L'aire du grand carré bleu est égale à 16 dm^2 et en passant d'un carré au suivant, l'aire est divisée par deux. Ainsi, le carré orange a une aire moitié de celle du carré bleu, et ainsi de suite…

1 Donne l'aire, en dm^2, de chacun des cinq carrés.

2 a. Rappelle la relation qui exprime l'aire $\mathcal{A}$ d'un carré en fonction de la mesure a de son côté.
b. Quels sont les trois carrés pour lesquels il est facile de déterminer la mesure du côté ? Pourquoi ?
c. Donne, en dm, la mesure du côté pour ces trois carrés.

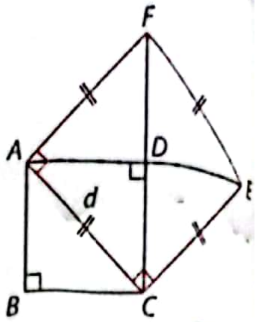
3 a. Pour les deux autres carrés, détermine la longueur des côtés en la mesurant sur le dessin (prends la bordure extérieure de la bande colorée) puis en utilisant l'échelle : 1 cm sur le dessin représente 10 cm en réalité.
b. Vérifie que chaque valeur trouvée vérifie la relation rappelée au 2. a.
La valeur obtenue par la mesure est-elle une valeur exacte ?



Les cercles de culture ou agroglyphes sont des motifs géométriques dessinés dans les champs et visibles depuis le ciel.

À la fin de ce chapitre, tu sauras :
- calculer la valeur exacte, donner une valeur approchée par un arrondi ou un encadrement de la racine carrée d'un nombre positif ;
- comparer des racines carrées ;
- utiliser les propriétés des racines carrées pour réduire des expressions comportant des radicaux.

1 Racine carrée de 2 › Cours 1



Rose a tracé la figure ci-contre en vraie grandeur. Le côté du carré *ABCD* mesure 1 dm et les diagonales du carré *ACEF* se coupent en *D*.
Rose se demande quelle est la mesure *d* du côté du carré *ACEF*.

1 Construis la figure en vraie grandeur en commençant par tracer le carré *ABCD*, sa diagonale [*AC*], puis les points *E* et *F*, et enfin le carré *ACEF*.

2 **a.** Quelle est l'aire, en dm^2, du carré *ABCD* ?
b. Quelle est l'aire, en dm^2, du triangle *ADC* ?
c. Justifie que l'aire du carré *ACEF* est égale à 2 dm^2.

3 **a.** Pour répondre à la question que se pose Rose, mesure le plus précisément possible la longueur *AC* et exprime-la en dm.
b. À quoi doit être égal d^2 ?
c. Calcule d^2 avec la valeur mesurée. Que constates-tu ?
La valeur exacte de d *s'appelle **la racine carrée de 2** et se note* $\sqrt{2}$.
d. Utilise l'information de la bulle ci-contre pour compléter l'égalité : $(\sqrt{2})^2 = \ldots.$

La racine carrée de 2, notée $\sqrt{2}$, est le nombre positif dont le carré est égal à 2.

2 Propriétés des racines carrées › Cours 2

Ⓐ Observer avec des exemples

1 *n* et *p* désignent les couples de nombres suivants : • 4 et 9 ; • 36 et 4 ; • 16 et 25.
a. Pour chaque couple, calcule : $\sqrt{n}$, $\sqrt{p}$ et $\sqrt{n} \times \sqrt{p}$, puis le produit $n \times p$ et $\sqrt{n \times p}$.
b. Compare $\sqrt{n} \times \sqrt{p}$ et $\sqrt{n \times p}$. Que constates-tu ?

2 *n* et *p* désignent les couples de nombres suivants : • 36 et 9 ; • 64 et 16 ; • 100 et 25.
a. Pour chaque couple, calcule : $\sqrt{n}$, $\sqrt{p}$ et $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{p}}$, puis le quotient $\dfrac{n}{p}$ et $\sqrt{\dfrac{n}{p}}$.
b. Compare $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{p}}$ et $\sqrt{\dfrac{n}{p}}$. Que constates-tu ?

Ⓑ Conjecture des propriétés
Propose deux propriétés des racines carrées que les résultats du **1. b.** et du **2. b.** permettent de conjecturer.

Ⓒ Observer avec des contre-exemples
n et *p* désignent les couples de nombres suivants : • 16 et 9 ; • 25 et 16 ; • 13 et 12.
Calcule et compare pour chaque couple les expressions $\sqrt{n} + \sqrt{p}$ et $\sqrt{n+p}$; puis $\sqrt{n} - \sqrt{p}$ et $\sqrt{n-p}$.
Que peux-tu en conclure pour ces deux couples d'expressions ?

3 Carrés parfaits › Cours 1 et 3

1 6 est le nombre positif dont le carré vaut 36. Le nombre 6 est donc la racine carrée de 36.
*Les nombres tels que 36, dont la racine carrée est un nombre entier, sont appelés **carrés parfaits**.*
a. Quels sont les carrés parfaits parmi les nombres de la liste ?
32 ; 48 ; 49 ; 81 ; 92 ; 121 ; 136 ; 169.
b. Encadre chaque nombre de la liste qui n'est pas un carré parfait par les deux carrés parfaits les plus proches.
c. Déduis-en un encadrement entre deux entiers de la racine carrée de ces nombres.

2 Propose six autres nombres qui sont des carrés parfaits.

8 Cours

1 Racine carrée d'un nombre positif

Définitions ***a* désigne un nombre réel positif.**
On appelle racine carrée de *a* le nombre positif dont le carré est égal à *a*.
La racine carrée de *a* se note $\sqrt{a}$. Le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé radical.

Propriétés ***a* désigne un nombre réel positif.**
• $\sqrt{a} \geqslant 0$; • $(\sqrt{a})^2 = a$; • $\sqrt{a^2} = a$.

Cas particuliers : $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$.

Remarque : Un nombre négatif n'admet pas de racine carrée.

Exemples :
• $\sqrt{5}$ se lit « racine carrée de 5 ».
C'est le nombre positif dont le carré est égal à 5 : $(\sqrt{5})^2 = 5$.
• $\sqrt{9}$ se lit « racine carrée de 9 ».
$(\sqrt{9})^2 = 9$. Puisque $3^2 = 9$, $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$.

2 Opérations sur les racines carrées

Propriétés ***a* et *b* désignent deux nombres réels positifs.**
• $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$; • lorsque $b \neq 0$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Remarque : Ces propriétés ne sont pas valables pour la somme ou pour la différence de deux racines carrées.

Exemples :
• $\sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$.
• $\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\dfrac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$.
• En revanche : $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$,
et $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.
Donc $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$.

3 Valeur exacte ou encadrement d'une racine carrée

a Carré parfait

Définition **On nomme carré parfait tout nombre entier naturel dont la racine carrée est un nombre entier naturel.**

Exemples :
25 et 121 sont des carrés parfaits car $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$ et $\sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11$.

b Valeur exacte ou approchée

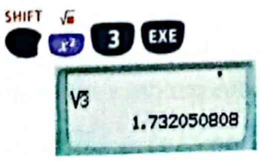
Écriture **L'écriture $\sqrt{n}$ désigne la valeur exacte de la racine carrée du nombre réel positif *n*.**
Suivant les valeurs de *n*, il se peut que :
• $\sqrt{n}$ soit un nombre décimal ; ou que
• $\sqrt{n}$ ne soit pas un nombre décimal.

Exemples :
• Les racines carrés suivantes sont des nombres décimaux :
$\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$; $\sqrt{4\,900} = 70$.
• La racine carré de 3 n'est pas un nombre décimal : $\sqrt{3} \approx 1{,}732050818...$

c Utilisation de la calculatrice

Exemples :
• Pour calculer $\sqrt{4\,900}$, il faut taper :

• Pour calculer $\sqrt{3}$, il faut taper :



d Ordre et encadrement

Propriété ***a* et *b* désignent deux nombres réels positifs. Si $a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.**

Application ***n* désigne un nombre réel positif.**
Pour encadrer $\sqrt{n}$ par deux nombres entiers consécutifs, on recherche un encadrement de *n* par les deux carrés parfaits *a* et *b* les plus proches.
Si $a < n < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{n} < \sqrt{b}$.

Exemple : Pour encadrer $\sqrt{42}$ par deux nombres entiers consécutifs, on recherche un encadrement de 42 par deux carrés parfaits : $36 < 42 < 49$, soit $6^2 < 42 < 7^2$.
Donc $\sqrt{6^2} < \sqrt{42} < \sqrt{7^2}$ ainsi $6 < \sqrt{42} < 7$.

8 Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à réduire des expressions avec des radicaux

Énoncé

1. Écris les nombres ci-dessous sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des nombres entiers et b le plus petit possible. **a.** $\sqrt{72}$; **b.** $\sqrt{10^5}$.

2. Réduis les expressions. **a.** $A=\sqrt{32}-5\sqrt{2}$; **b.** $B=\sqrt{48}+\sqrt{27}$.

3. Réduis les expressions. **a.** $C=\sqrt{18}\times\sqrt{27}$; **b.** $D=\sqrt{\dfrac{32}{25}}$.

Solution

1.

• Je décompose le nombre situé sous le radical en produit de facteurs premiers ;
• je fais apparaître des carrés dans ce produit ;
• pour ces carrés, j'utilise le fait que $\sqrt{a^2}=a$, donc $\sqrt{a^2\times b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}$.

a.
$$\begin{aligned}\sqrt{72}&=\sqrt{2\times2\times2\times3\times3}\\&=\sqrt{(2\times3)^2\times2}\\&=\sqrt{6^2\times2}\\&=6\sqrt{2}.\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}\sqrt{10^5}&=\sqrt{10^4\times10}\\&=\sqrt{(10^2)^2\times10}\\&=10^2\sqrt{10}\\&=100\sqrt{10}.\end{aligned}$$

2.

Je procède comme au 1 ; puis, si possible, je regroupe les racines carrées et je simplifie.

a.
$$\begin{aligned}A&=\sqrt{32}-5\sqrt{2}\\&=\sqrt{16\times2}-5\sqrt{2}\\&=\sqrt{16}\times\sqrt{2}-5\sqrt{2}\\&=4\sqrt{2}-5\sqrt{2}\\&=(4-5)\sqrt{2}\\&=-\sqrt{2}.\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}B&=\sqrt{48}+\sqrt{27}\\&=\sqrt{16\times3}+\sqrt{9\times3}\\&=\sqrt{16}\times\sqrt{3}+\sqrt{9}\times\sqrt{3}\\&=4\sqrt{3}+3\sqrt{3}\\&=7\sqrt{3}.\end{aligned}$$

3.

J'utilise les propriétés du cours sur les opérations : $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ et $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ lorsque $b\neq0$.

a.
$$\begin{aligned}C&=\sqrt{18}\times\sqrt{27}=\sqrt{9\times2}\times\sqrt{9\times3}\\&=\sqrt{9}\times\sqrt{2}\times\sqrt{9}\times\sqrt{3}\\&=(\sqrt{9}\times\sqrt{9})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{3})\\&=9\sqrt{6}.\end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned}D&=\sqrt{\frac{32}{25}}=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{16}\times\sqrt{2}}{\sqrt{25}}\\&=\frac{4\times\sqrt{2}}{5}\\&=\frac{4}{5}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

S'exercer

Pour les exercices 1 et 2, écris chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux nombres entiers et b le plus petit possible.

1 **a.** $\sqrt{12}$; **b.** $\sqrt{32}$; **c.** $\sqrt{162}$; **d.** $\sqrt{10^3}$; **e.** $\sqrt{800}$; **f.** $\sqrt{175}$.

2 **a.** $\sqrt{15\times45}$; **b.** $\sqrt{21\times14}$; **c.** $\sqrt{24\times36}$; **d.** $\sqrt{60\times40}$; **e.** $\sqrt{50\times14}$; **f.** $\sqrt{18\times48}$.

3 Montre par un calcul que les nombres ci-dessous sont des nombres entiers naturels.
a. $\sqrt{900}$; **b.** $\sqrt{6}\times\sqrt{54}$; **c.** $\sqrt{5}\times\sqrt{125}$.

Pour les exercices 4 à 9, réduis les expressions.

4 **a.** $3\sqrt{6}-5\sqrt{6}+7\sqrt{6}$; **b.** $\sqrt{4}\times\sqrt{7}+\sqrt{9}\times\sqrt{7}$; **c.** $8\sqrt{2}-5\sqrt{2}+2$; **d.** $5\sqrt{5}+\sqrt{4}-2\sqrt{5}-6$.

5 **a.** $2\sqrt{12}-4\sqrt{3}$; **b.** $\sqrt{98}+\sqrt{18}$; **c.** $5\sqrt{20}-3\sqrt{80}+\sqrt{25}$; **d.** $7\sqrt{7}+\sqrt{63}-\sqrt{112}$.

6 **a.** $5\sqrt{2}\times\sqrt{18}$; **b.** $\sqrt{5}\times2\sqrt{35}$; **c.** $\sqrt{10^3}\times3\sqrt{10^2}$; **d.** $\sqrt{10^4}\times2\sqrt{8}$.

7 **a.** $\sqrt{6}\times\sqrt{30}\times\sqrt{5}$; **b.** $\sqrt{45}\times2\sqrt{30}$; **c.** $\sqrt{5}\times\sqrt{7}\times\sqrt{70}$; **d.** $\sqrt{22}\times\sqrt{55}\times\sqrt{10}$.

8 **a.** $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; **b.** $\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}$; **c.** $\dfrac{\sqrt{162}}{\sqrt{2}}$; **d.** $\sqrt{\dfrac{49}{64}}$; **e.** $\sqrt{\dfrac{121}{36}}$; **f.** $\dfrac{1}{5}\times\sqrt{\dfrac{25}{81}}$.

9 **a.** $4\sqrt{\dfrac{27}{16}}$; **b.** $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{48}}$; **c.** $\dfrac{12}{\sqrt{12}}$; **d.** $\dfrac{\sqrt{10^6}}{\sqrt{10^2}}$; **e.** $\dfrac{\sqrt{10^5}}{\sqrt{10^4}}$; **f.** $\sqrt{\dfrac{100\times10^5}{10^3}}$.

10 Après les avoir simplifiés, range les nombres ci-dessous par ordre croissant.
a. $\sqrt{12100}$; **b.** $\sqrt{10}\times\sqrt{40}$; **c.** $\dfrac{\sqrt{10\times10^4}}{\sqrt{250}}$.

2 Apprendre à trouver la valeur d'une racine carrée

Énoncé

1. À l'aide de la table des racines carrées page 187 ou de la calculatrice, donne la valeur exacte des racines carrées suivantes. **a.** $\sqrt{1\,024}$ **b.** $\sqrt{2{,}89}$

2. À l'aide de la table des racines carrées page 187 ou de la calculatrice, donne une valeur arrondie au centième des racines carrées suivantes. **a.** $\sqrt{6}$ **b.** $\sqrt{30\,000}$

3. À l'aide de la table des racines carrées page 187, donne un encadrement de $\sqrt{512}$ par deux nombres entiers consécutifs.

Solution

1. a. On lit sur la table ou sur la calculatrice $\sqrt{1\,024} = 32$.

b. $\sqrt{2{,}89} = \sqrt{\dfrac{289}{100}} = \dfrac{\sqrt{289}}{\sqrt{100}} = \dfrac{\sqrt{289}}{10}$.

Comme $\sqrt{289} = 17$, on a : $\sqrt{2{,}89} = 1{,}7$.

2. a. On lit sur la table ou sur la calculatrice :
$\sqrt{6} \approx 2{,}449\,489\ldots$

Arrondi au centième : $\sqrt{6} \approx 2{,}45$.

b. $\sqrt{30\,000} = \sqrt{3 \times 10\,000} = \sqrt{3} \times \sqrt{10\,000} = \sqrt{3} \times 100$.

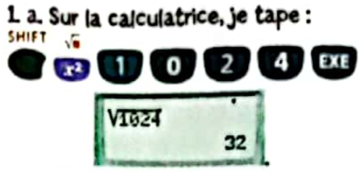
On lit sur la table : $\sqrt{3} \approx 1{,}732\,051\ldots$

Donc : $\sqrt{3} \times 100 \approx 173{,}205\,1\ldots$

Arrondi au centième : $\sqrt{30\,000} \approx 173{,}21$.

3. $484 < 512 < 529$,
donc : $\sqrt{484} < \sqrt{512} < \sqrt{529}$,
soit : $22 < \sqrt{512} < 23$.

1. a. Sur la calculatrice, je tape :



1. b. Si je travaille avec la table des carrés, j'écris $2{,}89 = \dfrac{289}{100}$ afin de faire apparaître un nombre (289) de la table.

2. b. Si je travaille avec la table des racines carrées page 187, j'écris $30\,000 = 3 \times 10\,000$ afin de faire apparaître un nombre (3) de la table.

3. J'ai cherché dans la table des carrés page 187 les deux nombres consécutifs qui encadrent 512.

S'exercer

Pour les exercices 11 à 13, donne la valeur des racines carrées à l'aide de la table des carrés page 187 ou de ta calculatrice.

11 **a.** $\sqrt{169}$; **b.** $\sqrt{1\,444}$; **c.** $\sqrt{3\,025}$;
d. $\sqrt{400}$; **e.** $\sqrt{4\,900}$; **f.** $\sqrt{3\,721}$.

12 **a.** $\sqrt{12\,100}$; **b.** $\sqrt{90\,000}$; **c.** $\sqrt{756\,900}$;
d. $\sqrt{250\,000}$; **e.** $\sqrt{792\,100}$; **f.** $\sqrt{484 \times 10^4}$.

13 **a.** $\sqrt{0{,}16}$; **b.** $\sqrt{2{,}25}$; **c.** $\sqrt{27{,}04}$;
d. $\sqrt{0{,}003\,6}$; **e.** $\sqrt{0{,}518\,4}$; **f.** $\sqrt{0{,}052\,9}$.

Pour les exercices 14 à 16, donne la valeur arrondie au millième des nombres à l'aide de la table des racines carrées page 187 ou de ta calculatrice.

14 **a.** $\sqrt{2}$; **b.** $\sqrt{5}$; **c.** $\sqrt{7}$;
d. $\sqrt{10}$; **e.** $\sqrt{15}$; **f.** $\sqrt{23}$.

15 **a.** $\sqrt{500}$; **b.** $\sqrt{1\,300}$; **c.** $\sqrt{2\,200}$;
d. $\sqrt{90\,000}$; **e.** $\sqrt{140\,000}$; **f.** $\sqrt{24 \times 10^4}$.

16 **a.** $\sqrt{0{,}06}$; **b.** $\sqrt{0{,}16}$; **c.** $\sqrt{0{,}17}$;
d. $\sqrt{0{,}000\,8}$; **e.** $\sqrt{0{,}001\,2}$; **f.** $\sqrt{0{,}0021}$.

Pour les exercices 17 à 19, utilise la table des carrés page 187 ou ta calculatrice.

17 Donne pour chaque nombre un encadrement par deux nombres entiers consécutifs.
a. $\sqrt{70}$; **b.** $\sqrt{700}$; **c.** $\sqrt{1\,000}$;
d. $\sqrt{38}$; **e.** $\sqrt{545}$; **f.** $\sqrt{1\,830}$.

18 Donne pour chaque nombre un encadrement par deux nombres entiers consécutifs.
a. $\sqrt{54\,000}$; **b.** $\sqrt{22\,512}$; **c.** $\sqrt{140 \times 10^3}$.

19 Un quadrilatère a deux côtés opposés dont les mesures en centimètres sont respectivement $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ et $\sqrt{3} + \sqrt{7}$.
Ce quadrilatère peut-il être un parallélogramme ? Justifie ta réponse.

Activités d'application

Définition de la racine carrée

20 1. Indique pour chaque nombre de la liste s'il possède une racine carrée.
• 71 ; • −4 ; • 64 ; • −100 ; • 1 ; • −1 ; • 0 ; • 0,09.
2. Pour chaque nombre qui possède une racine carrée, donne sa valeur exacte, quand c'est possible sous forme décimale.

21 Vrai ou faux ? Justifie tes réponses.
a. La racine carrée de 4 est égale à 2.
b. 2 est le seul nombre dont le carré est égal à 4.
c. −4 est la racine carrée de −16.
d. $\sqrt{3}$ est la valeur exacte de la racine carrée de 3.
e. 1,41 est la valeur exacte de la racine carrée de 2.
f. La racine carrée de 5 est égale à 25.

22 Calcule les nombres.
a. $(\sqrt{13})^2$; b. $\sqrt{99} \times \sqrt{99}$; c. $(\sqrt{10^2})^2$;
d. $\sqrt{0^2}$; e. $\sqrt{0,2^2}$; f. $\sqrt{\pi^2}$.

23 Calcule les nombres.
a. $(2\sqrt{11})^2$; b. $2\sqrt{11^2}$; c. $(\sqrt{5})^4$;
d. $(\sqrt{2^2})^3$; e. $\dfrac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{2^2}}$; f. $\dfrac{(\sqrt{7})^2}{(\sqrt{10})^2}$.

24 Kinjo a-t-il raison ? Justifie ta réponse.

25 Indique pour chaque nombre de la liste s'il s'agit d'un carré parfait.
a. 36 ; b. 32 ; c. 48 ; d. 0,4 ;
e. 0 ; f. 0,16 ; g. 121 ; h. 10 000.

26 Donne la racine carrée des nombres suivants sous la forme d'un nombre décimal.
a. 49 ; b. 10^4 ; c. 144 ; d. 169 ;
e. 0,01 ; f. 0,64 ; g. 3 600 ; h. 1,21.

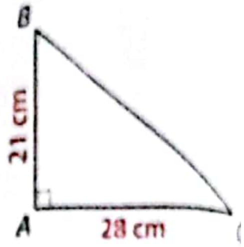
27 Ngu possède des bonbons : 64 jaunes, 76 rouges, 81 verts et 104 mauves. Elle désire faire des paquets de chaque couleur en faisant en sorte que le nombre de paquets soit égal au nombre de bonbons dans un paquet.
a. Pour quelle(s) couleur(s) réussira-t-elle à utiliser tous ses bonbons ?
b. Sinon, combien de bonbons lui restera-t-il ?

Utilisation de tables

Pour les exercices suivants reporte-toi aux tables des carrés et des racines carrées page 187.

28 Donne le nombre égal à chaque racine carrée
a. $\sqrt{196}$; b. $\sqrt{625}$; c. $\sqrt{3\,969}$;
d. $\sqrt{57\,600}$; e. $\sqrt{160\,000}$; f. $\sqrt{37,21 \times 10^4}$.

29 a. Dans le triangle rectangle ABC, écris une relation entre les longueurs AB, AC et l'hypoténuse BC.
b. Calcule d'abord BC^2, puis la longueur BC.



30 Donne le nombre décimal égal à chaque racine carrée.
a. $\sqrt{0,49}$; b. $\sqrt{3,61}$; c. $\sqrt{30,25}$;
d. $\sqrt{0,0081}$; e. $\sqrt{0,0441}$; f. $\sqrt{0,7225}$.

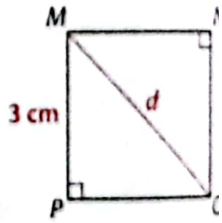
31 Pour chaque racine carrée, donne une écriture décimale arrondie au centième.
a. $\sqrt{8}$; b. $\sqrt{13}$; c. $\sqrt{17}$;
d. $\sqrt{200}$; e. $\sqrt{1\,000}$; f. $\sqrt{70\,000}$.

32 Pour chaque racine carrée, donne une écriture décimale arrondie au millième.

a. $\sqrt{0\ 0\ \ }$; b. $\sqrt{0\ \ \ }$;
c. $\sqrt{0\ \ }$; d. $\sqrt{0\ 00\ \ }$;
e. $\sqrt{0\ 000\ \ }$; f. $\sqrt{0\ 00\ }$.

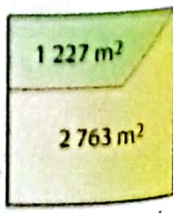
$\sqrt{0\ 02} = \sqrt{\dfrac{2}{100}} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$

33 Le côté du carré $MNOP$ mesure 3 cm. Combien mesure sa diagonale d ? Donne sa mesure en cm arrondie au dixième.



34 1. Donne un encadrement de chaque racine carrée par deux nombres entiers consécutifs.
a. $\sqrt{\ \ 0}$; b. $\sqrt{\ \ 00}$; c. $\sqrt{\ \ \ \ 0}$.
2. Donne une valeur arrondie à l'unité des trois nombres ci-dessus.

35 Galopo veut acheter ce terrain de forme carrée, composé de deux parcelles d'aires 1 227 m² et 2 763 m².
Il voudrait savoir combien mesure, au mètre près, le côté c du terrain.
Donne un encadrement de cette mesure, exprimée en mètres, par deux nombres entiers consécutifs.



Propriétés des racines carrées

36 Compare les deux nombres et remplace les pointillés par les symboles : < ou > ou =.

a. $\sqrt{124} \dots \sqrt{235}$; b. $\sqrt{17} \dots \sqrt{17{,}05}$;

c. $2\sqrt{4} \dots 4\sqrt{4}$; d. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \dots \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$.

37 Compare les deux nombres et remplace les pointillés par les symboles : < ou > ou =.

a. $\sqrt{17} \dots 3\sqrt{2}$; b. $7\sqrt{3} \dots 4\sqrt{5}$;

c. $3\sqrt{72} \dots 6\sqrt{18}$; d. $4\sqrt{13} \dots 9\sqrt{2}$.

Pour comparer deux nombres positifs, tu peux comparer leurs carrés.

38 Écris les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{3}$, a étant un nombre entier.

a. $\sqrt{75}$; b. $\sqrt{108}$; c. $\sqrt{300}$;

d. $\sqrt{243}$; e. $\sqrt{147}$; f. $\sqrt{1\,200}$.

39 Écris les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b des nombres entiers et b le plus petit possible.

a. $\sqrt{28}$; b. $\sqrt{45}$; c. $\sqrt{275}$;

d. $\sqrt{1\,500}$; e. $\sqrt{324}$; f. $\sqrt{180}$.

Recherche le plus grand facteur a^2 dans le nombre sous le radical.

40 Écris les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des nombres entiers et b le plus petit possible.

a. $\sqrt{10^3}$; b. $\sqrt{10^2 \times 10^5}$; c. $\sqrt{9 \times 27}$;

d. $\sqrt{28 \times 35}$; e. $\sqrt{15 \times 12 \times 10}$; f. $\sqrt{24 \times 66}$.

41 Parmi les nombres ci-dessous, fais la liste de ceux qui sont égaux à $\sqrt{256}$.

$2\sqrt{128}$; $2\sqrt{64}$; $4\sqrt{32}$; $16\sqrt{1}$;

$4\sqrt{16}$; $\sqrt{2^8}$; $4\sqrt{64}$; $8\sqrt{4}$.

42 Le professeur a demandé à ses élèves d'écrire le nombre $\sqrt{72}$ d'une façon différente.
Il a noté au tableau les différentes écritures obtenues. Lesquelles sont justes ?

$\sqrt{70} + \sqrt{2}$	$2\sqrt{36}$	$\sqrt{36} \times \sqrt{2}$
$6\sqrt{2}$	$\sqrt{7{,}2} \times \sqrt{10}$	$4\sqrt{3}$
$\sqrt{70} + 2$	$3\sqrt{8}$	$\dfrac{\sqrt{144}}{2}$

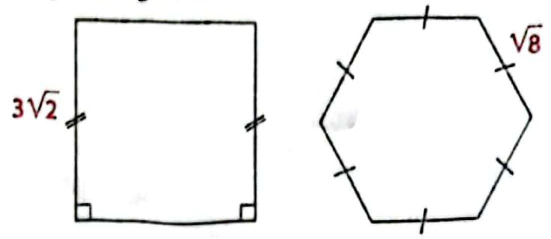
43 Réduis les expressions.

a. $2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}$; b. $4\sqrt{6} + 4 - 7\sqrt{6}$;

c. $2\sqrt{8} - 3\sqrt{2}$; d. $\sqrt{75} + 3\sqrt{12} - 4\sqrt{3}$;

e. $5\sqrt{28} - 3\sqrt{63}$; f. $\sqrt{50} - 6 - 3\sqrt{18} + 4\sqrt{4}$.

44 Calcule et compare les périmètres du carré et de l'hexagone régulier.

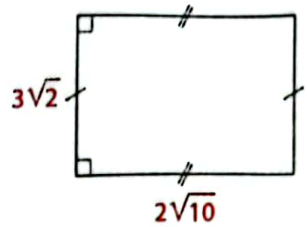


45 Réduis les produits.

a. $2\sqrt{14} \times \sqrt{7}$; b. $4\sqrt{12} \times 4\sqrt{3}$;

c. $2\sqrt{15} \times 5\sqrt{20}$; d. $\sqrt{27} \times \sqrt{48} \times \sqrt{32}$.

46 Calcule l'aire du rectangle et donne sa valeur sous la forme $n\sqrt{5}$, n étant un nombre entier.



47 Développe puis réduis les expressions.

a. $\sqrt{3}(4\sqrt{3} + 3)$; b. $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{12})$;

c. $-\sqrt{7}(\sqrt{7} - 4)$; d. $(3\sqrt{5} + \sqrt{15})(2\sqrt{5})$.

48 Réduis les quotients.

a. $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$; b. $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{45}}$; c. $\dfrac{23}{\sqrt{23}}$;

d. $\dfrac{8}{\sqrt{2}}$; e. $\dfrac{\sqrt{105}}{\sqrt{28}}$; f. $\dfrac{\sqrt{128}}{\sqrt{36}}$.

d. Multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{2}$.

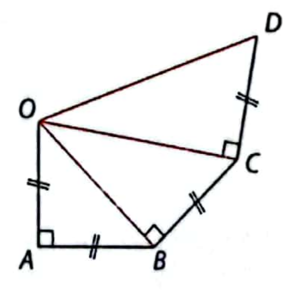
49 Utilise les identités remarquables pour développer et réduire les nombres ci-dessous :

a. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$;
b. $(5 + \sqrt{7})^2$;
c. $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$;
d. $(3 + \sqrt{11})^2$;
e. $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$;
f. $(\sqrt{5} - \sqrt{13})(\sqrt{5} + \sqrt{13})$.

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

50 Un rectangle a pour aire 36 cm². Sa longueur mesure $4\sqrt{3}$ cm. Combien mesure sa largeur ? Donne sa valeur sous la forme $n\sqrt{3}$, n étant un nombre entier.

51 Les segments $[OA]$, $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$ mesurent tous 1 dm. Calcule les longueurs OB, OC et OD. (Donne leur valeur exacte.)



Bien comprendre mieux rédiger

52 Existence d'une racine carrée

1. Pour chacun des nombres ci-dessous, indique si sa racine carrée existe.

a. 5 ; **b.** -3 ; **c.** $2-\sqrt{8}$;

d. $\sqrt{5}-3$; **e.** $2-\sqrt{3}$; **f.** $(2-\sqrt{10})^2$.

2. n désigne un nombre réel positif et p un nombre réel négatif. Pour chacun des nombres ci-dessous, indique si sa racine carrée existe.

a. n ; **b.** p ; **c.** $-p$;

d. $(-n)^2$; **e.** $p-n$; **f.** $\frac{n}{p}$.

53 Utiliser correctement une propriété

1. a. Complète la propriété du cours :
lorsque a est un nombre réel positif, $\sqrt{a^2}=\ldots$.

b. Justifie que, pour tout nombre réel a, $(-a)^2=a^2$.

2. Réponds par *vrai* ou *faux* aux égalités ci-dessous. Lorsque ta réponse est *faux*, indique la réponse correcte.

a. $\sqrt{(-3)^2}=-3$; **b.** $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}=\sqrt{7}-2$;

c. $\sqrt{(\sqrt{8}-2)^2}=\sqrt{8}-2$; **d.** $\sqrt{(5-\sqrt{30})^2}=5-\sqrt{30}$.

54 Opérations sur les racines carrées

Relie entre eux les nombres qui sont égaux.

$\sqrt{36-11}$ •	• 5 •	• $\sqrt{9^2}$
$\sqrt{4+9}$ •	• 9 •	• $\sqrt{26}\times\sqrt{0{,}5}$
$\sqrt{(-9)^2}$ •	• $3\sqrt{3}$ •	• $\sqrt{4}+\sqrt{9}$
$\sqrt{27}$ •	• $\sqrt{13}$ •	• $\sqrt{5}\times\sqrt{1}$
$\sqrt{9-4}$ •	• $\sqrt{5}$ •	• $\sqrt{75-48}$

55 Des erreurs fréquentes

Voici des erreurs fréquentes relevées sur trois cahiers d'élèves de troisième.

$\sqrt{4+12}=\sqrt{4}+12=2+12=14$. *Attention au radical.*

$\sqrt{16+9}=\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$. *Ce n'est pas une propriété du cours.*

$\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}=2-\sqrt{7}$ car $\sqrt{a^2}=a$. *Vérifie d'abord le signe.*

Utilise les remarques du professeur pour déceler les erreurs et propose une rédaction correcte.

56 Extraire un nombre du radical

1. a et b désignent deux nombres réels positifs. Quelles propriétés du cours te permettent de justifier les égalités suivantes ?

$$\sqrt{a^2\times b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}.$$

2. Complète le raisonnement ci-dessous :

$$\begin{aligned}\sqrt{588}&=\sqrt{2\times2\times3\times7\times7}\\&=\sqrt{\ldots^2\times3\times\ldots^2}\\&=\sqrt{(\ldots\times\ldots)^2\times3}\\&=\ldots\times\ldots\times\sqrt{3}\\&=\ldots\sqrt{3}\end{aligned}$$

3. Utilise un raisonnement identique pour écrire les nombres ci-dessous sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b des nombres entiers et b le plus petit possible.

a. $\sqrt{605}$; **b.** $\sqrt{108}$; **c.** $\sqrt{5\,200}$.

57 Sans radical au dénominateur

1.

$$\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$$

Utilise l'exemple ci-dessus pour écrire les nombres suivants sans radical au dénominateur.

a. $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$; **b.** $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; **c.** $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$.

2. Dans l'exemple ci-dessous, on supprime le radical au dénominateur en utilisant l'identité remarquable : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

$$\frac{3\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{2}\times(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})}=\frac{9\sqrt{2}-3\sqrt{10}}{3^2-(\sqrt{5})^2}$$
$$=\frac{9\sqrt{2}-3\sqrt{10}}{9-5}=\frac{9\sqrt{2}-3\sqrt{10}}{4}.$$

Applique cette méthode pour chaque nombre.

a. $\frac{3}{\sqrt{3}+1}$; **b.** $\frac{5}{\sqrt{6}+2}$; **c.** $\frac{4}{2-\sqrt{2}}$.

58 Encadrement et arrondi

1. a. À l'aide de la table des carrés page 187, détermine un encadrement de $\sqrt{1\,412}$ par deux nombres entiers consécutifs.

b. Donne l'arrondi à l'unité de ce nombre.

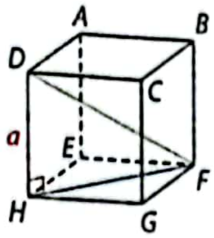
2. a. Grâce à la réponse à la question **1. a.**, donne un encadrement de $\sqrt{141\,200}$ par deux nombres entiers se terminant par 0 et distants d'une dizaine.

b. En procédant par tâtonnements, détermine un encadrement de $\sqrt{141\,200}$ par deux nombres entiers consécutifs.

Aide-toi de la réponse à la question **1. b.**

59 **Dans le cube**

L'arête du cube ci-contre a une longueur égale à a.



a. Calcule en fonction de a la longueur du segment $[HF]$.

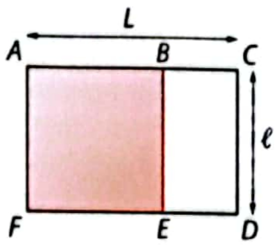
b. Utilise ce résultat pour calculer en fonction de a la longueur DF de la grande diagonale du cube.

60 **Carré à construire**

Fouda désire tracer un carré d'aire égale à 34 cm^2.
Le côté de ce carré doit donc mesurer $\sqrt{34}$ cm.
Fouda ne dispose pas de calculatrice ou de table qui pourrait lui donner une valeur décimale approchée de $\sqrt{34}$. Par contre, elle a l'idée d'utiliser l'égalité suivante : $34 = 25 + 9$.
Explique comment elle va s'y prendre et réalise la construction.

61 **Rectangle et nombre d'or**

Le rectangle $ACDF$ est constitué du carré $ABEF$ et du rectangle $BCDE$.
Il a la particularité de vérifier : $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{CD}{ED}$.



a. Justifie que : $\dfrac{L}{\ell} = \dfrac{\ell}{L-\ell}$.

b. L'égalité ci-dessus est vérifiée pour une valeur particulière du quotient $\dfrac{L}{\ell}$ appelée nombre d'or, égal à $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donne une valeur décimale du nombre d'or arrondie au centième.

c. Un rectangle qui respecte les proportions du nombre d'or est appelé rectangle d'or.
On considérait dans l'Antiquité que ces proportions étaient les plus harmonieuses qui soient, notamment pour des bâtiments rectangulaires.
On désire tracer un rectangle d'or de 10 cm de largeur. Combien doit mesurer sa longueur ? (Donne une valeur arrondie au millimètre près.)

62 **Le cerf-volant**

Ali a fabriqué un cerf-volant ayant la forme d'un losange à l'aide de deux bâtons, l'un de longueur $30\sqrt{3}$ cm et l'autre de longueur $50\sqrt{5}$ cm.
Calcule le périmètre de ce losange et l'aire du tissu nécessaire au cerf-volant.
Tu donneras le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des nombres entiers et b le plus petit possible.

S'entraîner au BEPC

63 **Des nombres entiers**

Les deux nombres N et P sont tels que :
$N = 2\sqrt{75} - \sqrt{108}$; $\quad P = 2\sqrt{27} - \sqrt{48}$.

a. Écris N et P sous la forme $a\sqrt{3}$ avec a entier.

b. Démontre que $N \times P$ et $\dfrac{N}{P}$ sont des nombres entiers.

c. Encadre N par deux nombres entiers consécutifs.

D'après BEPC

64 **Racine carrée et nombre premier**

Écris le réel $A = 3\sqrt{243} - 2\sqrt{3}$ sous la forme $b\sqrt{a}$, où a est un entier naturel premier. *BEPC 2010*

65 **Racines carrées et coordonnées**

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1\ ;\ 3)$, $B(3\ ;\ \sqrt{5})$, $C(2\ ;\ -3)$ et $D(-2\ ;\ -\sqrt{5})$.
I est le milieu de $[AC]$ et J est le milieu de $[BD]$.

1. Calcule les coordonnées respectives de I et J.

2. Déduis-en que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

3. a. Calcule AC et BD.

b. Déduis-en que $ABCD$ est un rectangle. *BEPC 2006*

66 **Vrai ou faux ?**

Recopie la lettre correspondant à l'égalité et dis si elle est vraie ou fausse.

a. $\sqrt{(-2)^2} = 2$;

b. $\sqrt{0{,}025} - \sqrt{6{,}4} = \dfrac{-3}{4\sqrt{10}}$;

c. $(2x-3)^2 = 4x^2 - 9$. *BEPC 2008*

67 **Questionnaire à choix multiples**

Recopie le numéro de la question et la lettre qui désigne la réponse juste.

1. Le réel $A = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$ est égal à :

a. $2-\sqrt{5}$; **b.** $2+\sqrt{5}$;
c. $-2+\sqrt{5}$; **d.** $-2-\sqrt{5}$.

2. On donne $B = \sqrt{3} + 2\sqrt{123}$.

a. $B^2 = 3 + 4\sqrt{123}$; **b.** $B^2 = 249$;
c. $B^2 = 495 + 4\sqrt{369}$; **d.** $B^2 = 495 - 4\sqrt{369}$.

3. On donne $C = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$. C est égal à :

a. $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} - \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$; **b.** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$;
c. $\sqrt{35} - 6$; **d.** $6 - \sqrt{35}$.

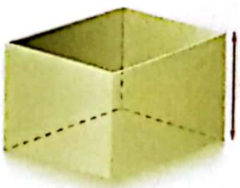
Extraits BEPC 2006-2007-2011

68 Les boîtes en carton

Pour vendre son riz sur le marché, Fua veut fabriquer des boîtes en carton en forme de pavés droits, avec une base carrée.

1. Il désire tout d'abord fabriquer quatre boîtes de contenances :
- 1 dm^3 (boîte *A*),
- 2 dm^3 (boîte *B*),
- 3 dm^3 (boîte *C*)
- 4 dm^3 (boîte *D*),

toutes les boîtes ayant une hauteur de 10 cm.



a. Convertis les contenances des quatre boîtes en cm^3.

b. Quelle doit être en cm^2 l'aire de la base carrée de chaque boîte ?

c. Calcule pour chaque boîte la longueur exacte, en cm, du côté de sa base carrée ?
(Écris les expressions avec radical sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit nombre entier naturel possible.)

d. Donne pour chaque boîte une valeur décimale de cette longueur de côté, arrondie si nécessaire au dixième de centimètre.

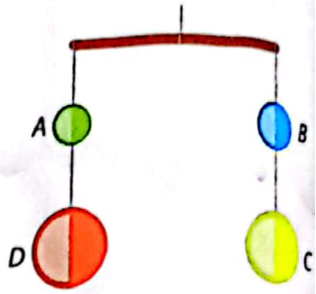
2. Fua désire fabriquer également quatre boîtes de hauteur égale à 20 cm et ayant les mêmes contenances que précédemment, à savoir :
- 1 dm^3 (boîte *E*),
- 2 dm^3 (boîte *F*),
- 3 dm^3 (boîte *G*),
- 4 dm^3 (boîte *H*).

a. Quelle doit être en cm^2 l'aire de la base carrée de chaque boîte ?

b. Calcule pour chaque boîte la longueur exacte, en cm, d'un côté de sa base carrée ?

c. Donne pour chaque boîte une valeur décimale de cette longueur de côté, arrondie si nécessaire au dixième de centimètre.

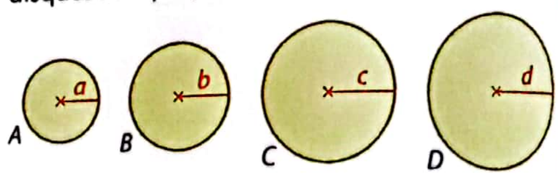
69 Le mobile



Pour décorer sa chambre, Asaph veut construire le mobile ci-contre. Il comprend une tige horizontale suspendue en son milieu avec, à chaque extrémité, deux disques de carton suspendus par un fil.

Pour que le mobile soit en équilibre, il faut que la masse accrochée à chaque extrémité soit la même. Pour cela, Asaph compte suspendre d'un côté un petit disque *A* et un disque *D* quatre fois plus lourd que *A*, et de l'autre côté un disque *B* et un disque *C* respectivement deux fois et trois fois plus lourds que *A*. Ainsi, la masse totale suspendue à chaque extrémité de la tige est égale à cinq fois la masse de *A*.

Comme Asaph va découper ses disques dans une seule et même plaque de carton, la masse des disques sera proportionnelle à leur aire.



1. On note $\mathcal{A}$ l'aire du petit disque *A*.
Exprime en fonction de $\mathcal{A}$ les aires des disques *B*, *C* et *D*.

2. On appelle *a*, *b*, *c* et *d* les rayons respectifs des disques *A*, *B*, *C* et *D*.

a. Exprime l'aire de *A* en fonction de *a* et l'aire de *B* en fonction de *b*. En écrivant que l'aire de *B* est le double de l'aire de *A*, exprime *b* en fonction de *a*.

b. Exprime de la même façon *c* en fonction de *a* ; puis *d* en fonction de *a*.

3. Asaph trace le cercle *A* en prenant : $a = 1$ cm. Combien doivent alors mesurer *b*, *c* et *d* en cm ? Donne leur valeur exacte puis, si nécessaire, une valeur décimale arrondie au dixième.

4. Pour réaliser un deuxième mobile, Asaph commence par tracer le cercle *D* de 6 cm de rayon. Combien devront alors mesurer, en cm, les rayons *a*, *b* et *c* des trois autres cercles ?
Donne leur valeur exacte puis, si nécessaire, une valeur décimale arrondie au dixième.

9 Nombres réels

Pour démarrer

Au marché

Prix des produits (en Francs CFA)	
Riz (1 kg)	de 280 à 320
Pomme de terre (1 kg)	de 240 à 280
Maquereau (1 kg)	de 550 à 650
Bœuf (1 kg)	de 2 500 à 2 900

Fatou souhaite tester de nouvelles recettes pour son restaurant.
Elle veut acheter : • 10 kg de riz, • 10 kg de pommes de terre, • 2 kg de bœuf, • 3 kg de maquereaux.
Les prix de ces différents produits sont indiqués ci-contre.
Pour chaque produit, le prix est variable en fonction de la qualité de la marchandise. Il est donc compris entre une valeur minimale pour une qualité moindre, et une valeur maximale pour la meilleure qualité. Fatou dispose de 14 000 F CFA et elle aimerait acheter pour chaque produit la meilleure qualité.

1 On note R, PDT, M, B les coûts respectifs du riz, des pommes de terre, des maquereaux et du bœuf, payés par Fatou.

a. Exprime le coût possible de chaque produit sous la forme d'un encadrement en utilisant les signes des inégalités. Par exemple pour le riz : $280 \leqslant R \leqslant 320$.

b. Déduis-en le coût total T des achats de Fatou sous la forme d'un encadrement.

c. Fatou a-t-elle assez d'argent pour acheter tous les produits de la meilleure qualité ?

d. Si elle décide de choisir le prix minimal pour chaque produit, combien d'argent lui restera-t-il après ses achats ?

2 En discutant avec le poissonnier puis avec le boucher, Fatou a obtenu 10 % de réduction sur le prix, au kg, du maquereau et 10 % de réduction sur le prix, au kg, du bœuf.

a. Exprime un nouvel encadrement pour le coût du maquereau, le coût du bœuf, puis le coût de la totalité des achats de Fatou.

b. Fatou peut-elle maintenant acheter tous les produits de la meilleure qualité ?

Les restaurateurs cherchent la meilleure qualité aux meilleurs prix !

Savoir-faire

À la fin de ce chapitre, tu sauras :
- comparer et ranger des nombres réels ;
- encadrer un nombre réel positif ;
- situer un nombre réel dans un intervalle de l'ensemble ℝ des nombres réels ;
- utiliser les propriétés des encadrements ;
- calculer la valeur absolue d'un nombre et l'utiliser dans divers problèmes.

1 Droite des nombres réels › Cours 1

La droite graduée ci-dessous représente l'ensemble des nombres.
À titre d'exemple, on y a placé les nombres $\frac{5}{2}$ et $-4{,}8$.

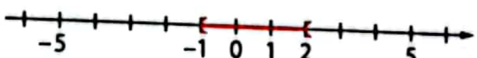
1 **a.** Reproduis cette droite et place sur celle-ci les nombres suivants le plus précisément possible :
6 ; -4 ; $3{,}8$; $-2{,}2$; $\frac{4}{5}$; $-\frac{13}{4}$; $\frac{16}{3}$; $-\frac{40}{7}$.
b. À quel ensemble, noté $\mathbb{Q}$, appartiennent tous les nombres que tu viens de placer ?
c. Parmi ces nombres, lesquels ne sont pas des nombres décimaux ?

2 **a.** Sur la droite précédente, place le plus précisément possible les nombres suivants : $\sqrt{2}$; $-\sqrt{3}$; $2\sqrt{5}$
Pour placer les nombres avec radicaux, reporte-toi à la table des racines carrées page 187.
Une approximation décimale de π est 3,14.
b. Comment appelle-t-on ces nombres, qui n'appartiennent pas à l'ensemble $\mathbb{Q}$?

3 *L'ensemble de tous les nombres, représentés par tous les points de la droite, est appelé ensemble des **nombres réels**. On le note* $\mathbb{R}$.
Complète la phrase ci-dessous qui définit cet ensemble :

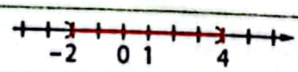
L'ensemble des nombres réels est constitué des nombres … et des nombres ….

2 Notion d'intervalle › Cours 2

1 Kondo met au défi son ami Meka de représenter toutes les valeurs possibles d'un nombre a qui correspond à la définition suivante :
« a est un nombre supérieur ou égal à −1, et inférieur à 2. »
Voici les deux réponses de Meka :
- avec des inégalités : $-1 \leqslant a < 2$
- sur la droite des nombres réels : 

a. De quelle façon Meka a-t-il indiqué sur la droite que −1 est une valeur qui peut être prise par a et que 2 ne fait pas partie des valeurs possibles pour a ?
De quelle façon est-ce indiqué dans l'intervalle indiqué dans la bulle ?
b. Donne cinq nombres qui se trouvent dans l'intervalle défini par Kondo et qui sont donc des valeurs possibles pour a.

2 Utilise le travail effectué à la question précédente pour compléter le tableau ci-dessous.

Signification	Avec des inégalités	Représentation sur la droite	Intervalle
a est un nombre strictement supérieur à 3 et inférieur ou égal à 5	…	…	…
…	$-3 < a < 4$	…	…
…	…		…
…	…	…	$[-2 ; 1]$

3 Règles sur les inégalités › Cours 3

Pour chaque cas ci-dessous, complète les inégalités par les signes < ou >, puis complète la règle que les exemples permettent de conjecturer par les expressions « *change* » ou « *ne change pas* ».

1 **a.** ① $5 \ldots 3$; $5+2 \ldots 3+2$ ② $-7 \ldots -4$; $-7+3 \ldots -4+3$ ③ $5 \ldots 3$; $5-2 \ldots 3-2$ ④ $-7 \ldots -4$; $-7-3 \ldots -4-3$

b. Règle :

Ajouter un même nombre relatif aux deux membres d'une inégalité … le sens de l'inégalité.

2 **a.** ① $4 \ldots 6$; $4 \times 5 \ldots 6 \times 5$ ② $4 \ldots 6$; $\frac{4}{2} \ldots \frac{6}{2}$ ③ $-6 \ldots -10$; $-6 \times 5 \ldots -10 \times 5$ ④ $-6 \ldots -10$; $\frac{-6}{3} \ldots \frac{-10}{3}$

b. Règle :

Multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif non nul … le sens de l'inégalité.

3 **a.** ① $4 \ldots 2$; $4 \times (-3) \ldots 2 \times (-3)$ ② $-8 \ldots -5$; $-8 \times (-3) \ldots -5 \times (-3)$ ③ $4 \ldots 2$; $\frac{4}{-2} \ldots \frac{2}{-2}$ ④ $-15 \ldots -25$; $\frac{-15}{-5} \ldots \frac{-25}{-5}$

b. Règle :

Multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif non nul … le sens de l'inégalité.

4 Comparaison de nombres › Cours 4

1 **a.** Complète le tableau ci-contre.
b. a et b désignent deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.
Utilise le tableau ci-contre pour comparer les nombres : • a^2 et b^2 ; • $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$; • $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

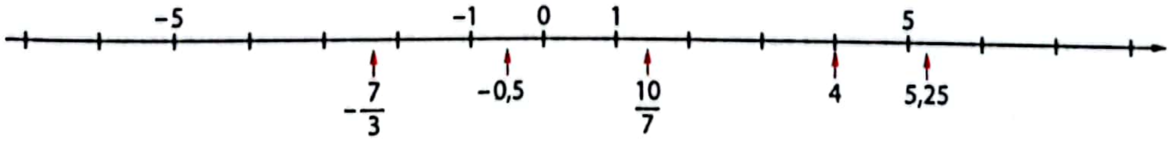
n	0,01	0,25	1	4	100
n^2	…	…	…	…	…
$\sqrt{n}$	…	…	…	…	…
$\frac{1}{n}$	…	…	…	…	…

2 **a.** Complète le tableau ci-contre.
b. a et b désignent deux nombres réels strictement négatifs tels que $a < b$.
Utilise le tableau ci-contre pour comparer les nombres : • a^2 et b^2 ; • $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

n	−10	−4	−1	−0,5	−0,2
n^2	…	…	…	…	…
$\frac{1}{n}$	…	…	…	…	…

5 Distance à zéro et valeur absolue › Cours 6

1 **a.** Indique quelle est la distance à zéro de chaque nombre repéré sur la droite numérique.



La distance à zéro d'un nombre a est appelée ***valeur absolue de a****. Elle se note* | a |.

b. Quel est le signe de la valeur absolue d'un nombre quelconque ?

2 Donne la valeur absolue des nombres suivants : -6 ; 2 ; $-\frac{5}{6}$; $\sqrt{7}$; $-\sqrt{5}$; $4{,}87$.

3 **a.** Compare les valeurs absolues de −4 et de 4, puis les valeurs absolues de −2,1 et de 2,1.
b. Que peux-tu dire des valeurs absolues de deux nombres opposés ?

9 Cours

1 Ensemble des nombres réels

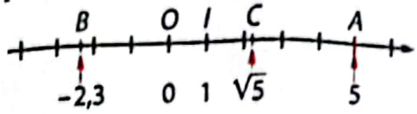
Définition Un nombre qui n'est pas rationnel est appelé nombre irrationnel.

Exemples : 5 et $-\frac{7}{3}$ sont des nombres rationnels. $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel (il ne peut s'écrire sous forme de fraction).

Définition L'ensemble formé des nombres rationnels et des nombres irrationnels est appelé ensemble des nombres réels. Il est noté $\mathbb{R}$.

Représentation L'ensemble des nombres réels peut être représenté par une droite graduée appelée droite (ou axe) des nombres réels, munie d'une origine représentant le zéro et d'une longueur unité. Chaque point de cette droite représente un nombre réel.

Exemples : Le point A représente le nombre 5 ; le point B le nombre $-2,3$; le point C le nombre $\sqrt{5}$.



2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définitions Un intervalle de $\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres réels compris entre deux valeurs a et b, appelées les deux bornes de cet intervalle.

Notation et représentation
a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. L'intervalle entre les nombres a et b se note avec des crochets. L'orientation des crochets indique si chaque borne est incluse ou non dans l'intervalle.

Intervalle	Bornes	x appartient à cet intervalle s'écrit :	Représentation sur la droite des nombres réels
$[a\,;b]$	a et b compris	$a \leqslant x \leqslant b$ ou $x \in [a\,;b]$	a b
$[a\,;b[$	a compris, b exclu	$a \leqslant x < b$ ou $x \in [a\,;b[$	a b
$]a\,;b]$	a exclu, b compris	$a < x \leqslant b$ ou $x \in]a\,;b]$	a b
$]a\,;b[$	a et b exclus	$a < x < b$ ou $x \in]a\,;b[$	a b
$]\leftarrow;c]$	c compris	$x \leqslant c$ ou $x \in]\leftarrow;c]$	c
$]\leftarrow;c[$	c exclu	$x < c$ ou $x \in]\leftarrow;c[$	c
$[c\,;\rightarrow[$	c compris	$x \geqslant c$ ou $x \in [c\,;\rightarrow[$	c
$]c\,;\rightarrow[$	c exclu	$x > c$ ou $x \in]c\,;\rightarrow[$	c

Remarque : Le symbole « $\in$ » signifie « appartient à ».

3 Propriétés des inégalités

Propriétés Les lettres a, b, c et d désignent des nombres réels. $c \neq 0$.

① Ajouter ou soustraire le même nombre à chaque membre d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité. Si $a < b$, alors : $a+c < b+c$ et $a-c < b-c$.

② Multiplier ou diviser chaque membre d'une inégalité par un même nombre strictement positif ne change pas le sens de l'inégalité. Si $a < b$ et $c > 0$, alors : $ac < bc$ et $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

③ Multiplier ou diviser chaque membre d'une inégalité par un même nombre strictement négatif change le sens de l'inégalité. Si $a < b$ et $c < 0$, alors : $ac > bc$ et $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

④ En ajoutant membre à membre deux inégalités de même sens, on obtient une inégalité de même sens. Si $a < b$ et $c < d$, alors : $a+c < b+d$.

4 Comparaison de nombres réels

Propriétés *a* et *b* désignent des nombres réels strictement positifs.

- Si $a < b$, alors $a^2 < b^2$.
- Si $a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- Si $a < b$, alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

Propriétés *a* et *b* désignent des nombres réels strictement négatifs.

- Si $a < b$, alors $a^2 > b^2$.
- Si $a < b$, alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

5 Principes d'encadrement

a D'une somme et d'une différence

a, b, c, d, x et y désignent des nombres réels tels que : $a < x < b$ et $c < y < d$.

Encadrer la somme $x + y$

L'encadrement de la somme $x + y$ est obtenu en effectuant, membre à membre, la somme des encadrements de x et de y.

$$\begin{aligned} a &< x < b \\ c &< y < d \\ a + c &< x + y < b + d \end{aligned} \quad (+)$$

Exemple : $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$
$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$
$1{,}4 + 1{,}7 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1{,}5 + 1{,}8$
donc $3{,}1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}3$.

Encadrer la différence $x - y$

L'encadrement de la différence $x - y$ est obtenu en effectuant, membre à membre, la somme des encadrements de x et de $-y$.

$$\begin{aligned} a &< x < b \\ -d &< -y < -c \\ a - d &< x - y < b - c \end{aligned} \quad (+)$$

Exemple : $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$
$-1{,}8 < -\sqrt{3} < -1{,}7$
$1{,}4 - 1{,}8 < \sqrt{2} - \sqrt{3} < 1{,}5 - 1{,}7$
donc $-0{,}4 < \sqrt{2} - \sqrt{3} < -0{,}2$.

b D'un produit et d'un quotient

a, b, c, d, x et y désignent des nombres réels **strictement positifs** tels que : $a < x < b$ et $c < y < d$.

Encadrer le produit $x \times y$

L'encadrement du produit $x \times y$ est obtenu en effectuant, membre à membre, le produit des encadrements de x et de y.

$$\begin{aligned} a &< x < b \\ c &< y < d \\ a \times c &< x \times y < b \times d \end{aligned} \quad (\times)$$

Exemple : $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$
$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$
donc
$1{,}4 \times 1{,}7 < \sqrt{2} \times \sqrt{3} < 1{,}5 \times 1{,}8$
$2{,}38 < \sqrt{6} < 2{,}7$.

Encadrer le quotient $\dfrac{x}{y}$

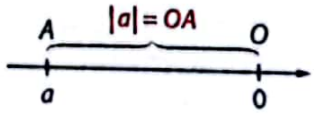
L'encadrement du quotient $\dfrac{x}{y}$ est obtenu en effectuant, membre à membre, le produit des encadrements de x et de $\dfrac{1}{y}$.

$$\begin{aligned} a &< x < b \\ \frac{1}{d} &< \frac{1}{y} < \frac{1}{c} \\ \frac{a}{d} &< \frac{x}{y} < \frac{b}{c} \end{aligned} \quad (\times)$$

Exemple : $3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2$
$\dfrac{1}{1{,}5} < \dfrac{1}{\sqrt{2}} < \dfrac{1}{1{,}4}$
donc $\dfrac{3{,}1}{1{,}5} < \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} < \dfrac{3{,}2}{1{,}4}$.

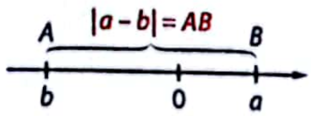
6 Valeur absolue

Définition La valeur absolue d'un nombre a est la distance à zéro de ce nombre. Elle se note $|a|$.



Propriétés
- La valeur absolue d'un nombre a est toujours positive : $|a| \geqslant 0$.
- Un nombre a et son opposé $-a$ ont même valeur absolue : $|a| = |-a|$.

Définition La distance entre deux nombres réels a et b est la valeur absolue de leur différence.
$AB = |b - a| = BA = |a - b|$.



Exemple : La distance de 3 à -4 est $|-4 - 3| = |-7| = 7$.

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à comparer des nombres réels

Énoncé

1. Compare p et q en calculant leur différence : $p=(7-\sqrt{2})^2$ et $q=13\,(4-\sqrt{2})$.

2. Compare p et q en comparant leurs carrés : **a.** $p=\dfrac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$ et $q=2\sqrt{3}$; **b.** $p=-\sqrt{11}$ et $q=-2\sqrt{3}$.

3. Compare p et q en comparant leurs inverses : $p=\dfrac{1}{75{,}5}$ et $q=\dfrac{3}{224}$.

Solution

1. $p=(7-\sqrt{2})^2=7^2-2\times7\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$
$=49-14\sqrt{2}+2=51-14\sqrt{2}$;
$p-q=51-14\sqrt{2}-13(4-\sqrt{2})$
$=51-14\sqrt{2}-52+13\sqrt{2}=-1-\sqrt{2}$.
Ainsi, $p-q<0$, donc $p<q$.

• Je développe p en utilisant l'identité remarquable : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
• J'étudie ensuite le signe de la différence $p-q$: si $p-q<0$, alors $p<q$ et si $p-q>0$, alors $p>q$.

2. a. $p^2=\left(\dfrac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{9\times7}{5}=\dfrac{63}{5}$; $q^2=(2\sqrt{3})^2=4\times3=12=\dfrac{60}{5}$.
$\dfrac{63}{5}>\dfrac{60}{5}$; donc : $p^2>q^2$. Comme p et q sont positifs : $p>q$.
b. $p^2=(-\sqrt{11})^2=11$; $q^2=(-2\sqrt{3})^2=12$.
$11<12$; donc $p^2<q^2$. Comme p et q sont négatifs : $p>q$.

• Je calcule p^2 et q^2, puis je les compare.
• Si p et q sont positifs, alors ils sont rangés dans le même ordre que p^2 et q^2 ; s'ils sont négatifs, alors ils sont rangés dans le sens contraire (propriétés du cours 4).

3. $\dfrac{1}{p}=75{,}5$; $\dfrac{1}{q}=\dfrac{224}{3}=\dfrac{222+2}{3}=\dfrac{222}{3}+\dfrac{2}{3}=74+\dfrac{2}{3}$.
Or, $75{,}5>75>74+\dfrac{2}{3}$; donc : $\dfrac{1}{p}>\dfrac{1}{q}$ et $p<q$.

• Je calcule $\dfrac{1}{p}$ et $\dfrac{1}{q}$, puis je les compare.
• Si p et q sont de signes contraires, la réponse est évidente ; sinon ils sont rangés dans le sens contraire à $\dfrac{1}{p}$ et $\dfrac{1}{q}$.

S'exercer

Pour les exercices 1 à 3, compare les nombres p et q en calculant leur différence.

1 **a.** $p=7^2-12$ et $q=37+\sqrt{2}$;
b. $p=2\,(\sqrt{3}+1)$ et $q=\dfrac{9}{4}+2\sqrt{3}$.

2 **a.** $p=\sqrt{7}\,(\sqrt{5}-1)$ et $q=\sqrt{35}-2\sqrt{7}$;
b. $p=(2-\sqrt{7})^2$ et $q=3\,(4-\sqrt{7})$.

3 **a.** $p=2+\sqrt{3}+\sqrt{2}$ et $q=2\,(\sqrt{2}+1)$;
b. $p=8+\sqrt{7}$ et $q=2(\sqrt{7}+3)$.

Pour les exercices 4 à 7, compare les nombres p et q en comparant leurs carrés.

4 **a.** $p=2\sqrt{7}$ et $q=3\sqrt{3}$; **b.** $p=12\sqrt{6}$ et $q=3\sqrt{10}$.

5 **a.** $p=\sqrt{\dfrac{10}{7}}$ et $q=\sqrt{\dfrac{4}{3}}$; **b.** $p=\sqrt{\dfrac{18}{11}}$ et $q=\sqrt{1{,}7}$.

6 **a.** $p=-7$ et $q=-2\sqrt{11}$;
b. $p=-2\sqrt{13}$ et $q=-\sqrt{6}\times\sqrt{8}$.

7 **a.** $p=-9$ et $q=-4\sqrt{6}$; **b.** $p=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}$ et $q=\dfrac{-3}{\sqrt{7}}$.

Pour les exercices 8 à 11, compare les nombres p et q en comparant leurs inverses.

8 **a.** $p=\dfrac{1}{89}$ et $q=\dfrac{2}{181}$; **b.** $p=\dfrac{1}{14{,}5}$ et $q=\dfrac{3}{46}$.

9 **a.** $p=\dfrac{2}{17}$ et $q=\dfrac{3}{25}$; **b.** $p=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ et $q=\dfrac{1}{3}$.

10 **a.** $p=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ et $q=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$; **b.** $p=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $q=\dfrac{2}{\sqrt{18}}$.

11 **a.** $p=\dfrac{-1}{\sqrt{13}}$ et $q=\dfrac{-1}{2\sqrt{3}}$; **b.** $p=\dfrac{-1}{2\sqrt{5}}$ et $q=\dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$.

12 Range les nombres suivants dans l'ordre décroissant : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

13 a et b sont deux nombres réels tels que $a<b$.
Compare les nombres suivants :
a. $a+\sqrt{2}$ et $b+\sqrt{2}$;
b. $a-\sqrt{3}$ et $b-\sqrt{3}$;
c. $a\times\pi$ et $b\times\pi$;
d. $\dfrac{a}{-5}$ et $\dfrac{b}{-5}$.

Pense aux propriétés du cours 3.

2 Apprendre à encadrer des nombres réels

Énoncé

1. a. Donne un encadrement de $\sqrt{23}$ par deux nombres entiers consécutifs.

b. Déduis-en un encadrement du nombre $5-4\sqrt{23}$ par deux nombres entiers.

c. Déduis du **a.** un encadrement de $\dfrac{1}{\sqrt{23}}$ par deux nombres décimaux ayant deux chiffres après la virgule.

2. On donne $\sqrt{3} \in \,]1{,}7\,;1{,}8[$ et $\sqrt{5} \in \,]2{,}2\,;2{,}3[$.

a. Donne un encadrement du nombre $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ par deux nombres décimaux ayant un chiffre après la virgule.

b. Montre que $\sqrt{15} \in \,]3{,}7\,;4{,}2[$.

Solution

1. a. $16 < 23 < 25$ donc : $\sqrt{16} < \sqrt{23} < \sqrt{25}$ et $4 < \sqrt{23} < 5$.

b. $4 < \sqrt{23} < 5$. En multipliant par 4 : $16 < 4\sqrt{23} < 20$.
En multipliant par -1 : $-20 < -4\sqrt{23} < -16$.
En ajoutant 5 : $-15 < 5-4\sqrt{23} < -11$.

c. $4 < \sqrt{23} < 5$. En prenant les inverses : $\dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{\sqrt{23}} < \dfrac{1}{4}$.
Donc : $0{,}20 < \dfrac{1}{\sqrt{23}} < 0{,}25$.

2. a. $\sqrt{3} \in \,]1{,}7\,;1{,}8]$ signifie que $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$ donc $-1{,}8 < -\sqrt{3} < -1{,}7$.
De plus : $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$. Ainsi, en additionnant membre à membre, on obtient : $0{,}4 < \sqrt{5}-\sqrt{3} < 0{,}6$.

b. On remarque que $\sqrt{15} = \sqrt{3} \times \sqrt{5}$. En multipliant membre à membre, on obtient : $3{,}74 < \sqrt{3} \times \sqrt{5} < 4{,}14$, d'où $3{,}7 < 3{,}74 < \sqrt{15} < 4{,}14 < 4{,}2$.
Ainsi, $\sqrt{15} \in \,]3{,}7\,;4{,}2[$.

- Si nécessaire, je transforme les intervalles donnés en encadrements.
- J'utilise les principes d'encadrement du cours 5.

S'exercer

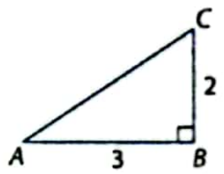
14 **a.** Donne un encadrement de $\sqrt{32}$ par deux nombres entiers consécutifs.
b. Utilise ce résultat pour trouver un encadrement des nombres A et B par deux nombres entiers.
$A = 6\sqrt{32}-25$ et $B = 42-7\sqrt{32}$.

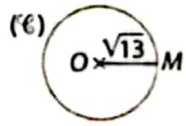
15 **a.** Encadre $\sqrt{11}$ par deux nombres entiers consécutifs.
b. Trouve un encadrement de $\dfrac{1}{\sqrt{11}}$ par deux nombres décimaux ayant deux chiffres après la virgule.

16 **a.** Encadre $\sqrt{7}$ et $\sqrt{17}$ par deux nombres entiers consécutifs.
b. Donne un encadrement de $\sqrt{\dfrac{17}{7}}$ par deux nombres fractionnaires.

17 On donne : $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ et $2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$.
Donne un encadrement :
a. du nombre $\sqrt{6}+\sqrt{2}$;
b. du nombre $\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

18 On donne
$3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}7$
et $3{,}1 < \pi < 3{,}2$.
L'unité est le cm.
Donne un encadrement du périmètre du triangle ABC ; puis du cercle ($\mathscr{C}$) de rayon OM ci-contre.





19 On donne : $-2{,}2 < x < 1{,}4$ et $-0{,}6 < y < 3{,}2$.
a. Parmi les valeurs suivantes, quelles sont celles que peut prendre le nombre $x+y$?
0 ; $-1{,}7$; 1,5 ; 1,8 ; 4,6 ; -3.
b. Parmi les valeurs suivantes, quelles sont celles que peut prendre le nombre $x-y$?
-6 ; $-3{,}2$; 0 ; 2,4 ; 0,6 ; 3,2.

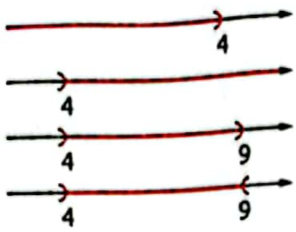
20 On donne : $x \in \,]0{,}3\,;0{,}5[$ et $y \in \,]1{,}2\,;2{,}1[$.
a. Montre que : $0{,}36 < xy < 1{,}05$.
b. Montre que : $\dfrac{x}{y} \in \,]4\,;4{,}2[$.

Nombres réels et intervalles

21 Dessine la droite des nombres réels graduée de -5 à 5 et places-y approximativement les nombres suivants.
$\sqrt{10}$; $-\sqrt{5}$; $-\frac{17}{5}$; $\sqrt{18}$; $-\sqrt{2}$; $3{,}4$; $-\frac{4}{3}$.
Tu peux te reporter si nécessaire à la table des racines carrées page 187.

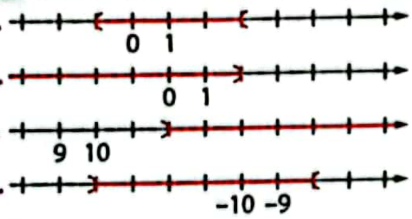
22 Associe chaque intervalle dessiné à l'inégalité correspondante.
① $4 < x \leqslant 9$
② $4 < x < 9$
③ $x \leqslant 4$
④ $x > 4$

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ



23 Représente chaque cas sur la droite des nombres réels.
a. $x > -2$; b. $-2 \leqslant x < 6$; c. $x \leqslant 3$;
d. $-3{,}5 \leqslant x \leqslant -0{,}5$; e. $1 < x < 4$; f. $x \geqslant 0$.

24 Écris avec des crochets chaque intervalle dessiné.
a. b. c. d.



25 Représente chaque intervalle sur la droite des nombres réels.
a. $[2 ; 4[$; b. $]-4 ; -1]$; c. $]\leftarrow ; 2{,}5]$;
d. $]3 ; \rightarrow[$; e. $[-3 ; -1{,}5]$; f. $]-1 ; 1[$.

26 Propose trois valeurs possibles pour x.
a. $x \in]-2 ; 6[$; b. $x \in [-3 ; 1[$; c. $x \in]10^4 ; \rightarrow[$;
d. $3 \leqslant x < 6$; e. $-4 < x < -3$; f. $-0{,}5 < x < 0$.

27 I et J sont deux intervalles. L'ensemble des nombres situés dans I **et** dans J est noté $I \cap J$ (on lit « I inter J »). Dans chacun des cas, représente sur une même droite des nombres réels les intervalles I, J ; puis $I \cap J$.
a. $I = [-2 ; 5[$ et $J =]0 ; 8]$; b. $I = [-3 ; \rightarrow[$ et $J =]-5 ; 2]$.

28 I et J sont deux intervalles. L'ensemble des nombres situés dans I **ou** dans J est noté $I \cup J$ (on lit « I union J »). Dans chacun des cas, représente sur une même droite des nombres réels les intervalles I, J ; puis $I \cup J$.
a. $I = [-4 ; 1[$ et $J =]-6 ; 0]$; b. $I = [5 ; \rightarrow[$ et $J =]-5 ; 6]$.

29 Le nombre réel x est tel que : $x \geqslant 3$.
Exprime l'intervalle dans lequel se trouve chaque nombre ci-dessous par une inégalité.
a. $x + 4$; b. $x - 6$; c. $5x$; d. $3x - 4$; e. $\frac{x}{4}$; f. $-x$.

30 Le nombre réel y est tel que : $y < -2$.
Exprime l'intervalle dans lequel se trouve chaque nombre ci-dessous par une inégalité.
a. $7y$; b. -2 c. $3y - 5$; d. $-y + 7$; e. $\frac{1}{y}$; f. $\frac{-2}{y}$.

Comparaison de nombres

Pour les exercices 31 à 33, compare les deux nombres réels a et b.

31 a. $a = 6^2 - 4\sqrt{3}$ et $b = 4(8 - \sqrt{3})$;
b. $a = \frac{19}{5}$ et $b = \sqrt{4}\,(1 + \sqrt{4})$;
c. $a = 2\sqrt{5}$ et $b = 4\sqrt{2}$.

32 a. $a = -10$ et $b = -3\sqrt{11}$;
b. $a = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ et $b = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}}$; c. $a = \frac{1}{12{,}5}$ et $b = \frac{2}{24}$.

33 a. $a = 4\sqrt{5}$ et $b = 2(1 + \sqrt{5})$;
b. $a = 6 - 2\sqrt{3}$ et $b = 4 - \sqrt{3}$;
c. $a = -\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ et $b = -2$;

34 Trouve le signe de chaque nombre.
$A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{7}$;
$B = 7\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$;
$C = 2\sqrt{15} - 3\sqrt{6}$.

Pour A, compare d'abord $4\sqrt{3}$ et $2\sqrt{7}$ en comparant leurs carrés.

35 Dans chacun des cas, compare les nombres et range-les dans l'ordre croissant.
a. $\sqrt{11}$; $\sqrt{6}$; $\frac{7}{3}$; $2\sqrt{3}$; $\frac{7}{2}$; 3.
b. $-\sqrt{7}$; $-8{,}5$; $-\frac{8}{3}$; $-2\sqrt{2}$; $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$; -3.
c. $\frac{1}{\sqrt{11}}$; $\frac{1}{2\sqrt{3}}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$.

36 Indique les nombres de la liste qui appartiennent à l'intervalle $[-2 ; 2[$.
$-\sqrt{3}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^2$; $-\frac{15}{7}$; $2\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sqrt{4}$; $-\sqrt{6}$.

Encadrements

37 a. Encadre $\sqrt{18}$ par deux nombres entiers consécutifs.
b. Déduis-en un encadrement de $5\sqrt{18}+5$.

38 a. Encadre $\sqrt{29}$ par deux nombres entiers consécutifs.
b. Déduis-en un encadrement de $\dfrac{2}{\sqrt{29}}$ par deux nombres décimaux ayant un chiffre après la virgule.

39 a. Encadre $\sqrt{75}$ par deux nombres entiers consécutifs.
b. Déduis-en un encadrement de $\dfrac{5}{\sqrt{75}}$ par deux nombres fractionnaires.
c. Écris ce même encadrement avec deux nombres décimaux ayant un chiffre après la virgule.
d. En considérant l'égalité : $5=\sqrt{25}$, déduis de tes calculs un encadrement du nombre $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

40 On donne : $3{,}87<\sqrt{15}<3{,}88$ et $1{,}73<\sqrt{3}<1{,}74$.
Encadre les nombres suivants par deux nombres décimaux ayant deux chiffres après la virgule.
• $A=\sqrt{3}+\sqrt{15}$ • $B=\sqrt{15}\times\sqrt{3}$ • $C=\sqrt{5}$

41 On donne : $2{,}64<\sqrt{7}<2{,}65$ et $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$.
Encadre les nombres suivants par deux nombres décimaux ayant deux chiffres après la virgule.
• $A=\sqrt{7}-\sqrt{2}$ • $B=\sqrt{14}$ • $C=\sqrt{3{,}5}$

42 x et y sont deux nombres réels tels que :
$3<x<5$ et $\sqrt{2}<y<2$.
Écris un encadrement de chacun des nombres :
• $x+y$ • $x-y$ • $2x+3y$ • $x\times y$ • $\dfrac{x}{y}$ • $\dfrac{2x}{3y}$

43 x et y sont deux nombres réels tels que :
$\sqrt{2}<x<4$ et $\sqrt{3}<y<5$.
a. Écris un encadrement de x^2 ; puis de y^2.
b. Déduis-en un encadrement pour x^2-y^2.

44 x et y sont deux nombres réels tels que :
$-3{,}5<x<-0{,}5$ et $2<y<4{,}5$.
a. Écris un encadrement du réel $m=x+2y$.
b. Écris un encadrement du réel $n=x-2y$.
c. Écris un encadrement du réel $p=m-n$.

45 Grâce à son commerce, Ali gagne entre 60 000 et 70 000 F CFA par semaine. Chaque semaine, il dépense entre 25 000 et 30 000 F CFA pour ses achats de nourriture et entre 15 000 et 20 000 F CFA pour ses autres dépenses.
Donne un encadrement de la somme d'argent qu'il reste à Ali à la fin de la semaine.

46 Le jardin rectangulaire de Noah a une superficie comprise entre 850 et 900 m^2.
Sa longueur est comprise entre 45 et 50 m.
Entre quelles valeurs est comprise la largeur du jardin de Noah ?

Valeur absolue

47 Dis si chaque affirmation est vraie ou fausse.
a. Un nombre et son opposé ont des valeurs absolues opposées.
b. Un nombre et son inverse ont la même valeur absolue.
c. Une valeur absolue n'est jamais négative.
d. Si a et b sont deux nombres, alors $|a-b|=|b-a|$.

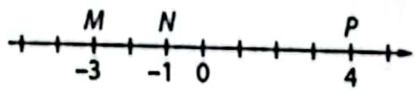
48 Donne la valeur absolue de chaque nombre.
a. $-0{,}1$; b. $\dfrac{1}{3}$; c. $0{,}03$; d. 0 ; e. $-\sqrt{3}$; f. $\sqrt{7}$.

49 Donne la valeur absolue de chaque nombre.
a. $1-\sqrt{3}$; b. $\sqrt{5}-2$;
c. $\sqrt{7}-3$; d. $\sqrt{2}-\sqrt{3}$;
e. $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$; f. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Étudie le signe de chaque nombre avant de déterminer sa valeur absolue.

50 Écris chaque expression sans valeur absolue, puis simplifie.
$A=|6-2|+|4-5|-|7-3|$;
$B=|2-\sqrt{3}|+|2-\sqrt{5}|-|\sqrt{3}-\sqrt{5}|$;
$C=|5(3-2\sqrt{5})|+2|4-\sqrt{5}|$;
$D=|7(2-\sqrt{5})|-|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}|$.

51 Les trois nombres -3, -1 et 4 sont représentés par les points M, N et P sur la droite des nombres réels.



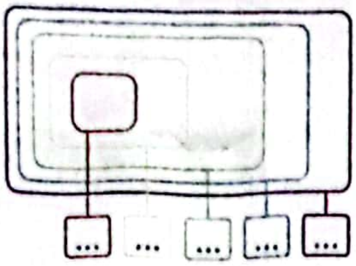
a. Lis sur cette droite la distance entre les nombres -3 et 4. Exprime cette distance en utilisant des valeurs absolues.
b. Reprends la question a. avec les distances entre les nombres -3 et -1 ; puis entre les nombres -1 et 4.

52 Calcule dans chaque cas la distance entre les deux nombres.
a. -3 et 5 ; b. -6 et -1 ; c. 4 et -6 ;
d. $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{5}{2}$; e. $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{2}$; f. $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Bien comprendre mieux rédiger

53 Les ensembles de nombres

Le schéma ci-contre représente les cinq ensembles de nombres qui sont désignés par les lettres (dans le désordre) : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.



a. Rappelle le nom de chaque ensemble de nombres.

b. Reproduis le schéma et inscris chaque lettre dans la bonne case.

c. Sur ton schéma, place les nombres de la liste en les inscrivant dans le cadre le plus petit possible.

$4{,}25$; -8 ; $\sqrt{3}$; $\frac{5}{3}$; 0 ; $\frac{18}{3}$; $-\frac{4}{10}$; π.

d. Propose un autre nombre pour chaque cadre.

e. Sur ton schéma, colorie la partie qui correspond aux nombres irrationnels.

54 Crochets et intervalles

Pour chaque intervalle défini par l'inégalité, une seule écriture avec crochets est correcte. Trouve laquelle et explique pourquoi les autres sont incorrectes.

1. $x < 4$:
a. $x \in]\leftarrow ; 4[$; **b.** $x \in [\leftarrow ; 4]$; **c.** $x \in]4 ; \rightarrow]$.

2. $x \geqslant -2$:
a. $x \in]-2 ; \rightarrow[$; **b.** $x \in]\leftarrow ; -2]$; **c.** $x \in [-2 ; \rightarrow[$.

3. $x > 6$:
a. $x \in]6 ; \rightarrow]$; **b.** $x \in [6 ; \rightarrow[$; **c.** $x \in]\leftarrow ; 6[$.

4. $-2 < x \leqslant 3$:
a. $x \in]-2 ; 3[$; **b.** $x \in]-2 ; 3]$; **c.** $x \in [-2 ; 3]$.

5. $4 > x \geqslant 3$:
a. $x \in]3 ; 4[$; **b.** $x \in]4 ; 3]$; **c.** $x \in [3 ; 4[$.

55 Chercher l'erreur

Dans son devoir de mathématiques, Kamga devait comparer les nombres p et q, avec $p = 2\sqrt{2} - 3$ et $q = \sqrt{2} - 6$.

Pour comparer p et q, je compare leurs carrés.

$p^2 = (2\sqrt{2} - 3)^2 = (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{2} + 3^2$

$p^2 = 8 - 12\sqrt{2} + 9 = 17 - 12\sqrt{2}$

$q^2 = (\sqrt{2} - 6)^2 = (\sqrt{2})^2 - 2 \times 6 \times \sqrt{2} + 6^2$

$q^2 = 2 - 12\sqrt{2} + 36 = 38 - 12\sqrt{2}$

$q^2 > p^2$ donc $q > p$.

a. Explique pourquoi Kamga s'est trompé.

b. Propose une rédaction correcte.

56 Acquérir les bons réflexes

Afin de préparer une interrogation, Léa a préparé une fiche de méthodes dont voici un extrait.

Pour comparer deux nombres, je peux penser à :
- étudier le signe de leur différence ;
- comparer leurs carrés ;
- comparer leurs inverses.

Utilise une des méthodes indiquées par Léa pour comparer les nombres p et q dans les cas suivants.

a. $p = (6 - \sqrt{3})^2$ et $q = 12(3 - \sqrt{3})$;

b. $p = 5\sqrt{7}$ et $q = 7\sqrt{5}$;

c. $p = \dfrac{1}{82{,}5}$ et $q = \dfrac{7}{574}$.

57 Bien comprendre un énoncé

La longueur L d'un rectangle est 10 cm, à 2 cm près ; et sa largeur ℓ est 4 cm à 1 cm près.

1. Complète les inégalités $8 \leqslant L \leqslant \ldots$ et $\ldots \leqslant \ell \leqslant \ldots$.

2. Déduis-en un encadrement du périmètre ; puis de l'aire de ce rectangle.

58 Comprendre un raisonnement

x désigne un nombre réel tel que : $x \geqslant -2$.

Observe le raisonnement ci-dessous qui montre comment déterminer l'intervalle dans lequel se trouve le nombre $\dfrac{-2x}{7} + 6$.

$x \geqslant -2$.

Je multiplie chaque membre par $\frac{2}{7}$ soit $\frac{2x}{7} \geqslant -\frac{4}{7}$.

Je multiplie chaque membre par -1 soit $-\frac{2x}{7} \leqslant \frac{4}{7}$.

J'ajoute 6 à chaque membre soit $-\frac{2x}{7} + 6 \leqslant \frac{4}{7} + 6$.

Donc $-\frac{2x}{7} + 6 \leqslant \frac{46}{7}$.

Adopte ce raisonnement pour les nombres suivants.

a. $2x + 3$; **b.** $-x + 2$; **c.** $-8x$;

d. $3x - \sqrt{3}$; **e.** $-\dfrac{x}{5}$; **f.** $-\dfrac{5x}{3} + \dfrac{3}{2}$.

59 Bien choisir le symbole d'inégalité

x et y sont deux nombres réels tels que :

$$2 \leqslant x < 5 \text{ et } 1 < y \leqslant 7.$$

Explique pourquoi chaque encadrement ci-dessous est faux et corrige-le.

a. $3 \leqslant x + y \leqslant 12$; **b.** $2 < xy \leqslant 35$;

c. $1 < x - y < -2$; **d.** $\dfrac{1}{5} < \dfrac{y}{x} < \dfrac{7}{2}$.

60 Intervalles et ensembles de nombres

On note : $J =]-2\,;6[$ et $K = [-5;\,1]$.

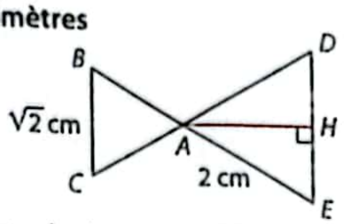
1. Représente ces deux intervalles sur la droite des nombres réels.
2. Écris avec des inégalités l'ensemble de nombres auquel appartient le nombre réel x qui vérifie :

a. $x \in J$ et $x \in K$; **b.** $x \in J$ ou $x \in K$; **c.** $x \in J$ et $x \notin K$;
d. $x \notin J$ et $x \in K$; **e.** $x \notin J$ et $x \notin K$; **f.** $x \in J$ ou $x \notin K$.

$\in$ signifie « appartient à » ;
$\notin$ signifie « n'appartient pas à ».

61 Comparer des périmètres

Les triangles ABC et ADE ci-contre sont équilatéraux. H est le milieu du segment $[DE]$.



1. Calcule la valeur exacte des longueurs HE et AH.
2. Lequel des triangles ABC et AHE possède le plus grand périmètre ?

62 Encadrements et comparaisons

On donne les nombres suivants :
$a = 7\sqrt{11} + 4\,;\ b = 5\sqrt{19}\,;\ c = 6\sqrt{13} + 10\,;\ d = 9\sqrt{17} - 3.$

a. Sans utiliser de table ni de calculatrice, donne un encadrement de a, b, c, puis d entre deux nombres entiers.

b. Quels nombres peuvent être comparés et rangés grâce à ces encadrements ?

c. On donne maintenant les encadrements suivants :
$3{,}3 < \sqrt{11} < 3{,}4$; $3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}7$;
$4{,}1 < \sqrt{17} < 4{,}2$; $4{,}3 < \sqrt{19} < 4{,}4$.
Classe dans l'ordre croissant les nombres a, b, c et d.

63 La clôture

Yene possède un terrain rectangulaire dont la longueur mesure 49 m à 1 m près, et la largeur 33 m à 1 m près. Il veut entourer son terrain d'une clôture, tout en laissant trois ouvertures de largeur comprise entre 3 m et 4 m.

a. Donne un encadrement du périmètre du terrain.

b. Donne un encadrement de la longueur de clôture nécessaire.

c. Pour réaliser sa clôture, Yene va utiliser des panneaux de bois mis bout à bout. Chaque panneau mesure entre 4 m et 5 m. Donne un encadrement du nombre n de panneaux nécessaires à la réalisation de la clôture.

64 Valeurs absolues

Calcule la valeur exacte de chaque expression.

a. $|2\sqrt{2} - 3| + |2 - \sqrt{2}|$; **b.** $|1 - \sqrt{3}| - |2\sqrt{3} - 5|$;
c. $|3\sqrt{2} - 4| + |1 - \sqrt{2}|$; **d.** $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |2\sqrt{2} - \sqrt{3}|$.

S'entraîner au BEPC

65 Simplification de racines carrées

a. Calcule le nombre $A = \dfrac{(\sqrt{8} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{8} - \sqrt{3})^2}{4}$

et écris A sous la forme de fraction irréductible.

b. Détermine un encadrement de A par deux entiers consécutifs. *BEPC 2001*

66 Simplification de fractions

On donne $B = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{11} + \dfrac{7}{3}$.

a. En faisant ressortir sur ta feuille de composition les détails des calculs, montre que $B = \dfrac{153}{55}$.

b. Donne un encadrement de B d'amplitude 10^{-3}. *BEPC 2005*

67 Troncature et encadrements

On donne le réel $E = \dfrac{\dfrac{7}{5} - \dfrac{4}{3}}{\dfrac{7}{5} \times \dfrac{4}{3}}$.

a. Écris E sous la forme d'une fraction irréductible.

b. Donne la troncature de E à trois décimales ; puis encadre E entre deux entiers consécutifs.

c. Montre que $\dfrac{1}{E}$ est un entier naturel. *BEPC 2006*

68 Encadrement et valeur absolue

On considère les nombres réels :

$$a = 2 + \sqrt{5} \text{ et } b = -2 + \sqrt{5}.$$

1. Calcule a^2 ; b^2 et ab.
2. Montre que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ est un entier naturel.
3. Soit $Y = \dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}$. Sachant que $2{,}2360 < \sqrt{5} < 2{,}2361$, donne un encadrement de Y.
4. Une seule des quatre réponses ci-après désigne la valeur exacte de $|-2 + \sqrt{5}|$. Dis laquelle.

a. $-2 + \sqrt{5}$; **b.** $2 + \sqrt{5}$; **c.** $2 - \sqrt{5}$; **d.** $-2 - \sqrt{5}$.

D'après BEPC

69 À la fontaine

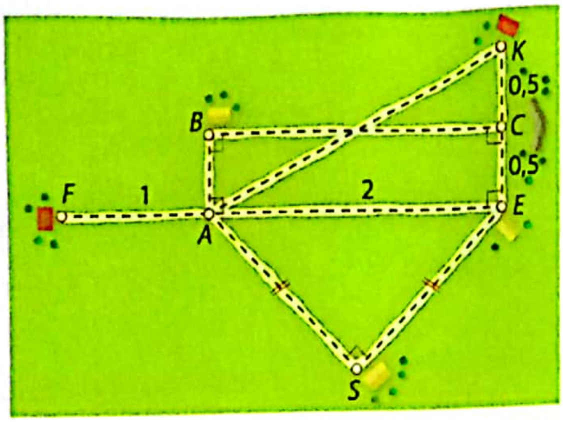
Charles est allé à la fontaine pour remplir un grand bidon d'eau qui contient entre 25 L et 30 L.
Avec cette eau, il remplit des grands gobelets contenant chacun entre 0,4 L et 0,5 L.

a. Donne un encadrement du nombre N de gobelets que Charles pourra remplir.

b. Il remplit tout d'abord 20 gobelets. Donne un encadrement de la quantité d'eau qui reste alors dans le bidon. *D'après BEPC*

70 Tous les chemins mènent à l'école

N'aimant pas aller seule à l'école, Fatou passe toujours chez une amie pour faire le trajet avec elle. Selon les jours, elle passe chez Babila (*B*), chez Kouma (*K*) ou chez Sonia (*S*). La figure montre les trois trajets différents de chez Fatou (*F*) à l'école (*E*) : *FABCE*, *FAKCE* et *FASE*.
Les distances sont indiquées en km.



1. Calcule les mesures exactes des distances *AK* et *AS*. Déduis-en la longueur exacte de chacun des trajets du domicile de Fatou à l'école.
2. Lundi, Fatou est allée et est revenue de l'école avec Kouma. Mardi, elle est allée à l'école avec Sonia et est revenue avec Babila. Sans utiliser de table ou de calculatrice indique lequel de ces deux trajets a été le plus court. Justifie par des calculs.

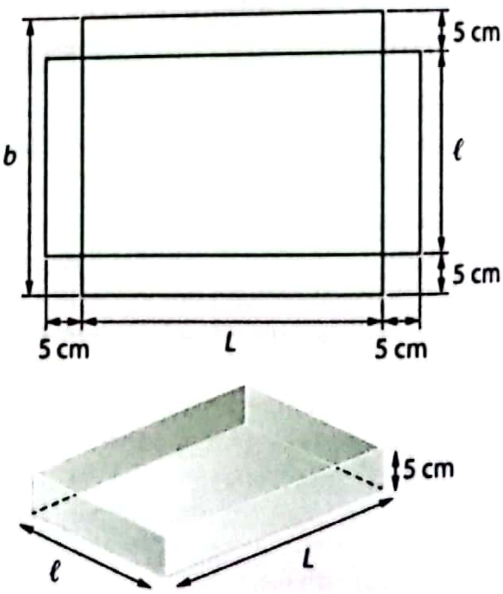
71 Le voyage en voiture

Abas vient de faire un trajet en voiture en deux étapes.
- Lors de la première étape, il a parcouru entre 160 km et 180 km. Il se souvient être parti entre 15 h et 15 h 15, puis s'être arrêté entre 17 h 45 et 18 h.
- Lors de la deuxième étape, il a parcouru entre 120 et 140 km. Il est reparti entre 18 h 15 et 18 h 30, puis il est arrivé à destination entre 20 h et 20 h 15.

1. Donne un encadrement de la longueur totale du trajet parcouru par Abas.
2. a. Donne un encadrement de la durée de la première étape.
b. Donne un encadrement de la durée de la deuxième étape.
c. Donne un encadrement de la durée totale pendant laquelle Abas a roulé.
3. a. Rappelle comment on calcule la vitesse moyenne *V* lorsqu'on parcourt une distance *D* pendant un temps *T*.
b. Donne un encadrement de la vitesse moyenne d'Abas sur la totalité de son parcours.

72 La boîte en carton

Solange veut fabriquer une boîte en carton en forme de pavé droit. Elle désire que son volume soit égal à 2 600 cm^3 à 100 cm^3 près et que la hauteur de la boîte soit égale à 5 cm exactement. Elle dispose pour sa fabrication d'une bande de carton de largeur 29 cm à 1 cm près, qu'elle va utiliser dans toute sa largeur comme indiqué sur le dessin ci-contre.



1. Exprime par des encadrements la largeur *b* de la bande de carton et le volume $\mathcal{V}$ de la boîte.
2. a. Exprime l'aire $\mathcal{A}$ du fond de la boîte en fonction de son volume $\mathcal{V}$.
b. Utilise l'encadrement du volume $\mathcal{V}$ pour en déduire un encadrement de cette aire $\mathcal{A}$.
3. a. Utilise l'encadrement de la largeur *b* de la bande de carton pour en déduire un encadrement de la largeur ℓ de la boîte.
b. À partir des encadrements de ℓ et de $\mathcal{A}$, calcule un encadrement de la longueur *L* de la boîte.
c. Propose une valeur possible pour cette longueur *L* de sorte que le volume de la boîte soit bien égal à 2 600 cm^3 à 100 cm^3 près.

10 Puissances

Pour démarrer

Micro-organismes et maladies

La salmonelle est une bactérie qui peut proliférer dans les aliments mal conservés et provoquer de graves maladies.
Acha s'interroge sur la taille réelle de cette bactérie. Elle mesure la longueur d'une salmonelle sur une photo présentée dans une revue et trouve 7,2 cm.
Sur cette photo, prise avec un microscope électronique, la salmonelle apparaît grossie 20 000 fois.

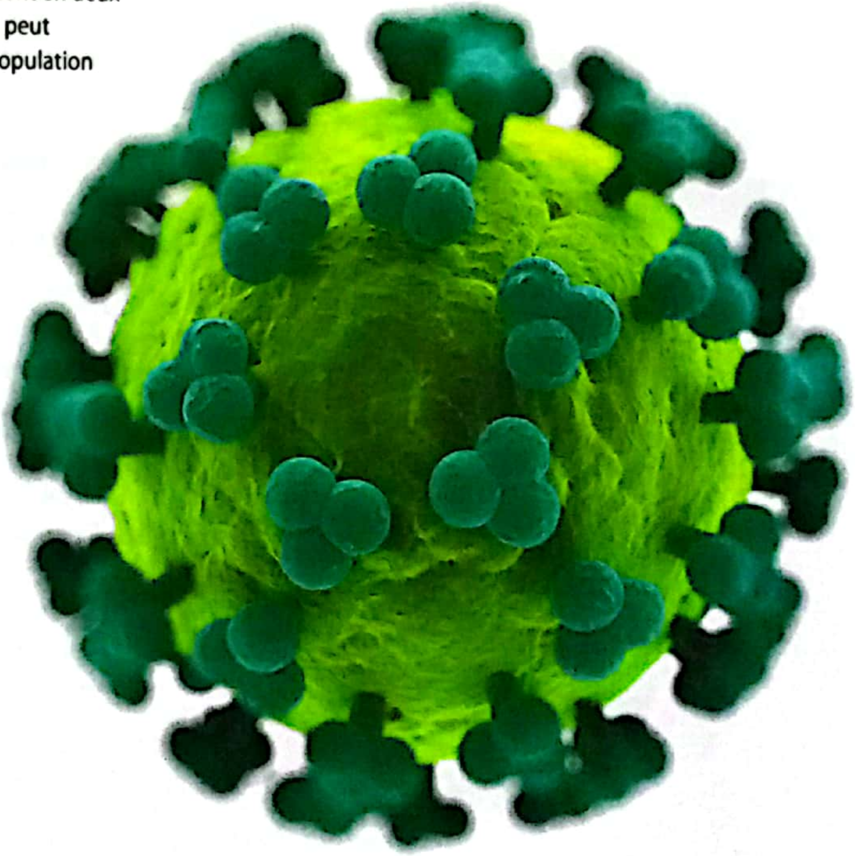
1 **a.** Donne les écritures scientifiques de la longueur, en mètres, de l'image d'une salmonelle sur la revue et du grossissement utilisé.
b. Calcule la longueur réelle de la salmonelle en mètres et exprime-la en notation scientifique.
c. Exprime cette même longueur en micromètres (1 µm = 10^{-6} m).

2 La salmonelle se reproduit en se divisant en deux nouvelles salmonelles. Cette division peut se renouveler chaque heure et une population de salmonelles peut ainsi doubler en une heure.
a. À partir d'une seule bactérie au départ, combien de bactéries seront présentes :
- après 1 heure ?
- après 2 heures ?
- après 4 heures ?

Donne tes réponses sous forme de puissances de 2.
b. Déduis-en le nombre de bactéries présentes après 8 heures, puis après 24 heures.

3 Le virus du sida, ou VIH, a un diamètre d'environ 100 nanomètres (1 nm = 10^{-9} m).
Quel serait son diamètre sur une photo grossie 20 000 fois ?

Le virus du sida est très difficile à isoler et à photographier. Cette image du VIH est un modèle créé par ordinateur.



Savoir-faire

À la fin de ce chapitre, tu sauras :
– écrire des nombres relatifs en utilisant des puissances à exposant entier positif ou négatif ;
– utiliser les propriétés des puissances pour effectuer des calculs avec des nombres écrits sous forme de fractions ;
– calculer avec des nombres décimaux écrits sous la forme $a \times 10^p$.

10 Activités de découverte

1 Inverse d'un nombre entier relatif

› Cours 1

1 **a.** Calcule les produits : $-5 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \dots$; $\frac{4}{7} \times \frac{7}{4} = \dots$.

Dans chaque couple -5 et $-\frac{1}{5}$; puis $\frac{4}{7}$ et $\frac{7}{4}$, les deux nombres sont dits ***inverses*** *l'un de l'autre.*

b. Complète la définition : *Deux nombres non nuls sont inverses l'un de l'autre si leur produit ... .*

2 a, n et p sont des nombres relatifs non nuls.
Propose une écriture de l'inverse du nombre a ; puis de l'inverse du nombre $\frac{n}{p}$.

2 Écriture scientifique

› Cours 2 et 4

1 **a.** m et n désignent deux nombres entiers naturels. Complète les propriétés ci-dessous vues en 4e.

$10^m \times 10^n = 10^{\cdots}$; $\frac{10^m}{10^n} = 10^{\cdots}$; $10^{-m} = \frac{1}{10^{\cdots}}$.

b. Utilise ces propriétés pour écrire les nombres ci-dessous sous la forme d'une puissance de 10.

$A = 10^4 \times 10^3$; $B = 10^5 \times 10^{-3}$; $C = 10^7 \times 10^{-9}$; $D = \frac{10^5}{10^2}$; $E = \frac{10^4}{10^{-2}}$; $F = \frac{10^3}{10^7}$.

2 Les nombres G et H suivants sont écrits de deux façons différentes. *La version colorée est appelée* ***écriture scientifique***. Elle est de la forme $a \times 10^n$ avec a un nombre décimal ayant un seul chiffre différent de zéro avant la virgule et n un nombre entier relatif.

$G = 354{,}05 = \mathbf{3{,}5405 \times 10^2}$; $H = 203 \times 10^3 = \mathbf{2{,}03 \times 10^5}$.

Donne l'écriture scientifique des nombres suivants.

a. 4 570 ; **b.** 0,00371 ; **c.** $-26{,}1 \times 10^2$; **d.** $0{,}89 \times 10^{-3}$.

3 Puissances à exposant entier relatif

› Cours 3

1 Dans chaque colonne du tableau, le même nombre est écrit sous deux formes différentes.
a. Complète ce tableau.
b. À quelle opération sur l'exposant correspond la division par 4 qui fait passer à la colonne suivante ?

	: 4	: 4	: 4	: 4	: 4	: 4	: 4	: 4
Écriture entière ou fractionnaire	256	64	16	...	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4^2}$	$\frac{1}{\dots}$	$\frac{1}{\dots}$
Écriture avec exposant	4^4	4^3	...	...	...	4^{-1}	...	...	...

2 Un tableau de même format que le précédent a été commencé ci-contre. Reprends les questions précédentes en utilisant des puissances de $\frac{3}{2}$.

		$: \frac{3}{2}$
Écriture entière ou fractionnaire	$\frac{243}{32}$	$\frac{81}{16}$
Écriture avec exposant	$\left(\frac{3}{2}\right)^5$	

3 Utilise tes réponses aux **1.** et **2.** pour compléter la propriété :

a désignant un nombre réel non nul et n un nombre entier relatif, on a : $\frac{1}{a^n} = a^{\cdots}$.

Cette propriété que tu connaissais déjà pour les puissances de 10 reste vraie pour les puissances de a, nombre réel quelconque.

4 Écris chacun des nombres ci-dessous sous la forme d'une puissance à exposant un nombre entier relatif.

a. $\frac{1}{3^4}$; **b.** $\frac{1}{5^3}$; **c.** $\frac{1}{8^{-5}}$; **d.** $\frac{1}{9}$; **e.** $\frac{1}{11^{-3}}$.

4 Signe d'une puissance › Cours 3

1 Effectue mentalement les calculs suivants. Indique les résultats sur ton cahier.

• -3^3 • $(-3)^3$ • 2^4 • $(-2)^4$ • 2^5 • $(-2)^5$

2 Sans poser de calculs, indique le signe des nombres ci-dessous.

• 5^7 • $(-5)^3$ • 2^3 • $(-2)^3$ • $(-10)^4$ • $(-10)^5$

3 a désigne un nombre réel non nul et n un nombre entier relatif.
Utilise tes résultats de la question **2.** pour répondre aux questions suivantes :

a. Lorsque a est positif, quel est le signe de a^n ?

b. Lorsque a est négatif, quel est le signe de a^n : quand n est pair ? quand n est impair ?

5 Puissances de produits ou de quotients › Cours 4

1 **a.** Recopie et complète les calculs suivants.

$(-7\times 2)^3 = (-7\times 2)\times(-7\times 2)\times(-7\times 2) = (-7\times\ldots\times\ldots)\times(2\times\ldots\times\ldots) = (-7)^{\cdots}\times 2^{\cdots}$.

$(5\times 3)^{-4} = \dfrac{1}{(5\times 3)^4} = \dfrac{1}{5^{\cdots}\times 3^{\cdots}} = \dfrac{1}{5^{\cdots}}\times\dfrac{1}{3^{\cdots}} = 5^{\cdots}\times 3^{\cdots}$.

b. Utilise tes réponses au **1. a.** pour conjecturer la propriété ci-dessous :

a et b sont deux nombres réels non nuls, n est un nombre entier relatif : $(a\times b)^n = \ldots\times\ldots$.

2 **a.** Recopie et complète les calculs.

• $\left(\dfrac{3}{5}\right)^5 = \dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5} = \dfrac{3\times\ldots}{5\times\ldots} = \dfrac{3^{\cdots}}{5^{\cdots}}$;

• $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^{\cdots}}{3^{\cdots}} = 2^{\cdots}\times\dfrac{1}{3^{\cdots}} = \dfrac{1}{2^{\cdots}}\times 3^{\cdots} = \dfrac{3^{\cdots}}{2^{\cdots}}$.

b. Utilise tes réponses au **2. a.** pour conjecturer la propriété ci-dessous :

a et b sont deux nombres réels non nuls, n est un nombre relatif : $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{\ldots}{\ldots}$.

3 **a.** Kadiatou se demande si la propriété $(a+b)^n = a^n + b^n$ est vraie.
Développe l'identité remarquable $(a+b)^2$ et réponds à Kadiatou.

b. Utilise le même raisonnement pour montrer que $(a-b)^n \neq a^n - b^n$.

6 Produits ou quotients de puissances › Cours 4

1 **a.** Recopie et complète les calculs suivants.

• $8^3\times 8^5 = (8\times\ldots)\times(8\times\ldots) = 8^{\cdots}$; • $(-7)^{-2}\times(-7)^5 = \dfrac{1}{(-7)^{\cdots}}\times(-7)^{\cdots} = \dfrac{(-7\times\ldots)}{(-7\times\ldots)} = (-7)^{\cdots}$.

b. Utilise tes réponses au **1. a.** pour conjecturer la propriété ci-dessous :

a est un nombre réel non nul, m et n sont deux nombres entiers relatifs : $a^m\times a^n = a^{\cdots}$.

2 **a.** Recopie et complète les calculs suivants.

• $\dfrac{4^6}{4^3} = \dfrac{4\times\ldots}{4\times\ldots} = 4^{\cdots}$; • $\dfrac{2^7}{2^{-2}} = 2^7\times\dfrac{1}{2^{-2}} = 2^7\times 2^{\cdots} = 2^{\cdots}$; • $\dfrac{5^{-4}}{5^2} = 5^{-4}\times\dfrac{1}{5^2} = 5^{-4}\times 5^{\cdots} = 5^{\cdots}$.

b. Utilise tes réponses au **2. a.** pour conjecturer la propriété ci-dessous :

a est un nombre réel non nul, m et n sont deux nombres entiers relatifs :
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{\cdots}$.

Utilise la propriété trouvée en 1 pour compléter les calculs du 2.

10 Cours

1 Inverse d'un nombre relatif non nul

Définition **Deux nombres non nuls sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.**

Remarques : • Deux nombres inverses l'un de l'autre sont de même signe. • Le nombre 0 n'a pas d'inverse.

Propriété **a et b désignent des nombres relatifs non nuls, l'inverse de $\frac{a}{b}$ peut s'écrire $\frac{b}{a}$.**

Cas particulier : Si $b = 1$, $\frac{a}{1} = a$ et l'inverse de a est $\frac{1}{a}$.

Exemples : • $\frac{\sqrt{2}}{5}$ et $\frac{5}{\sqrt{2}}$ sont inverses l'un de l'autre. • L'inverse de -4 est égal à $\frac{1}{-4}$, qui peut s'écrire aussi $-\frac{1}{4}$.

2 Puissances de 10 et écriture scientifique

a Rappels sur l'écriture décimale des puissances de 10

Notations **n désigne un nombre entier naturel.**

- **L'écriture décimale de 10^n est 1 suivi de n zéros : $10^n = 1\underbrace{000\ldots0}_{n\ \text{zéros}}$**
- **L'inverse de 10^n s'écrit 10^{-n}.**
- **L'écriture décimale de 10^{-n} est 1 précédé de n zéros : $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}00\ldots0}_{n\ \text{zéros}}1$**

Exemples : • $10^5 = 1\underbrace{00\,000}_{5\ \text{zéros}}$; • $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \underbrace{0{,}000}_{4\ \text{zéros}}1$; • $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \underbrace{0{,}}_{1\ \text{zéro}}1$.

b Écriture scientifique d'un nombre décimal

Définition **L'écriture scientifique (ou la notation scientifique) d'un nombre décimal est son écriture sous la forme $a \times 10^n$ dans laquelle :**

- **a est un nombre décimal possédant un seul chiffre différent de zéro avant la virgule ;**
- **n est un nombre entier relatif.**

Exemples : • L'écriture scientifique de 124,6 est $1{,}246 \times 10^2$. • L'écriture scientifique de 0,007 est 7×10^{-3}.

3 Puissance à exposant un entier relatif

a Exposant entier positif

Notations **a désigne un nombre réel non nul et n un nombre entier naturel non nul.**

- **Pour $n \geqslant 2$, le produit de n facteurs tous égaux à a se note a^n : $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ \text{facteurs égaux à}\ a}$**
- **a^n se lit « a exposant n » ou encore « a puissance n ».**

Exemples : • $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$; • $(\sqrt{3})^4 = \underbrace{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}_{3} \times \underbrace{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}_{3} = 9$.

Cas particuliers • **Pour tout nombre réel a, $a^1 = a$.** • **Pour tout nombre entier relatif n, $1^n = 1$.**

Convention **Pour tout nombre réel a non nul, $a^0 = 1$.**

b Exposant entier négatif

Notation *a* désigne un nombre réel non nul et *n* un nombre entier naturel non nul.
La notation a^{-n} désigne l'inverse de a^n. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Cas particulier $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$; a^{-1} est l'inverse de a.

Exemples : • $(-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = \frac{1}{-216} = -\frac{1}{216}$; • $(\sqrt{7})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{7})^2} = \frac{1}{7}$.

Propriétés *a* et *b* désignent des nombres réels non nuls et *n* un nombre entier naturel.

• $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ • $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Exemples : • $3^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$; • $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{81}{16}$; • $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

c Signe d'une puissance

Propriétés *a* désigne un nombre réel non nul et *n* un nombre entier naturel non nul.

a^n est $\begin{cases} \text{négatif si } a < 0 \text{ et } n \text{ est impair.} \\ \text{positif sinon.} \end{cases}$

Exemples : • 5^3 et 5^{-3} sont positifs car 5 est positif ; • $(-5)^4$ est positif car 4 est pair ;
• $(-5)^3$ est négatif car -5 est négatif et 3 est impair.

4 Opérations sur les puissances

a Puissances d'un produit, d'un quotient

Propriétés *a* et *b* désignent deux nombres réels non nuls et *n* un nombre entier relatif.

• $(a\times b)^n = a^n \times b^n$ • $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemples : • $(2\sqrt{3})^4 = 2^4 \times (\sqrt{3})^4 = 16\times 9 = 144$; • $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$.

b Puissances d'un même nombre

Propriétés *a* désigne un nombre réel non nul et *m* et *n* des nombres entiers relatifs.

• $a^m \times a^n = a^{m+n}$ • $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ • $(a^m)^n = a^{m\times n}$

Exemples : • $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{4+5} = \left(\frac{2}{3}\right)^9$; • $\frac{(\sqrt{2})^5}{(\sqrt{2})^3} = (\sqrt{2})^{5-3} = (\sqrt{2})^2 = 2$; • $(2^{-2})^3 = 2^{-2\times 3} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$.

c Nombres de la forme $a \times 10^p$

Propriétés *a* et *b* désignent deux nombres réels non nuls. *m* et *n* désignent deux nombres entiers relatifs.

• $(a\times 10^m)\times(b\times 10^n) = a\times b\times 10^{m+n}$ • $\frac{a\times 10^m}{b\times 10^n} = \frac{a}{b}\times 10^{m-n}$ (avec $b \neq 0$)

Exemples : • $5\times 10^{-2}\times\frac{1}{2}\times 10^4 = 5\times\frac{1}{2}\times 10^{-2+4} = \frac{5}{2}\times 10^2$; • $\frac{7\times 10^2}{3\times 10^{-3}} = \frac{7}{3}\times 10^{2-(-3)} = \frac{7}{3}\times 10^5$.

10 Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à utiliser les notations sur les puissances

Énoncé

1. Écris chaque nombre ci-dessous sous la forme d'un nombre entier relatif.

a. $(-5)^3$; **b.** $(\sqrt{3})^4$; **c.** $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}$.

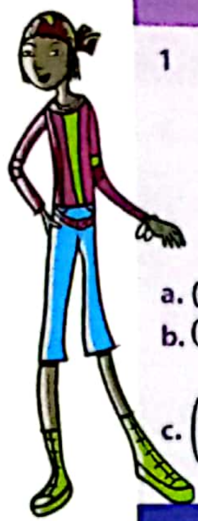
2. Donne l'écriture scientifique des nombres ci-dessous.

a. 24 375 ; **b.** 0,002 34 ; **c.** $52{,}8 \times 10^{-3}$.

3. Écris chaque nombre sous la forme a^{-n}, avec a un nombre réel et n le nombre entier naturel le plus grand possible.

a. $\frac{1}{16}$; **b.** $\frac{25}{64}$; **c.** $\frac{8}{125}$.

Solution



1

Je sais que $a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ fois}}$ et que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$.

a. $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$;

b. $(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \times 3 = 9$;

c. $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49}$.

2

L'écriture scientifique se présente sous la forme $a \times 10^n$ avec a n'ayant qu'un seul chiffre avant la virgule.

a. $24\,375 = 2{,}437\,5 \times 10\,000 = 2{,}437\,5 \times 10^4$;

b. $0{,}002\,34 = 2{,}34 \times 0{,}001 = 2{,}34 \times 10^{-3}$;

c. $52{,}8 \times 10^{-3} = 5{,}28 \times 10^{-2}$.

3

- Je commence par écrire chaque nombre de l'expression sous la forme a^n.
- J'utilise les propriétés $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$.

a. $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$;

b. $\frac{25}{64} = \frac{5^2}{8^2} = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^{-2}$;

c. $\frac{8}{125} = \frac{2^3}{5^3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$.

S'exercer

Pour les exercices 1 à 5, écris chaque nombre sous la forme d'un nombre relatif.

1 **a.** 5^4 ; **b.** $(-8)^2$; **c.** 7^3 ; **d.** 2^5.

2 **a.** 2^3 ; **b.** $(-2)^3$; **c.** -2^3 ; **d.** 3^5.

3 **a.** 10^3 ; **b.** $(-10)^4$; **c.** 10^{-2} ; **d.** -10^{-3} ; **e.** $(-10)^{-3}$; **f.** 10^{-1}.

4 **a.** $(\sqrt{5})^4$; **b.** $(\sqrt{3})^6$; **c.** $(-\sqrt{2})^4$; **d.** $(\sqrt{2})^{-4}$; **e.** $(-\sqrt{7})^{-2}$; **f.** $(-\sqrt{3})^{-6}$.

5 **a.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; **b.** $\left(-\frac{1}{7}\right)^{-1}$; **c.** $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-3}$; **d.** $\left(\frac{7}{5}\right)^{-2}$; **e.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{-4}$; **f.** $\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right)^{-4}$.

6 Donne l'écriture scientifique des nombres :
a. 14 507 ; **b.** 2 347 ; **c.** 1 070.

7 Donne l'écriture scientifique des nombres :
a. 0,000 12 ; **b.** 0,043 7 ; **c.** 0,000 351.

8 **1.** Indique si les nombres sont écrits en écriture scientifique.
a. $243{,}7 \times 10^4$; **b.** $3{,}20 \times 10^{-3}$; **c.** $2{,}471 \times 10^2$.
2. Lorsque ce n'est pas le cas, donne leur écriture scientifique.

9 Sans calculs, indique le signe des nombres :
a. $\left(-\frac{12}{5}\right)^7$; **b.** $(2\sqrt{7})^6$; **c.** $(-4)^9$.

10 Écris les nombres sous la forme $(-2)^n$, avec n un nombre entier relatif.
a. -8 ; **b.** $\frac{1}{4}$; **c.** $-\frac{1}{32}$.

11 Écris les nombres ci-dessous sous la forme a^{-3}, avec a étant un nombre rationnel.
a. $\frac{1}{125}$; **b.** 1 000 ; **c.** -27.

12 Écris les nombres sous la forme a^{-n}, avec a un nombre rationnel et n le nombre entier le plus grand possible.
a. $\frac{1}{8}$; **b.** $-\frac{1}{2}$; **c.** $\frac{49}{81}$; **d.** -32.

2 Apprendre à utiliser les propriétés sur les puissances

Énoncé

Écris chaque nombre ci-dessous sous la forme a^n avec a un nombre réel et n un nombre entier relatif.

1. a. $4^3 \times 5^3$;
b. $2^{-5} \times 7^{-5}$;
c. $\dfrac{3^7}{10^7}$.

2. a. $5^7 \times 5^4$;
b. $(-3)^5 \times (-3)^{10}$;
c. $\dfrac{(-4)^{-5}}{(-4)^8}$.

3. a. $(3^2)^4$;
b. $((-7)^4)^5$;
c. $((-11)^5)^7$.

Solution

1. J'utilise les propriétés $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ et $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

a. $4^3 \times 5^3 = (4 \times 5)^3 = 20^3$;
b. $2^{-5} \times 7^{-5} = (2 \times 7)^{-5} = 14^{-5}$;
c. $\dfrac{3^7}{10^7} = \left(\dfrac{3}{10}\right)^7 = 0{,}3^7$.

2. J'utilise les propriétés $a^m \times a^n = a^{m+n}$ et $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

a. $5^7 \times 5^4 = 5^{7+4} = 5^{11}$;
b. $(-3)^5 \times (-3)^{10} = (-3)^{5+10} = (-3)^{15}$;
c. $\dfrac{(-4)^5}{(-4)^8} = (-4)^{5-8} = (-4)^{-3}$.

3. J'utilise la propriété $(a^m)^n = a^{m \times n}$

a. $(3^2)^4 = 3^{2\times4} = 3^8$;
b. $((-7)^4)^5 = (-7)^{4\times5} = (-7)^{20}$;
c. $((-11)^5)^7 = (-11)^{5\times7} = (-11)^{35}$.

S'exercer

Pour les exercices 13 à 17, écris chaque nombre sous la forme a^n avec a un nombre réel et n un nombre entier relatif.

13 a. $7^5 \times 2^5$; b. $(-3)^4 \times 2^4$; c. $(\sqrt{3})^7 \times 2^7$.

14 a. $\dfrac{3^4}{8^4}$; b. $\dfrac{(-2)^5}{6^5}$; c. $\dfrac{(\sqrt{5})^3}{(\sqrt{2})^3}$.

15 a. $12^5 \times 10^5$; b. $(-3)^4 \times (-2)^4$; c. $(\sqrt{3})^6 \times (\sqrt{2})^6$.

16 a. $\dfrac{14^7}{3^7}$; b. $\dfrac{2^{-5}}{7^{-5}}$; c. $\dfrac{(-4)^8}{(-5)^8}$.

17 a. $((-3)^2)^3$; b. $((\sqrt{2})^3)^6$; c. $\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\right)^5$.

18 Écris chacun des nombres ci-dessous sous la forme a^n avec a un nombre réel et n un nombre entier naturel.

a. $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-7}$; b. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}$ c. $\dfrac{3^4}{(-2)^{-4}}$.

19 Écris chaque nombre ci-dessous sous la forme a^n avec a un nombre réel et n un nombre entier naturel.

a. $\left(-\dfrac{2}{7}\right)^{-4} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$; b. $\left(\dfrac{\sqrt{8}}{3}\right)^{-3} \times (6\sqrt{8})^{-3}$;

c. $\dfrac{5^{-2}}{9^{-2}}$; d. $\dfrac{(-12)^{-3}}{3^{-3}}$; e. $\dfrac{(-5)^{-4}}{(-15)^{-4}}$.

Je sais que $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$.

Pour les exercices 20 à 23, trouve un nombre réel a et un nombre entier relatif n pour lesquels a^n vérifie chaque égalité proposée.

20 a. $3^2 \times a^n = 12^2$; b. $a^n \times 8^{-3} = 16^{-3}$.

21 a. $3^{-4} \times a^n = 3^{-9}$; b. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 \times a^n = \dfrac{2}{5}$.

22 a. $\dfrac{a^n}{(-5)^4} = (-5)^2$; b. $\dfrac{(\sqrt{3})^7}{a^n} = \sqrt{3}$

23 a. $(a^n)^3 = 2^{15}$; b. $(a^n)^5 = (-\sqrt{3})^{20}$.

24 Écris chacun des nombres ci-dessous sous la forme d'un nombre entier relatif.

a. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5}$; b. $(-7)^{2015} \times (-7)^{-2014}$;

c. $\dfrac{(\sqrt{3})^8}{((\sqrt{3})^4)^2}$; d. $\dfrac{1}{5} \times \dfrac{(-5)^7}{(-5)^6}$.

25 On donne $A = 5\sqrt{2} \times 10^3$ et $B = \sqrt{2} \times 10^{-2}$.
Donne l'écriture scientifique des nombres suivants.

a. A^2 ; b. $A \times B$; c. $\dfrac{A}{B}$; d. $\dfrac{B}{A}$.

26 On donne $C = \dfrac{7}{3} \times 10^{-2}$ et $D = \dfrac{3}{5} \times 10^5$.
Donne l'écriture scientifique des nombres suivants.

a. C^2 ; b. $C \times D$; c. $\dfrac{C}{D}$; d. $\dfrac{D}{C}$.

Activités d'application

Calculs avec une puissance

27 Parmi les nombres de la liste, retrouve ceux qui sont égaux à l'inverse de $-\frac{3}{8}$.

$\frac{-8}{(\sqrt{3})^2}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{24}{-9}$; $\frac{8}{-\sqrt{9}}$; $\frac{2^3}{3}$;

$-\frac{(\sqrt{2})^6}{9}$; $-\frac{8}{3}$; $\frac{-16}{-6}$; $\frac{-2^4}{9}$; $\frac{-2^3}{(\sqrt{3})^2}$.

28 Écris chaque nombre sous forme d'une fraction irréductible.

a. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$; b. $\frac{1}{-\frac{4}{7}}$; c. $10:\frac{15}{8}$;

d. $\frac{7}{2}:4$; e. $\frac{11}{14}:\frac{3}{7}$; f. $\frac{\sqrt{3}}{3}:\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

29 Complète chaque ligne comme la première.

a. $10^4 = 10\,000$ → dix mille ;

b. $10^{-2} = \ldots$ → … ;

c. $10^{\cdots} = 10\,000\,000$ → … ;

d. $10^{\cdots} = \ldots$ → un dix-millième.

30 Donne chacun des nombres ci-dessous en écriture décimale ou fractionnaire.

a. 3^5 ; b. $(-5)^3$; c. $0{,}2^3$;

d. $(-8)^2$; e. $(-\sqrt{7})^4$; f. $(-15)^0$.

31 Donne chacun des nombres ci-dessous en écriture décimale ou fractionnaire.

a. 3^{-4} ; b. $(-3)^{-4}$; c. $(-0{,}5)^{-1}$;

d. $(\sqrt{11})^{-2}$; e. $(-1)^{-6}$; f. $\left(-\frac{7}{8}\right)^{-2}$.

32 Écris les nombres ci-dessous sous la forme a^n, avec a nombre rationnel et n nombre entier positif le plus grand possible.

a. 36 ; b. 16 ; c. –27 ; d. $-\frac{1}{8}$; e. $\frac{49}{9}$; f. $\frac{64}{27}$.

33 Écris les nombres ci-dessous sous la forme a^{-n}, avec a nombre rationnel et n nombre entier positif le plus grand possible.

a. $\frac{1}{25}$; b. $\frac{1}{100}$; c. $-\frac{1}{5}$; d. 81 ; e. $\frac{100}{9}$; f. $\frac{81}{64}$.

34 Sans effectuer de calculs, indique le signe de chaque nombre ci-dessous.

a. $(-\sqrt{3})^6$; b. $\left(\frac{4}{7}\right)^5$; c. $\left(-\frac{2}{3}\right)^{2015}$.

Propriétés des puissances

Pour les exercices 35 à 38, écris chacune des expressions sous la forme a^n, avec a un nombre réel et n un nombre entier relatif.

35 a. $8^3\times 6^3$; b. $(-5)^{-2}\times(0{,}4)^{-2}$; c. $(-9)^4\times\left(\frac{5}{3}\right)^4$

36 a. $(\sqrt{3})^{-1}\times(3\sqrt{3})^{-1}$; b. $\left(\frac{5}{4}\right)^{-3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$;

c. $\left(\frac{3}{8}\right)^{-3}\times\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3}$; d. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-5}\times\left(\frac{10}{3}\right)^{-5}$.

37 a. $\frac{9^2}{5^2}$; b. $\frac{12^{-2}}{4^{-2}}$; c. $\frac{(-4)^{-3}}{7^{-3}}$.

38 a. $\frac{6^4}{1{,}5^4}$; b. $\frac{(2\sqrt{5})^5}{4^5}$; c. $\frac{(-27)^{-1}}{(-9)^{-1}}$.

39 Résous les équations suivantes et présente la solution sous la forme a^n avec a un nombre réel et n un nombre entier relatif.

a. $\frac{1}{3^4}\times x=27$; b. $2^{-5}\times x=10^{-5}$; c. $7^3\times x=21^3$.

40 Dans chacun des cas, détermine le nombre réel a et le nombre entier relatif n qui vérifient l'égalité proposée.

a. $-8x^n=(ax)^3$; b. $\frac{36}{25}x^n=(ax)^2$; c. $ax^{-2}=(5x)^n$.

41 Gambo et Ketu veulent calculer le produit : $(2468)^{10}\times\left(\frac{1}{1\,234}\right)^{10}$.

a. Trouve un moyen de le calculer très facilement.

b. Observe ce que dit Gambo. A-t-il raison ? (Justifie ta réponse.)

Pour les exercices 42 à 47, écris chaque expression sous la forme a^n, avec a un nombre réel et n un nombre entier relatif.

42 a. $(-18)^3\times(-18)^1$; b. $7^{-2}\times 7^5$; c. $2^{-5}\times 2^2$.

43 a. $(\sqrt{5})^4\times(\sqrt{5})^{-4}$; b. $\frac{7}{8}\times\left(\frac{7}{8}\right)^{-2}$; c. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\times\left(\frac{2}{3}\right)^4$.

44 a. $\frac{9^6}{9^5}$; b. $\frac{14^{-3}}{14^{-2}}$; c. $\frac{-0{,}25^{-4}}{-0{,}25^3}$.

45 a. $\frac{(\sqrt{12})^3}{(\sqrt{12})^{-4}}$; b. $\frac{8^4}{8}$; c. $\frac{7^5}{7^0}$.

46 a. $(11^4)^2$; b. $(9^{-3})^{-3}$; c. $(2^{-2})^5$.

47 a. $((\sqrt{6})^2)^{-4}$; b. $\left(\left(\frac{8}{5}\right)^3\right)^0$; c. $\left(\left(-\frac{9}{2}\right)^{-1}\right)^{-1}$.

Pour les exercices 48 à 50, détermine le nombre entier relatif n qui convient.

48 a. $6{,}3^3 \times 6{,}3^n = 6{,}3^2$; b. $8^n \times 8^{-4} = 8^2$;
c. $3^{-5} \times 3^n = 3^4$; d. $\left(\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$.

49 a. $\frac{12^2}{12^n} = 12^4$; b. $\frac{(-4{,}5)^n}{(-4{,}5)^{-1}} = (-4{,}5)^{-3}$;
c. $\frac{(\sqrt{7})^n}{(\sqrt{7})^{-4}} = (\sqrt{7})^2$; d. $\frac{10^{-4}}{10^n} = 10^{-1}$.

50 a. $(13^2)^n = 13^{-6}$; b. $(3{,}6^n)^{-2} = 3{,}6^8$;
c. $(4^{-3})^n = 4^0$; d. $\left(\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{5}\right)^{-3}$.

51 Le grand-père de Sonia lui a donné une somme d'argent qu'elle désire dépenser progressivement. Elle décide qu'au début de chaque semaine, elle va prélever pour ses dépenses $\frac{1}{5}$ de la somme disponible, de sorte qu'il lui en reste $\frac{4}{5}$. Ainsi, il lui reste $\frac{4}{5}$ de la somme initiale après le premier prélèvement, puis seulement $\frac{4}{5}$ de ces $\frac{4}{5}$ après le deuxième prélèvement.
a. Écris sous forme d'une puissance la fraction de la somme initiale qui lui reste après deux prélèvements ; n prélèvements.
b. Calcule cette fraction après deux prélèvements ; trois prélèvements ; quatre prélèvements.
c. Après combien de prélèvement lui reste-t-il moins de la moitié de la somme initiale ?

52 Écris chaque expression sous la forme a^n, avec a un nombre décimal et n un nombre entier relatif.
a. $9^2 \times 5^2$; b. $(-4)^{-2} \times (-4)^3$;
c. $0{,}7^{-4} \times 0{,}7^{-1}$; d. $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$.

53 Écris chaque expression sous la forme a^n, avec a un nombre entier relatif et n des nombres entiers relatifs.
a. $\frac{6^{-1}}{6^{-2}}$; b. $\frac{3^3}{0{,}5^3}$; c. $\frac{(\sqrt{10})^3}{(\sqrt{10})^{-3}}$;
d. $\frac{(-0{,}5)^{-1}}{0{,}2^{-1}}$; e. $\frac{(-6)^{-4}}{(-6)^2}$; f. $\frac{7^{-5}}{0{,}7^{-5}}$.

54 Écris chaque expression sous la forme d'un nombre rationnel.
a. $(2\sqrt{2})^4$; b. $(5\sqrt{3})^{-2}$; c. $14^2 \times \left(\frac{1}{7}\right)^2$;
d. $\left(\frac{2^2}{3}\right)^3$; e. $\left(\frac{\sqrt{12}}{4}\right)^{-4}$; f. $\frac{(2\sqrt{5})^3}{(4\sqrt{5})^3}$.

Puissances de 10

55 Exprime chaque nombre en écriture scientifique.
a. 5 400 ; b. –268,9 ; c. 300 000 ;
d. 0,003 4 ; e. 15,07 ; f. 0,000 006.

56 Exprime chaque nombre en écriture scientifique.
a. 183×10^4 ; b. $0{,}003 \times 10^2$;
c. $-45{,}7 \times 10^2$;
d. $351{,}8 \times 10^{-5}$;
e. $0{,}000\,25 \times 10^{-3}$;
f. $66{,}66 \times 10^{-1}$.

Pour les exercices 57 à 59, calcule l'expression et donne le résultat sous la forme $a \times 10^n$ avec a un nombre réel et n un nombre entier relatif. Donne l'écriture décimale quand c'est possible.

57 a. $7{,}2 \times 10^2 \times 5 \times 10^3$; b. $0{,}5 \times 10^{-3} \times 8 \times 10^2$;
c. $-\frac{1}{3} \times 10^{-4} \times 6 \times 10^5$; d. $-\frac{1}{5} \times 10^{-3} \times 3 \times 10^3$.

58 a. $\frac{13 \times 10^2}{5 \times 10^5}$; b. $\frac{2 \times 10^{-1}}{-3 \times 10^{-4}}$; c. $\frac{8 \times 10^3}{16 \times 10^{-3}}$.

59 a. $\frac{-3 \times 10^{-2}}{4 \times 10^4}$; b. $\frac{\sqrt{3} \times 10^3}{2\sqrt{3} \times 10^2}$; c. $\frac{0{,}2 \times 10^{-1}}{\frac{1}{6} \times 10^{-3}}$.

60 Kouma possède un gros rouleau de ruban, long de 150 m et large de 8 mm. Elle se demande quelle superficie elle pourrait recouvrir avec son ruban.

Écris en notation scientifique les deux dimensions en m, puis calcule l'aire, en m^2, d'une face du ruban.

61 Pour mesurer les distances dans l'Univers, les astronomes utilisent l'année-lumière (AL), qui correspond à environ 9 500 milliards de km. La galaxie d'Andromède se situe à environ deux millions d'années-lumière de la Terre.
Calcule et exprime en notation scientifique la distance, en km, entre la galaxie d'Andromède et la Terre.

62 Une molécule d'eau a une masse approximative de 3×10^{-23} g.
Combien de molécules d'eau y a-t-il dans une bouteille de 1,5 L ?

Bien comprendre mieux rédiger

63 Comprendre le vocabulaire

a désigne un nombre réel non nul.
Relie chaque expression du diagramme de gauche à une (ou plusieurs) expression(s) du diagramme de droite.

l'inverse de a •	• $-\dfrac{1}{a}$
l'opposé de a •	• $(-a)^2$
l'opposé de l'inverse de a •	• a^{-1}
le carré de l'opposé de a •	• $-a^2$
le carré de a •	• $-a$
l'opposé du carré de a •	• a^2

64 Connaître le signe

1. Sans les calculer, indique le signe de chaque nombre. Justifie tes réponses.
a. -3^3 ; **b.** $(-3)^3$; **c.** -3^{-3} ; **d.** $(-3)^{-3}$;
e. -3^4 ; **f.** $(-3)^4$; **g.** -3^{-4} ; **h.** $(-3)^{-4}$.
2. Parmi les nombres ci-dessus, indique ceux qui sont :
a. égaux ;
b. inverses l'un de l'autre ;
c. opposés l'un de l'autre.

65 Écriture scientifique

1. Indique pourquoi chaque nombre ci-dessous n'est pas présenté en écriture scientifique.
$A = 23{,}147 \times 10^{-4}$;
$B = 0{,}00385 \times 10^3$;
$C = 1{,}5 \times 2^8$;
$D = 1{,}5 \times 10^2 \times 2{,}2 \times 10^3$.
2. Présente chacun des nombres précédents en écriture scientifique.
3. Donne l'écriture décimale des nombres ci-dessous.
$E = 2{,}347 \times 10^5$;
$F = 2{,}85 \times 10^{-4}$.

66 Changer le signe de l'exposant

1. Écris les nombres ci-dessous sous la forme d'une puissance à exposant positif.
a. 7^{-2} ; **b.** $(-4)^{-5}$; **c.** 12^{-1} ; **d.** $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-4}$;
e. $\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{-1}$; **f.** $\left(\dfrac{2}{9}\right)^{-4}$; **g.** $\left(\dfrac{5}{12}\right)^{-3}$; **h.** $\left(-\dfrac{4}{3}\right)^{-1}$.
2. Écris les nombres ci-dessous sous la forme d'une puissance à exposant négatif.
a. 11^2 ; **b.** $(-6)^3$; **c.** 17 ; **d.** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^5$;
e. $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^4$; **f.** $\left(\dfrac{3}{8}\right)^4$; **g.** $\left(\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}\right)^3$; **h.** $\left(-\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)^2$.

67 Observer pour comprendre

1. Range les nombres ci-dessous par ordre croissant.
a. • 5^{-1} ; • 5^{-2} ; • 5^0 ; • 5^3 ; • 5^2.
b. • $0{,}2^2$; • $0{,}2^{-2}$; • $0{,}2^1$; • $0{,}2^0$; • $0{,}2^{-1}$.
2. Compare les deux rangements obtenus.
Que constates-tu ?
3. Range les nombres ci-dessous par ordre croissant.
• $(-2)^{-2}$; • $(-2)^3$; • $(-2)^0$; • $(-2)^{-3}$; • $(-2)^2$.
4. Que constates-tu à propos des puissances successives d'un nombre négatif ?

68 Corriger des erreurs

À la suite d'un devoir sur les puissances, un professeur a relevé des erreurs dans les copies de cinq élèves.

① $(-3)^7 \times (-3)^5 = (-3)^{7\times5} = (-3)^{35}$

② $10^4 + 10^2 = 10^{4+2} = 10^6$

③ $\dfrac{5^3}{5^{-2}} = 5^{3-2} = 5^1 = 5$

④ $4^5 - 4^3 = 4^{5-3} = 4^2 = 16$

⑤ $(2^3)^3 = 2^6$

Dans chacun des cas, indique l'erreur commise par l'élève et donne la réponse exacte.

69 Problème guidé

a. Observe l'énoncé du problème ci-dessous.

Dans l'étang proche du village, les pêcheurs prennent trop de poissons, si bien que le nombre de poissons dans l'étang diminue d'un tiers chaque année.
① Exprime par une puissance la fraction R_1 de la quantité initiale de poissons qui reste après un an de pêche ; puis les fractions R_2 après deux ans et enfin R_n après n années.
② À partir de quelle année restera-t-il moins du quart de la quantité initiale de poissons ?

b. Complète les étapes de la solution.

1. S'il disparaît un tiers des poissons au cours de la première année, il en reste donc … à la fin de la première année. Donc : $R_1 = \dots$.
À la fin de la 2e année : $R_2 = R_1 \times \dots = (\dots)^{\dots}$.
À la fin de la ne année : $R_n = (\dots)^{\dots}$.
2. Calcul des fractions successives :
$R_2 = \dots$; $R_3 = \dots$; $R_4 = \dots$; $R_5 = \dots$.
La première fraction inférieure à un quart est … .
C'est donc à la fin de la …e année qu'il restera moins du quart de la quantité initiale de poissons.

70 Combinaison de puissances

a. Écris chaque expression sous la forme d'une puissance d'un nombre entier relatif.

$R=(3^{-2})^3$; $S=6^{-3}\times 3^{-3}$.

b. Vérifie que $\frac{R}{S}$ est un nombre entier naturel.

71 Simplifications d'expressions

a. Calcule les deux expressions.

$A=\frac{5^{-3}\times 5^2}{2^{-1}\times 6^{-1}}$; $B=\frac{2\times 10^2\times 2{,}5\times 10^{-4}}{6\times 10^4\times 0{,}2\times 10^{-5}}$.

b. Ali affirme que A est l'opposé de B.
A-t-il raison ? Justifie.

72 Résolutions d'équations

Résous les équations d'inconnue x ci-dessous.

a. $5^7\times x=5^4$; b. $3\times(10^4)^2\times x=9\,000$;

c. $4^{-3}\times 5^2\times x=5^3\times 4^{-1}$; d. $\frac{x}{3^4\times(-5)^7}=3^{-3}\times 5^5$;

e. $7^2\times x=7^3\times 7$; f. $10^3\times 10^{-5}\times x^2=10^6$.

73 Écriture scientifique et encadrements

Écris les nombres en notation scientifique ; puis encadre chacun d'eux par deux puissances de 10 consécutives.

a. 247×10^3 ; b. $12{,}08\times 10^2$; c. $45{,}7\times 10^{-2}$;
d. $0{,}33\times 10^{-3}$; e. $0{,}004\times 10^{-3}$; f. $45{,}7\times 10^{-1}$.

74 Établir l'égalité

Complète chaque égalité avec un nombre en écriture scientifique.

a. $2{,}2\times 10^2\times \ldots=8{,}8\times 10^5$;
b. $1{,}25\times 10^{-3}\times \ldots=5\times 10^2$;
c. $4\times 10^4\times \ldots=3{,}6\times 10^6$;
d. $4\times 10^{-2}\times \ldots=1{,}6\times 10^{-4}$.

75 Goutte à goutte

Essama constate qu'un robinet fuit goutte à goutte. Il s'interroge sur la quantité d'eau ainsi perdue. Il constate tout d'abord que 70 gouttes d'eau tombent en une minute. Puis, à l'aide d'un récipient gradué, il mesure la quantité d'eau perdue en une heure et trouve 147 mL.

a. Combien de gouttes d'eau tombent-elles en une heure ?

b. Calcule le volume d'une goutte en mL et en écriture scientifique.

c. Quelle quantité d'eau, en m³, est perdue en un an ?
Exprime-la en notation scientifique ; puis convertis-la en m³.

$1\text{ m}^3 = 1\,000\text{ L} = 10^6\text{ mL}$; 1 an, c'est 365 × 24 heures.

S'entraîner au BEPC

76 Puissances de nombres premiers

Calcule le nombre $\frac{2^7\times 3^5\times 5}{3^4\times 2^8\times 5^2}$ et écris le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

BEPC 2000

77 Fraction irréductible

Calcule le réel $D=\frac{21\times 10^{-3}\times 5^3}{3\times 10^2\times 2^{-3}}$ et donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

BEPC 2010

78 Les différentes techniques de calcul

Soient les nombres :

$A=\frac{3}{8}-\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}$; $B=\frac{\frac{8}{5}-\frac{1}{4}}{1+\frac{2}{5}}$ et $C=\frac{4(10^{-2})^3\times 10^2}{16\times 10^{-3}}$.

Calcule A, B et C et donne les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

79 Deux expressions à simplifier

Exprime chaque expression sous la forme d'une fraction irréductible.

$R=\frac{6\times 10^{14}\times 2\times 10^6}{5\times(10^3)^4}$; $S=\frac{5\times 10^5\times(2\times 10^{-1})^3}{6\times 10^4\times(4\times 10^{-1})^2}$.

80 Produit et quotient de produits

On donne les nombres :

$A=8\times 10^3$; $B=0{,}5\times 10^{-2}$; $C=4\times 10^4$; $D=0{,}1\times 10^{-1}$

Calcule les expressions suivantes et donne le résultat en écriture décimale :

a. $A\times B\times C\times D$; b. $\frac{A\times B}{C\times D}$.

81 Calculs de produits et de quotients

Calcule chaque expression et donne le résultat sous la forme $a\times 10^n$, avec a un nombre rationnel et n un nombre entier relatif.

$P=\frac{6\times 10^3\times 0{,}2\times 10^{-4}}{2{,}4\times 10^{-1}\times 2\times 10^3}$; $Q=\frac{\frac{1}{2}\times 10^{-4}\times 5\times 10^3}{\frac{1}{2}\times 10^2\times 15\times 10^{-3}}$.

82 Équations avec x^2

1. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $10^5x^2=10^{-3}$ a-t-elle pour ensemble des solutions :

a. $\{10^4 ; -10^{-4}\}$; b. $\{10^{-4} ; -10^4\}$;
c. $\{10^{-4} ; -10^{-4}\}$; d. $\{10^4 ; -10^4\}$?

2. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $5^{-4}x^2=(5^3)^4$ a-t-elle pour ensemble des solutions :

a. $\{5^8 ; 5^{-8}\}$; b. $\{5^8 ; -5^8\}$; c. $\{5^{-8} ; -5^{-8}\}$; d. $\{5^8 ; -5^{-8}\}$?

BEPC 2006

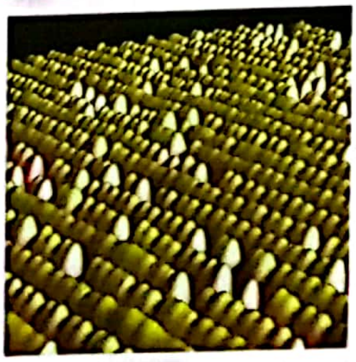
83 Le beau ruban

Angu possède un magnifique ruban doré qui mesure exactement 1 m de long. Comme de nombreux amis lui demandent de leur donner un morceau de son ruban, Angu décide de le partager en morceaux de même longueur. Afin d'obtenir facilement des longueurs égales, elle replie son ruban en juxtaposant les deux extrémités et le partage ainsi en deux moitiés de même longueur.
Puis elle partage à nouveau chaque morceau obtenu en deux moitiés.
Elle va répéter ainsi ce même partage plusieurs fois de suite.
Angu voudrait d'abord savoir combien elle obtiendra de morceaux, et quelle sera la longueur des morceaux après 3, 4, ou 5 partages.
Pour cela, elle commence à établir le tableau ci-dessous.

	Ruban entier	Après 1 partage	Après 2 partages	Après 3 partages	Après 4 partages	Après 5 partages	Après 6 partages
Nombre de morceaux	1	2	$2^2 = 4$	...	...	...	...
Longueur d'un morceau (en m)	1	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$	...	...	...	...

1. Reproduis et complète ce tableau à l'aide de puissances de 2.
2. Angu voudrait obtenir au moins 60 morceaux de son ruban.
a. Combien de partages doit-elle effectuer ?
b. Quelle sera alors la longueur de chaque morceau ? Donne cette valeur exprimée en mètres et en notation scientifique, puis exprime-la en millimètres en arrondissant à l'unité.
3. n désigne un nombre entier naturel non nul.
a. Exprime en fonction de n le nombre de morceaux de ruban après n partages.
b. Déduis-en une expression de la longueur de chaque morceau en fonction de n.
4. Reprends l'exercice dans le cas où Angu décide de replier son ruban en trois morceaux de même longueur.

84 Atomes d'or



La photo ci-contre a été réalisée grâce à un microscope extrêmement puissant, dit « à effet tunnel ». Elle montre les atomes d'or formant la surface d'une minuscule plaque d'or. Oumar observe la photo sur sa revue et lit que les atomes y apparaissent grossis 25 millions de fois. Il mesure alors le diamètre d'un atome sur la photo et trouve 7,5 mm.
1. a. Donne l'écriture scientifique de ce diamètre exprimé en mètres, ainsi que celle du grossissement.
b. Calcule le diamètre réel d'un atome d'or.
Exprime-le en mètres en notation scientifique ; puis en nanomètres ($1 \text{ nm} = 10^{-9}$ m).
2. Oumar imagine un cube d'or de 1 cm d'arête.
a. Il se demande tout d'abord combien d'atomes d'or pourraient être juxtaposés l'un contre l'autre le long d'une arête de ce cube.
Exprime 1 cm en mètres et en notation scientifique ; puis calcule le nombre d'atomes recherché.
3. Oumar souhaite connaître le nombre d'atomes d'or présents dans le cube d'or de 1 cm d'arête.
Il trouve dans une encyclopédie les informations ci-contre.
Calcule le nombre d'atomes d'or contenu dans le cube.

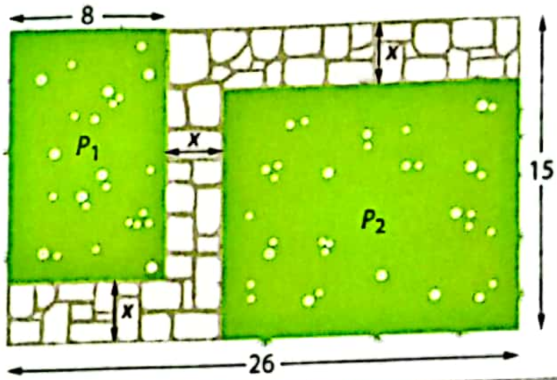
Masse de 1 cm^3 d'or : 19,3 g.
Masse d'un atome d'or : $3{,}27 \times 10^{-22}$ g.

11 Calcul littéral

Pour démarrer

Aménagement d'un jardin

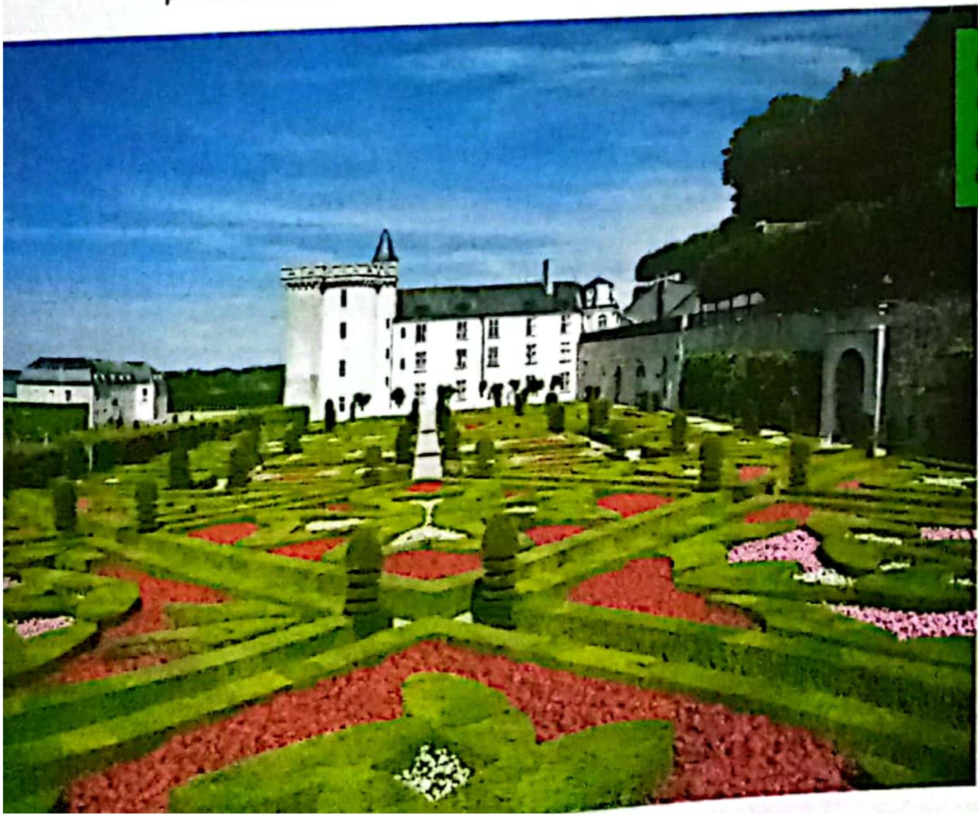
Pour aménager son jardin rectangulaire, Charles a réalisé le plan ci-dessous, où les dimensions sont exprimées en mètres. Il prévoit deux parcelles rectangulaires P_1 et P_2 où il cultivera des fleurs et des arbustes. Une allée traversera le jardin. Comme il hésite sur la largeur de l'allée, il l'a pour l'instant notée « x ».



1 a. Exprime, en fonction de x, la longueur de la parcelle P_1 ; puis son aire .
b. Exprime, en fonction de x, la longueur et la largeur de la parcelle P_2 ; puis son aire.
c. Exprime en fonction de x l'aire de l'ensemble des deux parcelles ; puis l'aire de l'allée.

2 a. Calcule les aires des parcelles et de l'allée pour $x = 1$ m ; pour $x = 2$ m et enfin pour $x = 3$ m.
b. Charles aimerait que l'ensemble des deux parcelles cultivées occupe les $\frac{4}{5}$ de la superficie du jardin.
Quelle valeur doit-il choisir pour la largeur x de l'allée ?

3 Fais un plan du jardin de Charles à l'échelle $\frac{1}{200}$ avec la valeur de x trouvée précédemment.



Les jardins dits « à la française » se caractérisent notamment par la très grande rigueur géométrique de leur plan.

Savoir-faire

À la fin de ce chapitre, tu sauras :
- définir un monôme, un polynôme ;
- développer, réduire, factoriser un polynôme ;
- utiliser les identités remarquables pour transformer l'écriture de polynômes ;
- additionner, multiplier des polynômes ;
- définir et simplifier une fraction rationnelle ;
- reconnaître les valeurs interdites d'une fraction rationnelle.

11 Activités de découverte

1 Développement d'une expression › Cours 1

1 Complète chacun des calculs ci-dessous, effectués de deux façons différentes.

1re méthode : • $8(7+3) = 8 \times \ldots = \ldots$ • $6(5-2) = 6 \times \ldots = \ldots$

2e méthode : • $8(7+3) = 8 \times \ldots + 8 \times \ldots = \ldots + \ldots = \ldots$ • $6(5-2) = 6 \times \ldots - 6 \times \ldots = \ldots - \ldots = \ldots$

La 2e méthode est appelée ***développement d'un produit ou d'une expression.***

2 a, b, c et d désignent des nombres réels.

a. En t'inspirant des exemples précédents, développe les expressions $a(b+c)$ et $a(b-c)$.

b. Utilise ces résultats pour développer les expressions $(a+b)(c+d)$ et $(a+b)(c-d)$.

3 x et y désignent des nombres réels. Développe chacune des expressions.

a. $3(y+2)$; **b.** $2x(x+4)$; **c.** $(y+4)(3y+5)$; **d.** $(4x+3)(x-7)$.

2 Factorisation d'une expression › Cours 1

x et y désignent des nombres réels.

1 Transforme les expressions A et B en complétant les pointillés.

$A = 3x^2 + 6 = 3 \times \ldots + 3 \times \ldots = 3(\ldots + \ldots)$; $B = 5y^2 - 7y = y \times \ldots - y \times \ldots = y(\ldots - \ldots)$.

Cette méthode de calcul est appelée ***factorisation d'une expression.***

2 Factorise chacune des expressions.

a. $6x+9$; **b.** $7x^2+2x$; **c.** $4y-4x$; **d.** $4y^2-12y$; **e.** $6x^3+9x^2-3x$.

3 On donne $C = (x+4)(x-3) + 5(x+4)$.

a. Quel est le facteur commun aux deux termes de cette somme ?

b. Recopie et complète le calcul ci-dessous permettant de factoriser C.

$C = (x+4)(x-3) + 5(x+4) = (x+4)(\ldots + \ldots) = (x+4)(\ldots)$.

4 Factorise chacune des expressions.

a. $(x-2)(x+5) + 8(x-2)$; **b.** $(2x+5)(3x-1) - (2x+5)(2x-6)$.

3 Les identités remarquables › Cours 2

1 a et b désignent des nombres réels.

Développe chacune des expressions.

a. $(a+b)^2$; **b.** $(a-b)^2$; **c.** $(a+b)(a-b)$.

Ces trois égalités sont appelées ***identités remarquables.***

Souviens-toi que :
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$
$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

2 x désigne un nombre réel.

Utilise les réponses aux **1.** pour développer et réduire les expressions ci-dessous.

a. $(3x+2)^2$; **b.** $(2x-7)^2$; **c.** $(x+2)(x-2)$; **d.** $(2x-6)(2x+6)$.

3 x désigne un nombre réel.

a. Recherche les expressions qui sont des identités remarquables de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ ou de la forme $a^2 - 2ab + b^2$; écris-les alors sous une forme factorisée.

$A = x^2 + 10x + 20$; $B = x^2 + 6x + 36$; $C = 49 + 14x + x^2$;

$D = 4x^2 + 6x + 9$; $E = 16 + 24x^2 + 9x^4$; $F = x^2 - 16x + 16$;

$G = x^2 - 6x - 9$; $H = 49 - 28x + 4x^2$; $I = 4x^4 - 20x^2 + 25$.

b. Recherche les expressions qui sont des identités remarquables de la forme $a^2 - b^2$ puis écris-les sous une forme factorisée.

$J = x^2 - 16$; $K = 9x^2 - 12$; $L = 64 - 4x^2$; $M = 4x^4 - 100$.

Recherche d'abord si l'expression comporte deux carrés de la forme a^2 et b^2. Vérifie ensuite si l'un des termes est égal à $2ab$ ou à $-2ab$.

4 Les polynômes › Cours 3

Exemple : L'expression : $5x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 7$ est appelée polynôme de variable x et de degré 4.
$-2x^3$ est appelé monôme de degré 3. Le coefficient de ce monôme de degré 3 est égal à -2.
$+7$ est le terme constant du polynôme.

1 a. Quel est le monôme de degré 2 de ce polynôme ?
b. Quel est le coefficient du monôme de degré 4 de ce polynôme ?

2 Utilise les définitions données dans l'exemple pour compléter le tableau ci-dessous.

Polynôme	Degré du polynôme	Monôme de degré 2	Coefficient du monôme de degré 1	Terme constant
$-x^2 + 2x - 5$	...	...	...	...
$x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 1$	...	...	...	...
$2x^4 + x^3 + 6x + 8$	...	...	...	...

3 Calcule la valeur de chacun des polynômes ci-dessus lorsque : • $x = 0$; • $x = 1$; • $x = 2$.

5 Opérations sur les polynômes › Cours 4

Partie Ⓐ : Observer sur des exemples

Dans les trois situations ci-dessous, on donne deux polynômes A et B.

Situation 1 $A = 2x + 1$
$B = 3x^2 + 4x + 2$

Situation 2 $A = -4x^3 + x + 1$
$B = 4x^3 + x^2$

Situation 3 $A = x^5 - 4x$
$B = 2x^2 + 3$

1 Pour chacune des situations :
a. Calcule, puis réduis la somme $A + B$;
b. Indique le degré des polynômes A, B et $A + B$.

2 Pour chacune des situations :
a. Calcule, puis réduis le produit $A \times B$;
b. Indique le degré des polynômes A, B et $A \times B$.

Partie Ⓑ : Conjecturer des propriétés

Utilise tes observations précédentes pour compléter les propriétés ci-dessous.

Propriété 1 :

Lorsqu'on fait la somme de deux polynômes, le degré du polynôme obtenu est … au degré du polynôme initial du plus haut degré.

Propriété 2 :

Lorsqu'on fait le produit de deux polynômes, le degré du polynôme obtenu est … à … des degrés des deux polynômes initiaux.

6 Fractions rationnelles › Cours 5

On donne les expressions : $A = \dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x - 5}$ et $B = \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 8}{x^2 + x - 6}$.

Le quotient de deux polynômes est appelé fraction rationnelle.

1 Calcule les valeurs de A et de B pour les valeurs suivantes de x : 3 ; 1 ; –1 et 4.

2 a. Pourquoi est-il impossible de calculer B pour $x = 2$?
b. Pour quelle valeur de x est-il impossible de calculer A ?

3 On donne la fraction rationnelle : $C = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 3x}$.
a. Factorise $x^2 - 2x + 1$ et $3x^2 - 3x$, puis écris C avec ces formes factorisées.
b. Quel facteur commun apparaît au numérateur et au dénominateur de C ?
c. Simplifie la fraction rationnelle par ce facteur commun et donne une nouvelle expression de C.
d. Calcule C pour $x = 8$.

11 Cours

1 Développement, factorisation (rappels)

Définitions • Développer une expression, c'est l'écrire sans parenthèses, sous la forme d'une somme algébrique.
• Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs.
• Réduire une expression, c'est l'écrire sous sa forme développée la plus simplifiée.

Propriétés a, b, c et d désignent des nombres réels.

$$
\begin{aligned}
a(b+c) &= ab+ac\\
a(b-c) &= ab-ac\\
(a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd
\end{aligned}
$$

formes factorisées — formes développées

Exemple de développement :
$(2x+3)(4x-7) = 2x\times 4x + 2x\times(-7) + 3\times 4x + 3\times(-7)$
$= 8x^2 - 14x + 12x - 21$
$= 8x^2 - 2x - 21$ (forme réduite).

Exemple de factorisation :
$(x+1)(2x+3) - 5(x+1) = (x+1)\,[(2x+3)-5]$
$= (x+1)\,[2x+3-5]$
$= (x+1)\,(2x-2)$.

2 Identités remarquables (rappels)

Propriétés a et b désignent des nombres réels.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\
(a+b)(a-b) &= a^2-b^2
\end{aligned}
$$

formes factorisées — formes développées

Exemple de développement :
$(7+2x)^2 = 7^2 + 2\times 7\times 2x + (2x)^2$
$= 4x^2 + 28x + 49$.

Exemple de factorisation :
$9 - 4x^2 = 3^2 - (2x)^2$
$= (3+2x)\,(3-2x)$.

3 Monôme, polynôme

a Monôme

Définitions Un monôme est une expression littérale, formée d'une lettre appelée variable, élevée à une certaine puissance, appelée degré, et multipliée par un nombre réel appelé coefficient.

Remarque : La variable représente un nombre réel pouvant prendre diverses valeurs.

Exemples : • $3y^2$ est un monôme ayant :
– pour variable y ;
– pour degré 2 ;
– pour coefficient 3.

• $-8x$ est un monôme ayant :
– pour variable x ;
– pour degré 1, car $x = x^1$;
– pour coefficient -8.

b Polynôme

Définitions • Un polynôme est une somme de monômes.
• Le degré d'un polynôme est le degré de son monôme de degré le plus élevé.

Exemples : • $5x^3 - 2x + 6$ est un polynôme en x de degré 3. Il est formé des monômes $5x^3$, $-2x$ et 6.
• $-2x$ est son monôme de degré 1 car $x = x^1$.
• 6 est un monôme de degré zéro, car pour tout $x \neq 0$, $x^0 = 1$; il est aussi appelé terme constant de ce polynôme.

c Différentes écritures d'un polynôme

Un même polynôme peut être écrit de différentes façons, notamment sous forme développée ou sous forme factorisée.
Pour passer d'une écriture à une autre, on utilise les propriétés des cours 1 et 2.

Notation **Lorsqu'un polynôme est écrit sous forme développée, par habitude, on range les polynômes qui le constituent par degré décroissant.**

Exemple : $A=(1-4x^2)(2x+3)$ → forme factorisée de A
$A=1\times 2x+1\times 3-4x^2\times 2x-4x^2\times 3$ → forme développée mais non réduite de A
$A=2x+3-8x^3-12x^2$ → forme développée et réduite mais non ordonnée de A
$A=-8x^3-12x^2+2x+3$ → forme développée, réduite et ordonnée de A

4 Addition et multiplication de polynômes

Propriétés **A et B désignent deux polynômes en x, de degrés respectifs n et p tels que $n \leq p$.**
• $A+B$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à p. **• $A\times B$ est un polynôme de degré égal à $n+p$.**

Exemple : $A=4x^2-2$ est un polynôme de degré 2.
$B=5x^3-3x^2+6$ est un polynôme de degré 3.
$A+B=4x^2-2+5x^3-3x^2+6$
$A+B=5x^3+x^2+4$.
$A+B$ est un polynôme de degré 3.

Exemple : $A=2x^2-1$ est un polynôme de degré 2.
$B=x^3-4x^2+2$ est un polynôme de degré 3.
$A\times B=(2x^2-1)(x^3-4x^2+2)$
$A\times B=2x^5-8x^4-x^3+8x^2-2$.
$A\times B$ est un polynôme de degré $5=2+3$.

5 Fraction rationnelle

Définition **On appelle fraction rationnelle le quotient de deux polynômes de même variable.**

Exemples : $F=\dfrac{5x^2-3x+6}{x^2-4x}$ et $G=\dfrac{4x^3-x^2+2}{2x^2-5x}$ sont deux fractions rationnelles.

Valeur(s) interdite(s) **Il peut exister une (ou plusieurs) valeur(s) de la variable qui annulent le dénominateur d'une fraction rationnelle. Pour cette (ou ces) valeur(s) dite(s) « interdite(s) », la fraction rationnelle n'est pas définie.**

Exemple : $F=\dfrac{5x^2-3x+6}{x^2-4x}$.
Pour $x=0$ et $x=4$, le dénominateur de la fraction rationnelle s'annule et F n'a pas de valeur définie.
Ainsi, F est définie pour toutes les valeurs de x dans $\mathbb{R}$, à l'exception de 0 et de 4 qui sont des valeurs interdites.

Simplification **Lorsqu'il existe un facteur commun dans l'écriture factorisée du numérateur et du dénominateur, la fraction rationnelle peut être simplifiée par ce facteur.**

Exemple : $G=\dfrac{4x^3-x^2+2x}{2x^2-5x}$.
On met x en facteur au numérateur et au dénominateur ; pour $x\neq 0$, on simplifie la fraction par x :
$G=\dfrac{x(4x^2-x+2)}{x(2x-5)}=\dfrac{4x^2-x+2}{2x-5}$.

11 Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à développer, ordonner, décrire des polynômes

Énoncé

On donne les expressions : $A = 9(x+6) - (2x^2+3)(7-4x)$; $B = (3x-5)^2 + (x^2+7)(x^2-7)$.

1. Développe chaque expression, puis réduis et ordonne le polynôme obtenu.

2. Indique pour chaque polynôme : son degré, le coefficient de son monôme de degré 2, le terme constant.

Solution

1. $A = 9(x+6) - (2x^2+3)(7-4x)$

$A = 9 \times x + 9 \times 6 - [2x^2 \times 7 + 2x^2 \times (-4x) + 3 \times 7 + 3 \times (-4x)]$

$A = 9x + 54 - (14x^2 - 8x^3 + 21 - 12x)$

$A = 9x + 54 - 14x^2 + 8x^3 - 21 + 12x$

$A = 8x^3 - 14x^2 + 9x + 12x + 54 - 21$

$A = 8x^3 - 14x^2 + 21x + 33.$

$B = (3x-5)^2 + (x^2+7)(x^2-7)$

$B = 9x^2 - 30x + 25 + x^4 - 49$

$B = x^4 + 9x^2 - 30x - 24.$

2. A est de degré 3 ; le coefficient de son monôme de degré 2 est -14 ; son terme constant est 33.
B est de degré 4 ; le coefficient de son monôme de degré 2 est 9 ; son terme constant est -24.

- **Je développe chaque produit en utilisant les propriétés des cours 1 et 2.**
- **Je réduis le polynôme en regroupant et en additionnant les monômes de même degré.**
- **Lorsque je reconnais une identité remarquable, j'utilise les formules pour obtenir directement la forme développée.**

S'exercer

Dans les exercices 1 et 2, indique pour chaque polynôme : sa variable, son degré, le coefficient de son monôme de degré 3 et son terme constant.

1 $A = 6x^3 + x^2 - 5x + 7$;
$B = 9y^5 - y^4 - 2y^3 + 8y - 2$;
$C = x^6 + 3x^4 - 5x^3 + 1$.

2 $A = -y^4 + 10y^3 + 8y^2 - 1$;
$B = 7x^5 - 13x^3 - 2x^2 + 8x$;
$C = y^7 - y^5 - 3y^4 + 2y^2 - 7$.

3 Développe et ordonne chaque expression.

a. $5(2+x)$; **b.** $-4(1-3x)$;
c. $y(6+y)$; **d.** $-6x\left(\frac{x}{2} - 4\right)$;
e. $2x(2x^2-3)$; **f.** $-4y^2(8-2y)$.

4 Développe, réduis et ordonne chaque polynôme.

a. $4(x+1) - 6x$; **b.** $-3(12-y^2) + 6y^2$;
c. $y(1+6y) + 8y$; **d.** $3x\left(5 - \frac{2x}{3}\right) + 2x^2$;
e. $3x^3 + 2x^2(5-3x)$; **f.** $7x(x^2-2) + 10x^2$.

5 Développe, réduis et ordonne chaque polynôme.

a. $(x+6)(x+3)$; **b.** $(5+y)(y-2)$;
c. $(3y-1)(3y+2)$; **d.** $4(x+5)(x-6)$;
e. $(5y+3)(2y^2-1)$; **f.** $(x+7)(x^2-3x)$.

Pour les exercices 6 à 8, développe les identités remarquables, puis réduis (quand c'est possible) et ordonne le polynôme.

6 **a.** $(x+7)^2$; **b.** $(x-3)^2$; **c.** $(3y+4)^2$;
d. $(4y-7)^2$; **e.** $(5-4x)^2$; **f.** $(y^2-2)^2$.

7 **a.** $(x+6)(x-6)$; **b.** $(4y+3)(4y-3)$;
c. $(7x+1)(7x-1)$; **d.** $(1-7y)(1+7y)$;
e. $(3+2x)(3-2x)$; **f.** $(2y-6)(2y+6)$.

8 **a.** $(4+x)(x-4)$; **b.** $(3-5y)(5y+3)$;
c. $(x^2+4)(x^2-4)$; **d.** $(8-3y^2)(8+3y^2)$;
e. $(\sqrt{3}+2x)(\sqrt{3}-2x)$; **f.** $\left(\frac{x}{2}+3\right)\left(\frac{x}{2}-3\right)$.

9 **a.** Développe l'expression $(2x+3)^2$.
b. Développe l'expression $(3x-2)^2$.
c. Déduis-en l'écriture développée et ordonnée du polynôme $A = (2x+3)^2 + (3x-2)^2$.

10 **a.** Développe l'expression $A = (5x+2)^2$.
b. Développe l'expression $B = (5x-2)^2$.
c. Déduis-en l'écriture développée et ordonnée des polynômes $A+B$ et $A-B$.

11 On donne $A = (3-4x)^2$ et $B = (2x^2+3)(x-7)$.
a. Développe, réduis et ordonne les polynômes A et B.
b. Déduis-en l'écriture développée et ordonnée des polynômes : $A+B$; $A-B$; $A \times B$.

2 Apprendre à simplifier une fraction rationnelle

Énoncé

1. Factorise les polynômes suivants : **a.** $A = 3x(x+3) - (x+3)(5-x)$; **b.** $B = (x+3)^2 - 5(x+3)$.

2. **a.** Simplifie la fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B}$.

b. Explique pourquoi F n'est pas définie lorsque $x = -3$ ou lorsque $x = 2$.

Solution

1. a. $A = 3x(x+3) - (x+3)(5-x)$
$A = (x+3)[3x - (5-x)]$
$A = (x+3)[3x - 5 + x]$
$A = (x+3)(4x-5)$.
b. $B = (x+3)(x+3) - 5(x+3)$.
$B = (x+3)[(x+3) - 5]$
$B = (x+3)[x+3-5]$
$B = (x+3)(x-2)$.

Pour factoriser une expression :
- je reconnais un facteur commun ;
- si nécessaire, j'utilise les identités remarquables :
  $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (a+b)(a+b)$;
  $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = (a-b)(a-b)$;
  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;
- j'écris ce facteur commun et j'ouvre des crochets dans lesquels je marque le reste de l'expression ;
- je réduis et j'ordonne l'intérieur des crochets.

2. a. $F = \dfrac{(x+3)(4x-5)}{(x+3)(x-2)} = \dfrac{4x-5}{x-2}$, pour $x \neq -3$.
b. Lorsque $x = -3$ ou $x = 2$, $B = 0$, donc
$F = \dfrac{A}{B}$ n'est pas définie pour $x = -3$ ou $x = 2$, qui sont les valeurs interdites pour F.

Pour simplifier une fraction rationnelle :
- j'utilise les formes factorisées de son numérateur et de son dénominateur ;
- lorsque c'est possible, je simplifie.

S'exercer

Pour les exercices 12 à 16, factorise les expressions.

12 $A = 6x^2 + 6$; $B = 10y - 5$;
$C = 2x^3 - 5x$; $D = 6y^4 - 9y$.

13 $A = 2x^3 - 4x^2 + 2x$; $B = -7y^3 + 14y^2 - 35y$;
$C = x^4 - 4x^2$; $D = 5y^4 - 20y^2 - 10y$.

14 $A = 3x(x-4) + 3x(4x+1)$;
$B = y(y+1) - (y+1)(1-4y)$;
$C = (y-1)(2y+3) - 2(y-1)$.

15 $A = (x+2)(3x-1) + (x+2)(2x+3)$;
$B = (6y+7)(y+5) - (y+5)(8-3y)$;
$C = (3x+5)(x-6) + (3x+5)(7-2x)$.

16 $A = (2x+3)^2 - 7(2x+3)$;
$B = (1+y)^2 + 5(1+y)$;
$C = (2y-5)^2 - (2y-5)(y+4)$.

Pour les exercices 17 à 20, utilise les identités remarquables pour factoriser l'expression.

17 $A = x^2 + 4x + 4$; $B = y^2 + 12y + 36$;
$C = 9 + 6x + x^2$; $D = 9y^2 + 12y + 4$.

18 $A = x^2 - 6x + 9$; $B = y^2 - 10y + 25$;
$C = 9x^2 - 18x + 9$; $D = 4y^4 - 4y^2 + 1$.

19 $A = x^2 - 4$; $B = 9y^2 - 4$;
$C = 1 - x^2$; $D = 25y^2 - 49$.

20 $A = (x+3)^2 - 16$; $B = (2y+1)^2 - 9$;
$C = 36 - (x-5)^2$; $D = (y^2+4)^2 - 4y^4$.

21 Simplifie les fractions rationnelles.
$A = \dfrac{5x(2x-5)}{x(7x+1)}$; $B = \dfrac{3x^2(3-x)}{6x^2(5x^2+8)}$;
$C = \dfrac{7x(3x+8)}{(x-4)(3x+8)}$; $D = \dfrac{(x^2+1)(9x-5)}{(x^2-6)(x^2+1)}$.

22 On donne $A = 4(2x+3) - 7x(2x+3)$
et $B = (2x+3)(x+1) + (2x+3)^2$.
a. Factorise A et B.
b. Simplifie la fraction rationnelle :
$F = \dfrac{4(2x+3) - 7x(2x+3)}{(2x+3)(x+1) + (2x+3)^2}$.

23 **a.** Factorise les polynômes ci-dessous.
$A = (2x+1)(5x-2) - (2x+1)(2x-6)$;
$B = (3x+4)^2 + (3x+4)(x-2)$;
$C = 16x^2 + 16x + 4$.
b. Utilise ces formes factorisées pour simplifier les fractions rationnelles :
$F = \dfrac{A}{B}$; $G = \dfrac{B}{C}$; $H = \dfrac{A}{C}$.

Activités d'application

Expressions littérales

24 Enlève les parenthèses puis réduis les expressions.

$A = 7x + 6 - (9y + 15) + 4y - 3x$;

$B = 14 - (8a^2 - 15a) - 6a + 7$;

$C = -3y + (20y - x^2 + 3) - 12$;

$D = 6ab - 7b(-a) + 12a - (6b + 3)$.

25 Développe les expressions.

a. $7(3y - 6)$; **b.** $x(4 - 5x)$;

c. $2a(-3a + 6)$; **d.** $(7b - 2)(-5)$.

26 Développe et réduis les expressions.

a. $(x + 5)(6 + x)$; **b.** $(2y + 3)(3 - y)$;

c. $(4b - 7)(2b + 5)$; **d.** $(\sqrt{5} - y^2)(y - \sqrt{5})$.

27 Factorise les expressions.

a. $5y - 10$; **b.** $9a - 3b$;

c. $6x^2 - x^3$; **d.** $a - 6a^2 + 7ab$.

28 Factorise les expressions.

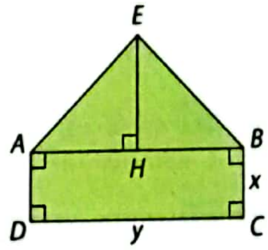
a. $(x + 1)(x + 3) - 2(x + 1)$;

b. $5x(x + 7) + x^2(x + 7)$;

c. $(3x - 2)(x + 4) - x(3x - 2)$;

d. $-2x(x + 8) - (x + 2)(x + 8)$.

29 La figure ci-contre est formée du rectangle *ABCD* de longueur *y* et de largeur *x*, et des deux triangles rectangles isocèles *AHE* et *BHE*. L'unité est le cm.



a. Exprime *AH*, *HB* et *HE* en fonction de *y*.

b. En utilisant la propriété de Pythagore dans le triangle *AHE*, exprime *AE* en fonction de *y*.

c. Exprime le périmètre du polygone *AEBCD* en fonction de x et de *y*.

d. Exprime l'aire du triangle *AHE* ; puis l'aire du polygone *AEBCD* en fonction de *x* et de *y*.

e. Calcule l'aire de ce polygone si $x = 2$ et $y = 6$.

Identités remarquables

30 Développe les expressions en utilisant les identités remarquables.

a. $(a + 6)^2$; **b.** $(x - 5)^2$; **c.** $(2b + 3)^2$;

d. $(8 - y)^2$; **e.** $(x^2 + 3)^2$; **f.** $(-6 + 2a)^2$.

31 Développe les expressions en utilisant les identités remarquables.

a. $(a + 5)(a - 5)$; **b.** $(7 - x)(7 + x)$;

c. $(4b - 3)(4b + 3)$; **d.** $(1 + 3y)(3y - 1)$.

32 Factorise les expressions en utilisant les identités remarquables.

a. $x^2 - 6x + 9$; **b.** $4 + 4a + a^2$;

c. $4y^2 + 8y + 4$; **d.** $16 - 9b^2$.

33 Factorise les expressions en utilisant les identités remarquables.

a. $4x^2 + 9y^2 + 12xy$; **b.** $-36a + 36 + 9a^2$;

c. $8y^2 + 16 + y^4$; **d.** $-x^4 + 100$.

Il faut parfois changer l'ordre des termes pour reconnaître une identité remarquable.

34 Complète les identités remarquables.

a. $(x + \ldots)^2 = \ldots + \ldots + 64$;

b. $(\ldots + 6)^2 = 9a^2 + \ldots + \ldots$;

c. $(x - \ldots)^2 = \ldots - 8x + \ldots$;

d. $(\ldots - \ldots)^2 = \ldots - 12b + 9b^2$.

35 Factorise chaque expression en faisant apparaître une identité remarquable.

a. $3x^2 - 48$; **b.** $28 - 7a^2$;

c. $5y^2 + 10y + 5$; **d.** $27 - 72b + 48b^2$.

Pour a. mets d'ab 3 en facteur.

36 **a.** Exécute le programme de calcul suivant.

① Choisis un nombre compris entre 3 et 10.
② Retranche 2.
③ Élève au carré le résultat obtenu.
④ Ajoute le quadruple du nombre choisi.
⑤ Retranche 4.

b. Compare le résultat obtenu avec le nombre de départ. Qu'observes-tu ?

c. Applique le programme de calcul au nombre x et réduis l'expression obtenue. Qu'observes-tu ?

Monômes et polynômes

37 Indique pour chaque expression s'il s'agit d'un polynôme. Si oui, précise son degré.

a. $x^2 + \dfrac{2}{x} + 6$; **b.** $7y^2 - y$;

c. $2x^3 + 7x^2 - \sqrt{x} + 4$; **d.** $-a^3 - 3$.

38 Indique pour chaque polynôme : sa variable, son degré, le coefficient de son monôme de degré 2 et son terme constant.

$A = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 2$; $B = 2y^6 - 3y^5 + y^2 + 3y - 2$;

$C = a^4 + 3a^3 - a^2$; $D = -y^2 + 7y + 25$.

39 Écris chaque expression sous forme d'un monôme, puis indique son degré.

a. $(-1)(6x^2)$; **b.** $y \times y \times 5 \times y^2$; **c.** $-x^2 \times 7x^3$.

40 a. Réduis et ordonne les polynômes.

$A = 3x - 8 + 4x^2 - (5x + 3) - 2^2$;

$B = 12 - 7y + 6y^2 - (2y + 8y^3) + 4y(-y)$;

$C = -x + 7x^2 - 6 - 3 \times 3x^3 + 6x + 5(-1)$.

b. Indique le degré de chaque polynôme.

41 a. Développe chaque expression ; puis réduis et ordonne le polynôme obtenu.

$A = 5(x + 2) - 4x + 3$;

$B = 8(3 - x) - 5x^2(x - 2)$;

$C = (2x - 5)(3 + 4x) + 6(3 - x^2)$;

$D = 4x(3 + x) - (1 - 3x)(x^2 + 1)$.

b. Calcule la valeur de chaque polynôme pour $x = 1$; puis pour $x = -1$.

42 Développe chaque expression ; puis réduis et ordonne le polynôme obtenu.

$A = (x + 5)^2 - (3x^3 - 5x + 13)$;

$B = (7 - x)^2 - (x - 1)(x + 1)$;

$C = (2x - 3)(2x + 3) - (6 - x)^2$;

$D = (x^2 - 1)^2 + (2x^2 - 1)(2x^2 + 1)$.

43 Factorise les polynômes.

$A = 2x^4 - 4x^3 + 8x$;

$B = 9x^5 - 6x^4 + 3x^2$;

$C = (2x - 1)(7x + 3) + (2x - 1)(2 - x)$;

$D = (5x + 3)^2 + (7 - 2x)(5x + 3)$.

44 On donne : $E = 16x^2 - 9 + (4x + 3)(6 - 2x)$.

a. Factorise $16x^2 - 9$.

b. Utilise ce résultat pour factoriser E.

c. Donne l'expression développée et réduite de E.

d. Calcule E pour $x = 2$; puis pour $x = -1$.

45 Utilise les identités remarquables pour factoriser les polynômes.

$A = 4x^2 - 4x + 1 + (2x - 1)(5 - x)$;

$B = (2x + 3)(x + 4) + 4x^2 + 12x + 9$;

$C = (4x - 5)^2 + 16x^2 - 25$;

$D = (1 - 3x)(3 - x) - 9x^2 + 1$.

46 Calcule la somme $A + B$ des deux polynômes et donne le résultat sous forme réduite et ordonnée.

a. $A = 3x^2 - 8x + 5$ et $B = x^3 + 2x - 4$;

b. $A = -2x^5 + 3x^2 - 12$ et $B = 7x^4 + 9x^3 + 6x + 7$;

c. $A = 2x^2 + 13 - 4x^3 + x$ et $B = 6x^2 - 4 + 3x$.

47 On donne les expressions suivantes :

$A = (4x - 3)(4x + 3) - 6(2x^2 - 3)$;

$B = (2x - 1)^2 + (x + 7)(2x - 1)$.

a. Développe et réduis A et B.

b. Exprime $A + B$ sous la forme d'un polynôme réduit et ordonné.

c. Exprime $A - B$ sous la forme d'un polynôme réduit et ordonné.

48 1. Indique, dans chaque cas et sans poser de calcul, le degré du polynôme $A \times B$.

a. $A = x^2 - 3x$ et $B = 3x - 4$;

b. $A = 3x^3 - x^2 + 2$ et $B = -x^2 + 1$.

2. Calcule, dans chaque cas, le produit $A \times B$ et donne le résultat sous la forme d'un polynôme réduit et ordonné.

Fractions rationnelles

49 On donne la fraction rationnelle $\dfrac{4x^2 + 5x - 3}{x^2 - 3x + 2}$.

Quelles sont, parmi les valeurs suivantes, celles qui sont interdites :

-3 ? -2 ? -1 ? 1 ? 2 ? 3 ?

50 a. Factorise le dénominateur de la fraction rationnelle $\dfrac{x^2 + 3}{4x^2 - 8x}$.

b. Ce dénominateur étant nul si l'un ou l'autre de ses deux facteurs est nul, quelles sont les valeurs interdites de cette fraction rationnelle.

c. Pour quelles valeurs de x la fraction rationnelle n'est-elle pas définie ?

51 Simplifie les fractions rationnelles.

$A = \dfrac{x(x - 4)}{x(6x + 2)}$; $B = \dfrac{3x(5 - 2x)}{3x^2(5x + 4)}$;

$C = \dfrac{3x^2(x - 6)}{(x - 6)(2x + 7)}$; $D = \dfrac{(x^2 - 1)(7x - 5)}{(x^2 + 4)(1 - x^2)}$.

52 a. Factorise le numérateur et le dénominateur de chaque fraction rationnelle.

$A = \dfrac{5x^2 - 5x}{4x - 4}$; $B = \dfrac{2x^3 + x^2 + 5x}{3x^2 - 2x}$;

$C = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$; $D = \dfrac{4x^2 - 4x + 1}{10x^2 - 5x}$.

b. Simplifie chacune de ces fractions rationnelles.

53 a. À l'aide des identités remarquables, factorise les polynômes.

$A = -4x^2 + 49$; $B = 4x^2 - 28x + 49$.

b. Utilise ces formes factorisées pour simplifier la fraction rationnelle : $F = \dfrac{-4x^2 + 49}{4x^2 - 28x + 49}$.

54 a. Utilise les identités remarquables pour factoriser le numérateur et le dénominateur des fractions rationnelles.

$F = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$; $G = \dfrac{9x^2 - 6x + 1}{9x^2 - 1}$;

$H = \dfrac{-25 + 4x^2}{-4x^2 + 20x - 25}$; $I = \dfrac{16 - 25x^2}{25x^2 - 40x + 16}$.

b. Simplifie chacune de ces fractions rationnelles.

Bien comprendre mieux rédiger

55 Comprendre des formulations

a et b désignent deux nombres réels. Associe chaque phrase avec l'expression mathématique correspondante.

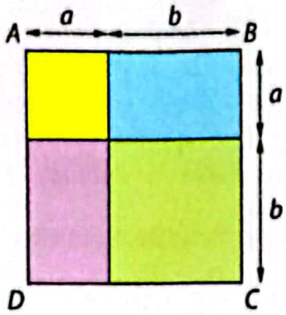
1. Le carré de leur somme — Ⓐ $a^2 - b^2$
2. La différence de leurs carrés — Ⓑ $a^2 + b^2$
3. Leur double produit — Ⓒ $(a+b)^2$
4. Le carré de leur différence — Ⓓ $(a-b)^2$
5. La somme de leurs carrés — Ⓔ a^2b^2
6. Le produit de leurs carrés — Ⓕ $2ab$

56 Aires et identités remarquables

a et b désignent deux nombres réels positifs.
$ABCD$ est un carré de côté $a+b$.

1. Indique, à l'aide des couleurs de la figure, quel domaine possède une aire égale à :

a. a^2 ;
b. b^2 ;
c. $(a+b)^2$;
d. ab.



2. a. Complète l'égalité :
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + \dots$.
b. Retrouve cette égalité en raisonnant sur les aires colorées.

57 Ne rien oublier

Exemple : $A = 2x(3x+5) + 2x$
$A = 2x(3x+5) + 2x \times 1$
$A = 2x[(3x+5) + 1]$
$A = 2x(3x+6)$.

Utilise cet exemple pour factoriser les expressions :
$B = 5x(2x+7) + 5x$;
$C = 3x^2(x+2) - 3x^2$;
$D = (3x+1)(x-4) + (3x+1)$;
$E = (5x-4)(x+1) - (5x-4)$.

58 Vocabulaire

Complète le tableau ci-dessous pour les polynômes proposés.
$A = 4x^3 - 3x^2 + 10$;
$B = 7x^4 - 3x^3 + x^2 + 3$;
$C = -x^6 + x^3 - x^2 - 1$;
$D = x^5 + 6x^3 - 5x^2 + x$.

Polynômes	A	B	C	D
Variable				
Degré				
Monôme de degré 2				
Terme constant				

59 Chercher l'erreur

Les élèves d'une classe de 3ᵉ avaient à effectuer l'exercice suivant :

Développe et réduis l'expression A, puis écris-la sous forme d'un polynôme ordonné.
$$A = 2x(1-x) + 7(x^2-2).$$

Voici les travaux de trois élèves.

Gondo
$A = 2x - x + 7x^2 - 2$
$A = 7x^2 + x - 2$

Noha
$A = 2x \times 1 + 2x \times -x + 7 \times x^2 + 7 \times -2$
$A = 2x - 2x^2 + 7x^2 - 14$
$A = 2x + 5x^2 - 14$

Oumar
$A = 2x \times 1 + 2x(-1x) + 7 \times x^2 + 7(-2)$
$A = 2x - 2x + 7x^2 - 14$
$A = 7x^2 - 14$

Explique les erreurs commises par chaque élève et donne la bonne solution.

60 Valeur(s) interdite(s) d'une fraction rationnelle

Un professeur demande à ses élèves d'indiquer la (ou les) valeur(s) interdite(s) de la fraction rationnelle : $F = \dfrac{(x+7)^2 - 5x(x+7)}{(x+7)(x-3)}$. Voici deux réponses d'élèves :

Dahirou J'ai trouvé deux valeurs interdites : $x = -7$ et $x = 3$.

Azah J'ai factorisé $A = (x+7)^2 - 5x(x+7)$ et j'ai simplifié F.
Je n'ai trouvé qu'une valeur interdite : 3.

a. Détaille les calculs de chacun des élèves.
b. Le professeur souligne : « Souvenez-vous de la façon dont F est donnée au départ. »
Déduis-en quel élève a raison.

61 Mauvaise simplification

Pour simplifier la fraction $F = \dfrac{x^2+6x+9}{x(x+3)}$, Fatou a effectué le calcul suivant :

$$F = \frac{(x^2+6\cancel{x}+9)}{\cancel{x}(x+3)} = \frac{(x^2+6+9)}{(x+3)} = \frac{(x^2+15)}{(x+3)}$$

a. Explique l'erreur commise par Fatou.
b. Factorise x^2+6x+9 puis simplifie la fraction F.

62 Calcul mental

1. a. Justifie l'égalité : $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$.

b. En utilisant cette égalité, effectue mentalement les calculs suivants :

- 101^2-99^2 ; • 105^2-95^2 ; • 510^2-490^2.

2. a. Justifie l'égalité : $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$.

b. En utilisant cette égalité, effectue mentalement les calculs suivants :

- 101^2+99^2 ; • 104^2+96^2 ; • 510^2+490^2.

63 Somme et différence de polynômes

On donne $A=3x(5x-2)$ et $B=25x^2-20x+4$.

a. Écris le polynôme $A+B$ sous forme développée.

b. Écris le polynôme $A-B$ sous forme factorisée.

64 Produit et quotient de polynômes

On donne $A=4x^2-4x+1+(5-x)(2x-1)$ et $B=5x(2x-1)+4x^2-1$.

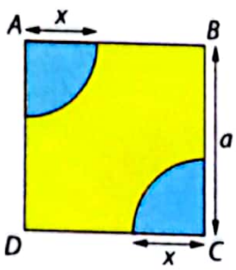
a. Écris les polynômes A et B sous forme factorisée.

b. Déduis-en l'écriture de $A\times B$ sous forme factorisée.

c. Simplifie la fraction rationnelle $F=\dfrac{A}{B}$.

65 Le carré rongé

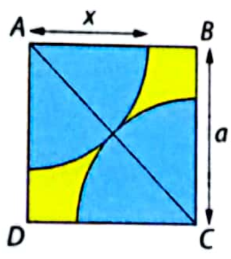
ABCD est un carré de côté a. Les deux quarts de cercle bleus ont pour rayon x. L'unité est le cm.



1. a. Exprime l'aire d'un quart de cercle en fonction de x.

b. Déduis-en l'aire de la partie jaune en fonction de a et de x.

2. On choisit x de sorte que les deux quarts de cercle soient tangents.



a. En utilisant la propriété de Pythagore dans le triangle ABC, démontre que : $AC=a\sqrt{2}$.

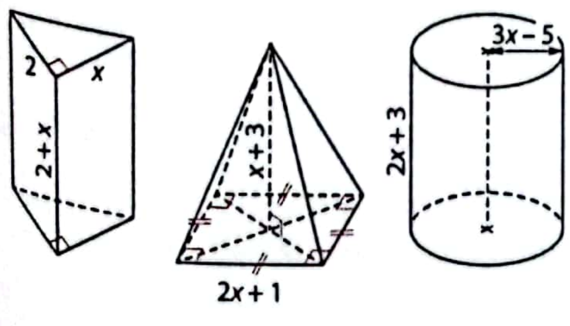
b. Déduis-en la valeur de x en fonction de a.

c. Exprime l'aire de la partie jaune en fonction de a.

66 Des volumes de solides

x désigne un nombre réel strictement positif.

Donne, en fonction de x, la forme développée du volume de chacun des solides ci-dessous.



S'entraîner au BEPC

67 Factorisations

a. Factorise l'expression $P=(x-1)^2-121$.

b. Factorise l'expression $B=(2x+1)^2-16$.

c. Factorise l'expression $P=25x^2-16$.

Extraits BEPC 2000-2001-2002

68 Questionnaire à choix multiples

Parmi les réponses aux questions ci-dessous, choisis celle qui convient.

1. La forme développée et réduite de $P=(3x+1)^2$ suivant les puissances décroissantes de x est égale à :

a. $9x^2+6x+1$	**b.** $9x^2-6x+1$
c. $1+6x+9x^2$	**d.** $9x^2+1$

2. La forme factorisée de $Q=9x^2+6x+1-(3x+1)(4x+5)$ est égale à :

a. $(3x+1)(4+x)$	**b.** $(3x+1)(4-x)$
c. $(3x+1)(-4-x)$	**d.** $(1-3x)(4+x)$

BEPC 2011

69 Polynômes et fractions rationnelles

Dans chacune des questions suivantes, identifie la bonne réponse et recopie-la.

1. La forme développée de $A=(3-2x)(4x+5)+5(9-4x^2)$ est :

a. $-28x^2-82x+60$	**b.** $-28x^2+82x-60$
c. $-28x^2+2x+60$	**d.** $-28x^2-2x-60$

2. La forme factorisée de $A=(3-2x)(4x+5)+5(9-4x^2)$ est :

a. $(3-2x)(20-14x)$	**b.** $(3-2x)(14x+20)$
c. $(2x-3)(14x+20)$	**d.** $(3+2x)(14x-20)$

3. La condition d'existence de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(2+2x)(x-5)}$ est :

a. $x\neq 1$ ou $x\neq -5$	**b.** $x\neq 1$ et $x\neq -5$
c. $x\neq -1$ et $x\neq 5$	**d.** $x\neq -1$ ou $x\neq 5$

BEPC 2010

70 Simplifier une fraction rationnelle

A et B sont deux expressions définies telles que :

$$A=x^2-169 \text{ et } B=(x-13)(x+2).$$

a. Factorise A.

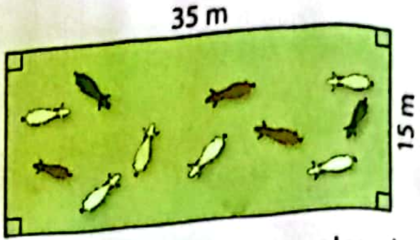
b. Une expression simplifiée de $\dfrac{A}{B}$ est :

(1) $\dfrac{x-13}{x+2}$ (2) $\dfrac{x+2}{x-13}$ (3) $\dfrac{x+13}{x-2}$ (4) $\dfrac{x+13}{x+2}$

Écris la bonne réponse.

BEPC 2003

71 L'enclos



Somen possède une clôture électrifiée de 100 m de long avec laquelle il désire réaliser un enclos rectangulaire pour garder son troupeau de brebis.

1. Dans un premier temps, il réalise un enclos de 35 m de longueur et 15 m de largeur. Quelle est l'aire de l'enclos réalisé par Somen ?

2. Somen aimerait que son enclos rectangulaire ait la plus grande superficie possible. Il imagine alors de transformer son enclos en augmentant la largeur de x mètres, et donc en diminuant la longueur de x mètres.

a. Exprime en fonction de x les dimensions du nouvel enclos imaginé par Somen.

b. Exprime en fonction de x l'aire $\mathcal{A}$ de ce nouvel enclos.

c. Développe et réduis l'expression de $\mathcal{A}$ pour montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme : $\mathcal{A} = -x^2 + 20x + 525$.

3. a. Calcule l'aire $\mathcal{A}$ pour les valeurs suivantes de x : • 4 ; • 6 ; • 8 ; • 10 ; • 12.

b. Pour quelle valeur de x l'aire $\mathcal{A}$ est-elle la plus grande ? Quelle est alors la forme de l'enclos ?

c. Explique pourquoi on trouve la même valeur de $\mathcal{A}$ pour $x = 8$ et pour $x = 12$.

72 La masse idéale

Pour connaître la masse idéale M, en kg, d'une personne en fonction de sa taille T, en cm, la formule la plus utilisée est celle de Lorentz. Elle est différente selon qu'il s'agit d'une femme ou d'un homme.

Pour une femme : $M_F = T - 100 - \dfrac{T-150}{2{,}5}$; **Pour un homme :** $M_H = T - 100 - \dfrac{T-150}{4}$.

1. a. Réduis chaque expression pour l'écrire sous la forme $aT - b$, avec a et b des nombres décimaux positifs.

b. Calcule la masse idéale d'une femme mesurant 170 cm et celle d'un homme mesurant 190 cm.

2. a. Exprime la différence de masse $M_H - M_F$ entre un homme et une femme de même taille T.

b. Réduis l'expression obtenue et montre qu'elle peut s'écrire : $M_H - M_F = 0{,}15T - 22{,}5$.

c. Calcule cette différence de masse entre un homme et une femme mesurant chacun 180 cm.

73 Les boîtes à trésors

Linda possède deux boîtes à « trésors » dans lesquelles elle met ses bijoux et divers petits objets précieux.

La première a la forme d'un cube de 8 cm d'arête.

La deuxième a la forme d'un pavé droit de hauteur 7 cm et de base carrée de 9 cm de côté.

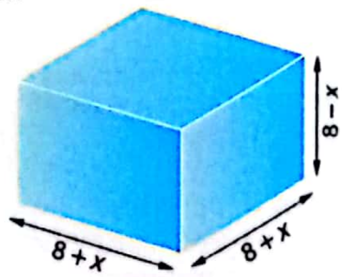
Linda remarque que par rapport à la boîte cubique, les côtés de la base de l'autre boîte mesurent 1 cm de plus et sa hauteur mesure 1 cm de moins.

1. a. Calcule le volume V_0 de la boîte cubique et le volume V_1 de l'autre boîte.

b. Quelle est la boîte la plus volumineuse ? Quelle est la différence de volume entre les deux boîtes ?

2. Linda se demande ce que vaudrait cette différence de volume entre les deux boîtes si les écarts de dimension, au lieu d'être de 1 cm, étaient de x cm.

Pour illustrer la situation, elle a fait la figure ci-dessous.



a. Exprime en fonction de x le volume V_x d'une telle boîte.

b. Donne la forme réduite et ordonnée du polynôme V_x.

c. Montre que la différence de volume entre les deux boîtes s'écrit : $V_x - V_0 = -x^3 - 8x^2 + 64x$.

3. a. Calcule cette différence de volume pour les valeurs suivantes de x : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

b. Parmi ces valeurs de x, indique :

• celle pour laquelle la différence de volume est la plus grande ;

• celles pour lesquelles le volume de la seconde boîte est plus petit que celui de la boîte cubique.

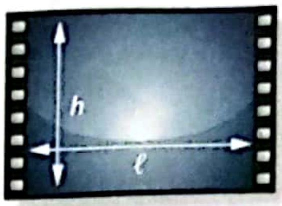
12 Équations, inéquations dans $\mathbb{R}$

Pour démarrer

Le cinéma

Au cours du XX^e siècle, le format des pellicules de film de cinéma a évolué.

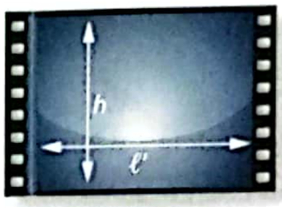
Partie ① : Le cinéma muet



Le format utilisé était appelé « le format $\frac{4}{3}$ ».

Ce quotient correspondait au quotient de la largeur de l'image par la hauteur de l'image. La largeur d'une image sur cette pellicule était alors de 24 mm, détermine la hauteur d'une pellicule de cette époque.

Partie ② : Le cinéma sonore



Une partie de la pellicule fut utilisée pour introduire une bande sonore comme l'indique la photo ci-dessous. Le format est alors devenu le « format 1,37 ».

1 La bande sonore ampute la largeur du « format $\frac{4}{3}$ » de 2 mm. Calcule la nouvelle largeur d'une image.

2 Déduis-en la hauteur d'une image de « format 1,37 ».

Partie ③ : Le DVD

Le DVD (Digital Versatile Disc) est encodé dans une résolution de 720×576 pixels, pour les images, ce qui donne un rectangle de « format 1,25 ».
Calcule la largeur d'une image sur un DVD sachant que sa hauteur est de 18 mm.

Sur l'image ②, on distingue nettement la partie de la pellicule utilisée pour la bande-son.

1

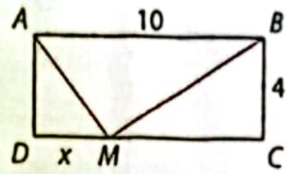
2

Savoir-faire

À la fin de ce chapitre, tu sauras :
- résoudre une équation ou une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}$;
- résoudre des équations se ramenant à une équation du premier degré dans $\mathbb{R}$;
- utiliser les intervalles pour donner l'ensemble des solutions d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}$.

1 Une nouvelle équation › Cours 1

ABCD est le rectangle ci-contre.
M est un point qui se déplace sur le segment [*CD*].
L'unité est le centimètre. On note $x = DM$.



Situation ①

1 Détermine la longueur *DM* pour que le triangle *ADM* ait une aire de 8 cm².

2 Détermine la longueur *CM* pour que le triangle *BCM* ait une aire de 12 cm².

3 Existe-t-il un point *M* sur le segment [*BC*] pour lequel l'aire du triangle *BCM* est de 25 cm² ?

Situation ②

1 **a.** Exprime AM^2 en fonction de x.
b. Exprime *CM* en fonction de x. Déduis-en BM^2 en fonction de x.

2 **a.** Développe l'expression $2(x-2)(x-8)$.
b. Déduis-en que le triangle *ABM* est rectangle en *M* si, et seulement si, $2(x-2)(x-8)=0$.

L'équation $2(x-2)(x-8)=0$ est appelée équation produit.

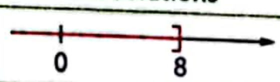
3 **a.** Recopie et complète le tableau ci-dessous.

Valeur de x	0	1	2	…	7	8	9	10
Valeur de $x-2$	…	…	…	…	…	…	…	…
Valeur de $x-8$	…	…	…	…	…	…	…	…
Valeur de $2(x-2)(x-8)$	…	…	…	…	…	…	…	…

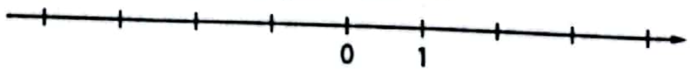
b. Déduis-en deux solutions de l'équation $2(x-2)(x-8)=0$.
c. Existe-t-il un point *M* sur le segment [*BC*] pour lequel le triangle *ABM* est rectangle en *M* ?

2 Résoudre une inéquation › Cours 2

1 Utilise l'exemple proposé à la deuxième ligne pour compléter le tableau ci-dessous.

Inéquation	Opération effectuée	Solutions	Représentation des solutions	Intervalle des solutions
$x-5 \leqslant 3$	J'ajoute 5 aux deux membres de l'inéquation	$x \leqslant 8$	 0 8	$]\leftarrow ; 8]$
$x+4 > 3$	…	…	…	…
$3x \leqslant 6$	…	…	…	…
$-5x > 15$	…	…	…	…

2 **a.** Sur la droite des nombres réels ci-dessous, représente, en rouge, les solutions de l'inéquation $x+4>3$ et, en vert, les solutions de l'inéquation $3x \leqslant 6$.



b. En t'aidant du **a.**, indique si les nombres −2, 1 et 4 sont solutions de l'inéquation $x+4>3$ et de l'inéquation $3x \leqslant 6$.
c. Sur la droite graduée, lis l'intervalle correspondant aux solutions de l'inéquation $x+4>3$ et aux solutions de l'inéquation $3x \leqslant 6$.
On dit que cet intervalle est l'ensemble des solutions du système d'inéquations : $\begin{cases} x+4>3 \\ 3x \leqslant 6 \end{cases}$.

1 Équations du premier degré à une inconnue

a, b, c, d désignent des nombres réels. $a \neq 0$ et $c \neq 0$.

a Équation du premier degré

Définition **Une équation du premier degré à une inconnue, notée x, est une équation de la forme $ax + b = cx + d$ (avec $a \neq c$).**

Propriété **Il existe une unique solution à une équation du premier degré à une inconnue.**

Remarque : Résoudre une équation du premier degré à une inconnue c'est trouver la valeur de l'inconnue pour laquelle l'équation est vraie.

b Équation produit

Définitions • **Une équation produit est une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$.**
• **$(ax + b)$ et $(cx + d)$ sont appelés facteurs.**

Propriété $(ax + b)(cx + d) = 0$ **équivaut à** $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$.

Remarque : On dit qu'un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

Exemple :

$$(3x+6)(2x-4)=0$$
$$3x+6=0 \text{ ou } 2x-4=0$$
$$x=\frac{-6}{3} \text{ ou } x=\frac{4}{2}$$
$$x=-2 \text{ ou } x=2.$$

-2 et 2 sont les solutions de l'équation produit.

c Équation se ramenant à une équation produit

Principe **Lorsque $k \geqslant 0$, l'équation $x^2 = k$ se ramène à une équation produit de la forme $(x + \sqrt{k})(x - \sqrt{k}) = 0$.**

Remarques : • Lorsque $k < 0$, l'équation $x^2 = k$ n'a pas de solution.
• Lorsque $k \geqslant 0$, $x^2 = k$ équivaut à $x^2 = (\sqrt{k})^2$ c'est-à-dire $x^2 - \sqrt{k}^2 = 0$ ou encore $(x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}) = 0$ (identité remarquable).

Exemple : $x^2 = 6$

$$(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})=0$$
$$x-\sqrt{6}=0 \text{ ou } x+\sqrt{6}=0$$
$$x=\sqrt{6} \text{ ou } x=-\sqrt{6}.$$

$\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$ sont les solutions de l'équation.

2 Inéquation du premier degré à une inconnue

a, b, c, d désignent des nombres réels. $a \neq 0$ et $c \neq 0$.
a', b', c', d' désignent des nombres réels. $a' \neq 0$ et $c' \neq 0$.

Dans toute cette partie du cours, tu peux remplacer $\geqslant$ par $\leqslant$ ou $>$ ou $<$.

a Inéquation du premier degré à une inconnue

Définitions **Une inéquation du premier degré à une inconnue, notée x, est une inéquation de la forme $ax + b \geqslant cx + d$ (avec $a \neq c$).**

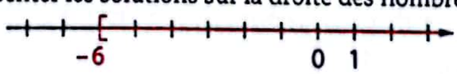
Remarque : Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue c'est trouver toutes les valeurs possibles de l'inconnue pour lesquelles l'inéquation est vraie.

Exemple :

$$5x+4 \geqslant 3x-8$$
$$5x-3x \geqslant -8-4$$
$$2x \geqslant -12$$
$$x \geqslant -6$$

• Les solutions sont : $x \geqslant -6$

• On peut représenter les solutions sur la droite des nombres réels :



• Les solutions peuvent également être présentées sous forme d'intervalle : $x \in [-6\,; \rightarrow[$.

b Système d'inéquations du premier degré à une inconnue

Définition **Un système d'inéquations du premier degré à une inconnue, notée x, est un système de la forme :** $\begin{cases} ax+b \geqslant cx+d \\ a'x+b' \geqslant c'x+d' \end{cases}$ **(avec $a \neq c$ et $a' \neq c'$).**

Remarque : Résoudre un tel système, c'est trouver les solutions communes aux inéquations $ax + b \geqslant cx + d$ et $a'x + b' \geqslant c'x + d'$.

Apprendre à résoudre une équation

Énoncé

Voici trois équations d'inconnue un nombre réel noté x :

Ⓐ $(12-5x)(8x-1)=0$; Ⓑ $x^2=9$; Ⓒ $(3x+2)(4-x)+5x(3x+2)=0$.

1. Résous l'équation Ⓐ.

2. Résous l'équation Ⓑ.

3. a. Factorise l'expression $(3x+2)(4-x)+5x(3x+2)$.

b. Résous l'équation Ⓒ.

Solution

1.
- Je reconnais une équation produit du type $(ax+b)(cx+d)=0$;
- j'utilise la propriété du cours 1. b. pour en déduire que $ax+b=0$ ou $cx+d=0$ et déterminer les solutions.

$(12-5x)(8x-1)=0$ équivaut à $12-5x=0$
c'est-à-dire $12=5x$
d'où $x=\dfrac{12}{5}$ ou $8x-1=0$ c'est-à-dire $8x=1$, d'où $x=\dfrac{1}{8}$.
$\dfrac{1}{8}$ et $\dfrac{12}{5}$ sont les solutions de l'équation Ⓐ.

2.
- Je reconnais une équation du type $x^2=k$;
- je factorise à l'aide de l'identité remarquable pour me ramener à une équation produit.

$x^2=9$ est équivalent à $x^2-9=0$ c'est-à-dire
$x^2-3^2=0$ ou encore $(x+3)(x-3)=0$,
donc $x+3=0$ soit $x=-3$ ou $x-3=0$ soit $x=3$.
-3 et 3 sont les solutions de l'équation Ⓑ.

3. a. Dans certains cas, je peux penser à factoriser afin de me ramener à une équation produit.

$$(3x+2)(4-x)+5x(3x+2)=(3x+2)[4-x+5x]=(3x+2)(4+4x).$$

b. D'après le a., l'équation Ⓒ est équivalente à $(3x-2)(4+4x)=0$, donc $3x+2=0$
c'est-à-dire $3x=-2$ d'où $x=-\dfrac{2}{3}$ ou $4+4x=0$ c'est-à-dire $4x=-4$ d'où $x=-1$.
-1 et $-\dfrac{2}{3}$ sont les solutions de l'équation Ⓒ.

S'exercer

Pour les exercices 1 à 6, résous l'équation produit proposée.

1 a. $(x+3)(x-7)=0$ b. $(x+1)(2x-6)=0$

2 a. $(1-x)(2+x)=0$ b. $(3+x)(1-4x)=0$

3 a. $(2x+3)(3x+7)=0$ b. $(2-5x)(-4-5x)=0$

4 a. $(2+3x)(1-7x)=0$ b. $(1+3x)(-1-4x)=0$

5 a. $\left(x+\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{2}{3}x\right)=0$ b. $\left(2x+\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{4}\right)=0$

6 a. $\left(3x-\dfrac{1}{7}\right)\left(5x+\dfrac{1}{4}\right)=0$

b. $\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{1}{5}x-\dfrac{7}{12}\right)=0$

7 1. Vérifie que $\dfrac{1}{9}$ est solution de l'équation produit $\left(3x-\dfrac{1}{3}\right)\left(-2x+\dfrac{4}{5}\right)=0$.

2. Détermine l'autre solution de cette équation.

Pour les exercices 8 à 11,
1. transforme l'équation proposée en une équation produit ;
2. résous cette équation.

8 a. $x^2=4$ b. $x^2=100$

9 a. $x^2=121$ b. $x^2=81$

10 a. $x^2=7$ b. $x^2=15$

11 a. $4x^2=6$ b. $3x^2=25$

Pense à utiliser l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

12 1. Complète :
$(2x+3)(x+4)-5(2x+3)=(2x+3)\,[\ldots\ldots]$.
2. Résous l'équation : $(2x+3)(x+4)-5(2x+3)=0$.

13 1. Complète :
$(x+5)(1-4x)+3(x+5)=(x+5)\,[\ldots\ldots]$.
2. Résous l'équation : $(x+5)(1-4x)+3(x+5)=0$.

14 1. Factorise l'expression suivante :
$(2x+1)(-5-x)+2(2x+1)$.
2. Résous l'équation : $(2x+1)(-5-x)+2(2x+1)=0$.

Activités d'application

Équations

15 Résous les équations suivantes :

a. $7x+3=3x-2$; b. $x+40=3x$;

c. $\frac{1}{2}-x=\frac{5}{2}$; d. $3x+\sqrt{5}=7\sqrt{5}$.

16 Résous les équations suivantes :

a. $3x+7=5(x+1)$; b. $4-(5-2x)=2(3x+1)$;

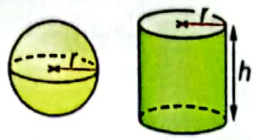
c. $-7(1-2x)=4x$; d. $\frac{x}{2}+7=-5-\frac{x}{4}$;

e. $5\sqrt{2}+x=3x-\sqrt{2}$; f. $7-\frac{1}{3}x=2x+\frac{1}{4}$.

17 On note x un nombre tel que son triple augmenté de 2 est égal à son double diminué de 3. Trouve x.

18 On note x le prix d'un article. Cet article augmente de 5 %, son nouveau prix est 800 F CFA. Trouve x.

19 Dans la figure, ci-dessous la sphère est de rayon 5 cm, le cylindre de hauteur h et sa base de rayon 5 cm.



Peux-tu trouver h pour qu'ils aient le même volume ?

J'utilise les formules : $\mathcal{V}=\frac{4}{3}\pi r^3$ et $\mathcal{V}=\pi r^2 \times h$

20 Résous les équations produit suivantes :

a. $(x+1)(2x+3)=0$; b. $3x(2x+5)=0$;

c. $(2x+7)(3x-12)=0$; d. $(3-2x)(4x-5)=0$.

21 Résous les équations suivantes en te ramenant à une équation produit :

a. $x^2-9=0$; b. $3x^2-4x=0$;

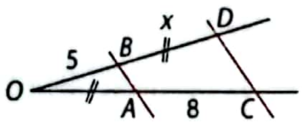
c. $4x^2-25=0$; d. $3x(x+2)+6(x+2)=0$.

22 Résous les équations suivantes :

a. $x^2=16$; b. $x^2=5$;

c. $4x^2=1$; d. $\frac{x^2}{9}=\frac{25}{4}$.

23 Dans la figure ci-contre (AB) // (CD). L'unité est le cm. Détermine la valeur de x.



24 Voici trois expressions :

• $(3x+1)^2-49$; • $9x^2+6x-48$; • $(3x+8)(3x-6)$.

1. Montre que ces trois expressions sont égales. On note $E(x)$ une de ces trois expressions.

2. En utilisant l'expression la plus adaptée de $E(x)$, résous les équations suivantes :

• $E(x)=0$; • $E(x)=9x^2$; • $E(x)=15$.

Inéquations

25 Résous chaque inéquation, représente ses solutions sur une droite graduée et donne l'intervalle solution.

a. $x-3>5$; b. $x+3\leqslant 2$; c. $2<1+x$;

d. $-5x\geqslant 7$; e. $\frac{x}{9}\leqslant 4$; f. $7-3x\geqslant -2$.

26 Résous chaque inéquation et donne l'intervalle solution :

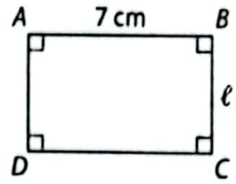
a. $2x+3\leqslant 3x+1$; b. $-13x+15>-6x+6$;

c. $x>-2x+1$; d. $5x-10\leqslant 3x+2$;

e. $8-(x-7)\leqslant 4+3x$; f. $\frac{1}{2}x-3\geqslant\frac{5x}{6}+2$.

27 Un vendeur de poissons doit payer sa place au marché 290 F CFA par jour.
Pour chaque poisson vendu, il gagne 40 F CFA.
Sur une semaine, combien doit-il vendre de poissons pour réaliser un bénéfice ?

28 $ABCD$ est le rectangle ci-contre.
On note ℓ la longueur, en cm, de l'autre côté.



1. Pour quelle valeur de ℓ le périmètre est-il égal à 36 cm ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de ℓ le périmètre est-il inférieur ou égal à 32 cm ?

29 1. Résous chacune des inéquations ci-dessous :

• $3x+1<0$; • $2x+3\leqslant 5x+6$.

2. Représente les solutions de ces inéquations sur une même droite graduée.
3. Déduis-en l'intervalle solution du système :

$$\begin{cases}3x+1<0\\2x+3\leqslant 5x+6\end{cases}$$

30 1. Résous chacune des inéquations ci-dessous :

• $2x+7\geqslant 0$; • $12-4x>0$.

2. Représente les solutions de ces inéquations sur une même droite graduée.
3. Déduis-en l'intervalle solution du système :

$$\begin{cases}2x+7\geqslant 0\\12-4x>0\end{cases}$$

31 Détermine l'intervalle solution de chacun des systèmes ci-dessous.

a. $\begin{cases}x+4\geqslant 0\\2x-6\leqslant 0\end{cases}$ b. $\begin{cases}-2x+3<0\\7x-49\leqslant 0\end{cases}$

c. $\begin{cases}2x+7>0\\-4x+1>0\end{cases}$ d. $\begin{cases}2x-\frac{1}{4}>0\\-5x+2\geqslant 0\end{cases}$

Bien comprendre mieux rédiger

32 Bien s'exprimer

Pour chaque expression écrite, retrouve l'expression algébrique correspondante.

Le double produit de x et y	$x^2 - y^2$
La différence des carrés de x et de y	$2xy$
Le double de la somme de x et y	$(x+y)^2$
Le carré de la somme de x et y	$2(x+y)$

33 Éviter des erreurs fréquentes

Sur les copies ci-dessous les deux élèves ont commis des erreurs. Pour chacune d'elle :

1. indique l'erreur commise par l'élève ;

2. propose une résolution correcte.

Paul	Claire
$5x + 3 = 2x + 7$	$5x + 3 = 2x + 7$
$3x = 4$	$3x = 4$
$x = \frac{4}{-3}$	$x = \frac{4}{-3}$
$x = -\frac{4}{3}$	$x = -\frac{4}{3}$

34 Bien traduire

La recette d'un match de football de la CAN s'est élevée à 1 140 000 F CFA. Ce match a eu lieu dans le stade devant 50 000 spectateurs. Deux tarifs étaient proposés aux spectateurs :

- une place dans les tribunes à 300 F CFA ;
- une place dans les populaires à 180 F CFA.

On veut connaître la répartition des spectateurs selon leur type de billet.

1. x désigne le nombre de spectateurs des tribunes. Que représente la quantité $50\,000 - x$?

2. Quelle est, parmi les quatre équations ci-dessous, celle qui correspond au problème ?

- $180x + 300x = 1\,140\,000$
- $180x + 300(50\,000 - x) = 1\,140\,000$
- $300x + 180(50\,000 - x) = 1\,140\,000$
- $(300 - 180)(50\,000 - x) = 1\,140\,000$

3. Indique la répartition des spectateurs.

35 Vrai ou faux ?

Réponds par vrai ou faux à chacune des affirmations ci-dessous. Justifie.

1. 4 est l'unique solution de l'équation $2x^2 = 32$.

2. $\frac{7}{3}$ et $\frac{1}{4}$ sont solution de l'équation $(3x+7)(4x+1) = 0$.

3. L'inéquation $3x + 7 \leq 5x - 1$ a pour intervalle solution $[4 ; \rightarrow[$.

4. $[3 ; 5[$ est l'intervalle solution de $\begin{cases} 2x - 6 \geq 0 \\ 20 - 5x > 5 \end{cases}$.

36 Se ramener à une équation du 1er degré

1. Dans chacune des situations ci-dessous, poursuis le raisonnement afin de résoudre l'équation proposée.

Situation 1
$(3x+7)(4x-5) = 0$ est équivalent à $3x + 7 = 0$ ou $4x - 5 = 0$, c'est-à-dire … .

Situation 2
$4x^2 = 5x$ est équivalent à $4x^2 - 5x = 0$ c'est-à-dire $x(4x - 5) = 0$, c'est-à-dire … .

Situation 3
$(3x+7)^2 - (3x+7)(x+5) = 0$ est équivalent à $(3x+7)[(3x+7) - (x+5)] = 0$ est équivalent à … .

Situation 4
$2x^2 = 6$ est équivalent à $x^2 = 3$ c'est-à-dire $x^2 - 3 = 0$ c'est-à-dire … .

37 Intervalle solution

1. Recopie et complète le tableau suivant comme dans l'exemple de la deuxième ligne.

Inéquation de départ	Opération effectuée sur chaque membre	Inéquation équivalente
$3x < 6$	diviser par 3	$x < 2$
$x - 2 \leq 4$	…	x …
$-3x > 9$	…	x …
$-x < -3$	…	x …
$\frac{x}{2} > 4$	…	x …

2. Traduis la dernière colonne à l'aide d'intervalles.

38 Texte à trous

Énoncé : Un des côtés d'un rectangle mesure … cm. Quelle doit être la mesure de l'autre côté pour que le périmètre soit … à … cm et l'aire … à … cm^2 ?

1. Retrouve les mots et les nombres manquants en lisant le début du raisonnement d'un élève indiqué ci-dessous :

- Je note x la mesure en cm de l'autre côté.
- Je cherche une solution x qui vérifie :

$$12x \geq 60 \text{ et } 2(x + 12) \leq 44$$

2. Résous chaque inéquation et représente, sur une même droite graduée, en vert les solutions de $12x \geq 60$ et en rouge les solutions de $2(x + 12) \leq 44$.

3. Réponds à la question posée dans l'énoncé sachant que les dimensions du rectangle sont des nombres entiers naturels.

39 Calcul de bénéfice

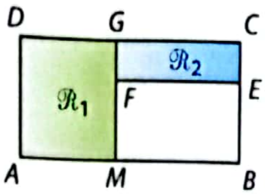
À la foire de Yaoundé, Yempo a acheté des œufs 40 F CFA l'unité. Sa fille Nougba en casse 10.
Yempo revend le reste dans son village 60 F CFA l'unité et réalise un bénéfice égal au quart du prix d'achat des œufs.

1. Combien d'œufs Yempo a-t-elle acheté à la foire ?
2. Quel est le bénéfice réalisé par Yempo ?

40 Notes et moyenne

Lors du dernier trimestre, Rakoto a obtenu 14 en français, 13 en anglais et il a oublié sa note de mathématiques. En revanche, il se souvient que la moyenne de ces trois matières est 15 et que ces trois matières ont le même coefficient.
Calcule la note de mathématiques de Rakoto.

41 En géométrie



Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$ cm et $AD = 3$ cm. M est un point du segment $[AB]$ et E le point du segment $[BC]$ tel que $CE = 2$ cm.
On note $x = AM$.

1. Pour quelle valeur de x les périmètres des rectangles $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont-ils égaux ?
2. Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle $\mathcal{R}_1$ est-elle strictement inférieure à l'aire du rectangle $\mathcal{R}_2$?

42 Élection

Lors d'une élection, 5 217 bulletins furent déposés dans l'urne. Tous ces bulletins étaient valables. Le vainqueur battait ses trois opposants de respectivement 22, 30 et 73 voix.
Calcule le nombre de voix obtenues par chacun des candidats ?

43 Avec des identités remarquables

1. Utilise les identités remarquables pour factoriser chacune des expressions :
a. $81x^2 - 9$ b. $4x^2 + 4x + 1$ c. $25x^2 - 20x + 4$
2. Résous chacune des équations :
a. $81x^2 + 9 = 0$ b. $4x^2 + 4x + 1 = 0$ c. $25x^2 - 20x + 4 = 0$

44 Charge maximale

Un bus dont la masse à vide est 6 tonnes, transporte les enfants du village. Le chauffeur du bus pèse 70 kg et, en moyenne, un enfant pèse 35 kg.
Pour respecter la réglementation, la masse totale ne doit pas dépasser 8 tonnes.
Détermine le nombre maximal d'enfants qui peuvent être transportés avec ce bus.

S'entraîner au BEPC

45 Factorisations

a. Factorise l'expression : $P = (x - 1)^2 - 121$.
b. On donne l'expression : $B = (2x + 1)^2 - 16$. Factorise B.
c. Factorise l'expression : $P = 25x^2 - 16$.

Extraits des BEPC 2000-2001-2002

46 Les mangues d'Atangana

Atangana a acheté un certain nombre de mangues à raison de 20 F CFA l'une. Sa fille en a mangé 15 et Atangana a revendu les mangues restantes à raison de 50 F CFA l'une ; il a ainsi réalisé un bénéfice égal au quart du prix d'achat des mangues.
Combien de mangues Atangana a-t-il acheté ?

BEPC 2000

47 Une aire égale au périmètre

Un côté d'un rectangle mesure 6 cm. Le périmètre (en cm) et l'aire (en cm²) sont exprimés par le même entier naturel. Soit x la longueur de l'autre côté.

1. Montre que x est solution de l'équation : $4x - 12 = 0$.
2. Trouve la mesure de l'autre côté.

BEPC 2005

48 Une équation produit

Soit l'expression littérale : $P = (x + 1)^2 + (x + 1)(3x - 5)$.
a. Développe et réduis P.
b. Donne la forme factorisée de P.
c. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x + 1)(4x - 4) = 0$.

BEPC 2009

49 Équation et rectangle

Un rectangle a pour périmètre 50 cm.
Trouve ses deux dimensions sachant que la longueur a 5 cm de plus que la largeur.

BEPC 2008

50 Quatre expressions

On donne $p(x) = 25x^2 - 81$ et $q(x) = x^2 + 14x + 49$.

1. Factorise $p(x)$ et $q(x)$.
2. Résous dans $\mathbb{R}$: • $(x + 3)(x - 5) = 0$; • $(x + 4)^2 = 0$.

BEPC 2007

51 Location d'une machine

1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $15x + 20 = 110$.
2. M. Kafinda est menuisier. Pour réaliser ses travaux, un atelier lui propose un contrat dont les termes sont les suivants :
• 2 000 F CFA de caution non remboursable ;
• 1 500 F CFA par heure passée sur la machine à bois.
Aujourd'hui M. Kafinda a payé 11 000 F CFA.
Combien d'heures a-t-il passé sur la machine ?

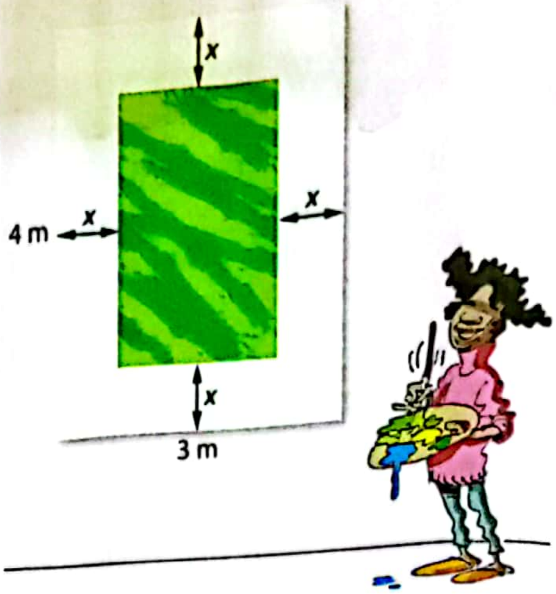
BEPC 2011

52 Un tableau harmonieux

Une galerie d'art de Yaoundé va fêter ses 50 ans d'existence.
Pour cette occasion, la pièce principale va être décorée d'un immense tableau de 4 mètres sur 3.
Le peintre chargé de la réalisation de ce tableau pense que cette œuvre sera harmonieuse si elle respecte la condition suivante :

l'aire du contour, en blanc, devra être égale à l'aire de la partie peinte en vert.

On note x la largeur, en mètres de la bande blanche.



1. a. Exprime, en fonction de x, l'aire de la bande blanche puis l'aire de la partie en vert.
b. Montre que la condition exprimée par le peintre correspond à l'équation $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

2. Démontre que : $2x^2 - 7x + 3 = (x - 3)(2x - 1)$.

3. Déduis-en la largeur du contour et l'aire, colorée en vert, de la portion à peindre.

53 Téléphonie mobile

La société OLA propose à M. Bieme un abonnement téléphonique de 980 F CFA par mois et 13 F CFA par minute de communication.

Une autre société, la compagnie BYE, propose un abonnement téléphonique de 950 F CFA par mois et 14,5 F CFA par minute de communication.

M. Bieme cherche à savoir la durée de communication mensuelle à partir de laquelle le forfait OLA est plus rentable.
On note x la durée, en minutes, de communication par mois.

1. Exprime en fonction de x le montant d'une facture de l'abonnement OLA ; puis d'une facture de l'abonnement BYE.

2. Traduis le problème par une inéquation.

3. Indique, suivant le temps de communication mensuel, la société de téléphonie que M. Bieme doit choisir.

54 Créer un logo

Salimata veut créer un logo pour son club de football.
Elle décide de mettre côte à côte trois carrés comme le montre la figure ci-contre.
Elle sait que l'aire totale de cette figure est de 116 cm^2 et que chaque côté d'un carré mesure 2 cm de plus de celui d'à côté.
On note x la longueur, en cm, du côté du carré rouge.

1. Exprime, en fonction de x, l'aire de chaque carré.

2. Utilise l'aire totale pour obtenir une équation d'inconnue x.

3. a. Montre, en développant, que :
$$x^2 + (x+2)^2 + (x+4)^2 = 3x^2 + 12x + 20.$$
b. Montre que $x^2 + 4x - 32 = (x+8)(x-4)$.

4. Donne la longueur du côté de chaque carré et la longueur totale du logo.

13 Systèmes d'équations et d'inéquations

Pour démarrer

Artisanat en métal

Joseph fabrique des objets en métal pour les vendre aux touristes.
La fabrication d'un oiseau lui prend toujours le même temps. Il en est de même avec celle d'une voiture. Ce matin il lui a fallu 195 minutes pour fabriquer 2 oiseaux et 5 voitures. Cet après-midi, il lui a fallu 215 minutes pour fabriquer 4 oiseaux et 3 voitures. Joseph veut déterminer le temps nécessaire à la fabrication de chacune de ces figurines.

1 Son collègue Vincent lui dit : « Il te faut 10 minutes pour faire un oiseau et 35 minutes pour faire une voiture car $2 \times 10 + 5 \times 35 = 195$ ».
a. Utilise l'affirmation de Vincent pour déterminer le temps nécessaire à la fabrication de 4 oiseaux et 3 voitures.
b. Cela correspond-il au temps mis par Joseph cet après-midi ? Que peux-tu en conclure ?

2 Sa fille Linda lui dit : « C'est 50 minutes par oiseau et 5 minutes par voiture car $4 \times 50 + 3 \times 5 = 215$. »
a. Utilise l'affirmation de Linda pour déterminer le temps nécessaire à la fabrication de 2 oiseaux et 5 voitures.
b. Cela correspond-il au temps mis par Joseph cet après-midi ? Que peux-tu en conclure ?

3 Joseph pense qu'il lui faut 35 minutes pour faire un oiseau et 25 minutes pour faire une voiture. Vérifie que la proposition de Joseph est cohérente avec son travail du matin et avec son travail de l'après-midi.

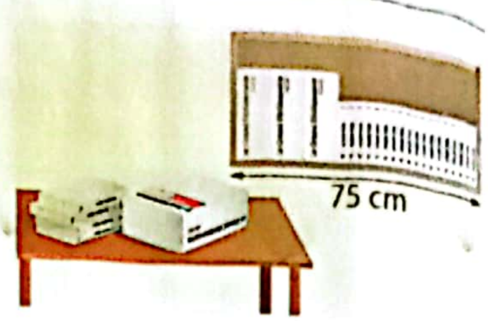
Les sculptures en métal recyclé sont des objets d'art populaire très prisés.

Savoir-faire

À la fin de ce chapitre, tu sauras :
- reconnaître si un couple de nombres réels est solution d'une équation du 1[er] degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- résoudre par substitution ou par combinaisons linéaires un système de deux équations du 1[er] degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes ;
- représenter l'ensemble des points dont les coordonnées dont solutions d'une équation du 1[er] degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- résoudre graphiquement un système d'inéquations du 1[er] degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

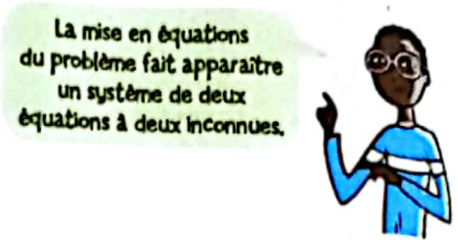
1 Méthode par substitution › Cours 1

Un documentaliste a rempli entièrement une étagère de 75 cm avec 18 livres de poche tous identiques et 3 dictionnaires, également tous identiques.
Il a par ailleurs constaté que 4 livres de poche avaient la même épaisseur qu'un dictionnaire. Il souhaite connaître l'épaisseur d'un livre ainsi que celle d'un dictionnaire.
Il note pour cela x l'épaisseur, en cm, d'un livre de poche, et y l'épaisseur, en cm, d'un dictionnaire.



1 Explique pourquoi on a : $\begin{cases} 18x + 3y = 75 \\ y = 4x \end{cases}$.

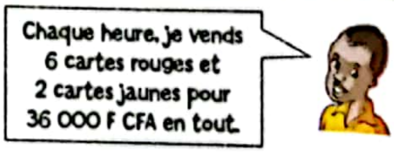
2 a. Avec combien de livres de poche le documentaliste aurait-il rempli entièrement son étagère ? Justifie ta réponse.
b. Déduis-en une nouvelle égalité vérifiée par x.

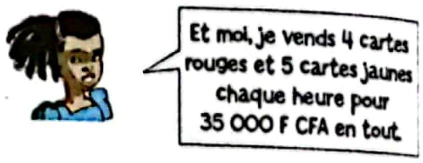


3 a. Calcule alors l'épaisseur d'un livre de poche.
b. Déduis-en l'épaisseur d'un dictionnaire à l'aide d'une des deux équations de la question 1.

2 Méthode par combinaisons linéaires › Cours 1

Joseph et Fatoumata vendent des cartes téléphoniques et comparent leurs ventes. On souhaite déterminer le prix, noté x, d'une carte rouge et celui, noté y, d'une carte jaune.





1 Explique pourquoi on a : $\begin{cases} 6x + 2y = 36\,000 \\ 4x + 5y = 35\,000 \end{cases}$.

2 Fatoumata dit à Joseph : « Si tu travailles 2 heures et si je travaille 3 heures, nous aurons vendu le même nombre de cartes rouges. »
a. Vérifie l'affirmation de Fatoumata.
b. Explique alors pourquoi x et y vérifient le système $\begin{cases} 12x + 4y = 72\,000 \\ 12x + 15y = 105\,000 \end{cases}$.
c. En soustrayant terme à terme ces deux équations, déduis-en le prix de 11 cartes jaunes ; puis celui d'une seule carte jaune.
d. Déduis-en le prix d'une carte rouge à l'aide d'une des deux équations de la question 1.

3 Les valeurs de x et y ainsi trouvées vérifient-elles l'autre équation établie à la question 1. ?

3 Interprétation graphique d'un système › Cours 1c

1 Dans un repère, trace les droites $(d) : x + 3y = 11$ et $(d') : 2x - y = 1$.

2 a. Sur le graphique, marque en rouge trois points dont les coordonnées vérifient l'égalité $x + 3y = 11$.
b. Sur le graphique, marque en bleu trois points dont les coordonnées vérifient l'égalité $2x - y = 1$.
c. Est-il possible de marquer un point A à la fois en rouge et en bleu ? Si oui, lequel ?

3 On souhaite résoudre le système (S) $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$.
a. D'après la question 2., quel point possède des coordonnées qui sont solutions des deux équations de ce système ?
b. Vérifie cette conjecture en résolvant, par le calcul, le système (S).

4 Demi-plan › Cours 2

1 Dans un repère, trace la droite (d) d'équation $2x - 5y + 3 = 0$; puis place les points A, B, C, D, E, F et G dont les coordonnées sont données ci-dessous.

Nom du point	Coordonnées $(x\,;y)$	$2x - 5y + 3$	A-t-on $2x-5y+3>0$?
A	$(1\,;4)$	$2\times1-5\times4+3=-15$	Non
B	$(2\,;1)$	...	...
C	$(-1\,;-2)$	...	...
D	$(3\,;5)$	...	...
E	$(1\,;1)$	...	...
F	$(4\,;-1)$	...	...
G	$(3\,;3)$	...	...

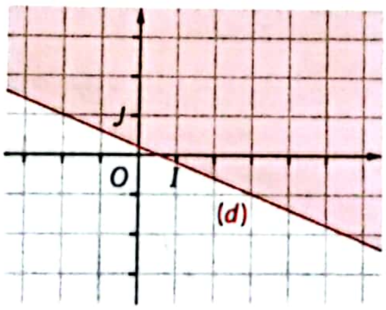
2 Recopie et complète le tableau.

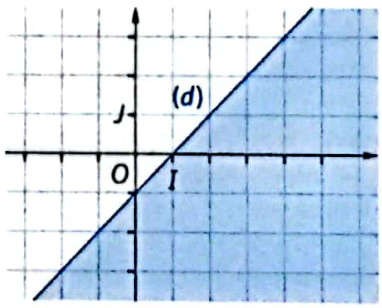
3 Où sont situés tous les points dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient :
a. $2x - 5y + 3 > 0$? **b.** $2x - 5y + 3 = 0$? **c.** $2x - 5y + 3 < 0$?
Colorie d'une couleur différente chacun de ces domaines.

4 *On dit que les points situés en-dessous de la droite* (d) *appartiennent au demi-plan d'inéquation* $2x - 5y + 3 > 0$ *et que la droite* (d) *est une frontière de ce demi-plan.*
Donne une inéquation du demi-plan situé au-dessus de la droite (d).

5 Système d'inéquations à deux inconnues › Cours 3

Danielle a résolu graphiquement l'inéquation $2x + 5y < 1$ sur le graphique ① et l'inéquation $x + y > -1$ sur le graphique ②.
Les demi-plans colorés en rouge et en bleu sont **ceux qui ne sont pas solutions** de ces inéquations.

①


②


1 **a.** D'après les graphiques de Danielle, le point $A(-1\,;2)$ est-il une des solutions de l'inéquation $2x + 5y < 1$? de l'inéquation $-x + y > -1$?
b. Reprends la question **1. a.** pour chacun des points : • $B(3\,;-2)$ • $C(4\,;1)$ • $D(-2\,;-2)$

2 Trace dans un même repère les droites (d) et (d') ; puis place les points A, B, C et D.

3 Le professeur demande à Danielle :
« Où sont situés les points du plan dont les coordonnées vérifient le système $(S)\begin{cases}2x+5y<1\\-x+y>-1\end{cases}$? »
a. Explique pourquoi le point A n'est pas une des solutions du système (S).
b. Qu'en est-il pour les points B, C et D ?
c. Comment Danielle peut-elle utiliser ses deux coloriages pour répondre au professeur ?
d. Colore sur ton graphique tous les points du plan dont les coordonnées ne sont pas solutions du système (S).

Le plan est muni d'un repère. Les lettres p, q et r ainsi que les lettres p', q' et r' désignent des nombres réels fixés.

1 Système de deux équations à deux inconnues

a Définitions

Définition **Un système de deux équations à deux inconnues x et y peut s'écrire sous la forme $\begin{cases} px+qy=r \\ p'x+q'y=r' \end{cases}$.**

Exemple : $\begin{cases} 6x-8y=12 \\ -2x+y=1 \end{cases}$ est un système de deux équations dont les deux inconnues sont x et y.

Définition **Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ un système de deux équations à deux inconnues x et y, c'est trouver toutes les valeurs possibles de x et y qui sont des solutions de chacune des deux équations. Tout couple de valeurs $(x\,;y)$ qui convient est appelé solution du système.**

Exemple : $(-2\,;-3)$ est une solution du système car on a à la fois :
$6\times(-2)-8\times(-3)=-12+24=12$
et $-2\times(-2)+(-3)=4-3=1$.

b Méthodes de résolution

Principe **Pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues, on peut utiliser la méthode par substitution ou la méthode par combinaisons linéaires.**

Méthode par substitution

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par substitution, c'est :
① exprimer une des deux inconnues en fonction de l'autre grâce à une des deux équations ;
② substituer l'inconnue ainsi exprimée dans la seconde équation.

Exemple : (S) désigne le système $\begin{cases} 6x-8y=12 \\ -2x+y=1 \end{cases}$.

La seconde équation permet d'écrire $y=1+2x$.
On peut alors substituer y par $1+2x$ dans la première équation.
On obtient alors : $6x-8(1+2x)=12$ c'est-à-dire $-10x=20$, c'est-à-dire $x=-2$.
On en déduit alors que
$y=1+2\times(-2)=1-4=-3$.
La solution du système (S) est donc $(-2\,;-3)$.

Méthode par combinaisons linéaires

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par combinaisons linéaires, c'est :
① multiplier chaque équation par un nombre correctement choisi ;
② additionner ensuite les deux équations obtenues afin d'éliminer l'une des inconnues.

Exemple : (S) désigne le système $\begin{cases} 6x-8y=12 \\ -2x+y=1 \end{cases}$.

En multipliant la seconde équation par 3, on obtient $-6x+3y=3$.
En l'additionnant à la première équation, on obtient $-5y=15$, c'est-à-dire $y=-3$.
En remplaçant y par -3 dans la seconde équation du système (S), on obtient $-2x-3=1$, c'est-à-dire $-2x=4$, c'est-à-dire $x=-2$.
La solution du système (S) est donc $(-2\,;-3)$.

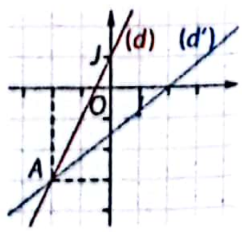
Ces deux méthodes sont détaillées en page 156.

c Intersection de droites

Principe **Rechercher, quand elle(s) existe(nt) la (ou les) solution(s) du système $\begin{cases} px+qy=r \\ p'x+q'y=r' \end{cases}$, c'est déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection des droites (d) d'équation $px+qy=r$ et (d') d'équation $p'x+q'y=r'$.**

Exemple : Les coordonnées du point d'intersection des droites (d) : $6x-8y=12$ et (d') : $-2x+y=1$ sont les solutions du système $\begin{cases} 6x-8y=12 \\ -2x+y=1 \end{cases}$.

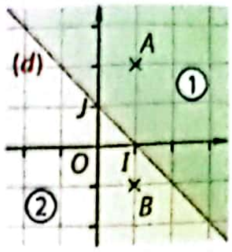
D'après les exemples précédents, le point A a pour coordonnées $(-2\,;3)$ ce qu'on peut contrôler par lecture graphique.



2 Inéquation à deux inconnues

a Demi-plan

Définitions **Un demi-plan est une partie du plan délimitée par une droite appelée frontière.**



Exemple : La droite (d) d'équation $x+y-1=0$ partage le plan en deux demi-plans : le demi-plan ① situé « au-dessus » de la droite (d) et le demi-plan ② situé « au-dessous » de la droite (d).
La droite (d) est la frontière de chacun de ces deux demi-plans.

b Inéquations à deux inconnues

Dans ces deux parties du cours, tu peux remplacer $>$ par $<$ ou $\geqslant$ ou $\leqslant$.

Propriété **L'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient l'inégalité $px+qy+r>0$ est un demi-plan. La frontière de ce demi-plan est la droite (d) d'équation $px+qy+r=0$.**

Définition **On dit que $px+qy+r>0$ est une inéquation de ce demi-plan.**

Exemple : L'ensemble des points dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient l'inégalité : $x+y-1>0$ est un demi-plan.
Sa frontière est la droite $(d) : x+y-1=0$. Son inéquation est $x+y-1>0$.
$A(1\,;2)$ est dans ce demi-plan car : $x_A+y_A-1=1+2-1=2>0$.
$B(1\,;-1)$ n'est pas dans ce demi-plan car : $x_B+y_B-1=1-1-1=-1\leqslant 0$.

Définition **Résoudre graphiquement l'inéquation $px+qy+r>0$, c'est déterminer le demi-plan qui correspond à l'inéquation $px+qy+r>0$.**

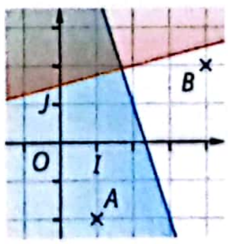
Exemple : L'ensemble des solutions de l'inéquation $x+y-1>0$ est le demi-plan ① coloré en vert, droite (d) non comprise du graphique du paragraphe **a**.

3 Système d'inéquations à deux inconnues

Définition **Résoudre graphiquement le système d'inéquations $\begin{cases}px+qy+r>0\\p'x+q'y+r'>0\end{cases}$, c'est déterminer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ sont à la fois solutions de l'inéquation $px+qy+r>0$ et de l'inéquation $p'x+q'y+r'>0$.**

La méthode pour résoudre graphiquement un tel système est présentée à la page 157.

Exemple : (S) désigne le système $\begin{cases}-x+4y<6\\3x+y>7\end{cases}$.



Dans le repère ci-contre, les points qui ne sont pas solutions de l'inéquation $x+4y<6$ ont été colorés en rouge.
Ceux qui ne sont pas solutions de l'inéquation $3x+y>7$ ont été colorés en bleu.
Ainsi, le point A est solution de l'inéquation $-x+4y<6$ mais pas de l'inéquation $3x+y>7$. Il n'est donc pas solution du système (S).
Le point B est à la fois solution de l'inéquation $-x+4y<6$ et de l'inéquation $3x+y>7$. Il est donc l'un des points qui sont solution du système (S).
L'ensemble des solutions du système (S) est l'ensemble des coordonnées des points situés dans la partie blanche.

1 Apprendre à résoudre un système d'équations

Énoncé

1. Résous le système (S) $\begin{cases} 3x + y = 1 \ (L_1) \\ 4x + 2y = 6 \ (L_2) \end{cases}$ en utilisant la méthode par substitution.

2. Résous le système (S') $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \ (L_1) \\ 3x - 5y = 1 \ (L_2) \end{cases}$ en utilisant la méthode par combinaisons linéaires.

Solution

1 Dans l'équation (L_1), j'isole y afin de l'exprimer en fonction de x.
2 Dans l'équation (L_2), je remplace y par l'expression trouvée au 1 : j'obtiens une équation d'inconnue x que je résous.
3 Je remplace x par sa valeur dans l'expression trouvée à l'étape 1 afin d'obtenir la valeur de y.
4 Je vérifie que le couple de nombres $(x\,;y)$ trouvé est bien solution du système (S).

1. 1 $(L_1) : y = 1 - 3x$
2 $(L_2) : 4x + 2(1 - 3x) = 6$
$4x + 2 - 6x = 6$
$-2x = 4$
$x = -2$
3 $y = 1 - 3 \times (-2)$
$y = 7$
4 $3 \times (-2) + 7 = -6 + 7 = 1$
et $4 \times (-2) + 2 \times 7 = -8 + 14 = 6$
La solution du système (S) est le couple $(-2\,;7)$.

1 Je multiplie l'équation (L_1) par 3 et l'équation (L_2) par -2 afin d'obtenir deux équations dont les coefficients devant l'inconnu x sont opposés.
2 J'additionne membre à membre les deux équations obtenues ; j'obtiens une équation d'inconnue y.
3 Je résous cette équation pour trouver la valeur de y.
4 Je remplace y par sa valeur dans l'une des deux équations du système afin d'obtenir la valeur de x.
5 Je vérifie que le couple de nombres $(x\,;y)$ trouvé est bien solution du système.

2. 1 $3 \times (L_1)$: $6x + 9y = 21$
$-2 \times (L_2)$: $-6x + 10y = -2$
2 En additionnant $19y = 19$
3 $19y = 19$ donne $y = 1$
4 $2x + 3 \times 1 = 7$
$2x + 3 = 7$
$x = 2$
5 $2 \times 2 + 3 \times 1 = 4 + 3 = 7$
et $3 \times 2 - 5 \times 1 = 6 - 5 = 1$
La solution du système (S') est le couple $(2\,;1)$.

S'exercer

Pour les exercices 1 et 2, vérifie si le couple $(x\,;y)$ est solution du système proposé.

1 $\begin{cases} 4x + 5y = 14 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$ $(x\,;y) = (1\,;2)$

2 $\begin{cases} x - 6y = -35 \\ -7x + 2y = 45 \end{cases}$ $(x\,;y) = (-5\,;5)$

3 Le plan est muni d'un repère. Vérifie par un calcul si le point $A(5\,;2)$ est le point d'intersection des droites $(d) : 2x + 7y = 24$ et $(d') : 3x - 4y = 7$.

Pour les exercices 3 à 6, résous les systèmes en utilisant la méthode par substitution.

4 **a.** $\begin{cases} y = 2x \\ 4x + y = 12 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = -3 - 4y \\ x + 5y = -1 \end{cases}$

5 **a.** $\begin{cases} y = 2 + 5x \\ 4x + 3y = 6 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 7x + 6y = -5 \\ x = -5 + 2y \end{cases}$

6 **a.** $\begin{cases} e + 6f = 0 \\ 3e - 7f = 5 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 5e - 6f = -8 \\ f - 3e = 2 \end{cases}$

Pour les exercices 7 à 9, résous les systèmes proposés en utilisant la méthode par combinaisons linéaires.

7 **a.** $\begin{cases} 3x + 11y = 1 \\ -3x - 10y = 4 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 7x + 5y = 16 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$

8 **a.** $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -6x + 5y = 11 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 5x + 12y = -10 \\ -7x + 4y = 14 \end{cases}$

9 **a.** $\begin{cases} 2i - 3j = 3 \\ -5i + 11j = -4 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} -6i - 7j = -5 \\ -9i + 2j = -5 \end{cases}$

10 Dans le repère ci-contre on a tracé les droites $(d) : 3x + 4y = 5$ et $(d') : -6x + 5y = 16$.

1. Résous le système :
$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ -6x + 5y = 16 \end{cases}$

2. Déduis-en les coordonnées du point A.

2 Apprendre à résoudre un système d'inéquations

Énoncé

1. Résous graphiquement chacune des inéquations suivantes : **a.** $3x+2y-1>0$; **b.** $y \leqslant 2x-3$.

2. Résous graphiquement le système d'inéquations : $\begin{cases} 3x+2y-1>0 \\ y \leqslant 2x-3 \end{cases}$.

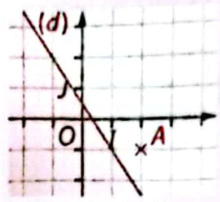
Solution

On décide de colorer le demi-plan qui n'est pas solution de l'inéquation.

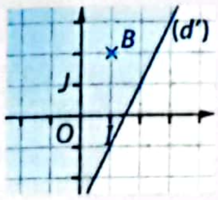
Les solutions sont des demi-plans :
① je trace la droite frontière de ces demi-plans dans un repère ;
② je choisis un point au hasard qui n'est pas sur cette droite ;
③ je détermine si les coordonnées de ce point vérifient l'inégalité ;
④ j'en déduis le demi-plan qui est solution.

Pour résoudre un système d'inéquations à deux inconnues :
① je résous chaque inéquation dans un même repère ;
② je conserve les points qui sont solutions des deux inéquations.

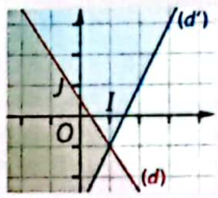
1. a. ① La droite (d) a pour équation : $3x+2y-1=0$.
② Je choisis le point $A(2\,;-1)$:
③ $3x_A+2y_A-1=3\times2+2\times(-1)-1=3>0$
Donc les coordonnées de A vérifient l'inégalité $3x+2y-1>0$.
④ Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation $3x+2y-1>0$ est le demi-plan, contenant le point A, situé « au-dessus » de la droite (d), droite non comprise.



b. Je procède de même avec la droite (d') d'équation $y=2x-3$ et le point $B(1\,;2)$:
L'ensemble des solutions de l'inéquation $y \leqslant 2x-3$ est le demi-plan, ne contenant pas le point B, situé « au-dessous » de la droite (d'), droite comprise.



2. L'ensemble des solutions du système $\begin{cases} 3x+2y-1>0 \\ y \leqslant 2x-3 \end{cases}$ est l'ensemble des points qui ne sont dans aucune partie colorée.

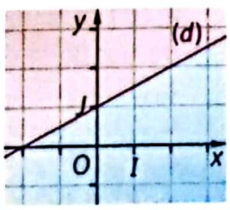


S'exercer

11 **1.** Trace la droite (d) d'équation $5x+4y-1=0$ dans un repère orthonormé.
2. Place le point A de coordonnées $(2\,;1)$.
3. a. Les coordonnées de A vérifient-elles l'inéquation $5x+4y-1<0$?
b. Représente graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $5x+4y-1<0$.

12 **1.** Trace la droite (d') d'équation $y=x-2$ dans un repère orthonormé.
2. Place le point B de coordonnées $(4\,;5)$.
3. a. Les coordonnées de B vérifient-elles l'inéquation $y \geqslant x-2$?
b. Représente graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $y \geqslant x-2$.

13 On a tracé la droite (d) d'équation $x-2y+2=0$ dans le repère ci-contre.
Donne une inéquation :
a. du demi-plan rouge ;
b. du demi-plan bleu.



Pour les exercices 14 à 17, résous graphiquement chacune des inéquations.

14 **a.** $3x+4y-2>0$; **b.** $2x-5y-3 \leqslant 0$.

15 **a.** $2x-y+3<0$; **b.** $-3x+2y \geqslant 0$.

16 **a.** $y<2x+1$; **b.** $y \geqslant -x+4$.

17 **a.** $y>0{,}5x-1$; **b.** $y \leqslant 1{,}5x$.

Pour les exercices 18 à 20, résous graphiquement chacun des systèmes d'inéquations.

18 **a.** $\begin{cases} 3x+4y-2>0 \\ 2x-5y-3 \leqslant 0 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} 2x-y+3<0 \\ -3x-2y-3 \geqslant 0 \end{cases}$.

19 **a.** $\begin{cases} y<2x+1 \\ y \geqslant -x+4 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} y>0{,}5x-1 \\ y \leqslant 1{,}5x \end{cases}$.

20 **a.** $\begin{cases} -2x+3y-4 \leqslant 0 \\ y \geqslant -2x+2 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} x+5y-10<0 \\ y \leqslant x-1 \end{cases}$.

Systèmes d'équations

Pour les exercices 21 à 23, résous les systèmes d'équations en utilisant la méthode de ton choix.

21 a. $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x+3y=1 \end{cases}$; b. $\begin{cases} x-3y=1 \\ 3x+2y=-8 \end{cases}$.

22 a. $\begin{cases} a+b=2 \\ a-b=4 \end{cases}$; b. $\begin{cases} 3a-b=5 \\ -a+3b=1 \end{cases}$.

23 a. $\begin{cases} 3x=-12 \\ 6x-y=15 \end{cases}$; b. $\begin{cases} 3s+3t=1 \\ 4s+2t=-2 \end{cases}$.

Problèmes

24 On a constaté que 4 bananes et 6 mangues pèsent exactement 3 kg et que 8 bananes et 7 mangues pèsent exactement 4 kg.
On note x la masse, en kg, d'une banane et y celle, en kg, d'une mangue.
1. Explique pourquoi x et y sont solutions du système :

$$\begin{cases} 4x+6y=3 \\ 8x+7y=4 \end{cases}.$$

2. a. Résous ce système.
b. Déduis-en la masse de chaque fruit.

25 Les tarifs d'un concert sont de 600 F CFA pour les adultes et de 200 F CFA pour les enfants. On a compté 420 entrées pour une recette totale de 204 000 F CFA.
On souhaite connaître le nombre a d'entrées adulte et le nombre e d'entrées enfants.
1. Explique pourquoi a et e sont solutions du système :

$$\begin{cases} a+e=420 \\ 600a+200e=204\,000 \end{cases}.$$

2. a. Résous ce système.
b. Déduis-en le nombre d'entrées adultes et le nombre d'entrées enfants.

26 Une compagnie de transport possède deux types de bus : moyen et grand. Le directeur a constaté qu'on peut faire voyager 1 000 personnes avec 11 bus moyens et 6 grands ainsi qu'avec 8 bus moyens et 8 grands.
On note x le nombre de places d'un bus moyen et y celui d'un grand.
1. Écris un système d'équations dont x et y sont solutions.
2. Résous ce système puis déduis-en le nombre de places dans chaque type de bus.

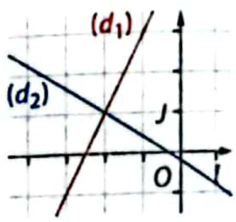
27 Deux nombres a et b sont tels que $a < b$. Leur somme vaut 150 et leur différence vaut 60.
1. Écris un système d'équations dont a et b sont solutions.
2. Résous ce système et déduis-en les valeurs de a et b.

28 Dans les tribunes d'un stade de football, on a compté 14 500 spectateurs. On a aussi constaté qu'il y avait 8 fois plus d'hommes que de femmes.
On note h le nombre de spectateurs hommes et f le nombre de spectateurs femmes.
1. Écris un système d'équations dont h et f sont solutions.
2. Résous ce système. Déduis-en le nombre de spectateurs de chaque sexe.

29 Un rectangle a pour périmètre 16 cm. Si on double sa longueur, le périmètre vaut alors 26 cm.
On note L la longueur du rectangle et ℓ sa largeur.
1. Écris un système d'équations dont L et ℓ sont solutions.
2. Résous ce système et déduis-en les dimensions du rectangle.

Intersection de droites

30 Dans le repère ci-contre on a tracé les droites :
$(d_1) : 2x-y+5=0$ et
$(d_2) : 3x+5y+1=0$.



1. Lis les coordonnées du point d'intersection A de (d_1) et (d_2).
2. a. Explique pourquoi les coordonnées de A sont les solutions du système $\begin{cases} 2x-y+5=0 \\ 3x+5y+1=0 \end{cases}$.
b. Résous ce système et retrouve ainsi la réponse de la question **1**.

31 **1.** Dans un repère, trace les droites (d) et (d') d'équations respectives : $y=2x+4$ et $y=-x+1$.
2. a. Lis les coordonnées de leur point d'intersection.
b. Vérifie ta lecture en résolvant un système d'équations.

32 Dans chacun des cas suivants, trace les droites (d) et (d') dans un repère ; puis calcule les coordonnées de leur point d'intersection.
a. $(d) : x-2y=4$ et $(d') : 2x+y=2$;
b. $(d) : y=4x+2$ et $(d') : y=-4x-4$;
c. $(d) : 5x-y=3$ et $(d') : y=3x$;
d. $(d) : x+3y+1=0$ et $(d') : 2x+5y-5=0$.

Demi-plan et inéquation à deux inconnues

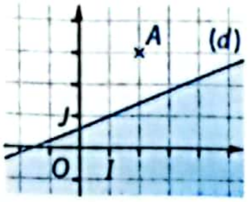
33 Parmi les points ci-dessous quels sont ceux qui appartiennent au demi-plan d'inéquation : $4x - y + 2 > 0$?

a. $A(1\,;2)$; **b.** $B(-2\,;-1)$; **c.** $C(-1\,;-2)$;
d. $D(2\,;2)$; **e.** $E(-4\,;-2)$; **f.** $F(0\,;0)$.

34 Parmi les demi-plans dont les inéquations sont données ci-dessous, quels sont ceux qui contiennent le point $A(3\,;1)$?

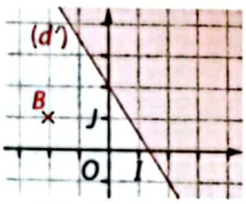
a. $2x - y - 1 > 0$; **b.** $-5x + 3y - 2 \leqslant 0$;
c. $3x - 2y - 6 < 0$; **d.** $-x + 2y + 1 \geqslant 0$;
e. $x - 5 < 0$; **f.** $y - 6 > 0$.

35 La droite (d) a pour équation $2x - 5y + 3 = 0$.



1. a. Lis les coordonnées $(x_A\,;y_A)$ du point A.
b. Détermine le signe de $2x_A - 5y_A + 3$.
2. Déduis-en une inéquation du demi-plan de frontière (d), non coloré, droite comprise.

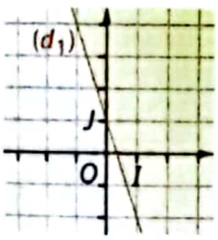
36 La droite (d') a pour équation $y = -1{,}5x + 2$.

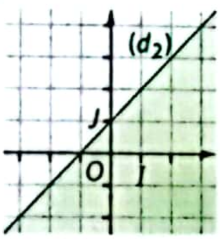


1. a. Lis les coordonnées $(x_B\,;y_B)$ du point B.
b. Compare y_B et $-1{,}5x_B + 2$.
2. Déduis-en une inéquation du demi-plan de frontière (d), non coloré, droite non comprise.

37 Dans chacun des cas ci-dessous, détermine une inéquation du demi-plan non coloré.

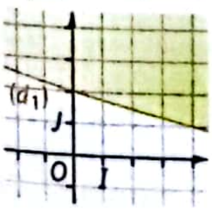
a. $(d_1) : 3x + y - 1 = 0$ **b.** $(d_2) : x - y + 1 = 0$

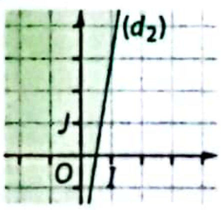




38 Dans chacun des cas ci-dessous, détermine une inéquation du demi-plan non coloré.

a. $(d_1) : y = -0{,}25x + 2$ **b.** $(d_2) : y = 6x - 3$



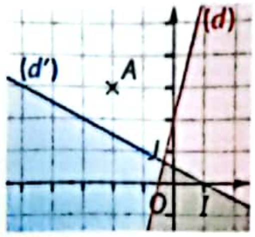


Systèmes d'inéquations

39 Parmi les points ci-dessous, quels sont ceux qui appartiennent à l'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} 3x + y - 1 < 0 \\ 2x - 3y + 4 \geqslant 0 \end{cases}$?

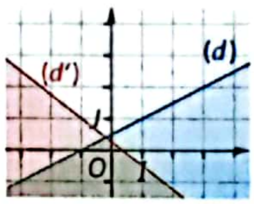
a. $J(-2\,;-3)$; **b.** $K(2\,;1)$; **c.** $L(1\,;3)$;
d. $M(-1\,;2)$; **e.** $N(1\,;-3)$; **f.** $O(0\,;0)$.

40 La droite (d) a pour équation $4x - y + 2 = 0$ et la droite (d') pour équation $x + 2y - 1 = 0$.

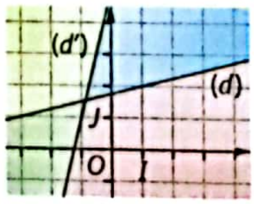


1. a. Lis les coordonnées $(x_A\,;y_A)$ du point A.
b. Détermine le signe de $4x_A - y_A + 2$ et celui de $x_A + 2y_A - 1$.
2. Déduis-en un système d'inéquations dont l'ensemble des solutions sont les points de la partie du plan non colorée.

41 La droite (d) a pour équation $x - 2y + 1 = 0$, et la droite (d') pour équation $4x + 5y - 1 = 0$.
Détermine un système d'inéquations dont l'ensemble des solutions sont les points de la partie du plan non colorée.



42 La droite (d) a pour équation $-17x - 4y - 19 = 0$, et la droite (d') pour équation $4x + 5y - 1 = 0$.
Détermine un système d'inéquations dont l'ensemble des solutions sont les points de la partie du plan colorée :



a. en rouge ; **b.** en bleu ; **c.** en vert ; **d.** en jaune.

43 Dans chacun des cas ci-dessous, représente dans un repère le domaine du plan qui correspond au système proposé :

a. $\begin{cases} x + y - 1 \geqslant 0 \\ 4x - 2y + 6 < 0 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} x + y + 2 \leqslant 0 \\ 2x + 4y + 6 > 0 \end{cases}$.

44 Dans chacun des cas ci-dessous, résous graphiquement le système proposé :

a. $\begin{cases} y \geqslant 2x + 1 \\ y > -4x + 3 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} y \leqslant x - 2 \\ y > 2x + 1 \end{cases}$.

Bien comprendre mieux rédiger

45 Résolution par substitution

On a demandé à Mouafo et Yene de résoudre le système (S) $\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$ en utilisant la méthode par substitution. Voici le début du travail de chacun d'eux.

Mouafo	Yene
J'exprime y en fonction de x : $x + 2y = 6$	J'exprime x en fonction de y : $x + 2y = 6$
$2y = 6 - 2x$	$x = 6 - 2y$
$y = \dfrac{6 - 2x}{2}$	Puis je remplace dans l'équation $2x - 3y = 5$.
Puis je remplace dans l'équation $2x - 3y = 5$.	

1. Termine le travail de chacun de ces deux élèves.
2. a. Compare les deux solutions trouvées.
b. Quel élève a effectué les calculs les plus rapides ?

46 Un système, plusieurs méthodes

(S) désigne le système $\begin{cases} 5x+2y=1 \\ 11x+3y=12 \end{cases}$.

1. Pour éliminer l'inconnue x, Jolita multiplie la première équation par 11 et la seconde par −5.
a. Effectue le travail de Jolita.
b. Achève la résolution du système.
2. Pour éliminer l'inconnue y, Moussa multiplie la première équation par 3 et la seconde par −2.
a. Effectue le travail de Moussa.
b. Achève la résolution du système.
3. Compare les solutions trouvées.

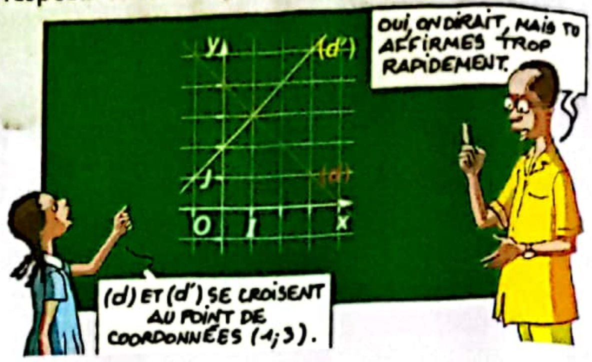
47 Système sans solution

1. Peut-on trouver un nombre réel a tel que $0a = 5$? Justifie ta réponse.
2. a. Dans un repère, trace les droites d'équations : $2x - 3y = 1$ et $-4x + 6y = 2$.
b. Quelle est la particularité de ces deux droites ? Justifie ta réponse.
3. (S) désigne le système $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -4x+6y=2 \end{cases}$.
a. Résous ce système par la méthode de ton choix.
b. Comment pouvait-on prévoir la réponse à la question précédente en s'aidant du graphique ?

Ainsi, il existe des systèmes d'équations n'ayant aucune solution.
Il en existe également d'autres qui admettent une infinité de solutions : lorsque les droites sont confondues.

48 Calculer pour contrôler la lecture

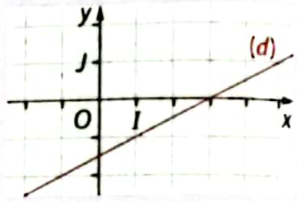
Le professeur a tracé les droites (d) et (d') d'équations respectives $13x + 12y = 50$ et $x - y = -2$ dans un repère.



1. Résous le système $\begin{cases} 13x+12y=50 \\ x-y=-2 \end{cases}$.
2. Explique la réaction du professeur et corrige l'élève.

49 Pas de conclusion hâtive

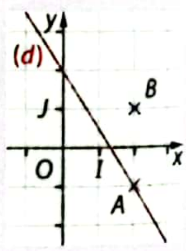
Dans le repère ci-contre, on a tracé la droite (d) d'équation $x - 2y - 3 = 0$. Kidi affirme que le demi-plan d'inéquation $x - 2y - 3 > 0$ est celui situé « au-dessus » de la droite car le signe d'inégalité utilisé est « > ».



1. Lis les coordonnées :
a. de deux points situés « au-dessus » de la droite ;
b. de deux points situés « en-dessous » de la droite.
2. Quelles sont les coordonnées qui vérifient l'inégalité $x - 2y - 3 > 0$ parmi celles que tu as lues ?
3. Que penses-tu de l'affirmation de Kidi ?

50 Sur la frontière

Dans le repère ci-contre, on a tracé la droite (d) d'équation $3x + 2y - 4 = 0$.



1. Lis les coordonnées des points A et B.
2. Le point A appartient-il au demi-plan d'inéquation :
a. $3x + 2y - 4 > 0$?
b. $3x + 2y - 4 \geqslant 0$?
3. Le point B appartient-il au demi-plan d'inéquation :
a. $3x + 2y - 4 > 0$?
b. $3x + 2y - 4 \geqslant 0$?
4. a. Complète avec *appartient* ou *n'appartient pas* :
Le point A … au demi-plan de frontière (d), *droite comprise, et … au demi-plan de frontière* (d), *droite non comprise.*
b. Écris une phrase similaire avec le point B.

51 Système et racines carrées

Résous chacun des systèmes d'équations :

a. $\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=\sqrt{2}\\ \sqrt{3}x+\sqrt{2}y=\sqrt{3}\end{cases}$; b. $\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=\sqrt{2}\\ \sqrt{3}x+\sqrt{2}y=\sqrt{3}\end{cases}$.

52 Système et fractions

1. On souhaite résoudre le système $\begin{cases}\dfrac{2x}{3}+\dfrac{4y}{5}=\dfrac{2}{15}\\ \dfrac{3x}{2}-\dfrac{5y}{4}=\dfrac{11}{4}\end{cases}$.

a. Explique pourquoi le système ci-dessus est équivalent au système (S) $\begin{cases}10x+12y=2\\ 6x-5y=11\end{cases}$.

b. Résous le système (S) et déduis-en les solutions du système initial.

2. Utilise la méthode vue à la question 1. pour résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases}\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{-x}{3}+\dfrac{y}{5}=\dfrac{-1}{15}\end{cases}$; b. $\begin{cases}\dfrac{3x}{2}+\dfrac{9y}{8}=\dfrac{-15}{8}\\ \dfrac{x}{5}-\dfrac{2y}{15}=\dfrac{-8}{15}\end{cases}$.

53 Sodas citron et sodas orange

Dans un café, on a servi 3 sodas citron et 5 sodas orange à une première table, 6 sodas citron et 2 sodas orange à une deuxième et 5 sodas citron et 4 sodas orange à une troisième table.

Les clients de la première table ont dû payer 3 300 F CFA et ceux de la seconde table, 3 000 F CFA.

Combien devront payer les clients de la troisième table ?

54 Intersection de droites

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Calcule les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (d') dans chacun des cas suivants :

a. (d) passe par les points $A(4\,;2)$ et $B(-2\,;-1)$ et (d') passe par les points $C(-1\,;2)$ et $D(8\,;-1)$;

b. (d) passe par les points $A(1\,;4)$ et $B(4\,;-2)$ et (d') est perpendiculaire à (d) et passe par $C(-1\,;-2)$.

55 Points à coordonnées entières

1. Dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, détermine graphiquement le domaine du plan qui correspond au système $\begin{cases}x<4\\ y\leqslant 3\\ 3x-4y-12\leqslant 0\end{cases}$.

2. Lis les coordonnées de tous les points à coordonnées entières qui vérifient ce système.

S'entraîner au BEPC

56 Dimensions d'un rectangle

1. Résous le système $\begin{cases}x+y=25\\ y-x=5\end{cases}$.

2. Un rectangle a pour périmètre 50 cm.
Trouve ses deux dimensions sachant que la longueur a 5 cm de plus que la largeur. *BEPC 2008*

57 L'âge du père

1. Résous le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}x-2y-12=0\\ x=3y\end{cases}.$$

2. Désiré demande à son père : « Papa, quel est ton âge ? » Son père lui répond : « j'ai le triple de l'âge de ton cousin Loris et si je retranche 12 ans à mon âge, j'aurai le double de l'âge de Loris. »
Aide Désiré à retrouver l'âge du père et celui de son cousin Loris. *(On désignera par x l'âge de son père et y celui de son cousin).* *BEPC Côte d'Ivoire*

58 Recherche d'inéquation

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

1. Construis la droite (Δ) d'équation $x-2y+6=0$.

2. a. Place le point A de coordonnées $(-5\,;8)$.
Justifie que A n'appartient pas au demi-plan de frontière (Δ) et contenant le point O.

b. Détermine une inéquation de ce demi-plan. *BEPC Sénégal*

59 Fèves de cacao

1. Résous le système suivant $\begin{cases}x+y=12\\ x-2y=-3\end{cases}$.

2. Deux villages A et B ont produit ensemble 12 tonnes de fèves de cacao.
Si on ajoute 3 tonnes de fèves à la production A, on obtient le double de la production de B.
Calcule, en tonnes, la production de chacun des deux villages. *BEPC 2007*

60 Équations cartésiennes de droites

1. Résous le système suivant : $\begin{cases}x-y-3=0\\ 3x-y-1=0\end{cases}$.

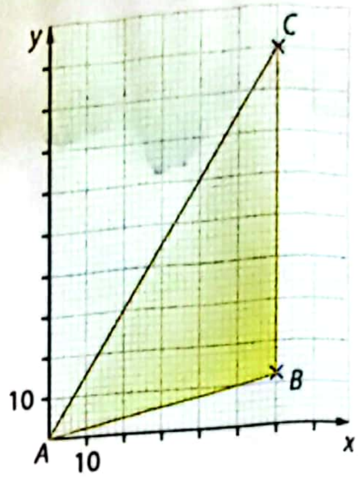
2. a. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1 cm, construis les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $x-y-3=0$ et $3x-y-1=0$.

b. Détermine graphiquement le point d'intersection des deux droites (D_1) et (D_2).

c. Soit $P(3\,;4)$ un point du plan. Détermine une équation de la droite (Δ) passant par P et perpendiculaire à (D_2). Représente la droite (Δ) dans le repère précédent. *BEPC Gabon*

61 Terrain à partager

Trois frères héritent d'un terrain triangulaire à partager équitablement en trois parties de même aire. Pour les aider à réaliser ce partage, on dispose du repère ci-contre. L'unité est le mètre.



1. Reproduis la figure dans un repère orthonormé en prenant 1 cm pour 10 unités.
Tu complèteras la figure au fur et à mesure par les points et les droites données.

2. Un des frères propose d'effectuer ce partage en reliant le centre de gravité G du triangle ABC à chacun des sommets. Chacun prendrait possession d'un des trois triangles ABG, BCG et CAG ainsi formé.
a. Calcule les coordonnées des milieux I et J des côtés $[AB]$ et $[BC]$.
b. Détermine une équation cartésienne de la médiane issue de C et une équation cartésienne de la médiane issue de A.
c. Déduis-en les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

3. Les frères souhaitent s'assurer que les trois terrains ont la même aire.
a. Détermine une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à (AB) et passant par G.
b. Calcule les coordonnées du point R, pied de la hauteur issue de G dans le triangle ABG.
c. Calcule les longueurs AB et RG.
d. Déduis-en l'aire du triangle ABG.
e. Procède de la même façon pour déterminer les aires des triangles BCG et CAG.
f. Le partage est-il bien équitable ?

62 Recherche d'un bénéfice maximum

Solange possède un atelier dans lequel sont fabriqués des rouleaux de tissus de deux types : avec des couleurs claires (type *A*) ou des couleurs foncées (type *B*).

La fabrication des rouleaux de tissus doit répondre à trois contraintes :

Contrainte ① : au moins 4 rouleaux de type *A* doivent être fabriqués chaque jour afin de garantir les stocks ;

Contrainte ② : au moins 3 rouleaux de type *B* doivent être fabriqués chaque jour afin de garantir les stocks ;

Contrainte ③ : un rouleau de type *A* nécessite 1 heure de travail tandis qu'un rouleau de type *B* nécessite 2 heures de travail. Les employés peuvent travailler jusqu'à 52 heures au total chaque jour.

Solange souhaite connaître le nombre x de rouleaux de tissu de type *A* et le nombre y de rouleaux de tissu de type *B* pouvant être fabriqués chaque jour.

1. a. Explique pourquoi la contrainte ① peut s'exprimer par l'inégalité $x \geqslant 4$.
b. Exprime la contrainte ② par une inégalité.
c. Exprime la contrainte ③ par une inégalité.

2. Résous graphiquement, dans un même repère orthonormé, les inéquations suivantes.
Tu prendras 1 cm pour 1 unité.
a. $x \geqslant 4$; **b.** $y \geqslant 3$; **c.** $x + 2y \leqslant 52$.

3. Déduis-en que Solange peut organiser la fabrication des rouleaux de tissus de six façons différentes.

4. Solange compte vendre un rouleau de type A 21 000 F CFA et un rouleau de type B 49 000 F CFA. Quelle est, parmi les 6 productions possibles, celle qui permettra d'obtenir le bénéfice le plus grand ?

14 Applications linéaires et affines

Pour démarrer

Les avions de ligne

Un avion de ligne vole à la vitesse constante de 800 km/h depuis son décollage.

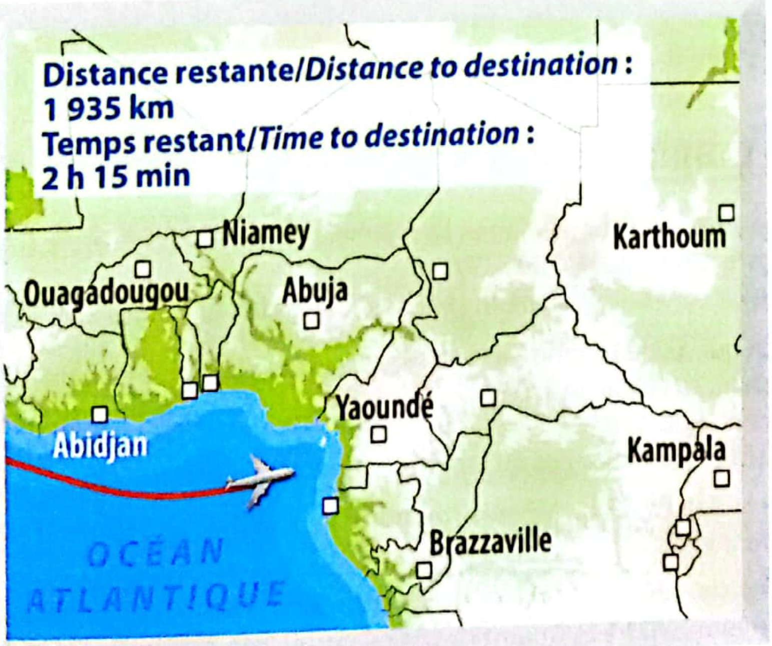
1 a. En cabine, il est indiqué sur un écran que l'avion a décollé depuis 2 heures.
Quelle distance a-t-il alors parcourue depuis le décollage ?
b. Il est indiqué plus tard que le temps écoulé depuis le décollage est de 3 heures et 30 minutes.
Quelle distance a-t-il alors parcourue depuis le décollage ?

2 On note t le temps, en h, écoulé depuis le décollage et d la distance, en km, parcourue par l'avion depuis le décollage.
a. Écris une formule reliant la vitesse moyenne v, en km/h, de l'avion à d et t.
Déduis-en une expression de d à l'aide de v et de t.
b. Complète le tableau ci-dessous.

Temps t (en h)	2	3,5	4	5,25	8,5
Distance d (en km)	…	…	…	…	…

c. Que peux-tu dire de ce tableau ?

3 Les données relatives à un second avion de ligne sont affichées sur l'écran ci-dessous.
Calcule la vitesse moyenne, en km/h, de ce second avion jusqu'à sa destination.



Dans les cabines, les passagers peuvent suivre le trajet de l'avion sur un écran.

Savoir-faire

À la fin de ce chapitre, tu sauras :
- calculer une image et un antécédent ;
- représenter graphiquement une application linéaire ou affine ;
- déterminer le sens de variation d'une application linéaire ou affine ;
- exploiter des fonctions affines par morceaux.

14 Activités de découverte

1 Application linéaire › Cours 1a

Le débit moyen du fleuve Sanaga est de 2 100 m³/s.

- Débit moyen = $\dfrac{\text{Volume écoulé}}{\text{Durée de l'écoulement}}$
- $V(t)$ se lit « V de t ».

1 Calcule le volume d'eau écoulé pour les durées d'écoulement ci-contre : • $t = 2$ s • $t = 30$ s • $t = 1$ min

2 On note t la durée, en s, de l'écoulement et $V(t)$ le volume d'eau écoulé, en m³.
a. Explique à quoi correspondent : • $V(2)$ • $V(30)$ • $V(60)$
b. Vérifie que $V(t) = 2\,100 \times t$.

Le procédé de calcul qui, à chaque durée d'écoulement t, associe le volume V(t) d'eau écoulé est appelé ***application linéaire.***

3 **a.** Complète le tableau ci-contre.
b. Explique pourquoi ce tableau est un tableau de proportionnalité.
c. Quel est son coefficient de proportionnalité ?

Durée de l'écoulement t (en s)	1	2	10	30	60	100
Volume écoulé $V(t)$ (en m³)						

2 Propriétés des applications linéaires › Cours 1b

Partie Ⓐ : Observations sur un exemple

f désigne l'application linéaire définie par $f(x) = 6x$.

x	10	20	50	70	80	100	120
$f(x)$							

1 Complète le tableau ci-contre et précise son coefficient de proportionnalité.

2 **a.** Exprime $f(120)$ à l'aide de $f(20)$ et $f(100)$.
b. Exprime $f(70)$ à l'aide de $f(20)$ et $f(50)$.

3 **a.** Exprime $f(50)$ à l'aide de $f(10)$.
b. Exprime $f(80)$ à l'aide de $f(20)$.

Partie Ⓑ : Cas général

f désigne l'application linéaire définie par $f(x) = ax$ où a est un nombre réel fixé.
Complète les propriétés ci-dessous.

On a $f(u) = a \times u$ et $f(v) = a \times v$, donc :
- $f(u + v) = \ldots \times (u + v) = \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots = f(\ldots) + f(\ldots)$.
- $f(ku) = \ldots \times (ku) = k \times \ldots = k \times f(\ldots)$.

3 Représentation graphique des applications linéaires › Cours 1c

Abdelkader doit se rendre au Rwanda pour affaires. La monnaie qui y est utilisée est le Franc Rwandais (RWF). Le jour de son départ, 1 RWF valait 0,80 F CFA.
Abdelkader souhaite pouvoir convertir facilement ses Francs Rwandais en Francs CFA.

1 On note f l'application qui, à une somme x exprimée en RWF, fait correspondre sa valeur en F CFA.
a. Exprime $f(x)$ en fonction de x.
b. Complète puis interprète les colonnes du tableau.

x	1 000	2 000	5 000	10 000
$f(x)$				

2 **a.** Place les points du tableau dans un repère orthogonal (O, I, J) d'unité 1 000 RWF en abscisses et 1 000 F CFA en ordonnées.
b. Que constates-tu ?

3 Utilise le graphique pour répondre aux questions suivantes.
a. Abdelkader paye son hôtel 4 000 RWF. À quelle somme en F CFA cela correspond-il ?
b. Abdelkader compte dépenser 6 000 F CFA. À quelle somme en RWF cela correspond-il ?

4 Application affine › Cours 2a

Un opérateur téléphonique propose le forfait ci-contre.

1 a. Mireille a téléphoné 200 minutes ce mois-ci avec ce forfait.
Explique pourquoi le montant de sa facture a été de 23 000 F CFA.
b. Henri a téléphoné 300 minutes.
Quel a été le montant de sa facture téléphonique ?

2 On désigne par x la durée mensuelle de communication, en min, et par $f(x)$ le montant de la facture correspondante en F CFA.
a. À quoi correspondent $f(100)$ et $f(400)$?
b. Écris une formule permettant de calculer $f(x)$ à partir de x.
c. Utilise cette formule pour calculer $f(100)$ et $f(400)$.

Le procédé de calcul qui, à chaque durée mensuelle de communication, associe le montant de la facture correspondante est appelé ***application affine.***

5 Représentation graphique des applications affines › Cours 2a et 2b

f désigne l'application affine définie par $f(x) = 0{,}5x + 2$.

1 a. Justifie que $f(-5) = -0{,}5$.
$-0{,}5$ est appelé ***image*** *de -5 par f.*
b. Calcule les images par f de : -2 ; 0 ; 1 ; 3 puis 4.
c. On cherche la valeur de x pour laquelle $f(x) = 7$.
Justifie que $0{,}5x + 2 = 7$. Déduis-en que $x = 10$.
10 est appelé ***antécédent*** *de 7 par f.*
d. Calcule les antécédents par f de : -1 ; $2{,}5$ puis 5.
e. Utilise tes calculs précédents pour compléter le tableau ci-contre.

x		-5	-2	0		3	4		
$f(x)$	-1				$2{,}5$			5	7

2 a. Trace un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1 cm.
b. A, B, C, D, E et F sont six points qui ont pour coordonnées respectives $(x\ ;\ f(x))$ où x vaut respectivement -5, -2, 0, 1, 3 et 4.
Écris les coordonnées de ces six points ; puis place-les dans ton repère. Que constates-tu ?

3 *Dans un repère, la représentation graphique de l'application affine f est l'ensemble de* ***tous les points*** *de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ où x désigne un nombre réel.*
a. Explique pourquoi cette représentation semble être droite.
b. Trace cette droite ; puis détermine son équation.

6 Sens de variation › Cours 3

1 g est l'application affine définie par $g(x) = -2x + 3$.
a. Calcule $g(-5)$, $g(-1)$, $g(0)$, $g(3)$ et $g(10)$.
b. Recopie et complète par le signe $<$ ou $>$.

$-5 \ldots -1 \ldots 0 \ldots 3 \ldots 10$ et $g(-5) \ldots g(-1) \ldots g(0) \ldots g(3) \ldots g(10)$

c. Compare ces deux rangements. Que constates-tu ?

2 Reprends les consignes de la question 1 avec l'application affine h définie par $h(x) = 5x - 2$.

3 a. *Une application qui conserve l'ordre comme l'application h est dite* ***croissante.***
À quelle condition portant sur a l'application affine f définie par $f(x) = ax + b$ est-elle croissante ?
b. *Une application qui inverse l'ordre comme l'application g est dite* ***décroissante.***
À quelle condition portant sur a l'application affine f définie par $f(x) = ax + b$ est-elle décroissante ?

Dans toute la leçon le plan est muni d'un repère (O, I, J). a et b désignent des nombres réels fixés.

1 Applications linéaires

a Définition

Définition **Une application linéaire f est un procédé de calcul qui, à chaque nombre réel x, associe le nombre ax.**
On la note $f : x \mapsto ax$ ou bien encore $f(x) = ax$.

« $f(x)$ » se lit « f de x »

Exemple : f est l'application linéaire définie par $f(x) = 2{,}4x$. On la note également $f : x \mapsto 2{,}4x$.

- Pour $x = -1$, $f(-1) = 2{,}4 \times (-1) = -2{,}4$;
- pour $x = 0$, $f(0) = 2{,}4 \times 0 = 0$;
- pour $x = 3$, $f(3) = 2{,}4 \times 3 = 7{,}2$.

On présente habituellemnet ces résultats sous la forme d'un tableau de valeurs :

x	-1	0	3
$f(x)$	$-2{,}4$	0	$7{,}2$

b Propriétés des applications linéaires

f désigne l'application linéaire $f : x \mapsto ax$.

Propriété **Un tableau de valeurs d'une application linéaire $f : x \mapsto ax$ est un tableau de proportionnalité. Son coefficient de proportionnalité est égal à a.**

Exemple : f est l'application linéaire définie par $f(x) = -3x$.
Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité dont le coefficient de proportionnalité vaut -3.

x	0	2	3	$4{,}2$
$f(x)$	0	-6	-9	$-12{,}6$

$\times(-3)$

Propriété **Si u et v sont des nombres réels, alors on a :**
$$f(u+v) = f(u) + f(v).$$

x	u	v	$u+v$
$f(x)$	au	av	$au+av$

$+$; $\times a$; $+$

Exemple : Avec l'exemple précédent, on peut déduire que
$f(7{,}2) = f(3 + 4{,}2) = f(3) + f(4{,}2) = -9 + (-12{,}6) = -21{,}6$.

Propriété **Si u et k sont des nombres réels, alors on a :**
$$f(ku) = kf(u).$$

x	u	ku
$f(x)$	au	$k(au)$

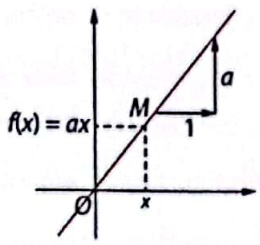
$\times k$; $\times a$; $\times k$

Exemple : Avec l'exemple précédent, on peut déduire que
$f(-8{,}4) = f(-2 \times 4{,}2) = -2 \times f(4{,}2) = -2 \times (-12{,}6) = 25{,}2$.

c Représentation graphique

Définition **Dans un repère, la représentation graphique de l'application linéaire $f : x \mapsto ax$ est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,ax)$ où x est un nombre réel.**

Propriétés **Dans un repère, la représentation graphique de l'application linéaire $f : x \mapsto ax$ est la droite d'équation $y = ax$. Cette droite passe par l'origine du repère et admet pour coefficient directeur a.**



Exemples : • La droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est la représentation graphique de l'application linéaire $f : x \mapsto \frac{1}{2}x$.

• Dans un repère, l'application linéaire $g : x \mapsto -2x$ est représentée par la droite d'équation $y = -2x$.

2 Applications affines

a Définitions

Définition **Une application affine f est un procédé de calcul qui, à chaque nombre réel x, associe le nombre $ax+b$.**
On le note $f : x \mapsto ax+b$ ou bien encore $f(x) = ax+b$.

Exemple : f est l'application affine $f(x) = 3x - 10$. On la note également $f : x \mapsto 3x - 10$.
• Pour $x = -2$, $f(-2) = 3 \times (-2) - 10 = -16$;
• pour $x = 0$, $f(0) = 3 \times 0 - 10 = -10$;
• pour $x = 7$, $f(7) = 3 \times 7 - 10 = 11$.
On présente habituellement ces résultats sous la forme d'un tableau de valeurs :

x	-2	0	7
$f(x)$	-16	-10	11

Définitions **f désigne une application affine.**
• Un nombre réel x étant donné, le nombre réel $f(x)$ est appelé image de x par f.
• Un nombre réel y étant donné, le nombre réel x tel que $f(x) = y$ est appelé antécédent de y par f.

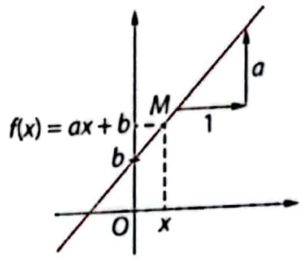
Exemples : Avec l'exemple précédent :
• l'image de -2 par f est -16 car $f(-2) = -16$;
• un antécédent de 11 par f est 7 car $f(7) = 11$.

Remarque : Une application linéaire est aussi une application affine (c'est le cas où $b = 0$).

b Représentation graphique

Définition **Dans un repère, la représentation graphique de l'application affine $f : x \mapsto ax+b$ est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;ax+b)$ où x est un nombre réel.**

Propriété **Dans un repère, la représentation graphique de l'application affine $f : x \mapsto ax+b$ est la droite d'équation $y = ax+b$.**
Cette droite admet pour coefficient directeur a et pour ordonnée l'origine b.



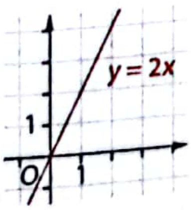
Exemples : • La droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ est la représentation graphique de l'application affine $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$.
• Dans un repère, l'application affine $g : x \mapsto -2x + 3$ est représentée par la droite d'équation $y = -2x + 3$.

3 Sens de variation

Définition **Une application f est dite :**
• croissante : si pour tous nombres réels u et v tels que $u < v$, on a $f(u) < f(v)$;
• décroissante : si pour tous nombres réels u et v tels que $u < v$, on a $f(u) > f(v)$;
• constante : si pour tous nombres réels u et v tels que $u < v$, on a $f(u) = f(v)$.

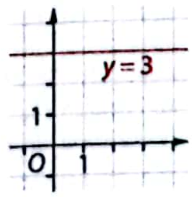
Propriété **L'application affine $f : x \mapsto ax+b$ est :**
• croissante si $a > 0$;
• décroissante si $a < 0$;
• constante si $a = 0$.

Exemples :
• L'application $f : x \mapsto 2x$ est croissante car $2 > 0$.



• L'application $f : x \mapsto -1{,}5x + 2$ est décroissante car $-1{,}5 < 0$.

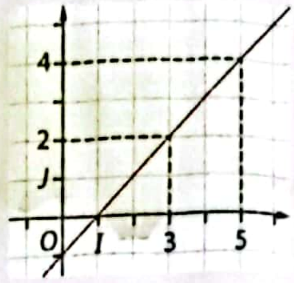
• L'application $f : x \mapsto 3$ est constante car on peut écrire $y = 0x + 3$, donc $a = 0$.



1 Apprendre à déterminer une image et un antécédent

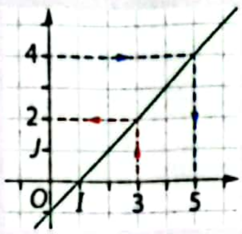
Énoncé

1. Une application affine f est représentée graphiquement ci-contre.
Détermine graphiquement :
a. l'image de 3 par f ; **b.** l'antécédent de 4 par f.
2. g est l'application affine définie par $g(x) = 2x - 3$.
Calcule :
a. l'image de 5 par g ; **b.** l'antécédent de -11 par g.



Solution

1. a. L'image de 3 par f est 2.
b. L'antécédent de 4 par f est 5.



Pour déterminer graphiquement l'image de 3 :
① je me place sur l'axe des abscisses au point d'abscisse 3 ;
② je suis la ligne en pointillés rouges jusqu'à la droite ;
③ je lis l'image de 3 sur l'axe des ordonnées.
Pour déterminer graphiquement l'antécédent de 4 :
① je me place sur l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 4 ;
② je suis la ligne en pointillés bleus jusqu'à la droite ;
③ je lis l'antécédent de 4 sur l'axe des abscisses.

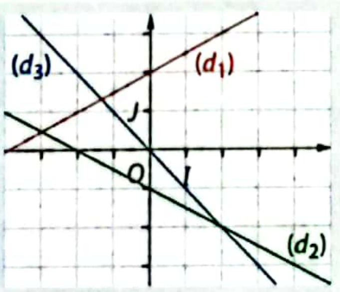
2. a. $g(5) = 2 \times 5 - 3$
$g(5) = 10 - 3$
$g(5) = 7$
L'image de 5 par g est 7.

b. On cherche x tel que :
$2x - 3 = -11$
$2x = -11 + 3$
$2x = -8$
$x = -4$
L'antécédent de -11 par g est -4.

Pour calculer l'image de 5 :
① je donne la valeur 5 à x dans $g(x)$;
② j'effectue le calcul.
Pour calculer un antécédent de −11,
il faut résoudre l'équation $g(x) = -11$.

S'exercer

Pour les exercices 1 à 3, les droites (d_1), (d_2) et (d_3) représentent respectivement les applications affines f_1, f_2 et f_3.



1 Détermine graphiquement :
a. l'image de -2 par f_1 ;
b. l'image de 2 par f_1 ;
c. l'antécédent de 3 par f_1 ;
d. l'antécédent de 1 par f_1.

2 Détermine graphiquement :
a. l'image de 4 par f_2 ;
b. l'image de -4 par f_2 ;
c. l'antécédent de -3 par f_2 ;
d. l'antécédent de 0 par f_2.

3 Détermine graphiquement :
a. l'image de -1 par f_3 ;
b. l'image de 3 par f_3 ;
c. l'antécédent de -2 par f_3 ;
d. l'antécédent de 2 par f_3.

4 f est l'application définie par $f(x) = -2{,}5x$.
1. Calcule les images par f de :
a. 1 ; **b.** -4 ; **c.** 6 ; **d.** -7.
2. Calcule les antécédents par f de :
a. -5 ; **b.** 7,5 ; **c.** -12 ; **d.** 25.

5 g est l'application définie par $g(x) = -4x + 6$.
1. Calcule les images par g de :
a. 0 ; **b.** -1 ; **c.** 4 ; **d.** -5.
2. Calcule les antécédents par g de :
a. 2 ; **b.** -6 ; **c.** 8 ; **d.** -5.

6 Un bus circule à la vitesse de 75 km/h. On note f l'application qui au temps t, écoulé depuis son départ, en h, associe la distance parcourue, en km.
1. Explique pourquoi $f(t) = 75t$.
2. a. Calcule $f(5)$; puis un antécédent de 600.
b. Interprète ces deux résultats.

7 La masse volumique de l'acajou est de 700 kg/m^3. On note g l'application qui au volume v, en m^3, d'un morceau de bois d'acajou associe sa masse, en kg.
1. Explique pourquoi $g(v) = 700v$.
2. a. Calcule $g(0{,}5)$; puis un antécédent de 210.
b. Interprète ces deux résultats.

2 Apprendre à représenter une application

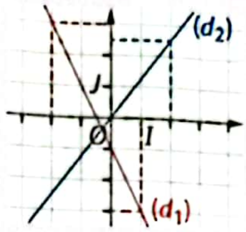
Énoncé

1. Dans un repère orthonormé (O, I, J), trace :
a. la droite (d_1) représentant l'application affine f définie par $f(x) = -2x - 1$;
b. la droite (d_2) représentant l'application linéaire g définie par $g(x) = 1{,}25x$.
2. Détermine le sens de variation de chacune des applications f et g en utilisant :
a. leur représentation graphique ; b. le coefficient directeur de leurs droites représentatives.

Solution

1. a. On calcule les images par f de -2 et 1 :
$f(-2) = -2 \times (-2) - 1 = 3$ et $f(1) = -2 \times 1 - 1 = -3$.
On obtient ainsi le tableau de valeurs :

x	-2	1
$f(x)$	3	-3



Pour tracer (d_1), il suffit de calculer les coordonnées de deux de ses points.

Donc (d_1) passe par les points de coordonnées $(-2 ; 3)$ et $(1 ; -3)$.
b. On calcule l'image par g de 2 : $g(2) = 1{,}25 \times 2 = 2{,}5$.
Donc (d_2) passe par le point de coordonnées $(2 ; 2{,}5)$.
2. a. • (d_1) est une droite qui « descend » de la gauche vers la droite donc f est une application décroissante.
• (d_2) est une droite qui « monte » de la gauche vers la droite donc g est une application croissante.
b. • Le coefficient directeur de la droite (d_1) vaut -2.
Il est négatif. Donc f est une application affine décroissante.
• Le coefficient directeur de la droite (d_2) vaut $1{,}25$.
Il est positif. Donc g est une application linéaire croissante.

Puisque (d_2) représente une application linéaire, on sait déjà qu'elle passe par l'origine du repère.

Pour connaître le sens de variation d'une application affine :
• soit, j'observe le graphique, en le lisant de gauche à droite ;
• soit, je regarde le signe de a et j'utilise la propriété du cours 3.

S'exercer

Pour les exercices 8 à 10, trace dans un même repère orthonormé d'unité 1 cm les représentations graphiques (d_1) et (d_2) des applications affines f_1 et f_2.

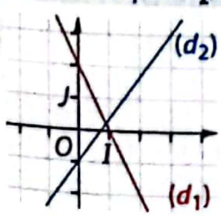
8 $f_1(x) = 1{,}5x - 2$; $f_2(x) = -0{,}5x$.

9 $f_1(x) = -1{,}25x + 3$; $f_2(x) = -0{,}25x - 1$.

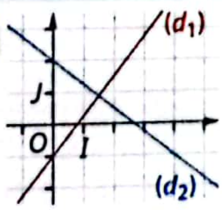
10 $f_1(x) = 0{,}75x$; $f_2(x) = -2x$.

Pour les exercices 11 et 12, détermine le sens de variation de chacune des applications affines f_1 et f_2, représentées par les droites (d_1) et (d_2).

11



12



Pour les exercices 13 à 15, détermine le sens de variation des applications affines f_1, f_2 et f_3.

13 $f_1(x) = 3x + 1$; $f_2(x) = -1{,}5x$; $f_3(x) = 4x$

14 $f_1(x) = -5x + 2$; $f_2(x) = -x + 3$; $f_3(x) = 2$.

15 $f_1(x) = \frac{1}{2}x + 2$; $f_2(x) = -\frac{1}{4}x + 3$; $f_3(x) = \frac{1}{3}x + 1$.

16 Le nombre d'habitants d'un village à l'année $2010 + n$ est donné par $f : n \mapsto 800 + 50n$.
1. À quelle valeur de n correspond l'année :
a. 2015 ? b. 2020 ?
2. Représente graphiquement l'application f pour $n \in [0 ; 10]$. Tu prendras 1 cm pour 1 an en abscisses et 1 cm pour 100 habitants en ordonnées.
3. Détermine graphiquement :
a. la population en 2013 ;
b. l'année à laquelle la population sera de 1 200 habitants.

17 f est l'application qui à x fait correspondre le périmètre du triangle ABC ci-contre. (L'unité est le cm.)

1. Explique pourquoi $f(x) = 2x + 3$.
2. a. Quel est le sens de variation de f ?
b. Cela est-il cohérent avec la figure ?
3. Représente graphiquement cette application affine f dans un repère (O, I, J).

Applications linéaires

18 f est l'application linéaire définie par $f : x \mapsto -3{,}5x$.
1. Calcule :
a. $f(2)$; **b.** $f(-4)$; **c.** $f(7)$; **d.** $f(-10)$.
2. Calcule les antécédents par f de :
a. $-3{,}5$; **b.** $-10{,}5$; **c.** 21 ; **d.** 0.

19 f est l'application linéaire définie par $f(x) = 4x$.
Complète le tableau de valeurs ci-dessous.

x	1		4		5	
$f(x)$		8		-16		64

20 f est l'application linéaire telle que $f(2) = 3$.
1. Compare $f(0)$ et $f(2)$.
2. Déduis-en le sens de variation de f.

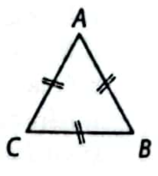
21 f désigne une application linéaire. Détermine dans chacun des cas le sens de variation de f.
a. $f(3) = -2$; **b.** $f(5) = 1$; **c.** $f(-2) = -4$; **d.** $f(-7) = 6$.

22 **1.** f est l'application linéaire telle que $f(2) = -12$ et $f(7) = -42$. Sans chercher à déterminer $f(x)$, calcule :
a. $f(9)$; **b.** $f(8)$; **c.** $f(21)$; **d.** $f(29)$.
2. g est l'application linéaire telle que $g(15) = 66$ et $g(25) = 110$. Sans chercher à déterminer $g(x)$, calcule l'antécédent par g de :
a. 176 ; **b.** -66 ; **c.** 440 ; **d.** 374.

23 f est l'application linéaire telle que $f(6) = \sqrt{5}$.
Sans calculer son coefficient a :
a. calcule les images par f de 12 et $6\sqrt{5}$;
b. calcule les antécédents par f de $\sqrt{20}$ et de $5\sqrt{5}$.

24 Un train circule à la vitesse constante de 80 km/h. On désigne par t le temps écoulé, en heures, depuis le départ et par f l'application qui à t fait correspondre la distance parcourue, en km.
1. a. Exprime $f(t)$ en fonction de t.
b. Justifie que f est une application linéaire.
2. Représente graphiquement l'application f dans un repère (O, I, J). Tu prendras 1 cm pour 1 h en abscisses et 1 cm pour 100 km en ordonnées.
3. Détermine graphiquement :
a. $f(3)$ et $f(4{,}5)$;
b. les antécédents par f de 200 et 500.
c. Interprète les résultats du **a.** et du **b.**

25 ABC est le triangle équilatéral de côté x cm ci-contre.
f désigne l'application qui à x fait correspondre le périmètre du triangle ABC.



1. a. Exprime $f(x)$ en fonction de x.
b. Quelle est la nature de l'application f ?
2. a. Calcule $f(1{,}5)$ et $f(6)$.
b. Détermine les antécédents par f de 15 et 33.
c. Interprète les résultats du **a.** et du **b.**

26 Le débit d'une rivière a été mesuré à 1,5 m^3/s. On note t la durée d'écoulement, en secondes, et f l'application qui à t fait correspondre le volume d'eau, en m^3, écoulé pendant la durée t.
1. a. Exprime $f(t)$ en fonction de t.
b. Justifie que f est une application linéaire.
2. Représente graphiquement l'application f dans un repère (O, I, J). Tu prendras 1 cm pour 1 s en abscisses et 1 cm pour 1 m^3 en ordonnées.
3. Détermine graphiquement :
a. $f(4)$ et $f(7)$.
b. les antécédents par f de 4,5 et 9.
4. Interprète les résultats du **3. a.** et du **3. b.**

27 Jean aimerait connaître la masse d'essence contenue dans différentes cuves de 100 L, 250 L et 800 L. Pour cela, il a effectué la pesée ci-contre.

On note $\mathcal{V}$ le volume en L d'une cuve et f l'application qui à $\mathcal{V}$ fait correspondre la masse d'essence en kg contenue dans la cuve.
1. Exprime $f(\mathcal{V})$ en fonction de $\mathcal{V}$.
2. a. Calcule $f(100)$, $f(250)$ et $f(800)$.
b. Donne une interprétation des résultats du **a.**

Applications affines

28 f est l'application affine définie par $f : x \mapsto 3x - 4$.
1. Calcule :
a. $f(1)$; **b.** $f(-2)$; **c.** $f(5)$; **d.** $f(0)$.
2. Calcule les antécédents par f de :
a. 23 ; **b.** -16 ; **c.** 32 ; **d.** -19.

29 f est l'application affine définie par $f(x) = -2x + 3$.
Complète le tableau de valeurs ci-dessous.

x	0		6		11	
$f(x)$		5		-15		61

30 f est l'application affine définie par $f : x \mapsto \sqrt{2}x + 3$.
a. Calcule les images par f de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{18}$.
b. Calcule les antécédents par f de 7 et de 13.

31 f est l'application affine telle que :
$f(4) = 6$ et $f(7) = 3$.
1. Compare $f(4)$ et $f(7)$.
2. Déduis-en le sens de variation de f.

32 f désigne une application affine. Détermine le sens de variation de f dans chacun des cas.
a. $f(3) = -2$ et $f(5) = -4$; b. $f(-1) = 3$ et $f(0) = 4$;
c. $f(4) = 6$ et $f(0) = 2$; d. $f(-2) = 5$ et $f(-6) = -4$.

33 $EFGH$ est un rectangle tel que $EF = 15$ mm et $FG = x$ mm.
1. Fais une figure à main levée.
2. f désigne l'application qui à x fait correspondre le périmètre, en mm, du rectangle $EFGH$.
Démontre que $f(x) = 2x + 30$.
3. Représente graphiquement l'application f dans un repère. Tu prendras 1 cm pour 10 mm en abscisses et 1 cm pour 20 mm en ordonnées.
4. a. Détermine graphiquement $f(20)$ et $f(50)$.
b. Vérifie par un calcul ; puis interprète chacun de ces résultats.

34 Un bassin fait 6 mètres de profondeur. Son niveau de remplissage, en m, au cours de la journée est définie par $f(h) = 6 - 0{,}2h$ où h désigne l'heure de la journée.
1. Le bassin de remplit-il ou se vide-t-il ?
Justifie ta réponse.
2. Représente graphiquement l'application f dans un repère pour $h \in [0\ ;\ 24]$. Tu prendras 1 cm pour 2 heures en abscisses et 2 cm pour 1 m en ordonnées.
3. a. Le bassin sera-t-il vide à la fin de la journée ?
Justifie ta réponse.
b. Détermine graphiquement l'heure à laquelle le bassin sera à moitié plein. Vérifie ton résultat par un calcul.

35 On sait que les coûts de production, en F CFA, d'une entreprise en fonction du nombre d'objets fabriqués sont donnés par une application affine f.
Le directeur de l'entreprise a constaté que 100 objets fabriqués coûtent 5 000 F CFA et que 300 objets fabriqués coûtent 8 000 F CFA.
1. a. Place les points représentants ces données dans un repère. Tu prendras 1 cm pour 50 objets fabriqués en abscisses et 1 cm pour 2 000 F CFA en ordonnées.
b. Déduis-en le tracé de la représentation graphique de l'application f.
2. Utilise ton graphique pour déterminer :
a. les coûts de production pour la fabrication de 200 objets ; puis de 500 objets ;
b. le nombre d'objets que l'on peut fabriquer avec 14 000 FCFA ; puis avec 20 000 FCFA.

36 f est une application affine vérifiant les égalités $f(2) = -1$ et $f(6) = 7$. On note $f(x) = ax + b$.
1. Explique pourquoi a et b sont les solutions du système d'équations : $\begin{cases} 2a + b = -1 \\ 6a + b = 7 \end{cases}$.
2. Résous ce système ; puis déduis-en l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

37 f est une application affine vérifiant les égalités $f(1) = -2$ et $f(1) = -11$. On note $f(x) = ax + b$.
1. Écris un système d'équations dont a et b sont solutions.
2. Résous ce système ; puis déduis-en l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Applications affines par morceaux

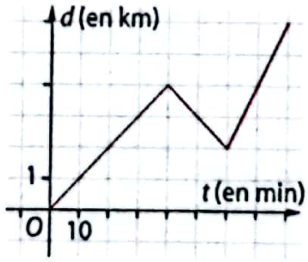
38 Une société spécialisée dans l'importation d'une matière première propose les tarifs ci-contre.

1. Recopie et complète le tableau de valeurs suivant :

Quantité (en t)	5	10	15	20	30	40
Prix (en F CFA)						

2. Représente graphiquement le prix de la commande en fonction de la quantité. Tu prendras 1 cm pour 5 t en abscisses et 1 cm pour 100 000 F CFA en ordonnées.
3. Détermine graphiquement :
a. le prix d'une commande de 35 t ;
b. la quantité correspondant à un prix de 350 000 F CFA.

39 Charline est partie de son village à midi en direction du village voisin situé à 6 km.
Le graphique ci-contre indique la distance d, en km, de Charline à son village en fonction du temps écoulé t, en min, depuis son départ.



1. a. À quelle distance de son village se trouvait Charline 20 minutes après son départ ?
b. Combien de temps a-t-elle mis pour parcourir 3 km ?
2. Charline a dû rebrousser chemin pour retrouver son porte-monnaie qui était tombé.
a. À quel moment cela s'est-il produit ?
b. Quand est-elle repartie vers le village voisin ?
3. Combien de temps a-t-elle finalement mis pour arriver au village voisin ?

Bien comprendre mieux rédiger

40 Vocabulaire

f et g désignent les applications définies par :
$f : x \mapsto 3x + 2$ et $g : x \mapsto -5x$.

1. Vérifie que $f(4) = 14$ et $g(7) = -35$.

2. Recopie et complète avec les mots :
• *linéaire* • *affine* • *image* • *antécédent*.

a. L'application f est une application … .

b. L'application g est une application … et aussi une application … .

c. 14 est l'… de 4 par l'application f.

d. 4 est l'… de 14 par l'application f.

e. L'… de 7 par l'application g vaut -35.

f. L'… de -35 par l'application g est 7.

41 Situations concrètes

① Je suis à 200 km de ma maison, je m'en rapproche à la vitesse de 60 km/h. Je veux connaître la distance qui me sépare de ma maison en fonction du temps.

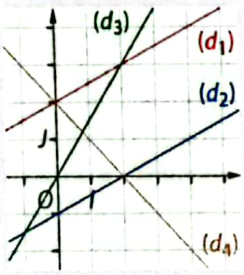
② Une cuve contient 200 L d'eau. On la remplit avec un tuyau dont le débit est de 60 L/h. On veut connaître le volume d'eau contenu dans la cuve en fonction du temps.

③ De la neige prélevée sur le sommet du Kilimandjaro a pour masse volumique 60 kg/m^3. On veut connaître la masse d'un tas de neige en fonction de son volume.

Associe chacune des situations ci-desssus à une des applications f, g ou h :
$f : x \mapsto 60x$; $g : x \mapsto 200 + 60x$; $h : x \mapsto 200 - 60x$.

42 Reconnaître graphiquement

Associe chacune des droites à une des applications ci-dessous.
$f : x \mapsto -x + 2$;
$g : x \mapsto 0{,}5x - 1$;
$h : x \mapsto 1{,}5x$;
$k : x \mapsto 0{,}5x + 2$.



43 Bien comprendre des propriétés

f désigne une application linéaire.

1. Complète les propriétés vues en cours.
• $f(u + v) = \ldots$; • $f(ku) = \ldots$.

2. On sait que $f(3) = -2$ et que $f(-6) = 4$.
En utilisant uniquement les propriétés rappelées à la question **1.**, complète le tableau ci-dessous.

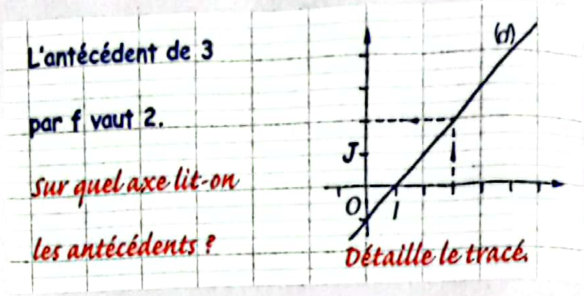
x	-3	6	30	24	-12	12
$f(x)$						

44 Procéder dans le bon sens

Le professeur a demandé à ses élèves de faire l'exercice suivant :

① Représente graphiquement l'application $f : x \mapsto x - 1$ par une droite (d).
② Détermine graphiquement l'antécédent par f de 3.

Voici le travail de Jean et la remarque de son professeur.



1. a. Explique comment Jean a procédé.

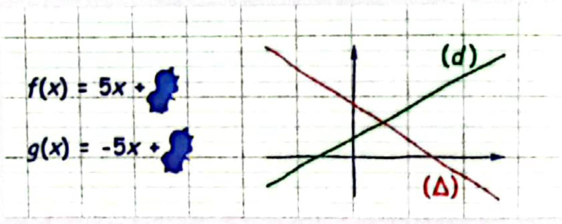
b. Quelle est son erreur ? Donne la bonne réponse.

c. Quelle aurait dû être la question pour que la réponse de Jean soit la bonne ?

2. Détermine graphiquement :
a. l'image par f de 5 ; **b.** l'antécédent par f de 5.

45 Sens de variation

Madeleine a représenté sur son cahier les applications f et g. Malheureusement, il a été tâché et les graduations n'ont pas été écrites.



1. Donne le sens de variation de chacune des applications f et g.

2. Associe chaque droite à la représentation graphique qui lui correspond.

46 Ni affine, ni linéaire

1. Rappelle la formule qui permet de calculer l'aire $\mathcal{A}(x)$ d'un carré de côté x.

2. $EFGH$ est un carré de côté x. Recopie et complète le tableau suivant.

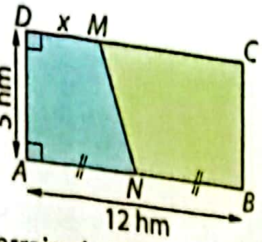
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\mathcal{A}(x)$							

3. Place les points correspondants dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

4. L'application qui à x fait correspondre $\mathcal{A}(x)$ est-elle une application linéaire ? affine ? Justifie ta réponse.

47 Partage de terrain

Hakim et Jean-Pierre se partagent un terrain rectangulaire de sorte que chacun reçoive un trapèze rectangle comme le montre la figure ci-contre. L'aire du terrain de Hakim devra être égale au tiers de l'aire du rectangle $ABCD$.



1. Calcule l'aire du terrain de Hakim.

2. f désigne l'application qui, à x fait correspondre l'aire du trapèze $ADMN$.

a. Exprime $f(x)$ en fonction de x.

b. Démontre que f est une application affine de la forme $f(x) = ax + b$.

3. a. Calcule l'antécédent de 20 par f.

b. Explique comment le partage sera réalisé.

48 Augmentation et diminution

1. Les prix d'un magasin augmentent de 10 %.

a. Recopie et complète le tableau suivant.

Ancien prix (en F CFA)	100	200	500	1 000
Nouveau prix (en F CFA)				

b. On note f l'application qui à un ancien prix x fait correspondre le nouveau prix $f(x)$.
Exprime $f(x)$ en fonction de x.

2. Les prix d'un autre magasin diminuent de 20 %.
On note g l'application qui à un ancien prix x fait correspondre le nouveau prix $g(x)$.
Exprime $g(x)$ en fonction de x.

3. Représente les applications f et g dans un repère.

4. Réponds par lecture graphique ; puis par calcul, aux questions suivantes, pour chacun des magasins.

a. Avant les changements de prix, un article coûtait 1 250 F CFA. Quel est son nouveau prix ?

b. Le nouveau prix d'un article est 2 000 F CFA. Combien coûtait-il avant les changements de prix ?

49 Changements de températures

Pour convertir en degrés Celsius une température donnée en degrés Fahrenheit, il suffit de soustraire 32, de multiplier le résultat par 5 puis de diviser par 9 le nombre ainsi obtenu.

1. Vérifie qu'une température de 86 °F correspond à une température de 30 °C.

2. On note f l'application qui à une température x, en degrés Fahrenheit, fait correspondre cette température, en degrés Celsius. Exprime $f(x)$ en fonction de x.

3. Représente l'application f dans un repère d'unités 1 cm pour 10 °F en abscisses et 1 cm pour 10 °C en ordonnées.

4. Utilise ton graphique pour convertir :

a. en °C les températures : –20 °F ; 40 °F et 120 °F ;

b. en °F les températures : –10 °C ; 0 °C et 40 °C.

5. Retrouve les résultats du **4.** par des calculs.

S'entraîner au BEPC

50 Voyage Yaoundé-Kribi

Ali est un client régulier d'une société de transport. Pour aller de Yaoundé à Kribi, la société lui propose deux formules différentes :

Formule 1 : Payer chaque voyage aller et retour 2 500 F CFA.

Formule 2 : Acheter une carte de fidélité à 10 000 F CFA valable pour un an et payer chaque voyage aller et retour à 1 500 F CFA.

1. Soit x le nombre de voyages aller et retour effectués par Ali en un an.

a. Exprime en fonction de x, le coût Y_1 des voyages par la formule1.

b. Exprime en fonction de x, le coût Y_2 des voyages par la formule 2.

2. On considère les applications affines f et g définies par : $f(x) = 2\,500\,x$ et $g(x) = 1\,500x + 10\,000$.
Calcule $f(0)$; $g(0)$; $f(4)$ et $g(6)$.

BEPC 2003

51 Animaux de labour

Pour labourer son champ, on peut louer :
• un âne à 150 F CFA par jour ;
• un bœuf à 100 F CFA par jour avec un versement d'une caution non remboursable de 500 F CFA au premier jour de location ;
• un cheval à 3 000 F CFA pour une durée de trente jours de location au plus.

1. Recopie et complète le tableau ci-dessous.

Nombre de jours de location	9	17	30
Montant de la location avec un âne			
Montant de la location avec un bœuf			
Montant de la location avec un cheval			

2. Quel est le tarif le moins cher pour le laboureur, si sa location est de 9 jours, 17 jours, 30 jours ?

3. Soit x le nombre de jours de location ($x \leqslant 30$). On appelle y_A, y_B et y_C les montants de la location pour une durée de x jours avec respectivement les tarifs de l'âne, du bœuf et du cheval.

a. Exprime y_A et y_B en fonction de x.

b. Que peux-tu dire de y_C ?

4. Dans un plan muni d'un repère (O, I, J), trace les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = 150x$ et $y = 100x + 500$; en choisissant les unités :
• sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 2 unités,
• sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour 500 unités.

5. Trouve x, le nombre de jours pour qu'un âne et un bœuf reviennent au même coût.

BEPC 2008

52 Choisir sa formule

Jordan a l'habitude de louer une voiture lorsqu'il doit effectuer de longs trajets. Il s'adresse toujours à la même compagnie de location qui lui propose les formules ci-contre.

Jordan aimerait connaitre la formule la plus avantageuse en fonction de la longueur du trajet qu'il souhaite effectuer.

Il note pour cela x le nombre total de kilomètres à parcourir et désigne par f, g et h les applications qui à x font respectivement correspondre le prix à payer en optant pour la formule A, B ou C.

1. Jordan souhaite effectuer un trajet de 60 km. Vérifie que le prix à payer sera de :
- 21 000 F CFA avec la formule A ;
- 15 000 F CFA avec la formule B ;
- 35 000 F CFA avec la formule C.

2. a. Exprime $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ en fonction de x.

b. Représente chacune de ces applications dans un même repère. Tu prendras 1 cm pour 20 km en abscisses et 1 cm pour 5 000 F CFA en ordonnées.

3. Utilise ton graphique pour aider Jordan dans ses décisions.

a. Quelle est la formule la plus avantageuse pour effectuer un trajet de 160 km ? Calcule le prix alors payé.

b. Quelle formule permet de parcourir le plus grand nombre de kilomètres avec un budget de 20 000 F CFA ? Calcule le nombre de kilomètres alors parcourus.

4. Jordan souhaite effectuer un trajet de 100 km. Il pense pour cela prendre la formule A ou la formule B.

a. Comment peut-on constater graphiquement que Jordan a le choix entre ces deux formules ?

b. Vérifie par un calcul qu'un trajet de 100 km coûte autant avec chacune des deux formules.

c. Complète les phrases ci-dessous à l'aide d'observations graphiques :
- *pour un trajet de moins de … km, la formule … est plus avantageuse ;*
- *pour un trajet de compris entre … km et … km, la formule … est plus avantageuse ;*
- *pour un trajet de plus de … km, la formule … est plus avantageuse.*

53 Gestion de flux

Le directeur d'un aéroport international souhaite gérer au mieux ses infrastructures. Il a ainsi fait évaluer le nombre de personnes le fréquentant à différents moment de la journée entre l'ouverture de l'aéroport à 6 h et sa fermeture à 21 h. Les résultats de cette étude ont été reportés dans le tableau ci-dessous.

Heure de la journée	6 h	9 h	12 h	15 h	18 h	21 h
Nombre de personnes présentes dans l'aéroport	20	140	200	200	180	60

1. a. Place les points représentants ces données dans un repère. Tu prendras 1 cm pour 1 heure en abscisses en commençant à 6 heures et 1 cm pour 20 personnes en ordonnées.

b. Relie chaque couple de points successifs à la règle afin d'obtenir la représentation d'une application affine par morceaux.

2. Réponds aux questions suivantes en utilisant le graphique.
Sur quelle période de la journée le nombre de personnes présentes dans l'aéroport :

a. augmente-il ? **b.** diminue-t-il ? **c.** est-il stable ?

3. Dès que le nombre de personnes présentes dans l'aéroport est plus grand que 100, le directeur de l'aéroport est dans l'obligation de faire venir sur place du personnel médical par mesure de précaution.
Sur quelle période de la journée cela se produit-il ? Justifie par un calcul.

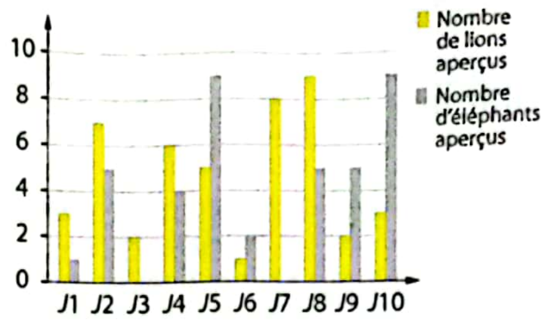
4. Les personnels en charge de l'entretien des locaux ne peuvent intervenir en fin de journée qu'à partir du moment où le nombre de personnes présentes en inférieur à 140.
Sur quelle période de la journée cela se produit-il ? Justifie par un calcul.

15 Statistiques

Pour démarrer

Parc national de Waza

Un guide du parc national de Waza, situé au nord du Cameroun a relevé le nombre de lions et d'éléphants qu'il a aperçu lors de ces dix dernières journées. Ses observations sont représentées sur le graphique ci-contre.



1 D'après ce graphique :

a. durant quelle journée a-t-il aperçu le plus de lions ?

b. combien d'éléphants a-t-il aperçu durant ces dix dernières journées ?

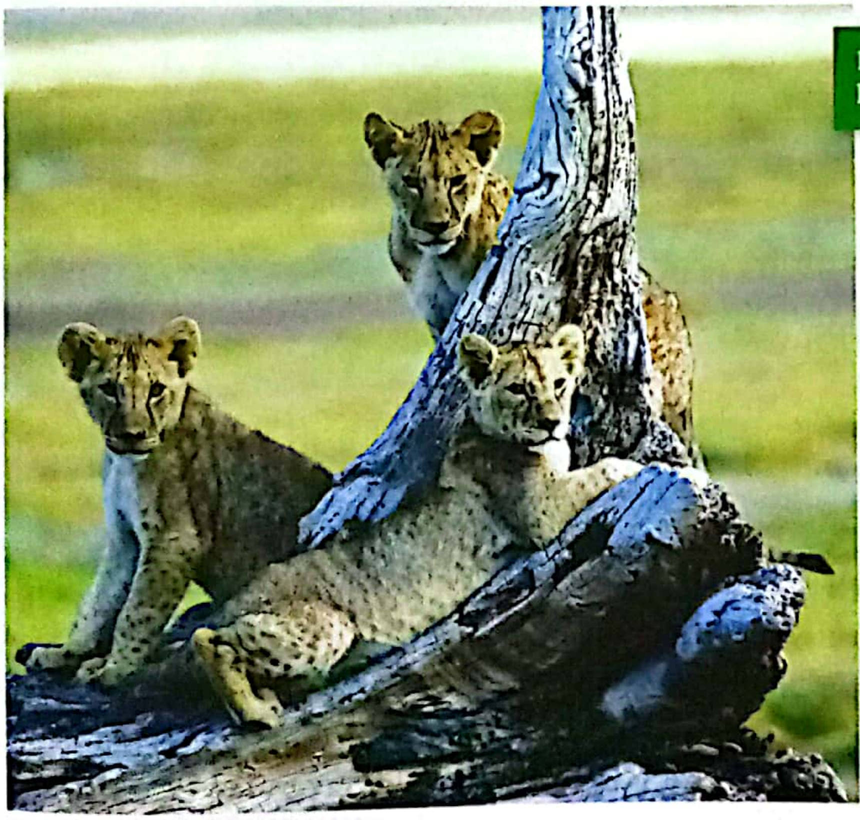
c. durant ces dix journées, a-t-il aperçu plus de lions que d'éléphants ?

2 Calcule le nombre moyen de lions ; puis d'éléphants, aperçus au cours des dix journées.

3 Calcule le pourcentage de journées durant lesquelles il a aperçu :

a. plus de 3 lions ;

b. moins de 5 éléphants.



Des lionceaux dans le parc national de Waza.

Savoir-faire

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- mobiliser tes connaissances de 4[e] sur les statistiques ;
- calculer une moyenne pondérée ;
- regrouper une population en classes et déterminer les effectifs des classes ;
- représenter et interpréter un histogramme.

15 Activités de découverte

1 Vocabulaire et diagramme semi-circulaire (rappels) › Cours 1

Le samedi, Samy joue au football avec ses amis. Il a résumé dans le tableau ci-dessous le nombre de buts par match qu'il a marqué durant les derniers mois.

Nombre de buts marqués	0	1	2	3	Total
Nombre de matchs	8	10	15	7	
Fréquence (en écriture fractionnaire)		$\frac{1}{4}$			
Fréquence (en %)	20				

1 Pour cette série statistique, indique :
a. le caractère étudié ;
b. les valeurs prises par le caractère étudié ;
c. l'effectif correspondant à la valeur 2.
d. Calcule l'effectif total et traduit ce résultat par une phrase liée à l'énoncé ;
e. Complète les cases vides du tableau.

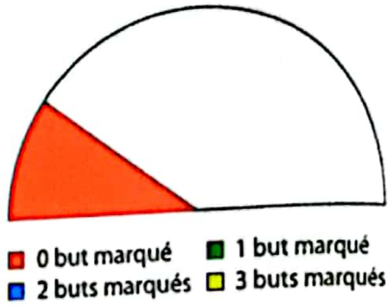
2 Samy a démarré ci-contre le calcul de la moyenne pondérée m.
a. Complète les pointillés et effectue ce calcul.
b. Interprète le résultat obtenu.

$$m = \frac{8 \times 0 + \ldots + 7 \times 3}{\ldots}$$

3 a. Indique le coefficient de proportionnalité du tableau ci-dessous utilisé pour le diagramme semi-circulaire.

Nombre de but marqués	0	1	2	3	Total
Fréquence (en %)	20				100
Mesure de l'angle (en degrés)				180	

b. Complète ce tableau et le diagramme semi-circulaire ci-contre.



2 Regroupement en classes et histogramme › Cours 2 et 3

On a demandé à 48 agriculteurs du Sud Cameroun, la superficie, en hectares (ha) de leur exploitation agricole. Les résultats sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

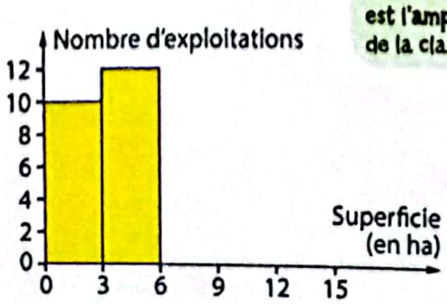
2	7	1	8	3	4	3	12	14	14	7	8
1	5	8	7	9	12	11	2	1	1	11	7
4	3	8	6	11	10	4	13	13	4	14	12
2	1	3	4	1	13	2	10	4	5	14	12

1 a. Combien d'exploitations agricoles ont une superficie inférieure à 3 ha ?
b. Complète le tableau ci-dessous qui consiste à regrouper les résultats de l'étude en classes, c'est-à-dire en intervalles.

Superficie (en ha)	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15]
Nombre d'exploitations					

• [6 ; 9[signifie que l'on inclut 6 ha et que l'on exclut 9 ha.
• 9 − 6 = 3 est l'amplitude de la classe [6 ; 9[.

2 a. Le diagramme démarré ci-contre appelé histogramme, illustre le tableau de la question 1.b. Complète cet histogramme.
b. Construis un histogramme analogue avec des classes d'amplitude 5 ha.



1 Étude d'une série statistique (sur un exemple)

a Vocabulaire (rappel)

On demande à 30 élèves d'une classe de troisième de Garoua :

Quelle est la distance, en mètres, entre votre domicile et le collège ?

- L'ensemble des élèves de cette classe est la **population** étudiée.
- La liste des réponses collectées est **une série statistique**.

Réponses collectées	130	250	380	700	1 200	70	840	700	130	40
	1 110	250	430	900	70	470	380	840	130	1 110
	840	470	70	520	430	900	380	700	380	130

- Chaque réponse collectée est **une donnée** ou **une valeur** de la série statistique.
- L'objet du sondage : « la distance domicile-collège » est **le caractère étudié**.
- On peut résumer le tableau ci-dessus en tenant compte des **effectifs** de chaque valeur.

Valeur	40	70	130	250	380	430	470	520	700	840	900	1 110	1 200	Effectif total
Effectif	1	3	4	2	4	2	2	1	3	3	2	2	1	**30**

Remarque : On peut construire un tableau analogue en remplaçant les effectifs par les fréquences (en écriture décimale, en écriture fractionnaire ou en pourcentage).

b Moyenne pondéré

Dans l'exemple précédent, la moyenne pondérée est :

$$\frac{1\times 40+3\times 70+4\times 130+\ldots+2\times 1\ 110+1\times 1\ 200}{1+3+4+\ldots+2+1}=\frac{14\ 950}{30}\approx 498.$$

Pour ces élèves, la distance moyenne entre leur domicile et leur collège est d'environ 498 m.

c Regroupement en classes de même amplitude

Principe : Lorsque la série statistique possède un grand nombre de valeurs différentes, il est intéressant de regrouper ces valeurs par intervalles.

Définitions • Une **classe** est un intervalle (de type $[a\,;b[$ ou $]a\,;b]$ ou $]a\,;b[$ ou $[a\,;b]$) permettant de regrouper des valeurs d'une série statistique.

• **L'amplitude de la classe** $[a\,;b[$ (ou $]a\,;b]$ ou ...) est le nombre $b-a$.

Exemple : Dans la série statistique ci-contre, chaque classe a pour amplitude 250 m.

Classe	Effectif
[0 ; 250[	8
[250 ; 500[	10
[500 ; 750[	4
[750 ; 1 000[	5
[1 000 ; 1 250[	3

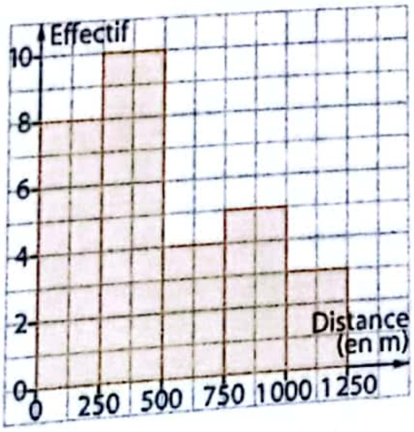
d Mode, classe modale

Définition Le **mode** ou la **classe modale** est la valeur ou la classe ayant le plus grand effectif.

Exemple : La classe modale correspondante au tableau ci-desssus est la classe [250 ; 500[(effectif 10).

Histogramme (sur un exemple)

Propriété On représente chaque classe du caractère étudié par un rectangle de dimensions :
- l'amplitude de la classe en abcisses ;
- l'effectif ou la fréquence de la classe en ordonnées.



Définition Ce type de diagramme statistique est appelé **histogramme**.

Apprendre à construire et à interpréter un histogramme

Énoncé

Voici la longueur, en km, de tous les fleuves d'Afrique.

Bandama	1 050	Gambie	1 130	Nyong	640	Sanaga	918
Bénoué	1 370	Jubba	1 658	Ogooué	890	Sebou	614
Bouregreg	240	Comoé	813	Okavango	1 600	Sénégal	1 790
Casamance	320	Limpopo	1 600	Orange	1 860	Tana	708
Cavally	515	Moulouya	600	Oum er-Rbia	600	Volta	1 346
Congo	4 700	Niger	4 200	Ruvuma	800	Wouri	160
Drâa	1 100	Nil	6 400	Saloum	250	Zambèze	2 750

1. a. Dans un tableau, regroupe les données de cette série statistique en classes d'amplitude 1 000 km.
b. Indique la classe modale.

2. a. Représente l'histogramme associé au tableau de la question **1.**
b. Quel est le pourcentage de fleuves africains mesurant moins de 1 000 km ?

Solution

1. a.

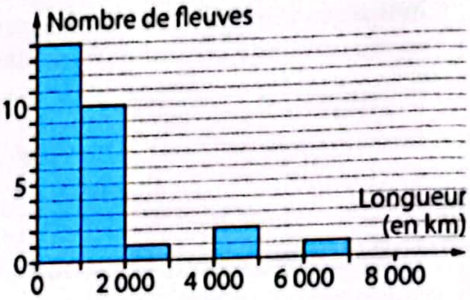
Longueur	Nombre de fleuves
[0 ; 1 000[	14
[1 000 ; 2 000[	10
[2 000 ; 3 000[	1
[3 000 ; 4 000[	0
[4 000 ; 5 000[	2
[5 000 ; 6 000[	0
[6 000 ; 7 000[	1

Après avoir complété le tableau, je vérifie que je n'ai oublié aucune donnée.

b. Le plus grand effectif est 14, donc la classe modale est [0 ; 1 000[.

2. a.

Je choisis correctement la graduation des axes afin d'obtenir un histogramme lisible.



b. 14 fleuves ont une longueur inférieure à 1 000 km et il y a 28 fleuves en tout, donc : $P = \frac{14}{28} \times 100 = 50$.
50 % des fleuves ont une longueur inférieure à 1 000 km.

S'exercer

Pour les exercices 1 à 4,
1. a. Regroupe les données de la série statistique suivante dans un tableau : 13 – 0 – 9 – 5 – 10 – 1 – 2 – 4 – 0 – 3 – 7 – 6 – 7 – 3 – 11 – 2 – 4 – 0 – 3 – 12 – 7 – 8 – 6 – 4 – 11 – 2 – 5.
b. Indique la (ou les) classes(s) modale(s).
2. Représente l'histogramme associé.

1

Classe	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[
Effectif				

2 Les classes sont d'amplitude 5 et le tableau indique les effectifs.

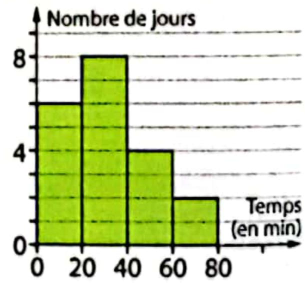
3

Classe	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[
Effectif				

4 Les classes sont d'amplitude 2 et le tableau indique les fréquences en pourcentage arrondies à l'unité.

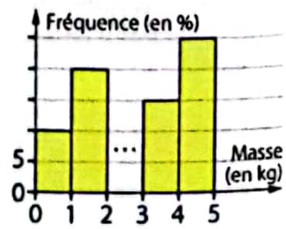
5 Monsieur Mukete vit à Dimako et travaille à Bertoua. On lui a demandé de relever durant quelques jours le temps de ses trajets domicile-travail. Les résultats sont présentés sur l'histogramme.

a. Sur combien de jours de travail cette étude a-t-elle été menée ?
b. Quel est le pourcentage de trajets ayant duré moins de 40 min ?



6 Menacé de disparition, le kanga est une espèce de poisson de rivière du Cameroun.
Des scientifiques ont pesé certains de ces poissons.

a. Quel est le pourcentage de poissons pesant entre 2 et 3 kilos ?
b. Quelle est la classe modale de cette série statistique ?



Moyenne – Fréquence

7 Calcule la moyenne de la série statistique suivante : 3 – 7 – 8 – 1 – 2 – 4 – 3 – 7 – 4 – 2.

8 Ce tableau indique le pourcentage de la population camerounaise ayant eu accès à l'eau traitée entre 2008 et 2011.

a. Calcule la moyenne de cette série statistique.

b. Interprète par une phrase le résultat du **a.**

Année	Pourcentage de la population
2008	73
2009	75
2010	77
2011	78

(Source : Banque Mondiale)

9 Calcule la moyenne de la série statistique ci-dessous, puis complète le tableau :

Valeur	10	20	30	40	50	Total
Effectif	5	25	30	15	5	
Fréquence (en %)						

10 Le tableau ci-dessous résume le nombre de buts par match marqués par Lionel Messi dans le championnat espagnol durant la saison 2011-2012.

Nombre de buts	0	1	2	3	4
Nombre de matchs	13	10	7	6	2

1. Calcule, puis interprète, la moyenne de cette série statistique. Arrondis au centième.

2. Calcule le pourcentage, arrondi à l'unité, de matchs durant lesquels Lionel Messi a marqué :

a. moins de 2 buts ;

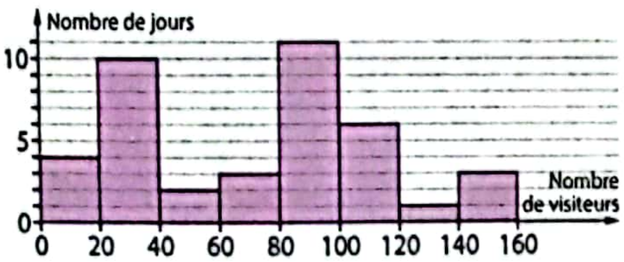
b. au moins 3 buts ;

c. plus de 3 buts.

Je réfléchis à la signification : « moins de 2 buts » : c'est 0 but ou 1 but.

Regroupement en classes – Histogramme

11 Une enquête visant à étudier la fréquentation du musée national de Yaoundé a donné cet histogramme.

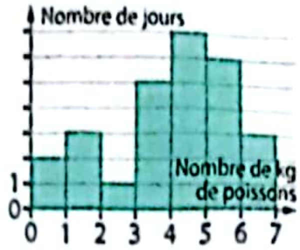


1. Sur combien de jours cette enquête a-t-elle porté ?

2. a. Indique la classe modale ainsi que son effectif.

b. Durant combien de jours y a-t-il eu au moins 100 visiteurs par jour ?

12 Amadou est pêcheur. L'histogramme ci-contre représente le nombre de kg de poissons ramené par jour par Amadou. Réponds par vrai ou faux. Justifie.



a. Cette étude a porté sur 30 jours.

b. Le plus souvent Amadou ramène entre 4 et 5 kg de poissons.

c. Une fois sur trois, Amadou ramène entre 5 et 7 kg de poissons.

13 Un policier s'est posté à l'entrée de Garoua avec un radar afin de contrôler la vitesse des voitures. Voici les vitesses, en km/h, relevées :

112 – 90 – 87 – 110 – 93 – 98 – 102 – 105 – 117 – 89 – 90 – 88 – 100 – 113 – 115 – 117 – 105 – 111 – 113 – 99 – 100 – 102 – 108 – 97 – 103 – 104 – 98 – 112 – 90 – 90

1. a. Regroupe ces données dans ce tableau.

Vitesse (en km/h)	[80 ; 85[	[85 ; 90[	[90 ; 95[	[95 ; 100[
Nombre de voitures				

Vitesse (en km/h)	[100 ; 105[	[105 ; 110[	[110 ; 115[	[115 ; 120[
Nombre de voitures				

b. Représente l'histogramme associé.

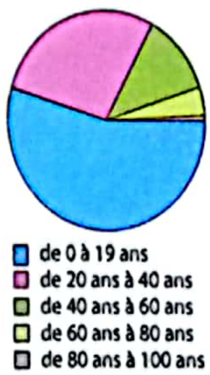
2. Sur cette portion de route, la vitesse est limitée à 110 km/h.

a. Indique le nombre de véhicules qui étaient en excès de vitesse.

b. Déduis-en le pourcentage de véhicules qui étaient en excès de vitesse. Arrondis au dixième.

14 Le diagramme ci-contre illustre la répartition de la population camerounaise en 2010 en fonction de la tranche d'âge.

a. Utilise ton rapporteur pour compléter la deuxième ligne du tableau ci-dessous (arrondis au degré près).



(Source : statistics-cameroun.org)

Classe d'âge	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 80[	[80 ; 100[	Total
Mesure de l'angle						
Fréquence (en %)						

b. Déduis-en la troisième ligne du tableau (arrondis à l'unité).

c. Représente l'histogramme des fréquences en pourcentage associé.

Bien comprendre mieux rédiger

15 Vérifier ses calculs

Un professeur a demandé à ses élèves de construire l'histogramme des fréquences en pourcentage associé au tableau ci-dessous :

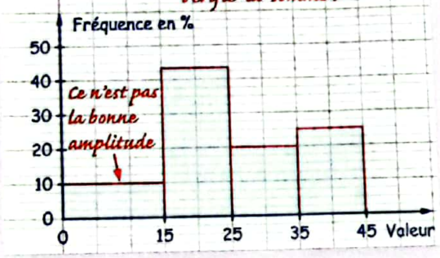
Classe	[5 ; 15[	[15 ; 25[	[25 ; 35[	[35 ; 45[
Effectif	6	27	12	15

Voici les réponses de Félix et les remarques du professeur.

Oui — Je complète le tableau avec la ligne des fréquences en %.

Classe	[5 ; 15[	[15 ; 25[	[25 ; 35[	[35 ; 45[
Fréquence en %	10	44	20	25

Tu as commis une erreur : vérifie la somme !



Tiens compte des remarques du professeur pour proposer une solution correcte à cet exercice.

16 Construire un exemple

Construis un exemple d'histogramme tel que :
- les classes sont d'amplitude 3 ;
- l'effectif total est 28 ;
- la classe modale est la classe [7 ; 10[;
- la classe [4 ; 7[correspond à 20 % des effectifs ;
- l'effectif de la dernière classe est 1.

17 Plus de ..., moins de...

Dans le tableau ci-contre sont référencées les tailles, en cm, des 40 élèves d'une classe de troisième.

Taille (en cm)	Nombre d'élèves
[140 ; 145[	4
[145 ; 150[	10
[150 ; 155[	13
[155 ; 160[	7
[160 ; 165[	6

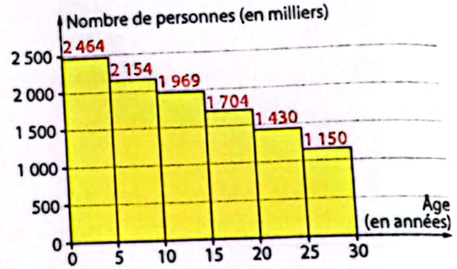
1. Relie chacune des expressions ci-dessous à l'intervalle correspondant.

Expression	Intervalle
Moins de 155 cm •	• [145 ; 165[
150 cm et plus •	• [140 ; 165[
140 cm au minimum •	• [140 ; 155[
Inférieur à 145 cm •	• [140 ; 145[
Supérieure ou égale à 140 cm •	• [150 ; 165[

2. Calcule le pourcentage d'élèves de cette classe :
a. mesurant moins de 150 cm ;
b. de taille supérieure ou égale à 155 cm.

18 D'un graphique à un autre

L'histogramme ci-dessous indique, par tranche d'âge, la répartition de la population des moins de 30 ans au Cameroun.



(Source : Université de Sherbrocke)

1. Complète le tableau ci-dessous dans lequel tu arrondiras les résultats à l'unité.

Tranche d'âge	Nombre de pers. (en milliers)	Fréquence (en %)	Mesure (en degrés)
[0 ; 5[			
[5 ; 10[			
[10 ; 15[			
[15 ; 20[			
[20 ; 25[			
[25 ; 30[			
Total		100	360

2. a. Indique les colonnes du tableau précédent qui sont utiles pour construire :
- le diagramme circulaire ;
- l'histogramme des fréquences en pourcentage.

b. Construis ces deux diagrammes.
c. Construis l'histogramme des effectifs avec des classes d'amplitude 10 ans.

19 Capitales africaines

Le tableau ci-dessous indique le nombre d'habitants de toutes les capitales africaines (exceptés Le Caire : 15,45 millions d'habitants et Kinshasa : 9,4 millions d'habitants).

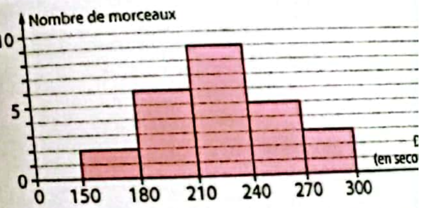
0,53	2,57	0,76	0,22	1,48	0,8	2,44	0,63	0,05
0,26	0,57	0,56	4,58	0,75	0,03	2,26	2,16	0,16
0,4	2,75	1,02	1,65	2	0,44	1,81	0,63	0,8
1,1	1,3	0,77	1,21	1,05	0,01	3,22	0,03	1,07
1,35	2,09	0,1	2,46	0,99	1,48	0,73	1,75	1,6

1. a. Combien de capitales sont concernées par ce tableau ?
b. Regroupe les données du tableau en classes d'amplitude 0,5 million.
c. Indique la classe modale.
d. Représente l'histogramme associé.
e. Quel est le pourcentage de capitales qui comptent :
- moins de 1 million d'habitants ?
- 2 millions d'habitants ou davantage ?

2. a. Regroupe les données du tableau en classes d'amplitude 1 million d'habitants.
b. Représente le diagramme circulaire associé.

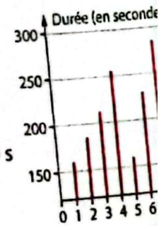
20 Morceaux de musique

Sur son baladeur, Clarisse dispose de morceaux de musique. Les durées, en secondes, de ces morceaux sont illustrées par l'histogramme ci-dessous :



1. a. Combien y a-t-il de morceaux de musique sur le baladeur de Clarisse ?
b. Quel est le pourcentage de morceaux correspondant à la classe modale ?

2. Ce week end, Clarisse a ajouté dix nouveaux morceaux de musique sur son baladeur. Leur durée, en secondes, est indiquée sur le diagramme ci-contre.
a. Calcule la durée moyenne pour ces nouveaux morceaux.
b. Construis un histogramme avec des classes d'amplitude 30 s qui prend en compte tous les morceaux de Clarisse.



21

La
la
su

19 Capitales africaines

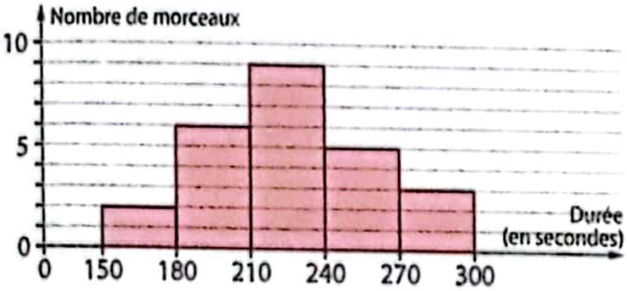
Le tableau ci-dessous indique le nombre d'habitants de toutes les capitales africaines (exceptés Le Caire : 15,45 millions d'habitants et Kinshasa : 9,4 millions d'habitants).

0,53	2,57	0,76	0,22	1,48	0,8	2,44	0,63	0,05
0,26	0,57	0,56	4,58	0,75	0,03	2,26	2,16	0,16
0,4	2,75	1,02	1,65	2	0,44	1,81	0,63	0,8
1,1	1,3	0,77	1,21	1,05	0,01	3,22	0,03	1,07
1,35	2,09	0,1	2,46	0,99	1,48	0,73	1,75	1,6

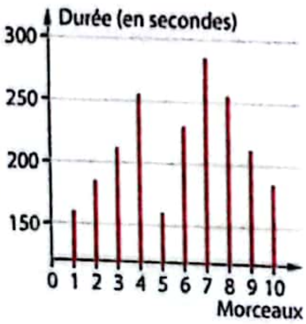
1. a. Combien de capitales sont concernées par ce tableau ?
b. Regroupe les données du tableau en classes d'amplitude 0,5 million.
c. Indique la classe modale.
d. Représente l'histogramme associé.
e. Quel est le pourcentage de capitales qui comptent :
• moins de 1 million d'habitants ?
• 2 millions d'habitants ou davantage ?
2. a. Regroupe les données du tableau en classes d'amplitude 1 million d'habitants.
b. Représente le diagramme circulaire associé.

20 Morceaux de musique

Sur son baladeur, Clarisse dispose de morceaux de musique. Les durées, en secondes, de ces morceaux sont illustrées par l'histogramme ci-dessous :



1. a. Combien y a-t-il de morceaux de musique dans le baladeur de Clarisse ?
b. Quel est le pourcentage de morceaux correspondant à la classe modale ?
2. Ce week end, Clarisse a ajouté dix nouveaux morceaux de musique sur son baladeur. Leur durée, en secondes, est indiquée sur le diagramme ci-contre.
a. Calcule la durée moyenne pour ces nouveaux morceaux.
b. Construis un histogramme avec des classes d'amplitude 30 s qui prend en compte tous les morceaux de Clarisse.



S'entraîner au BEPC

21 Les tenues de sport

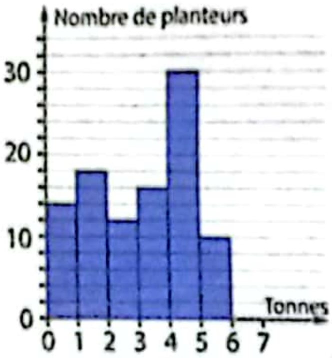
La répartition des élèves d'un collège en fonction de la couleur de leurs tenues d'EPS a donné le tableau suivant :

Couleur	VERT	ROUGE	JAUNE	Total
Angle	...	60°	...	180°
Effectif	225	...	...	900

1. Donne la nature du caractère étudié.
2. Recopie et complète le tableau ci-dessus.
3. Construis le diagramme semi-circulaire de cette série.

BEPC 2010

22 Récolte de café



Une enquête portant sur la récolte de café a donné le diagramme ci-contre, représentant le nombre de planteurs et la masse, en tonnes, de leurs récoltes.
La production est regroupée en classe.
Réponds aux questions en utilisant le graphique ci-dessus.
1. Trouve le nombre de planteurs interrogés.
2. Recopie et complète le tableau ci-contre.
3. Combien de planteurs ont récolté moins de 40 tonnes ?

Classe	Effectif	Fréquence (en %)
[0 ; 10[	14	14
[10 ; 20[	...	18
[20 ; 30[	12	...
[30 ; 40[	...	...
[40 ; 50[	30	30
[50 ; 60[	10	10

BEPC 2009

23 Grande consommation de cahiers

Une enquête menée dans une classe de troisième et portant sur le nombre de cahiers de 196 pages consommés par chaque élève au cours d'une année scolaire a permis de dresser le tableau des effectifs suivants :

Modalité	[2 ; 5[	[5 ; 8[	[8 ; 11[	[11 ; 14[	[14 ; 17[
Effectif	2	14	3	16	5

1. Quelle est la classe modale de cette série ?
2. Construis l'histogramme de cette série statistique.
3. Trouve le nombre total d'élèves de cette classe ainsi que celui des élèves ayant utilisé moins de onze cahiers.

BEPC 2003

24 Espérance de vie

Le tableau ci-contre indique les espérances de vie des hommes et des femmes dans les pays d'Afrique.

1. a. Regroupe ces deux séries statistiques (hommes, femmes) en classes d'amplitude 5 ans, dans deux tableaux distincts qui démarrent à 30 ans.
Fais figurer, dans ces tableaux, les effectifs (le nombre de pays) et les fréquences en pourcentages (arrondis à l'unité).

b. Représente, dans deux repères distincts mais ayant la même échelle, les histogrammes associés aux effectifs.

2. Quel est le pourcentage de pays dans lesquels :

a. les hommes ont moins de 50 ans d'espérance de vie ?

b. les femmes ont 55 ans ou davantage d'espérance de vie ?

Swaziland	31,84	32,62
Angola	36,73	38,57
Zambie	38,34	38,54
Zimbabwe	40,62	38,35
Lesotho	40,73	39,18
Liberia	38,93	41,89
Sierra Leone	38,36	42,87
Mozambique	41,40	40,40
Afrique du Sud	43,21	41,66
Malawi	43,35	42,61
Namibie	44,39	41,79
Djibouti	41,88	44,65
Rép. centrafricaine	43,69	43,79
Niger	44,05	44,00
Guinée-Bissau	45,37	49,04
Tchad	46,17	48,27
Nigeria	46,83	48,07
Somalie	47,06	50,69
Rwanda	47,87	50,16
Côte d'Ivoire	46,43	51,66
Soudan	48,24	50,03
Burkina Faso	47,68	50,80
Éthiopie	48,06	50,44
Mali	47,60	51,46
Guinée équ.	48,11	50,95
Guinée	48,50	50,84
Tanzanie	49,41	52,04
Botswana	51,55	49,58
Burundi	50,48	52,12
Ouganda	50,78	52,73
Cameroun	52,15	53,59
Rép. du Congo	52,10	54,52
Bénin	52,28	54,63
Mauritanie	51,24	55,85
Gabon	52,85	55,17
Gambie	52,68	56,46
Kenya	55,24	55,37
Sénégal	55,34	58,09
Rép. dém. du Congo	54,97	59,50
Togo	55,81	59,96
Ghana	58,31	59,95
Érythrée	57,88	61,28
Maroc	68,88	73,67
Égypte	69,04	74,22
Algérie	71,91	75,21
Tunisie	73,60	77,21

(Source : CIA World Factbook)

25 Les mangues de Mariam

1. Ce matin Mariam va vendre sur le marché les 60 mangues qu'elle a récoltées hier.
Disposant de différentes masses pour sa balance, dont la plus petite est de 50 g, elle a pesé chacune de ses mangues. Ses pesées sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Masse (en g)	[250 ; 300[	[300 ; 350[	[350 ; 400[	[400 ; 450[	[450 ; 500[	[500 ; 550[
Nombre de mangues	6	10	13	…	14	2

a. Calcule la donnée manquante du tableau et indique la classe modale.

b. Construis l'histogramme associé à cette série statistique.

c. Quel est le pourcentage de mangues pesant moins de 450 g ? Arrondis à l'unité.

2. Ahmed a acheté 20 mangues de même calibre à Mariam.
De retour chez lui, il utilise une balance de précision pour peser chacune des mangues. Ses pesées sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Masse (en g)	300	305	310	315	320
Nombre de mangues	2	5	6	5	2

a. Calcule la masse moyenne des mangues achetées par Ahmed.

b. Sachant que Mariam vendait ses mangues 60 F CFA pour 100 g, quel prix Ahmed a-t-il payé ?

Épreuve 1

Examen : BEPC Session 2012

Durée : 2 h

L'épreuve comporte trois parties A, B et C. Le candidat devra traiter chacune des parties. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

A. Activités numériques — 6,5 points

Exercice 1 : 1,5 point

On donne $X = \dfrac{2^7 \times 3^6 \times 5^3}{81 \times 2^8 \times 125}$.

1. Écrire X sous forme de fraction irréductible.

2. Trouver deux entiers consécutifs α et β tels que $\alpha < X < \beta$.

Exercice 2 : 2 points

1. Le système $\begin{cases} 7u + 3v = 4\,850 \\ 4u + 6v = 4\,700 \end{cases}$ admet une solution unique.

Un seul des quatre ensembles ci-dessous représente son ensemble solution ; représenter ce système dans un repère (O, I, J) sur votre feuille de composition et indiquer son ensemble solution.

$S_1 = \{500 ; 450\}$; $S_2 = \{(450 ; 500)\}$;
$S_3 = \{(500 ; 450)\}$; $S_4 = \{450 ; 500\}$.

2. Mato achète sept cahiers et trois bloc-notes à 4 850 FCFA. Moko achète deux cahiers et trois bloc-notes identiques à ceux de Mato à 2 350 FCFA.
Calculer le prix d'un cahier et celui d'un bloc-notes.

Exercice 3 : 3 points

On considère les nombres réels :
$$a = 3 + \sqrt{7} \text{ et } b = -3 + \sqrt{7}.$$

1. Calculer a^2 ; b^2 et ab.

2. Montrer que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ est un entier relatif négatif.

3. Soit $Y = \dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}$. Sachant que :
$2{,}6457 < \sqrt{7} < 2{,}6458$, donner un encadrement de Y.

4. Une seule des quatre réponses ci-après désigne la valeur exacte de $|-3 + \sqrt{7}|$.
Dire laquelle.
a. $-3 + \sqrt{7}$; **b.** $3 + \sqrt{7}$; **c.** $3 - \sqrt{7}$; **d.** $-3 - \sqrt{7}$.

B. Activités géométriques — 6,5 points

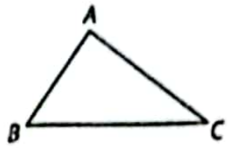
Exercice 1 : 1 point

Répondre par vrai ou faux aux propositions suivantes.

1. Si $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont deux angles complémentaires, alors : $\cos \widehat{A} = \sin \widehat{C}$.

2. Dans le plan rapporté à un repère (O, I, J), les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}(3 ; 2)$ sont colinéaires.

Exercice 2 : 2,5 points



L'unité de longueur est le centimètre.
On donne : $AB = 30$; $BC = 50$.

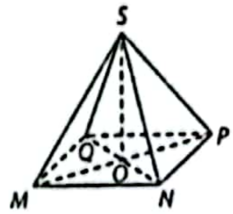
1. Déterminer AC pour que triangle ABC soit rectangle en A.

2. Calculer $\cos \widehat{B}$ et $\sin \widehat{B}$.

3. Déterminer à 1° près par excès la mesure de l'angle $\widehat{B}$.

Exercice 3 : 3 points

$SMNPQ$ est une pyramide régulière de sommet S, sa base est le carré $MNPQ$ de côté 8 cm, et sa hauteur OS est telle que $OS = 7$ cm.



1. a. Montrer que la mesure d'une arête latérale de cette pyramide est égale à 9 cm.

b. Représenter un patron de cette pyramide à l'échelle $\dfrac{1}{2}$.

2. Calculer la mesure de la hauteur issue de S de la face latérale SNP.

C. Problème — 7 points

L'unité de longueur est le centimètre.
Dans un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points : $R(1 ; 5)$ et $T(-1 ; -1)$.

1. a. Placer les points R et T dans le repère orthonormé (O, I, J).

b. Déterminer une équation cartésienne de la droite (RT).

2. Tracer dans un même repère les droites (D) et (D') d'équations cartésiennes respectives :
$$y = -\frac{1}{3}x + 2 \text{ et } y = 3x + 2.$$

3. a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (RT) avec l'axe des abscisses et celles du point d'intersection de (D) avec le même axe.

b. Montrer que $K(0 ; 2)$ est le point d'intersection des droites (RT) et (D).

c. On considère les points $M\left(-\dfrac{2}{3} ; 0\right)$ et $N(6 ; 0)$.
Démontrer que le triangle KMN est rectangle en K.

4. Le symétrique de M par rapport à K est noté M' et celui de N est noté N'.

a. Montrer que le quadrilatère $MNM'N'$ est un losange.

b. Calculer l'aire du losange $MNM'N'$.

Éléments de correction et solutions

A. Activités numériques

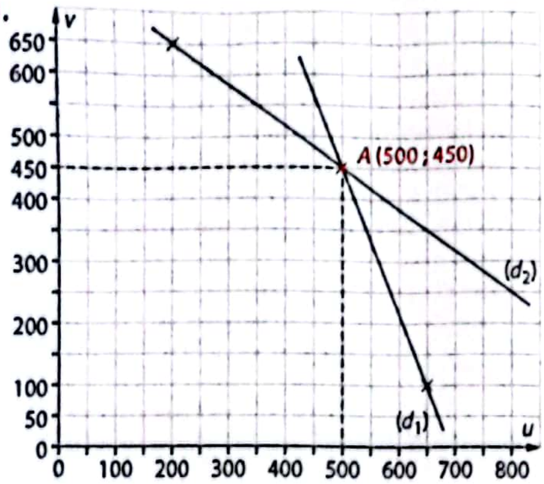
Exercice 1

1. $X=\dfrac{2^7\times 3^6\times 5^3}{3^4\times 2^8\times 5^3}=\dfrac{3^2}{2^1}=\dfrac{9}{2}$.

2. $\alpha=4$ et $\beta=5$.

Exercice 2

1.



(d_1) est la droite d'équation : $7u+3v=4\,850$;
(d_2) est la droite d'équation : $4u+6v=4\,700$;
$S_3=\{(500\,;450)\}$ est l'ensemble solution du système.

2. En posant u le prix d'un cahier et v le prix d'un bloc-notes, on obtient le système de la question **1.** le prix d'un cahier est donc 500 FCFA et celui d'un bloc-notes 450 FCFA.

Exercice 3

1. $a^2=16+6\sqrt{7}$; $b^2=16-6\sqrt{7}$; $ab=-2$.

2. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=-16$.

3. $Y=\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{a^2-b^2}{ab}=-6\sqrt{7}$ donc
$-15{,}8748<Y<-15{,}8742$.

4. $|-3+\sqrt{7}|=3-\sqrt{7}$.

B. Activités géométriques

Exercice 1

1. Vrai. **2.** Vrai.

Exercice 2

1. Grâce à la propriété de Pythagore, on trouve $AC=40$ cm.

2. Le triangle ABC est rectangle en A.

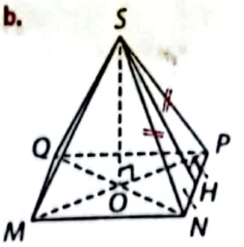
• $\cos\widehat{B}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{30}{50}=0{,}6$; • $\sin\widehat{B}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{40}{50}=0{,}8$.

3. De $\cos\widehat{B}=0{,}6$; on déduit que $\widehat{B}\approx 54°$.

Exercice 3

1. a. • Grâce à la propriété de Pythagore dans le triangle MNP rectangle en N, on trouve que $MP=8\sqrt{2}$ cm et donc $OM=4\sqrt{2}$ cm.
• Grâce à la propriété de Pythagore dans le triangle MOS rectangle en O, on trouve que $SM=9$ cm.

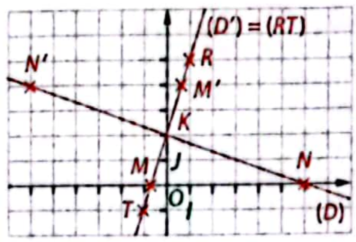
b.



2. On note H le pied de la hauteur issue de S dans le triangle SNP. Grâce à la propriété de Pythagore dans le triangle SHN rectangle en H, on trouve que $SH=\sqrt{65}$ cm.

C. Problème

1. a. et **2.**



b. $6x-2y+4=0$ est une équation cartésienne de (RT) ($y=3x+2$ est l'équation réduite de (RT), donc $(D')=(RT)$).

3. a. • On résout le système $\begin{cases}y=3x+2\\y=0\end{cases}$ pour déduire que la droite (RT) coupe l'axe des abscisses au point $M\left(-\dfrac{2}{3}\,;0\right)$.

• On résout le système $\begin{cases}y=-\dfrac{1}{3}x+2\\y=0\end{cases}$ pour déduire que la droite (D) coupe l'axe des abscisses au point $N\,(6\,;0)$.

b. On résout le système $\begin{cases}y=3x+2\\y=-\dfrac{1}{3}x+2\end{cases}$, on obtient $\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}$.

Ainsi, les droites (RT) et (D) se coupent au point $K\,(0\,;2)$.

c. $\overrightarrow{KM}\left(-\dfrac{2}{3}\,;-2\right)$ et $\overrightarrow{KN}(6\,;-2)$.

Or $x_{\overrightarrow{KM}}\times x_{\overrightarrow{KN}}+y_{\overrightarrow{KM}}\times y_{\overrightarrow{KN}}=-\dfrac{2}{3}\times 6+(-2)\times(-2)=0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{KN}$ sont orthogonaux.
Ainsi, **le triangle KMN est rectangle en K.**

4. a. K est le milieu des diagonales $[MM']$ et $[NN']$, donc $MNN'M'$ est un parallélogramme.
De plus, d'après la question **3. c.** ses diagonales sont perpendiculaires, donc $MNN'M'$ est un **losange.**

b. • Le repère (O, I, J) est orthonormé, donc

$MK=\sqrt{\left(0-\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right)^2+(2-0)^2}=\sqrt{\dfrac{40}{9}}$ cm ;

de même $NK=\sqrt{40}$ cm.

• Aire $(MNN'M')=4\times$ Aire $(MKN)=4\times\dfrac{MK\times NK}{2}=\dfrac{80}{3}$ cm^2.

Épreuve 2

Examen : BEPC Sessions antérieures

Durée : 2 h

L'épreuve comporte trois parties A, B et C. Le candidat devra traiter chacune des parties. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

A. Activités numériques — 6,5 points

Exercice 1 : 1 point

Le réel $(2-\sqrt{5})^2-3\sqrt{20}$ s'écrit sous la forme $a+b\sqrt{5}$, où a et b sont des entiers rationnels.
Trouver les nombres a et b.

Exercice 2 : 2 points

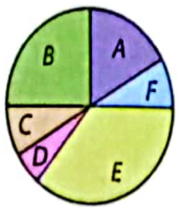
Soit l'expression littérale : $P=(x-1)^2+(x-1)(x+2)$.

a. Développer et réduire P.
b. Donner la forme factorisée de P.
c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x-1)(2x+1)=0$.

Exercice 3 : 1 point

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} a-b=36 \\ 4a-2b=90 \end{cases}$.

Exercice 4 : 2,5 points



Le diagramme circulaire ci-contre représente la répartition de la population de six villages A, B, C, D, E, F. La population totale de l'ensemble des villages est 72 000 habitants.

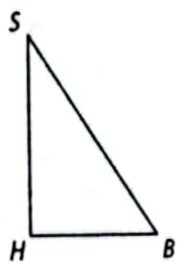
1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous en utilisant le diagramme ci-dessus.

Village	A	B	C	D	E	F	Total
Mesure de l'angle au centre associé				20°		30°	360°
Effectif de la population	12 000		6 000	4 000		6 000	72 000

2. Quelle est la nature du caractère de cette série statistique ?
3. Déterminer le mode de cette série.

B. Activités géométriques — 6,5 points

Exercice 1 : 2,5 points

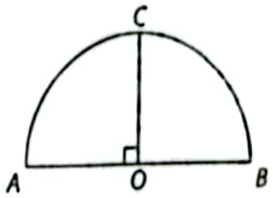


On donne un triangle SHB rectangle en H tel que $SH=60$ cm et $SB=90\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

On fait une révolution du triangle SHB autour de l'axe (SH), on obtient un solide de l'espace (T).

1. Quelle est la nature de (T) ?
2. Calculer la distance HB et le volume $\mathcal{V}$ de (T).
3. On suppose que (T) est un récipient.
Donner sa capacité en litre.

Exercice 2 : 4 points



On désigne par $(\mathcal{C})$ le demi-cercle de centre O et de rayon $OA=2{,}5$ cm.
C est un point du cercle comme l'indique la figure ci-contre.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Angle	$\widehat{BCA}$	$\widehat{ABC}$	$\widehat{AOC}$
Mesure en degrés			

3. On appelle E l'image de C par S_O (symétrie de centre O).
a. Quelle est la nature du quadrilatère $ACBE$? Justifier.
b. Montrer que $CA=CB=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

C. Problème — 7 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Placer les points $A(2;1)$, $B(-2;-2)$ et $C(0;-3)$.
2. Calculer les distances $d(A,B)$, $d(A,C)$ et $d(B,C)$.
3. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.
4. Écrire une équation cartésienne de la droite (AB).
5. Soit f la fonction linéaire définie par $f(x)=ax$, où a est un nombre réel.
On note (D) la droite qui représente cette fonction linéaire.
a. Déterminer a pour que (D) soit parallèle à la droite (Δ) d'équation $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$.
b. Déterminer a pour que (D) soit perpendiculaire à la droite (Δ).
6. Soit I le milieu de $[AB]$.
a. Donner les coordonnées de I.
b. Construire le cercle circonscrit au triangle ABC.
c. On donne mes $\widehat{BAC}=30°$.
Donner une mesure de l'angle au centre associé à l'angle $\widehat{BAC}$.

Éléments de correction et solutions

A. Activités numériques

Exercice 1

$(2-\sqrt{5})^2-3\sqrt{20}=4-4\sqrt{5}+5-3\times 2\sqrt{5}=9-10\sqrt{5}$.

Donc $a=9$ et $b=-10$.

Exercice 2

a. $P=x^2-2x+1+x^2-x+2x-2=2x^2-x-1$.

b. $P=(x-1)[(x-1)+(x+2)]=(x-1)(2x+1)$.

c. $(x-1)(2x+1)=0$ équivaut à $x-1=0$ ou $2x+1=0$

c'est à dire $x=1$ ou $x=-\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3

$\begin{cases} a-b=36 \\ 4a-2b=90 \end{cases}$ $\begin{cases} a=36+b \\ 144+4b-2b=90 \end{cases}$

$\begin{cases} a=36+b \\ 4\times(36+b)-2b=90 \end{cases}$ $\begin{cases} a=36+b \\ 2b=-54 \end{cases}$ $\begin{cases} a=9 \\ b=-27 \end{cases}$

Exercice 4

1.

Village	A	B	C	D	E	F	Total
Mesure des angles au centre associé	60°	90°	30°	20°	130°	30°	360°
Effectif de la population	12 000	18 000	6 000	4 000	26 000	6 000	72 000

2. Ce caractère est **qualitatif.**

3. Le mode est le **village *E*** car il possède le plus grand effectif.

B. Activités géométriques

Exercice 1

1. (*T*) est un cône de révolution de hauteur *HS* et de base un disque de centre *H* et de rayon *HB*.

2. • Grâce à la propriété de Pythagore, on trouve :

$HB^2=\left(\dfrac{90\sqrt{2}}{2}\right)^2-60^2=\dfrac{90^2}{2}-60^2=450.$

D'où $HB=15\sqrt{2}$ **cm** $\approx 21{,}21$ **cm.**

• $\mathcal{V}=\dfrac{1}{3}bh=\dfrac{1}{3}\times\pi\times(15\sqrt{2})^2\times 60=9\,000\,\pi\ \text{cm}^3$.

$\mathcal{V}\approx 28\,260\ \text{cm}^3$.

3. $\mathcal{V}$ **contient 9π litres, soit environ 28,26 litres.**

Exercice 2

1. **Le triangle *ABC* est isocèle rectangle en *C*.**

En effet, d'une part, il est inscrit dans le demi-cercle de diamètre [*AB*], donc il est rectangle en *C* et, d'autre part, les triangles *AOC* et *AOB* sont isocèles rectangles en *O*, donc leurs hypoténuses sont égales.

2.

Angle	$\widehat{BCA}$	$\widehat{ABC}$	$\widehat{AOC}$
Mesure en degrés	90°	45°	90°

3. a. **Le quadrilatère *ACBE* est un carré.**

En effet, puisque $OA=OB=OC$ et que la symétrie centrale conserve les distances $OC=OE$.

Donc les diagonales [*AB*] et [*CE*] ont même longueur et se coupent perpendiculairement en leur milieu.

b. • Grâce à la propriété de Pythagore, on trouve :

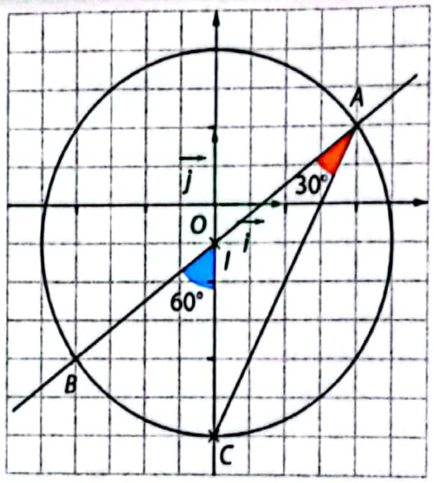
$CA^2=OA^2+OC^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=2\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$.

D'où $CA=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$ **cm.**

• D'après le 1., $CA=CB$, donc $CB=CA=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$ **cm.**

C. Problème

1.



2. $d(A,B)=\sqrt{(-2-2)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}$

$=\sqrt{25}=5$.

De même, $d(A,C)=2\sqrt{5}$ et $d(B,C)=\sqrt{5}$.

3. $d(A,B)^2=25$ et $d(A,C)^2+d(B,C)^2=25$.

Donc, grâce à la propriété réciproque de Pythagore, on en déduit que le triangle ***ABC* est rectangle en *C*.**

4. La droite (*AB*) passe par le point *A*(2 ; 1) et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\,(-4\,;-3)$.

Une équation cartésienne de la droite (*AB*) est :

$$-3x+4y+2=0 \text{ ou encore } y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}.$$

5. a. $a=\dfrac{3}{4}$. b. $a=-\dfrac{4}{3}$.

6. a. $I\left(0\,;-\dfrac{1}{2}\right)$.

b. Ce cercle est de diamètre [*AB*] puisque le triangle *ABC* est rectangle en *C*.

c. L'angle au centre associé est l'angle $\widehat{BIC}$.

mes $\widehat{BIC}=2\times$ mes $\widehat{BAC}=60°$.

Tables

Carrés

n	n^2
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225
16	256
17	289
18	324
19	361
20	400
21	441
22	484
23	529
24	576
25	625
26	676
27	729
28	784
29	841
30	900
31	961
32	1 024
33	1 089
34	1 156
35	1 225
36	1 296
37	1 369
38	1 444
39	1 521
40	1 600
41	1 681
42	1 764
43	1 849
44	1 936
45	2 025
46	2 116
47	2 209
48	2 304
49	2 401
50	2 500

n	n^2
51	2 601
52	2 704
53	2 809
54	2 916
55	3 025
56	3 136
57	3 249
58	3 364
59	3 481
60	3 600
61	3 721
62	3 844
63	3 969
64	4 096
65	4 225
66	4 356
67	4 489
68	4 624
69	4 761
70	4 900
71	5 041
72	5 184
73	5 329
74	5 476
75	5 625
76	5 776
77	5 929
78	6 084
79	6 241
80	6 400
81	6 561
82	6 724
83	6 889
84	7 056
85	7 225
86	7 396
87	7 569
88	7 744
89	7 921
90	8 100
91	8 281
92	8 464
93	8 649
94	8 836
95	9 025
96	9 216
97	9 409
98	9 604
99	9 801
100	10 000

Racines carrées

(arrondies au millionième)

n	$\sqrt{n}$
1	1
2	1,414 214
3	1,732 051
4	2
5	2,236 068
6	2,449 490
7	2,645 751
8	2,828 427
9	3
10	3,162 278
11	3,316 625
12	3,464 102
13	3,605 551
14	3,741 657
15	3,872 983
16	4
17	4,123 106
18	4,242 641
19	4,358 899
20	4,472 136
21	4,582 576
22	4,690 416
23	4,795 832
24	4,898 979
25	5
26	5,099 020
27	5,196 152
28	5,291 503
29	5,385 165
30	5,477 226
31	5,567 764
32	5,656 854
33	5,744 563
34	5,830 952
35	5,916 080
36	6
37	6,082 763
38	6,164 414
39	6,244 998
40	6,324 555
41	6,403 124
42	6,480 741
43	6,557 439
44	6,633 250
45	6,708 204
46	6,782 330
47	6,855 655
48	6,928 203
49	7
50	7,071 068

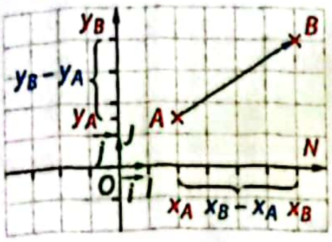
n	$\sqrt{n}$
51	7,141 428
52	7,211 103
53	7,280 110
54	7,348 469
55	7,416 198
56	7,483 315
57	7,549 834
58	7,615 773
59	7,681 146
60	7,745 967
61	7,810 250
62	7,874 008
63	7,937 254
64	8
65	8,062 258
66	8,124 038
67	8,185 353
68	8,246 211
69	8,306 624
70	8,366 600
71	8,426 150
72	8,485 281
73	8,544 004
74	8,602 325
75	8,660 254
76	8,717 798
77	8,774 964
78	8,831 761
79	8,888 194
80	8,944 272
81	9
82	9,055 385
83	9,110 434
84	9,165 151
85	9,219 544
86	9,273 618
87	9,327 379
88	9,380 832
89	9,433 981
90	9,486 833
91	9,539 392
92	9,591 663
93	9,643 651
94	9,695 360
95	9,746 794
96	9,797 959
97	9,848 858
98	9,899 495
99	9,949 874
100	10

Trigonométriques

degrés	sin	cos	tan	1/tan	
0	0,000	1,000			90
1	0,017	1,000	0,017	57,290	89
2	0,035	0,999	0,035	28,636	88
3	0,052	0,999	0,052	19,081	87
4	0,070	0,998	0,070	14,301	86
5	0,087	0,996	0,087	11,430	85
6	0,105	0,995	0,105	9,514	84
7	0,122	0,993	0,123	8,144	83
8	0,139	0,990	0,141	7,115	82
9	0,156	0,988	0,158	6,314	81
10	0,174	0,985	0,176	5,671	80
11	0,191	0,982	0,194	5,145	79
12	0,208	0,978	0,213	4,705	78
13	0,225	0,974	0,231	4,331	77
14	0,242	0,970	0,249	4,011	76
15	0,259	0,966	0,268	3,732	75
16	0,276	0,961	0,287	3,487	74
17	0,292	0,956	0,306	3,271	73
18	0,309	0,951	0,325	3,078	72
19	0,326	0,946	0,344	2,904	71
20	0,342	0,940	0,364	2,747	70
21	0,358	0,934	0,384	2,605	69
22	0,375	0,927	0,404	2,475	68
23	0,391	0,921	0,424	2,356	67
24	0,407	0,914	0,445	2,246	66
25	0,423	0,906	0,466	2,145	65
26	0,438	0,899	0,488	2,050	64
27	0,454	0,891	0,510	1,963	63
28	0,469	0,883	0,532	1,881	62
29	0,485	0,875	0,554	1,804	61
30	0,500	0,866	0,577	1,732	60
31	0,515	0,857	0,601	1,664	59
32	0,530	0,848	0,625	1,600	58
33	0,545	0,839	0,649	1,540	57
34	0,559	0,829	0,675	1,483	56
35	0,574	0,819	0,700	1,428	55
36	0,588	0,809	0,727	1,376	54
37	0,602	0,799	0,754	1,327	53
38	0,616	0,788	0,781	1,280	52
39	0,629	0,777	0,810	1,235	51
40	0,643	0,766	0,839	1,192	50
41	0,656	0,755	0,869	1,150	49
42	0,669	0,743	0,900	1,111	48
43	0,682	0,731	0,933	1,072	47
44	0,695	0,719	0,966	1,036	46
45	0,707	0,707	1,000	1,000	45
	cos	sin	1/tan	tan	degrés

Formulaire

Repère du plan, coordonnées



(O, I, J) ou $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ repère du plan et $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$.

- K milieu de $[AB]$:

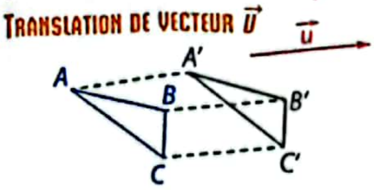
$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_K = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

- $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.
- Lorsque (O, I, J) orthonormé : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires ⟨équivaut à⟩ il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- Dans un repère, $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires ⟨équivaut à⟩ $xy' - x'y = 0$.
- Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ perpendiculaires ⟨équivaut à⟩ $xx' + yy' = 0$.

Transformations du plan

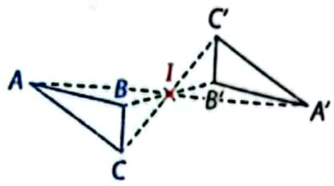
Translation de vecteur $\vec{u}$



$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{u}$

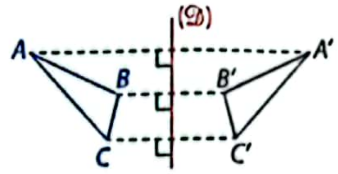
$AA'BB'$ parallélogramme

Symétrie centrale de centre I



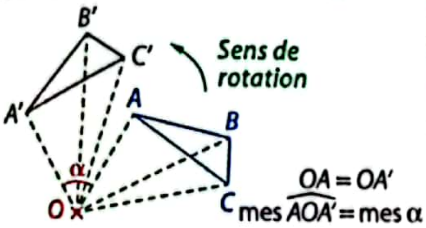
$ABA'B'$ parallélogramme de centre I

Symétrie axiale d'axe $(\mathscr{D})$



$(\mathscr{D})$ médiatrice de $[AA']$, de $[BB']$…

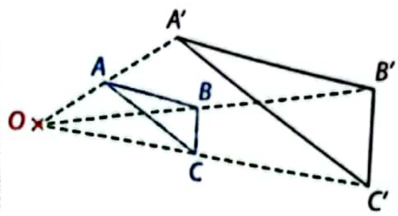
Rotation de centre O et d'angle α



$OA = OA'$

mes $\widehat{AOA'}$ = mes α

Homothétie de centre O et de rapport k



$k > 1$: agrandissement

$0 < k < 1$: réduction

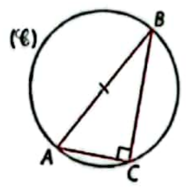
$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ donc O, A, A' alignés

$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ donc (AB) // $(A'B')$

Aire $(A'B'C') = k^2 \times$ Aire(ABC)

Propriétés des triangles

Triangles rectangles



ABC inscrit dans un cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$

Propriété de Pythagore
Si le triangle ABC est rectangle en C, alors $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Propriété réciproque de Pythagore
Si $AB^2 = AC^2 + CB^2$, alors le triangle ABC est rectangle en C.

ABC un triangle rectangle en C.

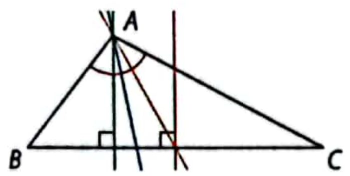
$$\cos\widehat{A} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin\widehat{A} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan\widehat{A} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}$$

Triangles quelconques

Droites remarquables



Bissectrice issue de A : droite passant par A qui coupe l'angle $\widehat{BAC}$ en deux angles de même mesure.

Médiane issue de A : droite passant par A et le milieu de $[BC]$.

Hauteur issue de A : droite passant par A et perpendiculaire à (BC).

Médiatrice de $[BC]$: droite perpendiculaire à $[BC]$ qui passe par son milieu.

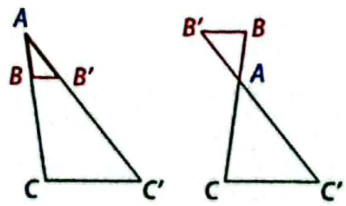
L'intersection des bissectrices est le centre du cercle inscrit.

L'intersection des médianes est le centre de gravité.

L'intersection des hauteurs est l'orthocentre.

L'intersection des médiatrices est le centre du cercle circonscrit.

Configurations de Thalès

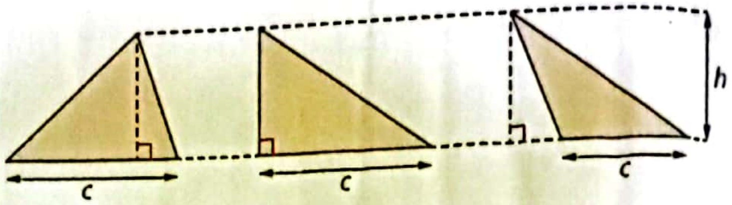


Propriété de Thalès
C point de (AB) et C' point de (AB').
Si (BB') // (CC'), alors $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AC'}{AB'} = \dfrac{CC'}{BB'}$.

Propriété réciproque de Thalès
C point de (AB) et C' point de (AB') tels que la position de C par rapport à A et B est la même que la position de C' par rapport à A et B'.
Si $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AC'}{AB'}$, alors (BB') // (CC').

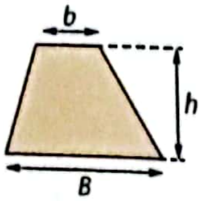
Triangles

$$\text{Aire} = \frac{c \times h}{2} = \frac{\text{côté} \times \text{hauteur associée}}{2}$$



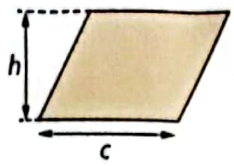
Quadrilatères

Trapèze



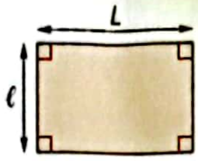
$$\text{Aire} = \frac{(B+b) \times h}{2}$$

Parallélogramme



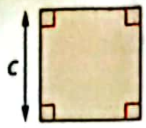
$\text{Aire} = c \times h$

Rectangle



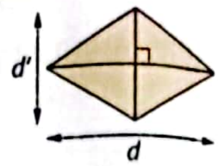
$\text{Aire} = L \times \ell$

Carré



$\text{Aire} = c \times c = c^2$

Losange

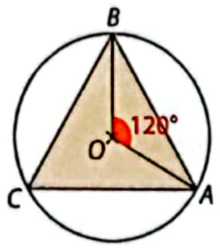


$$\text{Aire} = \frac{d \times d'}{2}$$

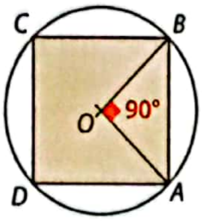
Polygones réguliers

Polygone dont les côtés ont la même longueur et les angles ont la même mesure. Il est inscriptible dans un cercle.

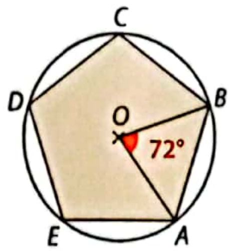
Triangle équilatéral



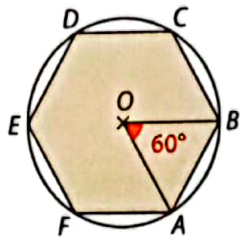
Carré



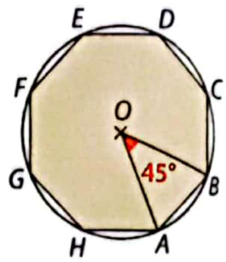
Pentagone régulier



Hexagone régulier



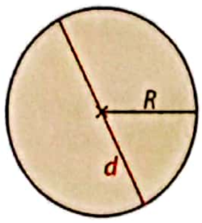
Octogone régulier



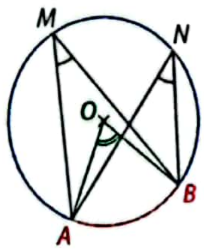
Cercle, disque

Périmètre $\mathcal{P}$ d'un cercle :
$\mathcal{P} = 2 \times \pi \times R = 2\pi R$
$\mathcal{P} = \pi \times d$

Aire $\mathcal{A}$ d'un disque :
$\mathcal{A} = \pi \times R \times R = \pi R^2$



Angles dans un cercle



$\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ angles interceptant l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

$$\text{mes } \widehat{AMB} = \text{mes } \widehat{ANB}.$$

$\widehat{AOB}$ angle au centre interceptant l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

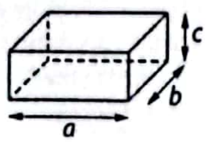
$$\text{mes } \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \times \text{mes } \widehat{AOB}.$$

Solides de l'espace

Parallélépipède rectangle

Aire totale $= 2(ab + bc + ac)$

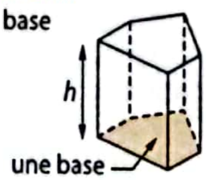
Volume $= a \times b \times c$
$= abc$



Prisme droit

$\mathcal{B}$ est l'aire d'une base

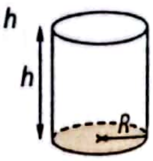
Volume $= \mathcal{B} \times h$



Cylindre de révolution

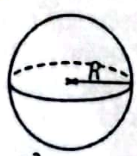
Aire latérale $= 2 \times \pi \times R \times h$

Volume $= \pi \times R^2 \times h$



Sphère, boule

Aire $\mathcal{A}$ d'une sphère :
$\mathcal{A} = 4 \times \pi \times R \times R = 4\pi R^2$

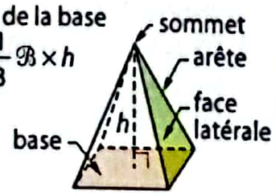


Volume $\mathcal{V}$ d'une boule :
$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times R \times R \times R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Pyramide

$\mathcal{B}$ est l'aire de la base

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$$

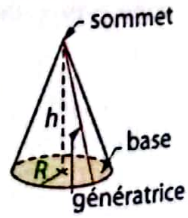


Cône de révolution

a est la longueur d'une génératrice et $\mathcal{B}$ l'aire de la base.

Aire latérale $= \pi R a$

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$



Valeur approchée

$\pi = 3{,}14159...$	Arrondi au centième par défaut	Arrondi au centième par excès	Troncature au dixième
	3,14	3,15	3,1

Calculs avec les écritures fractionnaires

- **Égalité de deux fractions** Avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$ $\quad \frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$ et $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$.
- **Égalité des produits en croix** Avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$: $\quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $a \times d = b \times c$.
- **Addition, soustraction** Avec $c \neq 0$: $\quad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.
- **Multiplication, division** Avec $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$: $\quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ et $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Calculs avec des puissances

m et n désignent des nombres entiers relatifs, $a \neq 0$ et $b \neq 0$: $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$; $a^0 = 1$; $a^1 = a$;

$a^m \times a^n = a^{m+n}$; $\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $\quad (a^m)^n = a^{m \times n}$; $\quad a^n \times b^n = (a \times b)^n$.

Calcul littéral

forme factorisée — forme développée

$k(a+b) = ka + kb$

$k(a-b) = ka - kb$

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Identités remarquables

forme factorisée — forme développée

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Résolution d'équation

Règle 1 : Lorsqu'on additionne ou soustrait un **même nombre** aux deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.
Exemple : $x + 3 = 7$; $x + 3 - 3 = 7 - 3$; $x = 4$.

Règle 2 : Lorsqu'on multiplie ou divise un **même nombre non nul** aux deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.
Exemple : $5x = -10$; $\frac{5x}{5} = \frac{-10}{5}$; $x = \frac{-10}{5}$; $x = -2$.

Situations de proportionnalité

Dans un tableau

Exemple :

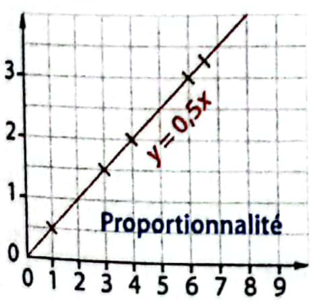
Distance (en km)	12	48	84
Durée (en h)	0,5	2	3,5

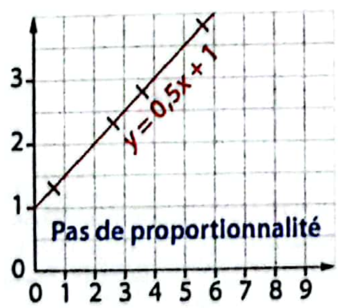
$\times k$

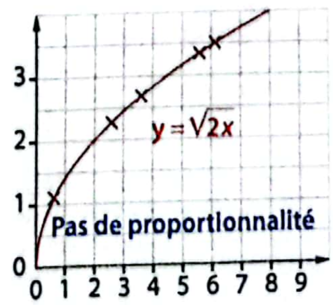
$\frac{12}{0{,}5} = 24$; $\frac{48}{2} = 24$; $\frac{84}{3{,}5} = 24$. Donc $\frac{12}{0{,}5} = \frac{48}{2} = \frac{84}{3{,}5} = k$.

Dans ce tableau de proportionnalité, le coefficient de proportionnalité est $k = 24$.

Sur un graphique







Situations les plus fréquentes

- Vitesse moyenne $= \dfrac{\text{distance du trajet}}{\text{durée du trajet}}$
- Débit moyen $= \dfrac{\text{volume écoulé}}{\text{durée de l'écoulement}}$
- Masse volumique d'un corps $= \dfrac{\text{masse du corps}}{\text{volume du corps}}$
- Échelle $= \dfrac{\text{distance sur la carte}}{\text{distance réelle}}$ dans la même unité

Index

Crédits : **Couverture :** © Oliver TJADEN/LAIF-REA – **Page 5 :** © Tim White/Gettyimages – **Page 6 :** Photothèque Hachette – **Page 15 :** © Borderlands/Alamy-hemis – **Page 18-haut :** © Richard Oslily/IRD – **Page18-bas :** © imagebroker.com/Bios – **Page 19 :** © Newspix/Icon Sport – **Page 30 :** © Alain Mafart-Renodier/Bios – **Page 31 :** © Didier Ruef/Cosmos – **Page 45 :** © Nabil Zorkot/Andia.fr – **Page 56 :** © Wayne Hutchinson/FLPA – age fotostock – **Page 57 :** © Thomas Spensberger/age fotostock – **Page 59 :** © Ralph A Clevenger/age fotostock – **Page 68 :** © SMSSPL/age fotostock – **Page 69 :** © Michael Lohmann/age fotostock – **Page 82 :** © YURI ARCURS/age fotostock – **Page 83 :** © SPL/PHANIE – **Page 94 :** © Iconotec/Photononstop – **Page 96-haut :** © Marianne Donnat/IRD – **Page 96-bas :** © Photo12/Alamy – **Page 107 :** © Gettyimages – **Page 119 :** © SCIEPRO/SPL-PHANIE – **Page 130 :** © Cordin Bataglia/SNF – **Page 131 :** © Robert Harding Picture Library/Gettyimages – **Page 142 :** © JUNIORS BILDARCHIV/age fotostock – **Page 143-gauche :** Prod DB © The Essanay Film Manufacturing Company/DR – **Page 143-droite :** Prod DB © Polaris – Hawk – Warner Bros/DR – **Page 151 :** DR – **Page 162 :** © Catherine Millet – **Page 175 :** © Imago/Studio.

CARGO

Collection de Mathématiques

3e

La collection *CARGO* a été conçue pour accompagner élèves et enseignants dans la mise en œuvre du programme à travers une pédagogie centrée sur l'apprenant et basée sur une approche par compétences.

Le manuel de 3e est construit autour des deux compétences de base prévues au curriculum pour l'enseignement des mathématiques au collège. Chaque chapitre propose une progression en cinq phases :

- des activités de découverte variées pour favoriser l'engagement des apprenants et leur faire découvrir activement les notions clés du chapitre ;
- un cours clair et synthétique auquel on peut se reporter aisément ;
- des pages « Méthodes et savoir-faire » conduites à partir d'un exercice résolu ;
- une rubrique « Bien comprendre, mieux rédiger » afin de manipuler et de s'approprier le langage mathématique et développer des compétences de compréhension et de rédaction ;
- des exercices de difficulté progressive (activités d'application, exercices d'approfondissement, activités d'intégration) pour consolider l'acquisition des notions introduites, perfectionner et réinvestir les apprentissages.

Préparation au BEPC

59/5297/3
ISBN : 978.2.7531.0468.6
9 782753 104686

hachette LIVRE INTERNATIONAL