Collection "AlpHa"

Mathi'x

Etude des Fonctions

Suites Numeriques

Nombres Complexes

Calcul intégral

Equations différentielles

Dénombrement-Probabilités

Géométrie dans l'espace

Sciences Expérimentales

2BAC

- Resumés des Cours
- Extraits Des Nationaux

Prof: Moussaoui Chafik

Sommaire

2BAC PC-SVT

Prof: Moussaoui Chafik

Étude d'une fonction numérique

- Generalités sur les fonctions
- Limites d'une fonction
- Continuité d'une fonction :
- Fonction réciproque
- Fonction racine n-ième
- Dérivabilité d'une fonction numérique
- Les Branches Infinies

2BAC PC-SVT

Prof: Moussaoui Chafik

ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Domaine de définition d'une fonction :

Soient P et Q deux polynômes

f une fonction numérique de la variable réelle x définie par :	Domaine de définition de f :
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R}/Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R}/P(x) \geq 0\}$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R}/P(x) \geq 0$ et $Q(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}/\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0\right\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \mathbb{R}\}$ $\qquad$ $f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Denominateur } \neq 0 \\ \text{Interieur de } \sqrt{} \geq 0 \end{cases}$

Parité-Périodicité

Type de f	Définition	Conséquences
f est paire	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$	• il suffit de l'étudier sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ • (C_f) est symetrique par rapport à (oy)
f est impaire	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$	• il suffit de l'étudier sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ • (C_f) est symetrique par rapport à O
f est périodique	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} x + T \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$	• il suffit de l'étudier sur de période $T(T > 0)$

Symétrie

Propriètè	équivalent à	Conséquences
la droite $x = a$ est un axe de symetrie de (C_f)	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$	il suffit de l'étudier sur $D_f \cap [a, +\infty[$
la point $\Omega(a, b)$ est un centre de symetrie de (C_f)	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$	il suffit de l'étudier sur $D_f \cap [a, +\infty[$

Concavité d'une fonction

• Si f'' s'annule en a de I et change de signes au voisinage de a, alors le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f).
• Si f' s'annule en a de I et ne change pas de signes au voisinage de a, alors le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f).

x		a	
f''	$-$	0	$+$
Concavité de f	concave	$f(a)$	convexe

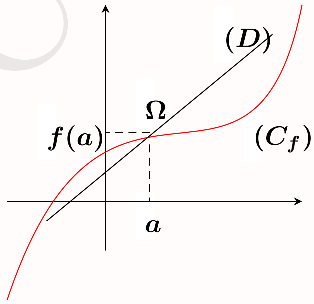
x		a	
f''	$+$	0	$-$
Concavité de f	convexe	$f(a)$	concave

• (C_f) Convexe sur I si : $\forall x \in I; f''(x) \geq 0$ • (C_f) Concave sur I si : $\forall x \in I; f''(x) \leq 0$.

Position relative : (C_f) & (D)

Position relative de (C_f) et une droite $(D) : y = ax + b$:
- $f(x) - (ax + b) > 0 \Rightarrow (C_f)$ est au dessus de (D).
- $f(x) - (ax + b) < 0 \Rightarrow (C_f)$ est au dessous de (D).

x		a	
$f(x) - (ax + b)$	$+$	0	$-$
La position relative de (C_f) et (D)	C_f est au dessus de la droite (D)		C_f est au dessous de la droite (D)

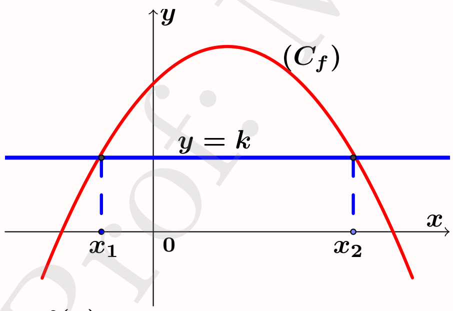


Ω : Point d'intersection
$(C_f) \cap (D) = \Omega\,(a, f\,(a))$

Comparaison de fonctions

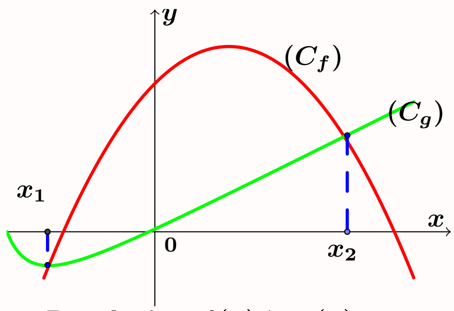
Résolution $f(x) = k$
On trace la droite d'équation $y = k$ et on lit les abscisses des points d'intersection avec la courbe.
Donc l'ensemble des solutions de cette équation est :

$$S = \{x_1; x_2\}$$

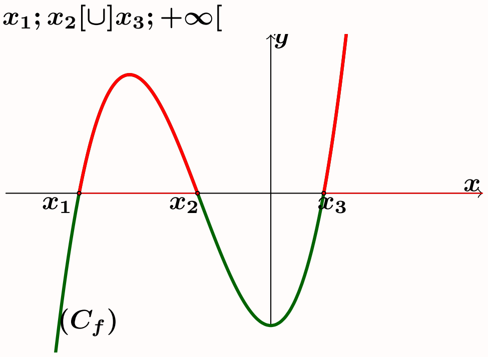


Résolution $f(x) = g(x)$
On trace les deux courbes (C_f) et (C_g) et on lit les abscisses des points d'intersection .
Donc l'ensemble des solutions de cette équation est :

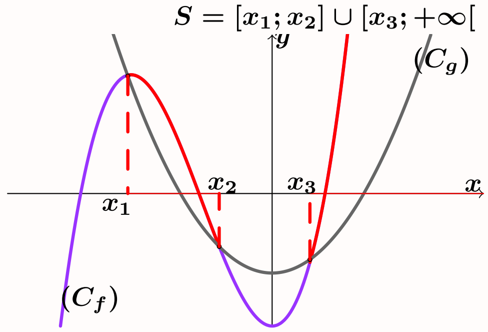
$$S = \{x_1; x_2\}$$



Résolution $f(x) > 0$
Soit la courbe (C_f)
l'ensemble des solutions de cette inéquation est :
$S =]x_1; x_2[\cup]x_3; +\infty[$



Résolution $f(x) \geq g(x)$
Soient les courbes (C_f) et (C_g)
l'ensemble des solutions de cette inéquation est :
$S = [x_1; x_2] \cup [x_3; +\infty[$



Limites d'une fonction

- **Limites et inverses des fonctions : $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et $x \mapsto \sqrt{x}$**

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x^n = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Si n est un nombre pair alors :	Si n est un nombre impair alors :
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

- **Limites des fonctions polynômes et rationnelles** :

Cas (1)	**Cas (2)**
$\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (a_n x^n)$
$\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ (On replacer x par a à l'expression du $\frac{P(x)}{Q(x)}$)	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{2n-1} + \ldots + b_0}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{a_n x^n}{b_m x^m}\right)$

- **Limites des fonctions trigonométriques**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}$$

- **Limites des fonctions de type : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$**

∘ Pour trouver la limite : $\lim(\sqrt{u(x)})$ Il faut d'abord trouver la limite : $\lim(u(x))$

∘ Les résultats restent valable, à droite en x_0, à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$	$\ell \geq 0$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{u(x)}$	$\sqrt{\ell}$	$+\infty$

- **Théorème de comparaison :**

$$\left.\begin{array}{l} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell \\ \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} |f(x) - \ell| \leq h(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) \leq f(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

∘ Ces résultats restent valable, à droite en x_0, à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$

Limites et opérations :

- **Formes indéterminées : (FI)**

$0\times\infty$	$(+\infty)+(-\infty)$	$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\dfrac{0}{0}$

- **Somme** $\lim(f+g)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [g(x)+f(x)]$	$\ell+\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

- **Produit** $\lim(f\times g)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	$\ell<0$		$\ell>0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [g(x)\times f(x)]$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

- **Quotient** $\lim(\dfrac{f}{g})$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell<0$		$\ell>0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Ces résultats restent valable, à droite en x_0, à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$

Continuité d'une fonction :

- **Continuité en un point :** f est **continue** en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- **Continuité à droite - Continuité à gauche :**

f est continue à **droite** en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$ f est continue à **gauche** en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en x_0

- **Continuité sur un intervalle**
  - ◇ f est continue sur un **intervalle ouvert** $]a,b[$ si f est continue en **chaque** élément de $]a,b[$
  - ◇ f est continue sur un **intervalle fermé** $[a,b]$ si f est continue sur l'intervalle **ouvert** $]a,b[$ et f est continue à **droite** en a et à **gauche** en b

Opérations sur les fonctions continues :

- Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un réel
  - ◇ Les fonctions $f+g, f\times g, kf$ et f^n avec $n\in\mathbb{N}$, sont **continues** sur I
  - ◇ Les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont **continues** sur I si g ne s'**annule** pas sur I
- **Composé de deux fonctions continues :**
Si f une fonction **continue** sur un intervalle I et g une fonction **continue** sur l'intervalle $f(I)$, alors la fonction $g\circ f$ est **continue** sur I

L'image d'un intervalle par une fonction continue :

- L'image d'un **segment** par une fonction continue est un **segment**
- L'image d'un **intervalle** par une fonction continue est un **intervalle**

Soit f est **continue et strictement monotone** sur un intervalle I
Le tableau suivant **illustre** les différents cas possibles de l'intervalle $f(I)$

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f est strictement **croissante** sur I	f est strictement **décroissante** sur I
$[a,b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x);f(a)\right]$
$]a,+\infty[$	$\left]f(a);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x);f(a)\right[$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);f(a)\right]$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$
$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);f(a)\right[$	$\left]f(a);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$

Théorème des valeurs intermédiaires : :

- Si f est **continue** sur un intervalle $[a,b]$, alors pour tout réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il **existe au moins un réel** α de l'intervalle $[a,b]$ tel que $\boxed{f(\alpha)=\beta}$
- Si f est **continue** sur un intervalle $[a,b]$ telle que $f(a)\times f(b)<0$ alors l'équation $\boxed{f(x)=0}$ admet au **moins une solution** α dans l'intervalle $]a,b[$
- Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a,b]$ telle que $f(a)\times f(b)<0$ alors l'équation $\boxed{f(x)=0}$ admet une **solution unique** α dans l'intervalle $]a,b[$

Méthode de dichotomie

Soit f est fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a,b]$ telle que $f(a)\times f(b)<0$ 'équation $\boxed{f(x)=0}$ admet une solution unique α dans $]a,b[$

- $\boxed{f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0\Rightarrow a<\alpha<\frac{a+b}{2}}$

l'amplitude de cet encadrement est : $\frac{b-a}{2}$.

On poursuit la recherche de α sur l'intervalle $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$

- $\boxed{f(b)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0\Rightarrow \frac{a+b}{2}<\alpha<b}$

l'amplitude de cet encadrement est : $\frac{b-a}{2}$.

On poursuit la recherche de α sur l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$

Fonction réciproque

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors f admet une **fonction réciproque**, notée f^{-1}, définie sur l'intervalle $f(I)$ et on a :

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

Détermination de l'expression de $f^{-1}(x)$:
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Soit x un élément de $f(I)$ et y un élément de I tel que : $f^{-1}(x) = y$
On a : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ et en résolvant l'équation $f(y) = x$ d'inconnue y On déduit l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de $f(I)$

Continuité de la fonction réciproque :
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors une fonction **réciproque** f^{-1} est **continue** sur l'intervalle $f(I)$

Dérivabilité de la fonction réciproque
Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle I et x_0 un élément de $f(I)$
• Si f est **dérivable** en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est **dérivable** en y_0 et on a :

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
• Si f est **dérivable** sur I et f' ne s'annule pas sur I alors la fonction f^{-1} est **dérivable** sur $f(I)$ et on a :

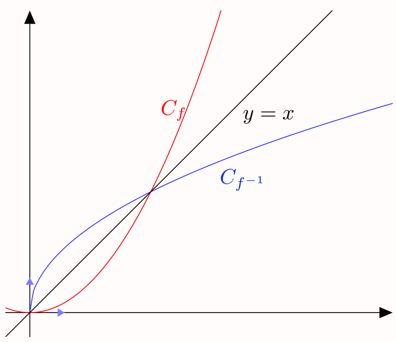
$$\boxed{\forall x \in f(I) \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}}$$

Monotonie de la fonction réciproque :
Si f est une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle I
Alors une **fonction réciproque** f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ et varie dans le même sens que f

La courbe représentative de la fonction réciproque :

Dans un repère **orthonormé** $(C_{f^{-1}})$ est le **symétrique** de (C_f) par rapport à la première **bissectrice** du repère (droite d'équation : $y = x$)

La courbe (C_f)		La courbe $(C_{f^{-1}})$
$A(a,b) \in (C_f)$	$\Rightarrow$	$A'(b,a) \in (C_{f^{-1}})$
admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$		admet une asymptote horizontale d'équation : $y = a$
admet une asymptote horizontale d'équation : $y = a$		admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$
admet une asymptote oblique d'équation : $y = ax + b$		admet une asymptote oblique d'équation : $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$
admet une tangente (ou demi-tangente) verticale	$\Rightarrow$	admet une tangente (ou demi-tangente) horizontale
admet une tangente (ou demi-tangente) horizontale		admet une tangente (ou demi-tangente) verticale



Fonction racine n-ième

Soit n un entier naturel non nul
La fonction : $x \mapsto x^n$ est continue et strictement monotone sur l' intervalle $[0;+\infty[$ elle admet une fonction réciproque définie sur $[0;+\infty[$, nommée racine n-ième et que l'on note $\sqrt[n]{\ }$ et on a :

$$\forall (x;y) \in {\mathbb{R}_+}^2 \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- $\sqrt[n]{x^n} = x$
- $(\sqrt[n]{x})^n = x$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (m;n) \in (\mathbb{N}^*)^2$

- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$
- $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} \quad (y \neq 0)$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\times m]{x}$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n\times m]{x^m}$

Ensemble de définition : L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \geq 0\}$$

Limites des fonctions racine n-ième

$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$	$\ell \geq 0$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{u(x)}$	$\sqrt[n]{\ell}$	$+\infty$

Ces résultats restent valable, à droite en x_0, à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$

Continuité des fonctions racine n-ième :

Si f une fonction définie , **positive et continue** sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I

Dérivée des fonctions racine n-ième

Si u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I Alors la fonction : $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I \quad \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{[u(x)]^{n-1}}}$$

Résolution de l'équation : $x \in \mathbb{R} \quad x^n = a \quad (a \in \mathbb{R})$

	n un entier naturel impair	n un entier naturel pair non nul
$a > 0$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$	$S = \{-\sqrt[n]{a};\ \sqrt[n]{a}\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \{-\sqrt[n]{\lvert a\rvert}\}$	$S = \varnothing$

Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif

Soit un $\boldsymbol{x}$ réel strictement positif et un $\boldsymbol{r}$ nombre rationnel, On pose $\boldsymbol{r} = \dfrac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$ $(\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}^*$ et $\boldsymbol{q} \in \mathbb{N}^*)$ On a :

$$\boldsymbol{x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}}$$

- $\sqrt[n]{u(x)} = (u(x))^{\frac{1}{n}}$
- $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left((u(x))^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n} \times (u(x))' \times (u(x))^{\frac{1}{n}-1}$

Pour tous réels $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ positifs et pour tous rationnelles $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r'}$

- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- $(x \times y)^r = x^r \times y^r$
- $\dfrac{1}{x^r} = x^{-r}$
- $(x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$
- $\dfrac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$

Dérivabilité d'une fonction numérique

Fonction dérivable en un point :

On dit qu'une fonction f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie Cette limite est appelée le nombre dérivé de f en x_0, on le note $f'(x_0)$.

L'équation de la tangente à une courbe : Soit f fonction est dérivable en x_0
L'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0 est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Dérivabilité à droite, à gauche en un point :

- On dit que f est **dérivable à droite** en x_0,
  Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie
  Cette limite est appelé le nombre dérivé de f à droite en x_0, on le note $f'_d(x_0)$
- On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0,
  Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie
  Cette limite est appelé le nombre dérivé de f à gauche en x_0, on le note $f'_g(x_0)$

f dérivable en x_0, si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Dérivabilité et continuité :

Si f une fonction est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0

Dérivée des fonctions usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$
$k \quad (k \in \mathbb{R})$	0
x	1
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$x^r \quad (r \in \mathbb{Z}^* - \{1\})$	rx^{r-1}
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Opérations sur les fonctions dérivées- dérivée d'une fonction composée :

$(u+v)' = u' + v'$	$(ku)' = k(u)'(k \in \mathbb{R})$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(u^n)' = nu' \cdot u^{n-1}$
$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$(uov)' = [u'ov] \times v'$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Dérivée et sens de variation :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- f est croissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$
- f est décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$
- f est constante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) = 0$

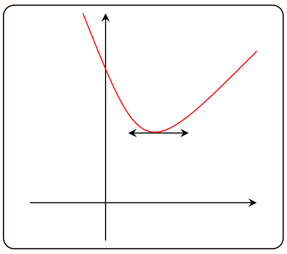
Interprétation géométrique et dérivabilité :

Nombre Dérivé

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

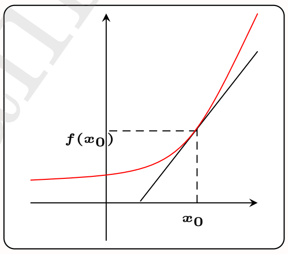
$f'(x_0) = 0$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente horizontale en x_0



$f'(x_0) = l \in \mathbb{R}^*$

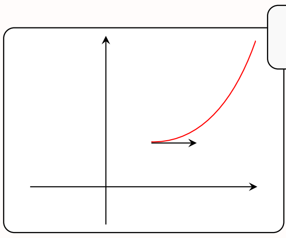
$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente de coefficient directeur $l = f'(x_0)$ en x_0



$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

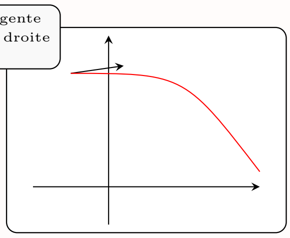
$f'_d(x_0) = 0$

$(\mathcal{C}_f)$ une demi-tangente horizontale de coefficient directeur l à droite en x_0



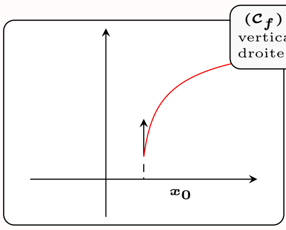
$f'_d(x_0) = l$
$l \in \mathbb{R}^*$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente de coefficient directeur l à droite en x_0



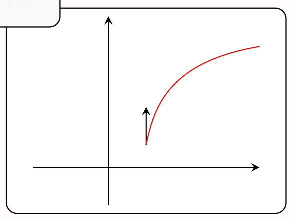
$-\infty$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigées vers le bas à droite en x_0



$+\infty$

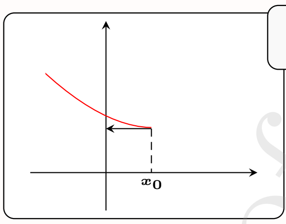
$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigées vers le haut à droite en x_0



$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

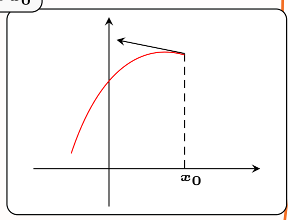
$f'_g(x_0) = 0$

$(\mathcal{C}_f)$ une demi-tangente horizontale de coefficient directeur l à gauche en x_0



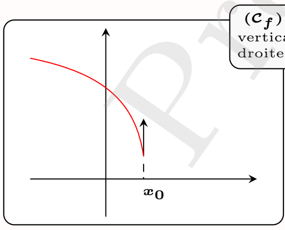
$f'_g(x_0) = l$
$l \in \mathbb{R}^*$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente de coefficient directeur l à gauche en x_0



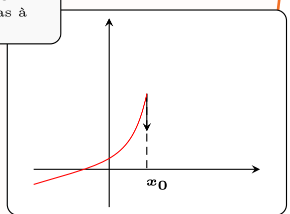
$-\infty$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigées vers le bas à droite en x_0



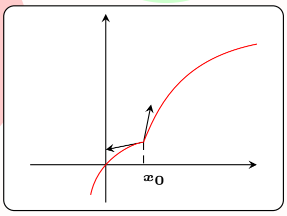
$+\infty$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigées vers le bas à droite en x_0



$f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$

$(\mathcal{C}_f)$ admet un point anguleux en x_0

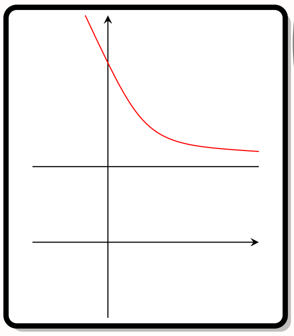


Les Branches Infinies

Les branches infinies

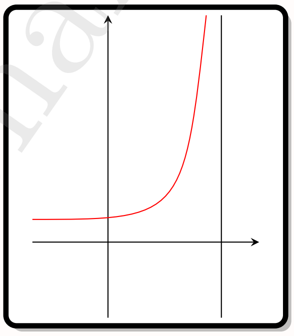
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = l$



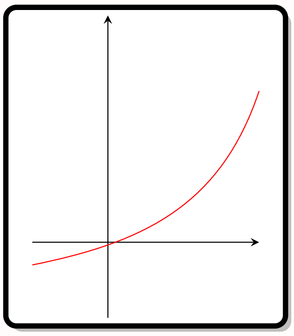
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$



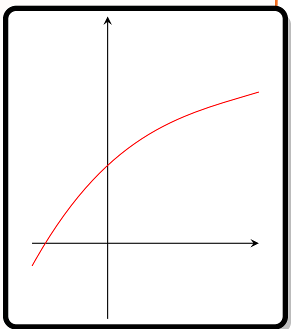
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$



$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

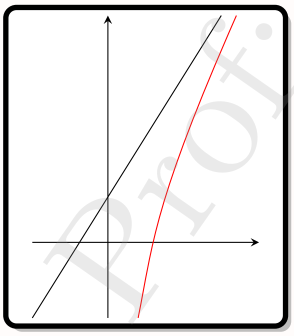
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$



$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

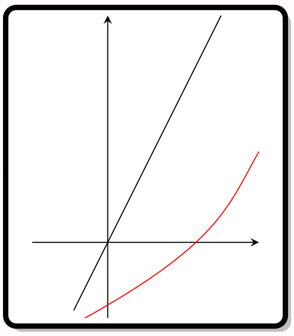
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = b$



$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$



$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$

Les Fonctions Logarithmiques - Exponentielles

- Les Fonctions Logarithmiques
- Les Fonctions Exponentielles

2BAC PC-SVT

Prof: Moussaoui Chafik

Les fonctions logarithmiques

La fonction logarithme népérien :

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$ (ou $\log_e$), est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln(x^r) = r\ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R} \; \ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$

Si n est pair, alors $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,;\ln x^n = n\ln|x|$

$\ln 1 = 0 \quad \ln e = 1$

Domaine de définition

f une fonction numérique de la variable réelle x définie par :	Domaine de définition de f :
$f(x) = \ln x$	$D_f =]0,+\infty[$
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R}/x \in D_u$ et $u(x) > 0\}$
$f(x) = \ln\left[(u(x))^2\right] \quad f(x) = \ln|u(x)|$	$D_f = \{x \in \mathbb{R}/x \in D_u$ et $u(x) \neq 0\}$

Limites

Limites principales $(n \in \mathbb{N}^*)$

- $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$
- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Conséquences

- $\lim_{x\to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
- $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
- $\lim_{x\to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$
- $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$
- $\lim_{x\to x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x)-1} = 1$
- $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$

Les limites restent valables en x_0^+ et en x_0^- ou en $+\infty$ ou en $-\infty$

La continuité :

La fonction $\mathbf{x} \mapsto \ln \mathbf{x}$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Si u est strictement positive et continue sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est continue sur l'intervalle I

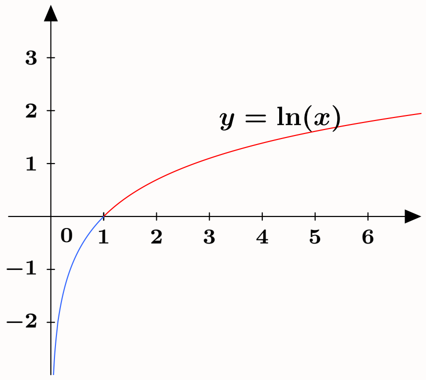
La dérivabilité :

La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on a : $\forall x \in]0;+\infty[\quad ; \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Si u est strictement positive et dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$\forall x \in I \quad ; \quad (\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Signe et représentation graphique de ln



x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	

Fonction Logarithme de base $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$:

La fonction logarithme de base a est la fonction notée : $\log_a$ tel que : $\forall x \in]0;+\infty[; \quad \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Cas particulier la fonction $\log_{10}$ est la fonction logarithme décimal et on la note $\log$

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$

- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x^r = r \log_a x$
- $\log_a \left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a x$
- $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$ $\log_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$

$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$

La dérivée : $\forall x \in]0;+\infty[; (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Limites et inéquations :

$0 < a < 1$	$a > 1$
$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$	$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0+} \log_a x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0+} \log_a x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$

Fonctions exponentielles

Fonction exponentielle népérienne :

La fonction exponentielle népérienne, notée **exp**, est la fonction réciproque de la fonction **ln**. On pose : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = e^x$

Propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$
- $\forall x \in]0, +\infty[\quad e^{\ln x} = x$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad e^x \times e^y = e^{x+y}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)^r = e^{rx} \quad (r \in \mathbb{Q})$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[\; e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$

Domaine de définition :

La fonction f définie par	Ensemble de définition de f
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u\}$

Si n est pair, alors $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,;\ln x^n = n \ln |x|$

Limites :

Limites principales

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Conséquences

- $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e^{u(x)}}{[u(x)]^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [u(x)]^n e^{u(x)} = 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit a droite ou a gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La continuité : :

- La fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$
- Si u est continue sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est continue sur l'intervalle I

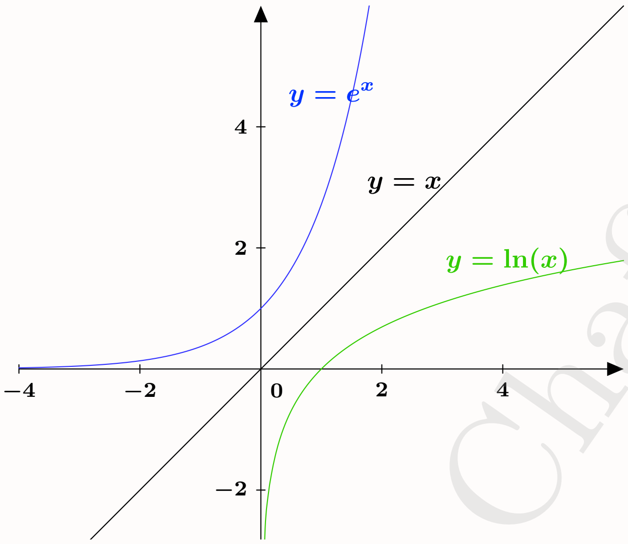
La dérivabilité :

- La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}; (e^x)' = e^x$
- Si u est dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$\forall x \in I; \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$$

Courbe de la fonction exponentielle :

Courbe de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé est le symétrique de la courbe de la fonction **ln** par rapport à la droite d'équation : $y = x$.



Fonction exponentielle de base $a \in]0; +\infty[$:

La fonction exponentielle de base a est la fonction définie par : $\forall x \in]0; +\infty[\qquad a^x = e^{x \log(x)}$

Propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = e^{x \ln a} \qquad \log_a(a^x) = x$
- $\forall x \in]0; +\infty[\, a^{\log_a x} = x$

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^r = a^{rx}$
- $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[\; a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$

Inéquations :

$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$	$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$

Limites :

$a > 1$	$0 < a < 1$	$a > 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$	

Dérivée $\qquad (a^x)' = (\ln a) \times a^x$

FONCTIONS PRIMITIVES

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I On dit que F est une fonction primitive de f sur I si :

- F est dérivable sur I
- $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

Existence et unicité des primitives :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

Si f admet une primitive F sur un intervalle I, Alors toute fonction G définie sur I par :
$G(w) = F(w) + k \quad (b \in \mathbb{R})$ est aussi une primitive de f sur I

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I soit x_0 un élément de I et y_0 un réel, Il existe une seule primitive F de f sur I vérifiant la condition $F(x_0) = y_0$

Propriété de linéarité des primitives

Si F et G des fonctions primitives respectives de f et g sur un intervalle I et si k un réel, alors :

- $(F+G)$ est une fonction primitive de $(f+g)$ **sur** I
- kF est une fonction primitive de kf sur I

Propriété de linéarité des primitives

Si F et G des fonctions primitives respectives de f et g sur un intervalle I et si k un réel, alors :

- $(F+G)$ est une fonction primitive de $(f+g)$ **sur** I
- kF est une fonction primitive de kf sur I

primitives des fonctions usuelles :

$f(x)$	$F(x) \quad (k \in \mathbb{R})$
$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$(\mathrm{n} \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}) \quad x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$

$f(x)$	$F(x) \quad (k \in \mathbb{R})$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + k$
e^x	$e^x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$

Primitives des fonctions composés

$f(x)$	$F(x) \quad (k \in \mathbb{R})$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + k$
$(n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}) \quad u'(x) \times [u(x)]^n$	$\frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + k$

$f(x)$	$F(x) \quad (k \in \mathbb{R})$
$u'(x) \times e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$
$u'(x) \times \sin[u(x)]$	$-\cos[u(x)] + k$
$u'(x) \times \cos[u(x)]$	$\sin[u(x)] + k$

Exercice 1 — BAC 2010

I) On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 + 4xe^{2x}$$

1. Montrer que : $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$. *0.5pt*
2. Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$. *0.5pt*
3. a) Montrer que $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$ et vérifier que $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$. *0.5pt*
   b) En déduire que : $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$. *0.25pt*

II) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$. et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (on rappelle que : $\lim\limits_{u \to -\infty} ue^u = 0$) *1pt*
2. Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. *0.75pt*
3. a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des ordonnées. *0.75pt*
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)]$ et en déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$. *0.5pt*
   c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et la courbe (C) puis montrer que la courbe (C) est en-dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $]-\infty, \frac{1}{2}[$ et qu'clle est au-dessus de la droite (Δ) sur L'intervalle $]\frac{1}{2}, +\infty[$. *0.5pt*
4. a) Montrer que : $y = x$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O. *0.25pt*
   b) Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$. (la détermination de l'ordonnée du point d'inflexion n'est pas demandée). *0.25pt*
5. Construire les deux droites (Δ) et (T) et la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. *0.75pt*
6. a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = 1 - \frac{e}{2}.$$

1pt

   b) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (T) tangente à la courbe (C) et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$ est égale à : $(6 - 2e)\text{cm}^2$. *0.5pt*

Exercice 2 BAC 2010

I) On considère la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x)=x^3-x-2\ln x+3.$$

1 a) Vérifier que : $3x^3-x-2=(x-1)\left(3x^2+3x+2\right)$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$. *0.25pt*

b) Montrer que : $g'(x)=\dfrac{(x-1)\left(3x^2+3x+2\right)}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$. *0.75pt*

2 a) Vérifier que : $\dfrac{3x^2+3x+2}{x}>0$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$. *0.5pt*

b) En déduire que le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$ sur $]0,+\infty[$. *0.5pt*

3 a) Montrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$et qu'elle est croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$. *0.5pt*

b) En déduire que $g(x)>0$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$ (remarquer que $g(1)>0$). *0.5pt*

II) On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}.$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on prendra $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\text{ cm}$).

1 Montrer que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$ puis en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$. *1pt*

2 a) Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat. *0.5pt*

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (on rappelle que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$). *0.75pt*

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x-1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. *0.5pt*

3 Montrer que $y=3(x-1)$ est une équation de la droite tangente à la courbe (C) au point de coordonnées $(1,0)$. *0.5pt*

4 Construire la droite (Δ) et la courbe (C). (on admettra que la courbe (C) possède un point d'inflexion unique dont on ne demande pas de déterminer). *0.75pt*

5 a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}\qquad \left(\text{poser } u'(x)=\frac{1}{x^2}\text{ et } v(x)=\ln x\right)$$

1pt

b) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$ est égale à $\left(1-\dfrac{1}{e}\right)\text{cm}^2$. *0.5pt*

Exercice 3 **BAC 2011** N

I- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (1 - x)e^x - 1$$

1 a) Montrer que : $g'(x) = -xe^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$. *0,5pt*

b) Montrer que la fonction g est décroissante sur $[0; +\infty[$ et croissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et vérifier que $g(0) = 0$ *0,75pt*

2 En déduire que : $g(x) \leq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$. *0,5pt*

II- Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2 - x)e^x - x$$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1 a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. *0,5pt*

b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ *0,75pt*
puis en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction.

2 a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x]$. (on rappelle que : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$). *0,75pt*

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$. *0,25pt*

3 a) Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. *0,5pt*

b) Interpréter géométriquement le résultat : $f'(0) = 0$ *0,25pt*

c) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f. *0,5pt*

4 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$ (on admettra que $e^{\frac{3}{2}} > 3$). *0,5pt*

5 a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) + x = 0$ et en déduire que (C) et (D) se coupent au point $A(2; -2)$. *0,5pt*

b) Étudier le signe de $f(x) + x$ sur $\mathbb{R}$. *0,25pt*

c) En déduire que (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty; 2[$ et en-dessous de (D) sur $]2; +\infty[$. *0,25pt*

6 a) Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion unique de coordonnées $(0; 2)$. *0,5pt*

b) Construire la droite (D) et la courbe (C) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. *1pt*

7 a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : *1pt*

$$\int_{-1}^{0} (2 - x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$$

.

b) E déduire en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$. *0,25pt*

I- On considère la fonction numérique f définie sur $I =]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x - 1 + \ln x.$$

1 a) Montrer que : $g'(x) = \dfrac{x+1}{x}$ pour tout x de I. *0,5pt*

b) Montrer que la fonction g est croissante sur I. *0,5pt*

2 En déduire que $g(x) \geq 0$ sur $[1;+\infty[$ et que $g(x) \leq 0$ sur $]0;1]$. (remarquer que $g(1) = 0$). *1pt*

II-Soit f la fonction numérique définie sur I par :

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 1 cm).

1 a) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat. *0,75pt*

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. *1pt*

(remarquer que $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)\dfrac{\ln x}{x}$ pour tout x de I).

c) En déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction. *0,5pt*

2 a) Montrer que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de I. *1pt*

b) En déduire que la fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $]\,0;1]$ *0,5pt*

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur I. *0,25pt*

3 Construire (C) (on admettra que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion d'abscisse comprise entre 1,5 et 2). *1pt*

4 a) Montrer que $H : x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle I. *0,5pt*

b) Montrer que $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}$. *0,75pt*

c) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\displaystyle\int_1^e \ln x dx = 1$. *1pt*

5 a) Vérifier que $f(x) = \ln x - \dfrac{\ln x}{x}$ pour tout x de I. *0,25pt*

b) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e$ est égale à 0.5 cm^2. *0,5pt*

Exercice 5 BAC 2012

I- Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2-1+2x^2\ln x$$

1 Montrer que x^2-1 et $2x^2\ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]0;1[$ puis en déduire que $g(x)\leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,1]$. *0.75pt*

2 Montrer que x^2-1 et $2x^2\ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]1;+\infty[$ puis en déduire que $g(x)\geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$. *0.75pt*

II- On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\left(x^2-1\right)\ln x.$$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 3 cm).

1 a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat. *0.5pt*

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

(on pourra écrire $\dfrac{f(x)}{x}$ sous la forme $\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\ln x$).

et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction. *1pt*

2 a) Montrer que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$ et interpréter géométriquement le résultat $f'(1)=0$. *1.25pt*

b) Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$. *0.5pt*

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis montrer quef $(x)\geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$. *0.5pt*

3 Construire la courbe (C) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. *1pt*

4 a) Montrer que $u:x\mapsto\dfrac{x^3}{3}-x$ est une fonction primitive de la fonction $x\mapsto x^2-1$ sur $\mathbb{R}$. *0.5pt*

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_1^2\left(x^2-1\right)\ln x\,dx=\frac{2}{9}(1+3\ln 2).$$

1pt

c) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$. *0.25pt*

Exercice 6 BAC 2012

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

. et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Montrer que $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire que le point O est centre de symétrie de la courbe (C). *0.75pt*

2. Vérifier que : $f(x) = x + 1 - \dfrac{2}{e^x + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   (il est préférable d'utiliser cette expression de $f(x)$ pour traiter les questions qui suivent). *0.5pt*

3. a) Montrer que $f'(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et vérifier que : $f'(0) = \dfrac{3}{2}$. *1.25pt*
   b) Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. *0.5pt*
   c) Montrer que $y = \dfrac{3}{2}x$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O. *0.5pt*

4. a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. *0.5pt*
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 1)]$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
   c) Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D). *0.25pt*

5. Construire les deux droites (D) et (T) et la courbe (C).
   (on rappelle que O est centre de symétrie de la courbe (C)). *1.5pt*

6. a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto x - \ln(e^x + 1)$ est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$. *0.75pt*
   b) En déduire que :

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} \ln x dx = \ln 4 - \ln 3$$

   . *0.5pt*
   c) Calculer, en $\mathbf{cm^2}$, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$. *0.5pt*

Exercice 7 — BAC 2013 — N

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-2)^2 e^x$$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm).

1 a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. *0,25pt*

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ puis en déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction. *0,5pt*

2 a) Vérifier que : $f(x) = x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$. *0,25pt*

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et interpréter géométriquement ce résultat. *0,5pt*

(on rappelle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$).

3 a) Montrer que : $f'(x) = x(x-2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$. *0,75pt*

b) Montrer que la fonction f est croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0]$ et $[2, +\infty[$ et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $[0, 2]$. *1pt*

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. *0,5pt*

a) Montrer que : $f''(x) = \left(x^2 - 2\right) e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que la courbe (C) possède deux points d'inflexion qu'on ne demande pas de déterminer leurs ordonnées. *1pt*

b) Construire (C) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. *1pt*

a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$. *0,5pt*

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$$

. *0,75pt*

c) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $5(e-2)\text{cm}^2$. *0,5pt*

4 Utiliser la courbe pour donner le nombre de solutions de l'équation : *0,5pt*

$$x^2 = e^{-x} + 4x - 4, x \in \mathbb{R}.$$

I- On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - x - \ln x.$$

1 a) Vérifier que $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. *0,25pt*

b) Montrer que $g'(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$ et en déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$et qu'elle est croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$. *1pt*

2 Montrer que $g(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.
(remarquer que $g(1) = 0$).

II- On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2.$$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$(unité 1 cm).

1 a) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat. *0,5pt*

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. *0,5pt*

(remarquer que $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2\right)$).

c) En déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction. *0,25pt*

2 a) Montrer que : $f'(x) = 2\left(\dfrac{x^2 - \ln x}{x}\right)$ pour tout x de $]0,+\infty[$. *1pt*

b) Vérifier que $\dfrac{g(x)}{x} + 1 = \dfrac{x^2 - \ln x}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$ et en déduire que la fonction f est croissante sur $]0,+\infty[$. *0,75pt*

3 a) Montrer que $y = 2x - 2$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point $A(1,0)$. *0,5pt*

b) Construire, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C). (on admettra que A est le seul point d'inflexion de la courbe (C)) *1pt*

4 a) Vérifier que $H : x \mapsto x(\ln x - 1)$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0,+\infty[$ puis montrer que : $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx = 1.$ *0,75pt*

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$$

. *0,5pt*

c) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est égale à $\dfrac{1}{3}\left(e^3 - 6e + 8\right)$ cm^2 *0,5pt*

Exercice 9 BAC 2014

I) Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$$

1. Montrer que $g'(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$ et en déduire que la fonction g est croissante sur $]0;+\infty[$. *0.5pt*
2. Vérifier que $g(1) = 0$ puis en déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $]0,1]$ et que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[1,+\infty[$. *0.75pt*

II) On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}.$$

et soit(C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité $1cm$).

1. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat. *0.5pt*
2. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. *0.25pt*
   b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1+\ln x)^2}{x} = 0$ (on pourra poser $t = \sqrt{x}$) puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. *1pt*
   c) Déterminer la branche infinie de la courbe $(C.)$ au voisinage de $+\infty$. *0.25pt*
3. a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$ puis en déduire que la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$. *1.5pt*
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis en déduire que $f(x) \geq 2$ pour tout x de $]0,+\infty[$. *1pt*
4. Construire (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on admettra que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion que l'on ne demande pas de déterminer). *0.75pt*
5. On considère les deux intégrales I et J suivantes :

$$I = \int_1^e (1+\ln x)dx \text{ et } J = \int_1^e (1+\ln x)^2 dx.$$

   a) Montrer que $H : x \mapsto x\ln x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto 1+\ln x$ sur $]0,+\infty[$ puis en déduire que $I = e$. *0.5pt*
   b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $J = 2e - 1$. *0.5pt*
   c) Calculer, en $\mathbf{cm^2}$, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. *0.5pt*

Exercice 10 **BAC 2014**

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (xe^x - 1)\, e^x$$

. et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 2 **cm**).

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat. *0.75pt*

2. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. *0.75pt*

   b. En déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction. *0.5pt*

3. a. Montrer que :

$$f'(x) = e^x\,(e^x - 1 + 2xe^x)$$

   pour tout x de $\mathbb{R}$ puis vérifier que $f'(0) = 0$. *1pt*

   b. Montrer que $e^x - 1 \geq 0$ pour tout x de $[0, +\infty[$ et que $e^x - 1 \leq 0$ pour tout x de $]-\infty, 0]$. *0.5pt*

   c. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ et qu'elle est décroissante sur $]-\infty, 0]$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. *1.25pt*

4. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0, +\infty[$ et que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$. (on admettra que $\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} < 1$) *0.75pt*

   b. Construire, dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite la courbe (C), (on admettra que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion qu'on ne demande pas de déterminer). *0.75pt*

5. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx = \frac{1}{4}$$

0.75pt

6. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$. *1pt*

I- Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^x - 2x$$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que g est décroissante sur $]-\infty, \ln 2]$ et croissante sur $[\ln 2, +\infty[$. *0,75pt*
2. Vérifier que $g(\ln 2) = 2(1 - \ln 2)$ puis déterminer le signe de $g(\ln 2)$. *0,5pt*
3. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$. *0,5pt*

II- On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 2x}$.
et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1. a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$. *1pt*
   (remarquer que $e^x - 2x = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 2\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$)
   b) Interpréter géométriquement chacun des deux derniers résultats. *0,5pt*
2. a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x - 2x)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$. *0,75pt*
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. *0,75pt*
   c) Montrer que $y = x$ est une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O origine du repère. *0,25pt*
3. Tracer, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C). *1pt*
   (on prendra $\dfrac{1}{e-2} \approx 1,4$ et on admettra que la courbe (C) a deux points d'inflexion l'abscisse de l'un appartient à l'intervalle $]0, 1[$ et l'abscisse de l'autre est supérieur à $\dfrac{3}{2}$).
4. a) Montrer que $xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x - 2x} \leq \dfrac{1}{e-2}$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$. *0,75pt*
   b) En utilisant une intégration par parties, montrer que :
   $$\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}$$
   0,75pt
   c) Soit, en $\mathbf{cm^2}$, $A(E)$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. *0,5pt*
   Montrer que
   $$: 1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$$

III- Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ $h(x) = f(x)$.

1. Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera. *0,5pt*
2. Tracer, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $(C_{h^{-1}})$ représentative de la fonction h^{-1}. *0,5pt*

IV- Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = -2 \text{ et } u_{n+1} = h(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1. Montrer par récurrence que $u_n \leq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante. *0,75pt*
   (remarquer, graphiquement, que : $h(x) \geq x$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty, 0]$).
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite *0,75pt*

Exercice 12 — **BAC 2015** ®

I- Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par

$$g(x)=1-x+x\ln x$$

1 **a** Montrer que $g'(x)=\ln x$ pour tout x de $]0;+\infty[$. *0,5pt*

b Montrer que la fonction g est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$. *0,5pt*

2 Calculer $g(1)$ et en déduire que $g(x)\geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$. *0,75pt*

II- On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=3-\frac{1}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}.$$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$(unité 1 cm).

1 Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat. *0,75pt*

(pour calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$; remarquer que $f\,(x)=\dfrac{3x^2-1-2x\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]\,0;+\infty[$).

2 Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ et en déduire la branche infinie de la courbe (C) *0,75pt*

3 **a** Montrer que $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$ pour tout x de $]0;+\infty[$. *0,75pt*

b Interpréter géométriquement le résultat $f'(1)=0$. *0,25pt*

c Montrer que la fonction f est croissante sur $]0;+\infty[$. *0,5pt*

4 Tracer, dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe (C). *0,75pt*
(on admettra que la courbe (C) possède deux points d'inflexion tels que 1 est l'abscisse de l'un de ces deux points et l'abscisse de l'autre est comprise entre 2 et 2,5 et on prendra $f(0,3)=0$).

5 **a** Montrer que

$$\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx=1$$

0,5pt

b Calculer, en $\mathbf{cm^2}$, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=e$. *0,75pt*

6 Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x)=3-\frac{1}{x^2}-\frac{\ln\left(x^2\right)}{|x|}$$

a Montrer que la fonction h est paire et que $h(x)=f(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$. *0,75pt*

b Tracer, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe (C') représentant la fonction h *0,5pt*

Exercice 13 — BAC 2016

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^{x}.$$

et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité :$1cm$). $I)$

1 a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. *0.25pt*

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$. *0.5pt*

2 a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. *0.5pt*

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat. *0.5pt*

3 a) Montrer que $f'(x) = 2\left(e^{x} - 1\right)^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$. *0.5pt*

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. (remarquer que $f'(0) = 0$). *0.25pt*

c) Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1, \ln 4[$ tel que : $f(\alpha) = 0$. *0.75pt*

4 a) Montrer que la courbe (C_f) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ et qu'elle est en-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty, \ln 4[$. *0.5pt*

b) Montrer que la courbe (C_f) admet un seul point d'inflexion de coordonnées $(0, -5)$. *0.5pt*

c) Tracer la droite (D) et la courbe (C_f) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
(on prendra $\ln 4 \approx 1,4$ et $\alpha \approx 1,3$). *0.75pt*

5 a) Montrer que

$$\int_0^{\ln 4} \left(e^{2x} - 4e^{x}\right) dx = -\frac{9}{2}$$

0.5pt

b) Calculer, en $\mathbf{cm^2}$, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), ,la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$. *0.5pt*

$II)$

1 a) Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$. *0.5pt*

b) Déterminer la solution g de l'équation (E) qui vérifie les deux conditions : $g(0) = -3$ et $g'(0) = -2$. *0.5pt*

2 Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln\left(e^{2x} - 4e^{x}\right).$$

a) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$. *0.75pt*

b) Vérifier que $h(\ln 5) = \ln 5$ puis déterminer $\left(h^{-1}\right)'(\ln 5)$. *0.75pt*

I **-** Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{2}{x}-1+2\ln x$.
Le tableau ci-desous est le tableau de variations de la fonction g sur $]0;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

1. Calculer $g(1)$. *0.25pt*
2. Déduire a partir du tableau que : $g(x)>0$ pour tout x de $]0;+\infty[$. *0.75pt*

II **-** On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=3-3x+2(x+1)\ln x.$$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$(unité 2 cm)

1. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ et donner une interprétation géométrique à ce résultat. *0.75pt*
2. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
   (pour calculer cette limite on pourra écrire $f(x)$ sous forme $f(x)=x\left[\frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]$). *0.5pt*
   b) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$. *0.5pt*
3. a) Montrer que $f'(x)=g(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$. *0.75pt*
   b) En déduire que la fonction fest strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$. *0.75pt*
4. a) Montrer que $I(1,0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C). *0.5pt*
   b) Montrer que $y=x-1$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point I. *0.25pt*
   c) Tracer dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la droite (T) et la courbe (C). *0.75pt*
5. a) Montrer que $\int_1^2\left(1+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{7}{4}$. *0.5pt*
   b) En utilisant une intégration par partes, montrer que :
   $\int_1^2(x+1)\ln x\,dx=4\ln 2-\frac{7}{4}$. *0.75pt*
   c) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'ave des abscisses et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=2$. *0.5pt*
6. Résoudre graphiquement l'inéquation : $(x+1)\ln x\geq\frac{3}{2}(x-1), x\in]0,+\infty[$. *0.5pt*

I) Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$.

1 Vérifier que : $g(1)=0$. *0,25pt*

2 A partir du tableau de variations de la fonction g ci-dessous :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

Montrer que $g(x)\leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,1]$ et que $g(x)\geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1,+\infty[$. *1pt*

II) On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x$. Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm).

1 Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ et interpréter géométriquement le résultat. *0,5pt*

2 **a** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. *0,25pt*

b Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (D) d'équation $y=x$. *0,75pt*

3 **a** Montrer que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$. *1pt*

b Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$. *0,75pt*

4 Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$. *0,25pt*

5 **a** Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation : $\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x=0$. *0,5pt*

b En déduire que la courbe (C) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées. *0,5pt*

c Montrer que $f(x)\leq x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1,2]$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (D) sur l'intervalle $[1,2]$. *0,75pt*

6 Construire, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C) *1pt*
(on admettra que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2,4 et 2,5).

7 **a** Montrer que : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$. *0,5pt*

b Montrer que la fonction $H: x\mapsto 2\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h: x\mapsto \dfrac{2}{x}-1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$. *0,25pt*

c Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : *0,5pt*

$$\int_1^2\left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x\,dx=(1-\ln 2)^2.$$

d Calculer, en cm^2, l'aire áu domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$. *0,5pt*

III) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=\sqrt{3}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1 Montrer par récurrence que : $1\leq u_n\leq 2$ pour tout entier naturel n. *0,5pt*

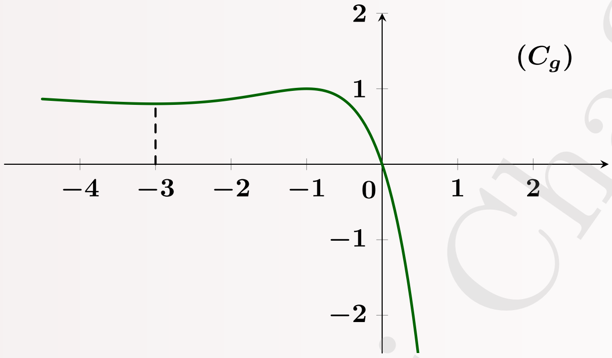
2 Montrer que la suite (u_n) est décroissante *0,5pt*
(on pourra utiliser le résultat de la question **II) 4. c)**).

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. *0,75pt*

I) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$.

1 Vérifier que : $g(0) = 0$. *0,25pt*

2 A partir de la représentation graphique de la fonction g (voir figure ci-contre) *1pt*
Montrer que $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\infty, 0]$ et que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$.



II) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 - \left(x^2+1\right) e^x.$$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 2 cm).

1 **a** Vérifier que : $f(x) = x + 1 - 4\left(\dfrac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$ pour tout réel x puis en déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. *0,75pt*

b Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)]$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y = x+1$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$. *0,5pt*

c Montrer que la courbe (C_f) est au-dessous de la droite (D). *0,25pt*

2 **a** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (on pourra écrire $f(x)$ sous la forme $x\left[1 + \dfrac{1}{x} - \left(x + \dfrac{1}{x}\right) e^x\right]$) *0,25pt*

b Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction. *0,25pt*

3 **a** Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout réel x. *0,75pt*

b Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. *0,75pt*

c Montrer que la courbe (C_f) possède un deux points d'inflexion d'abscisses-3 et-1. *0,75pt*

4 Construire, dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C_f). *1pt*
(on prendra $f(-3) \approx -2,5$ et $f(-1) \approx -0,7$)

5 **a** Vérifier que la fonction $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ puis montrer que : $\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$. *0,5pt*

b Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : *0,75pt*

$$\int_{-1}^{0} \left(x^2+1\right) e^x dx = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right).$$

c Calculer, en $\mathbf{cm^2}$, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) , la droite (D), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -1$. *0,5pt*

I) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$.
Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction g.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

1. Vérifier que : $g(0) = 0$. *0.25pt*
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$. *0.5pt*

II) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(x^2 - x\right) e^{-x} + x$.
et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 **cm**).

1. a) Vérifier que $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x} - \dfrac{x}{e^x} + x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. *0.5pt*
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ puis en déduire que (C) admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = x$. *0.75pt*
   c) Vérifier que $f(x) = \dfrac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. *0..5pt*
   d) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement. *0..5pt*
2. a) Montrer que $f(x) - x$ et $x^2 - x$ ont le même signe pour tout x de $\mathbb{R}$. *0.25pt*
   b) En déduire que (C) est au-dessus de (D) sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[1; +\infty[$, et en dessous de (D) sur l'intervalle $[0; 1]$. *0.5pt*
3. a) Montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$. *0.75pt*
   b) En déduire que la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. *0.5pt*
   c) Dresser le tableau de variations de la fonction f. *0.25pt*
4. a) Vérifier que $f''(x) = \left(x^2 - 5x + 4\right) e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$. *0.25pt*
   b) En déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives 1 et 4. *0.5pt*
5. Construire (D) et (C) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.(on prend : $f(4) = 4.2$) *1pt*
6. a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto \left(x^2 + 2x + 2\right) e^{-x}$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ pais en déduire que $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}dx = \frac{2e - 5}{e}$. *0.5pt*
   b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$. d'équations $x = 0$ et $x = 1$. *0.75pt*

III) Soit((u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
(on pourra utiliser le résultat de la question **II) 3. b)**) *0.75pt*
b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. *0.5pt*
c) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite. *0.75pt*

I Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^3-1-2\ln^2 x+2\ln x$.
Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

1 Calculer : $g(1)$. *0.25pt*

2 Déterminer, à partir de ce tableau, le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$. *0.5pt*

II) On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2.$$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 **a** Vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. *0.5pt*

b Montrer que la droite (D) d'équation $y=x-\dfrac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. *0.5pt*

c Déterminer la position relative de la droite (D) et la courbe (C). *0.25pt*

2 Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$ et interpréter le résultat géométriquement. *0.75pt*

3 **a** Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$. *1pt*

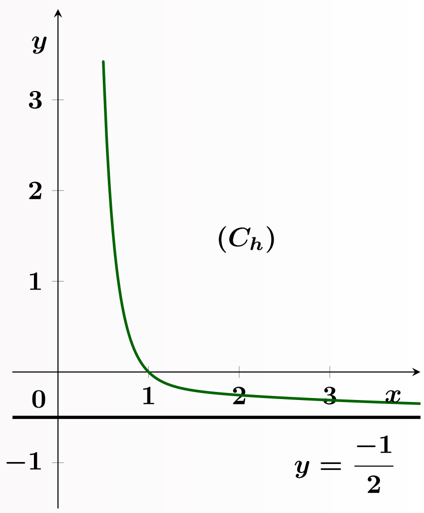
b Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$. *0.5pt*

c Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. *0.5pt*

4 Construire dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C) (unité : **1 cm**). *1pt*

III) On considère la fonction numérique h définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x)=f(x)-x$$



1 **a** Vérifier que $h(1)=0$. *0.25pt*

b **Dans la figure ci-contre**, (C_h) est la représentation graphique de la fonction h.
Déterminer le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$ puis en déduire que : $f(x)\leq x$ pour tout x de l'intervalle $[1;+\infty[$. *0.75pt*

2 On considère la suite numérique (u_n) définie par :
$u_0=e$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a Montrer par récurrence que $1\leq u_n\leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*

b Montrer que la suite (u_n) est décroissante. *0.75pt*
(on pourra utiliser le résultat de la question **III) 1.b**)).

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. *0.75pt*

Première partie :
Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité :1 cm).

1 Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement. *0,5pt*

2 **a** Vérifier que pour tout x de $]0;+\infty[$, $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$. *0,25pt*

b En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. *0,5pt*

c Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $\quad \dfrac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ *0,5pt*

puis en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$.

d Montrer que (C) admet au voisinage de +oo une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y=x$. *0,75pt*

3 **a** Vérifier que pour tout x de $]0;1]$: $(x-1)+\ln x\leq 0$ et que pour tout x de $[1;+\infty[$: $(x-1)+\ln x\geq 0$. *0,5pt*

b Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $\quad f'(x)=\dfrac{x-1+\ln x}{x}$. *1pt*

c Dresser le tableau de variations de la fonction f. *0,5pt*

4 **a** Montrer que $f''(x)=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$. *0,5pt*

b En déduire que (C) admet in point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées. *0,5pt*

5 **a** Montrer que pour tout x de $]0;+\infty\Big[$, $f(x)-x=\dfrac{1}{2}(\ln x-1)^2$ et déduire la position relative de (C) et (Δ). *0,5pt*

b Construire (Δ) et (C) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. *1pt*

6 **a** Montrer que la fonction $H: x\mapsto x\ln x-x$ est une primitive de la fonction $h: x\mapsto \ln x$ sur $]0;+\infty[$. *0,5pt*

b A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\displaystyle\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$. *0,75pt*

c Calculer en $\mathbf{cm^2}$ l'aire du domaine plan limité par (C) et (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. *0,5pt*

Deuxième partie :
Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 **a** Montrer par récurrence que $1\leq u_n\leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*

b Montrer que la suite (u_n) est croissante. *0,5pt*

c En déduire que la suite (u_n) est convergente . *0,5pt*

2 Calculer la limite de la suite (u_n). *0,75pt*

Exercice 20 — BAC 2019

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité :1 cm).

1. a) Vérifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et interpréter le résultat géométriquement. *0,5pt*

   b) Vérifier que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement. *0,5pt*

2. a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. *0,5pt*

   b) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$. *0,5pt*

3. a) Montrer que : $f'(x) = \dfrac{8(x-2)\left(x^2-2x+4\right)e^{x-4}}{x^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$. *0,75pt*

   b) Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}, x^2 - 2x + 4 > 0$. *0,25pt*

   c) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0;2[$ et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $[2;+\infty[$. *0,75pt*

   d) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$. *0,5pt*

4. Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. *1pt*

5. a) Vérifier que la fonction $H : x \mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction *0,5pt*

$$h : x \mapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4} \qquad \text{sur} \qquad [2;4]$$

.

   b) Vérifier que $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$. *0,25pt*

   c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 e^{x-4}dx$. *0,5pt*

   d) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$. *0,75pt*

Deuxième partie :

1. On considère la fonction numérique g définie sur $[2;4]$ par :

$$g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2.$$

   a) Calculer $g(4)$. *0,25pt*

   b) Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2;4]$, *0,5pt*

$$g(x) = -(x-4)^2 e^{x-4} + x^2\left(e^{x-4} - 1\right).$$

   c) Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2;4], e^{x-4} - 1 \leq 0$
   puis en déduire que pour tout x de l'intervalle $[2;4], g(x) \leq 0$. *0,5pt*

2. a) Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2;4], f(x) - x = \left(\frac{x-2}{x}\right)g(x)$. *0,5pt*

   b) En déduire que pour tout x de l'intervalle $[2;4], f(x) \leq x$. *0,25pt*

3. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   a) Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*

   b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente. *0,5pt*

   c) Calculer la limite de la suite (u_n). *0,75pt*

Exercice 21 BAC 2020 N

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ *0.5pt*

2. a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=-x+\frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$ *0.5pt*

   b) Résoudre l'équation $e^{x-2}-4=0$ puis montrer que la courbe (C) est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty,2+\ln 4]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2+\ln 4,+\infty[$ *0.75pt*

3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat. *0.5pt*

4. a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ *0.5pt*

$$f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$$

   b) Dresser le tableau de variations de la fonction f *0.25pt*

5. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que $A(2,2)$ est un point d'inflexion de (C) *0.75pt*

6. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α telle que

$$2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$$

0.5pt

7. Construire (Δ) et (C) dans le repère $(O,\vec{i};\vec{j})$

(on prend $\ln 2\simeq 0,7$ et $\ln 3\simeq 1,1$)

1pt

8. a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ *0.5pt*

   b) Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1} (remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice du repère) *0.75pt*

   c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(2-\ln 3)$

(Remarquer que $f^{-1}(2-\ln 3)=2+\ln 3$)

0.5pt

Exercice 22 — BAC 2020

I **-** Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = e^{1-x} + \frac{1}{x} - 2$$

1 Monter que $g'(x) < 0$, pour tout $x \in]0,+\infty[$ *0.5pt*

2 Déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$; (remarquer que $g(1) = 0$) *0.5pt*

II **-** On considère f la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = (1-x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln x$$

et (C) sa courbe représentative dans orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 **cm**)

1 Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement *0.5pt*

2 **a** Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ *0.5pt*

b Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement *0.75pt*

3 **a** Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = (x-2)g(x)$ *1pt*

b Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et sur $[2,+\infty[$ et croissante sur $[1,2]$ *0.75pt*

c Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$, (on admet $f(2) \simeq 1,25$) *0.25pt*

4 Sachant que $f(3) \simeq 0,5$ et $f(4) \simeq -1,9$ montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]3,4[$. *0.25pt*

5 Construire (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ *1pt*

III **-** On pose $h(x) = f(x) - x$ pour tout x de l'intervalle $[1,2]$

1 **a** A partir du tableau de variations de la fonction h ci-contre montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x de l'intervalle $[1,2]$ *0.5pt*

x	1		2
$h(x)$	0	$\searrow$	$h(2)$

b Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[1,2]$ *0.25pt*

2 Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

a Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$ *0.75pt*

b Montrer que la suite (u_n) est décroissante. *0.5pt*

c En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} u_n$ *0.75pt*

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(0)=0 \text{ et } f(x)=2x\ln x-2x \text{ si } x>0$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$)

1. Montrer que f est continue à droite au point 0. *0.5pt*
2. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *0.5pt*
   b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat *0.5pt*
3. a. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat *0.75pt*
   b. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$ *0.5pt*
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0,+\infty[$ *0.5pt*
4. a. Résoudre dans l'intervalle $]\ 0,+\infty\ [$ les équations $f(x)=0$ et $f(x)=x$ *0.5pt*
   b. Construire la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prend $e^{\frac{3}{2}}\simeq 4.5$) *1pt*
5. a. En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{1+e^2}{4}$$

   0.5pt
   b. En déduire : $\displaystyle\int_1^e f(x)dx$ *0.5pt*
6. a. Déterminer le minimum de f sur $]0,+\infty[$ *0.25pt*
   b. En déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$

$$\ln x\geq\frac{x-1}{x}$$

   0.5pt
7. Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1,+\infty[$
   a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera. *0.5pt*
   b. Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction g^{-1} *0.75pt*
8. on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} h(x)=x^3+3x;\ x\leq0\\ h(x)=2x\ln x-2x;\ x>0\end{cases}$$

   a. Étudier la continuité de h au point 0 *0.5pt*
   b. Étudier la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat. *0.5pt*
   c. La fonction h est-elle dérivable au point 0 ? justifier. *0.25pt*

Exercice 24 — BAC 2021

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 - xe^{-x+1}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm)

1 Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement. *0.5pt*

2 a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *0.5pt*

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement. *0.75pt*

3 a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: *0.75pt*

$$f'(x) = (x-1)e^{-x+1}$$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f *0.5pt*

4 a) Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ *0.5pt*

b) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion d'abscisse 2 *0.5pt*

5 Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prend : $f(2) = 1,25$) *1pt*

6 Déterminer la valeur minimale de la fonction f et en déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$

$$e^{x-1} \geq x$$

0.5pt

7 a) En utilisant une intégration par parties, calculer : $\displaystyle\int_0^2 xe^{-x}dx$ *0.5pt*

b) En déduire que

$$\int_0^2 f(x)dx = 4 - e + 3e^{-1}$$

0.5pt

8 Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 1]$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. *0.5pt*

b) Construire la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *0.75pt*

c) A partir de la courbe représentative de g^{-1},

déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{g^{-1}(x)}{x} \right)$ *0.25pt*

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité :1cm)

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *0.5pt*

2 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat *0.5pt*

3 a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$ *0.5pt*

b) Étudier le signe de $(f(x)-x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) *0.75pt*

4 a) Montrer que $f'(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. *0.5pt*

b) Vérifier que $x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ *0.5pt*

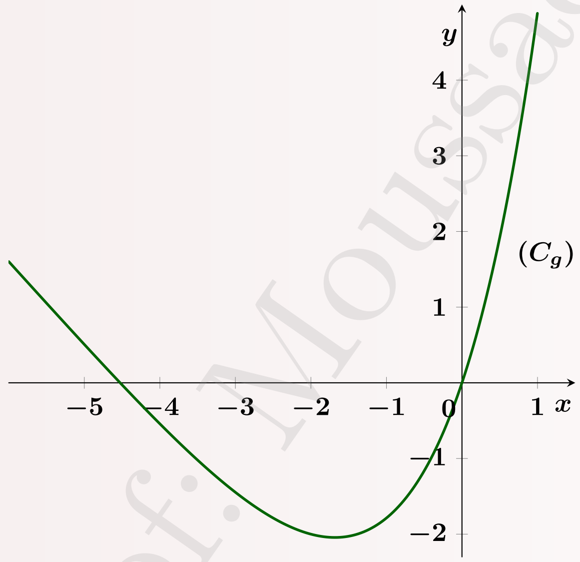
c) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ *0.25pt*

5 a) Montrer que $f''(x)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\,g(x)$; où $g(x)=(2x+4)e^{\frac{x}{2}}-x-4$ pour tout x de $\mathbb{R}$ *0.5pt*

b) A partir de la courbe ci-dessous de la fonction g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque : $g(\alpha)=0$) *0.5pt*

c) Étudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions. *0.5pt*

6 Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$
(On prend : $\ln(4)\simeq 1,4$, $\alpha\simeq -4,5$ et $f(\alpha)\simeq -3,5$) *1pt*



7 a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ *0.5pt*

b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln 4)$ *0.25pt*

8 Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) Montrer par récurrence que $0<u_n<\ln 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$ *0.5pt*

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. *0.5pt*

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. *0.25pt*

d) Calculer la limite de la suite (u_n). *0.5pt*

Exercice 26 BAC 2022 ®

Soit f la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x^4(\ln x-1)^2; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm)

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$ *0,75pt*

2 a. Montrer que f est continue à droite en 0 *0,5pt*

b. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement *0,5pt*

3 a. Montrer que $f'(x)=2x^3(\ln x-1)(2\ln x-1)$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$ *0,75pt*

b. Dresser le tableau de variations de f *0,5pt*

4 a. Sachant que $f''(x)=2x^2(6\ln x-5)\ln x$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0,+\infty[$ *0,5pt*

b. Déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses *0,5pt*

5 a. Construire la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prend : $\sqrt{e}=1,6$ et $e^2=7,2$) *1pt*

b. En utilisant la courbe (C), déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2(\ln x-1)=-1$ *0,5pt*

6 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(|x|)$

a. Montrer que la fonction g est paire *0,5pt*

b. Construire (C_g) la courbe représentative de g dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ *0,5pt*

7 a. On pose $I=\displaystyle\int_1^e x^4(\ln x-1)dx$, en utilisant une intégration par parties, montrer que $I=\dfrac{6-e^5}{25}$ *0,5pt*

b. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $h(x)=x^5(\ln x-1)^2$. *0,5pt*
Vérifier que $h'(x)=5f(x)+2x^4(\ln x-1)$

c. Déduire que $\displaystyle\int_1^e f(x)dx=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}I$ *0,5pt*

d. Calculer Taire du domaine délimite par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$ *0,5pt*

Équations Différentielles

- Équation différentielle du premier ordre
- L'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$

2BAC PC-SVT

Prof: Moussaoui Chafik

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Équation différentielle du premier ordre

Équation	Solution
$y' = ay$	$y(x) = ke^{ax} \quad ; \quad k \in \mathbb{R}$
$y' = ay + b$	$y(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a} \quad ; \quad k \in \mathbb{R}$
$y' = ay$ et $y(x_0) = y_0$	$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$

L'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$

$\Downarrow$

Équation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$

$\Downarrow$

On le Calcule $\Delta = a^2 - 4b$

$\Downarrow$

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
L'équation caractéristique admet 2 solutions complexes conjuguées $r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$	L'équation caractéristique admet une seule solution r_0	L'équation caractéristique admet deux solutions réelles r_1 et r_2
La solution générale est $y(x) = (\alpha\cos(qx) + \beta\sin(qx))e^{px}$ Avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$	La solution générale est $y(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$ Avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$	La solution générale est $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ Avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

Soit l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ ou ω est un nombre réel $(\omega \neq 0)$
La solution générale est $\quad y(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x) \quad$ Avec $\quad (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 27 — BAC 2006 — N

1 Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 6y' + 9y = 0$. *0,75pt*

2 On considère l'équation différentielle suivante : $(E) : y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}$.

- **a** Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2e^{3x}$ est une solution particulière de l'équation (E). *0,75pt*
- **b** Donner la solution générale de l'équation (E). *0,5pt*

Exercice 28 — BAC 2006 — R

On considère l'équation différentielle suivante : $(E) : y'' - 2y' + y = x - 1$.

1 Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = 0$. *0.75pt*

2
- **a** Trouver une solution particulière de l'équation (E) de la forme :

$$y_0 : x \mapsto ax + b.$$

0.25pt

- **b** Donner la solution générale de l'équation (E). *0.25pt*
- **c** Déterminer la solution h de l'équation (E) qui vérifie : $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$. *0.5pt*

Calcul Intégral

- Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle
- Intégration par parties
- L'Aire d'une partie du plan
- Calcul de volumes

2BAC PC-SVT

Prof: Moussaoui Chafik

Calcul Intégral

Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle :

Soient, f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une primitive de f sur $[a,b]$ L'intégrale de a à b de f est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Propriétés

Linéarité :

$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$	$\int_a^a f(x)dx = 0$
$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$	$(k \in \mathbb{R})\quad \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Relation de chasles :

$$\forall c \in [a,b] \quad ; \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Intégrale et ordre :

- Si : $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq g(x)$ Alors : $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- Si : $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq 0$ Alors : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Valeur moyenne :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ La valeur moyenne de la fonction f sur $[a,b]$ est le nombre réel :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

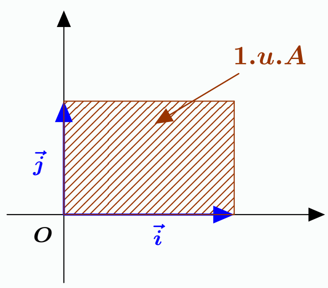
Intégration par parties :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ telle que : f et g' sont continues sur $[a,b]$ On a : $\int_a^b [f'(x)\times g(x)]\,dx = [f(x)\times g(x)]_a^b - \int_a^b [f(x)\times g'(x)]\,dx$

L'Aire d'une partie du plan :

Soit un plan muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$
l'unité de l'aire : $u.A$ est l'aire du rectangle limité par le point O et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$:

$$1u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$



L'Aire d'une partie du plan :

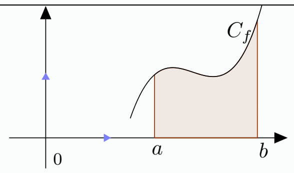
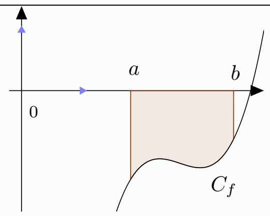
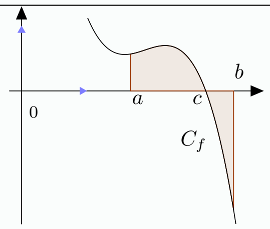
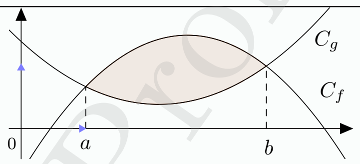
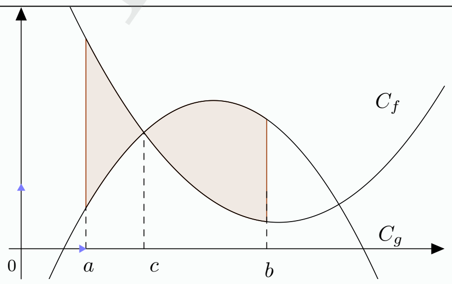
• Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Cf), l'axe des [2] abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right) \cdot u \cdot A$$

• Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[a,b]$. l'aire de la partie du plan délimitée par Cf et Cg et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est :

$$\left(\int_a^b \mid f(x) - g(x) \mid dx\right) \cdot u \cdot A$$

Cas particuliers :

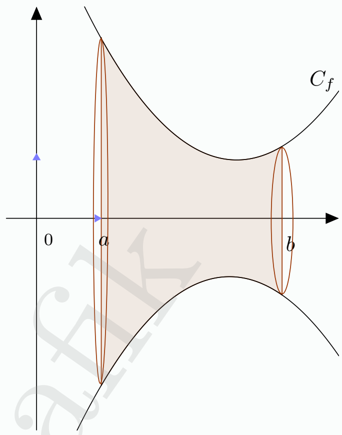
Figure illustrative	L'aire du domaine hachuré sur la figure
 • f est positive sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right).u.A$
 • f est négative sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b -f(x)dx\right).u.A$
 • f est positive sur $[a;c]$ • f est négative sur $[c;b]$	$\left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx\right) \cdot u \cdot A$
 • (C_g) est au dessus **de** (C_f) sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b (g(x) - f(x))dx\right).u.A$
 • (C_f) est au dessus de (C_g) sur$[a;c]$ • (C_f) est au dessous de (C_g) sur $[c;b]$	$\left(\int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx\right) \cdot u \cdot A$

Calcul de volumes

Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe (C_f) sur $[a;b]$, un tour complet autour de l'axe des abscisses est :

$$V = \left[\int_a^b \pi(f(x))^2 dx\right] u.v$$

$u.v$: unité de volume



Exercice 29 — BAC 2003 — N

1. En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_1^2 \ln(x)dx$. *1pt*
2. Calculer l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^{\ln 4} x\sqrt{e^x}dx$ (on pourra poser $t = \sqrt{e^x}$). *1pt*

Exercice 30 — BAC 2003 — R

1. Calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x}|\ln(x)|dx$. *1pt*
2. a. Déterminer les deux réels a et b pour que : $\dfrac{2}{1+t} = a + \dfrac{b}{1+t}$ pour tout réel t différent de -1. *0.5pt*

   b. Calculer l'intégrale : $J = \displaystyle\int_2^7 \frac{1}{1+\sqrt{2+x}}dx$ (on pourra poser $t = \sqrt{2+x}$). *0.5pt*

Exercice 31 — BAC 2005 — N

1. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{2e^3+1}{9}$. *1pt*
2. Montrer que : $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \frac{\pi}{6}$ (on pourra poser : $t = \sqrt{x-1}$). *1.5pt*

Exercice 32 — BAC 2005 — R

1. En utilisant une intégration par parties, montrer que : *1pt*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \ln(1+\cos(x))dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

(on rappelle que : $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$)

Exercice 33 — BAC 2009 — N

On pose : $I = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}dx$ et $J = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \ln(2x+6)dx$.

1. a. Vérifier que : $\dfrac{x}{x+3} = 1 - \dfrac{3}{x+3}$ pour tout réel x différent de -3. *0,25pt*

b Montrer que : $I = 1 - 3\ln 2$. *0,75pt*

2 En utilisant une intégration par parties, montrer que : $J = -I$. *1pt*

Exercice 34 — BAC 2009 (R)

1 Déterminer les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto 2x\left(x^2-1\right)^{2009}$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que : $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} 2x\left(x^2-1\right)^{2009} dx = \frac{1}{2010}$. *1pt*

2 En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx = 6\ln 3 - 2.$ *1pt*

Exercice 35 — BAC 2020 (N)

On considère la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$

1 a Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[, g'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$. *0.5pt*

b Montrer que g est croissante sur $[1,+\infty[$ *0.5pt*

c en déduire que pour tout x de $[1,+\infty[$, $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$ (remarquer que $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$) *0.5pt*

d Montrer que pour tout x de $[1,+\infty[, 0 \leq \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \dfrac{8}{\sqrt{x}}$.. et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$ *1pt*

2 a Montrer que la fonction $G : x \mapsto x\left(-1 + \dfrac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right)$ est une primitive de g sur $]0,+\infty[$ *0.75pt*

b Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 g(x)dx$ *0.75pt*

Exercice 36 — BAC 2020 (R)

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x - 2x + 2 - 3e^{-x}$

1 a Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}, u'(x) = \dfrac{\left(e^x-1\right)^2+2}{e^x}$ *0.5pt*

b poser le tableau de variation de la fonction u (sans calcul de limite) ; *0.25pt*

c En déduire le signe de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (remarquer que $u(0) = 0$) *0.5pt*

2 Soit la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = e^{2x} - 2xe^x + 2e^x - 3$

a Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}, v(x) = e^x u(x)$ *0.5pt*

b En déduire le signe de la fonction v sur $\mathbb{R}$ *0.5pt*

3 a Montrer que la fonction W définie par $W(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} + (4-2x)e^x - 3x$ est une primitive de la fonction v sur $\mathbb{R}$ *0.5pt*

b Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 v(x)dx$ *0.5pt*

c Montrer que $\dfrac{9}{2}$ est le minimum absolu de la fonction W sur $\mathbb{R}$. *0.75pt*

Exercice 37 — BAC 2007 (N)

1 Vérifier que : $\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\}$. *0,5pt*

2 Montrer que : $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx = \ln 3$. *1pt*

3 En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_0^2 x\ln(x+1)dx = \frac{3}{2}\ln 3$. *1pt*

Exercice 38 — BAC 2018 — N

1 **a** Montrer que la fonction $H : x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$. *0.5pt*

b En déduire que $\int_0^1 (x+1)e^x dx = e$. *0.5pt*

2 A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_0^1 \left(x^2+2x-1\right)e^x dx$. *1pt*

Exercice 39 — BAC 2022 — N

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+1)e^x$

1 Vérifier que $x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$; puis calculer $I = \int_{-1}^0 h(x)dx$ *0.75pt*

2 A l'aide d'une intégration par parties calculer $J = \int_{-1}^0 (x+1)^2 e^x dx$ *0.75pt*

Les Suites Numériques

- La suite arithmétique la suite géométrique
- La suite majorée, minorée et bornée
- La monotonie d'une suite
- La limite d'une suite
- Critères de convergence
- Suites de type $f(u_n) = v_n$
- Suites de type $f(u_n) = u_{n+1}$

2BAC PC-SVT

Prof: Moussaoui Chafik

Les Suites Numériques

Définition d'une suite

On appelle suite numérique, toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

Notations et vocabulaire

Si E désigne l'ensemble de définition d'une suite numérique u, on a les notations suivantes.

— Notation fonctionnelle

$$u : E \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n).$$

— Notation indicielle

$$(u_n)_{n\in E}$$

ou, plus simplement, (u_n).

$u(n)$ ou u_n est appelé terme d'indice n ou terme général ; le $n^{\text{ième}}$ terme est appelé terme de rang n.

La suite arithmétique la suite géométrique

	une suite arithmétique	une suite géométrique
Définition	$(\forall n \geqslant n_0) : u_{n+1} = u_n + r$	$(\forall n \geqslant n_0) : u_{n+1} = qu_n$
Terme général	$(\forall n \geqslant n_0) : u_n = u_p + (n-p)r$	$(\forall n \geqslant n_0) : u_n = u_p \times q^{n-p}$
La somme de termes consécutifs $S_n = u_p + \ldots. + u_n$	$S_n = \left(\dfrac{n-p+1}{2}\right)(u_p + u_n)$	$S_n = \left(\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right) \times u_p; (q \neq 1)$
Trois termes consécutifs a et b et c	$a + c = 2b$	$ac = b^2$

La suite majorée, minorée et bornée

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que $(\forall n \geqslant n_0) : u_n \leqslant M$.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que $(\forall n \geqslant n_0) : u_n \geqslant m$.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est bornée s'il existe un réel positif C tel que $(\forall n \geqslant n_0) : |u_n| \leqslant C$. (ie. la suite est majorée et minorée à la fois)

⚠ Toute suite positive est minorée par 0. ⚠ Toute suite négative est majorée par 0.

La monotonie d'une suite

On dit qu'une suite est monotone s'elle est **croissante** ou **décroissante**.

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : u_{n+1} \geqslant u_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est strictement croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : u_{n+1} > u_n$ $(\forall n \geqslant n_0) : u_{n+1} - u_n > 0$.

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : u_{n+1} \leqslant u_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est strictement décroissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : u_{n+1} < u_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : u_{n+1} - u_n < 0$.

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est constante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : u_{n+1} = u_n$.

⚠ Une suite croissante est minorée par son premier terme.(ie. $(\forall n \geqslant n_0) : u_n \geqslant u_{n_0}$)

⚠ Une suite décroissante est majorée par son premier terme.(ie. $(\forall n \geqslant n_0) : u_n \leqslant u_{n_0}$)

La limite d'une suite

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente s'elle admet une limite finie l qd $n \longrightarrow +\infty$ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est divergente s'elle n'est pas convergente.

La limite d'une suite numérique,lorsqu'elle existe est **unique.**

Soit $r \in \mathbb{Q}^*$, on a : $$\lim_{n\to+\infty} n^r = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

Critères de convergence

Toute suite croissante et majorée est convergente.

Toute suite décroissante et minorée est convergente.

$$\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : |u_n - l| \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases} \Longrightarrow (u_n)_{n\geqslant n_0} \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

$$\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : w_n \leqslant u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \end{cases} \Longrightarrow (u_n)_{n\geqslant n_0} \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

$$\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \text{ et } (u_n)_{n\geqslant n_0} \text{ est divergente}$$

$$\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : w_n \leqslant u_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ et } (u_n)_{n\geqslant n_0} \text{ est divergente}$$

Suites de type $f(u_n) = v_n$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \\ (u_n)_{n\geqslant n_0} \text{ est convergente} \\ f \text{ est continue en } l \end{cases} \Longrightarrow (v_n) \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} v_n = f(l)$$

Suites de type $f(u_n) = u_{n+1}$

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur un intervale fermé } I \\ f(I) \subset I \\ u_{n_0} \in I \\ (u_n)_{n\geqslant n_0} \text{ est convergente} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \end{cases} \Longrightarrow l \text{ est une solution de l'équation } f(x) = x \text{ sur } I$$

Exercice 40 — BAC 2010 (N)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $u_n - 1 > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*
2. On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et en déduire que $v_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *1pt*
   - b) Montrer que $u_n = \dfrac{v_n - 1}{2v_n - 1}$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. *0.75pt*
   - c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ sachant que (w_n) est la suite numérique définie par : $w_n = \ln(u_n)$ pour tout n de$\mathbb{N}$. *0.5pt*

Exercice 41 — BAC 2010 (R)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{21 + u_n}$ pour tout n de$\mathbb{N}$

1. Montrer que $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.5pt*
2. Montrer que $u_{n+1} < \dfrac{1}{7}u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente. *0.5pt*
4.
   - a) Montrer par récurrence que $u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. *0.75pt*
   - b) Déterminer la limite de la suite (u_n). *0.5pt*

Exercice 42 — BAC 2011 (N)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n}{5 + 8u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*
2. On pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5 puis exprimer v_n en fonction de n. *1,5pt*
   - b) Montrer que $u_n = \dfrac{1}{3 \times 5^n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n). *1pt*

Exercice 43 — BAC 2011 (R)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{6u_n}{1 + 15u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1.
   - a) Vérifier que $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*
   - b) Montrer par récurrence que $u_n > \dfrac{1}{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*

2 On considère la suite numérique (v_n) définie par : *1,5pt*

$$v_n = 1 - \frac{1}{3u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ puis exprimer v_n en fonction de n

3 Montrer que $u_n = \dfrac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. *1pt*

Exercice 44 — BAC 2012 (N)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 11$ et $u_{n+1} = \dfrac{10}{11}u_n + \dfrac{12}{11}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 Vérifier que : $u_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}(u_n - 12)$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.25pt*

2 **a** Montrer par récurrence que $u_n < 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.5pt*

b Montrer que la suite (u_n) est croissante. *0.5pt*

c En déduire que la suite (u_n) est convergente. *0.25pt*

3 Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a En utilisant la question **1**. montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{10}{11}$ puis exprimer v_n en fonction de n. *0.75pt*

b Montrer que $u_n = 12 - \left(\dfrac{10}{11}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et calculer la limite de la suite (u_n). *0.75pt*

Exercice 45 — BAC 2012 (R)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} \text{ pour tout } n \text{ deN } \mathbb{N}.$$

1 Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.5pt*

2 On pose : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a Vérifier que $1 - v_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que $1 - v_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.5pt*

b Montrer queu $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.5pt*

3 **a** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{7}$ et exprimer v_n en fonction de n. *1pt*

b Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et en déduire la limite de la suite (u_n). *0.5pt*

Exercice 46 — BAC 2013 (N)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_1 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{25}{10 - u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

1 Vérifier que $5 - u_{n+1} = \dfrac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et montrer par récurrence que $5 - u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. *1pt*

2 On considère la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_n = \frac{5}{5-u_n} \text{ pour tout n de } \mathbb{N}^*.$$

a Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{10-u_n}{5-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et vérifier que *0,75pt*

$$v_{n+1} - v_n = 1 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

b Montrer que : $v_n = n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et en déduire que *1pt*

$$u_n = 5 - \frac{5}{n} \text{ pour tout n de } \mathbb{N}^*.$$

c Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. *0,25pt*

Exercice 47 — BAC 2013 — R

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1 Vérifier que : $u_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{5}(u_n - 1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*

2 **a** Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*

b Montrer que la suite (u_n) est décroissante. *0,5pt*

c En déduire que la suite (u_n) est convergente. *0,25pt*

3 Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n$-1pour tout n de $\mathbb{N}$.

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n. *0,5pt*

b En déduire que $u_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n). *0,75pt*

Exercice 48 — BAC 2014 — N

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 13 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7 \text{ pour tout n de } \mathbb{N}.$$

1 Montrer par récurrence que $u_n < 14$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*

2 Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = 14 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et exprimer v_n en fonction de n. *1pt*

b En déduire que $u_n = 14 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de$\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n). *0.75pt*

c Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n > 13,99$. *0.5pt*

Exercice 49 — BAC 2014 (R)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in N^*}$ définie par :

$$u_1 = 5 \text{ et } u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1+u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

1 Montrer par récurrence que $u_n > 2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. *0.75pt*

2 On considère la suite numérique $(v_n)_{n\in N^*}$ définie par :

$$v_n = \frac{3}{u_n - 2} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

- **a** Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{u_n-2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique de raison 1. *1pt*
- **b** Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que : $u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. *0.75pt*
- **c** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. *0.5pt*

Exercice 50 — BAC 2015 (N)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x telle que :

$$f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}.$$

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*

2 Montrer que la suite (u_n) est décroissante *0,5pt*

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. *0,75pt*

Exercice 51 — BAC 2015 (R)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 4 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1 Montrer par récurrence que $u_n < 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*

2 Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{5}(5-u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que la suite (u_n) est croissante. *0,75pt*

3 En déduire la suite (u_n) est convergente. *0,25pt*

4 Soit (v_n) la suite numérique telle que $v_n = 5 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- **a** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n. *0,75pt*
- **b** En déduire que $u_n = 5 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n). *0,75pt*

Exercice 52 — BAC 2016 (N)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n} \text{ pour tout } n \text{ de} \mathbb{N}.$$

1 Vérifier que : $u_{n+1}-3=\dfrac{4\left(u_n-3\right)}{2+\left(3-u_n\right)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis montrer par récurrence que $u_n<3$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*

2 Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n=\dfrac{u_n-1}{3-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et en déduire que $v_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*

b Montrer que $u_n=\dfrac{1+3v_n}{1+v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis exprimer u_n en fonction de n. *0.5pt*

c Déterminer la limite de la suite (u_n). *0.5pt*

Exercice 53 — BAC 2016 (R)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0=2 \text{ et } u_{n+1}=\frac{1}{16}u_n+\frac{15}{16} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1 a Montrer par récurrence que $u_n>1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.5pt*

b Vérifier que : $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{15}{16}\left(u_n-1\right)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis montrer que la suite (u_n) est décroissante. *0.5pt*

c En déduire que la suite (u_n) est convergente. *0.25pt*

2 Soit $(v_)$la suite numérique telle que $v_n=u_n-1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{16}$ et exprimer v_n en fonction de n. *1pt*

b Montrer que $u_n=1+\left(\dfrac{1}{16}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis déterminer la limite de la suite (u_n). *0.75pt*

Exercice 54 — BAC 2017 (N)

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x.$$

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=\sqrt{3}$ et $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ pour tout entier naturel n.

1 Montrer par récurrence que : $1\leq u_n\leq 2$ pour tout entier naturel n. *0,5pt*

2 Montrer que la suite (u_n) est décroissante *0,5pt*

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. *0,75pt*

Exercice 55 — BAC 2017 (R)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=17$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{4}u_n+12$ pour tout entier naturel n.

1 a Montrer par récurrence que : $u_n>16$ pour tout entier naturel n. *0,5pt*

b Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente. *0,5pt*

2 Soit (v_n) la suite numérique tel que : $v_n=u_n-16$ pour tout entier naturel n.

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique. *0,5pt*

(b) En déduire que $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout entier naturel n puis déterminer la limite de la suite (u_n). *0,5pt*

(c) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n < 16,001$. *0,5pt*

Exercice 56 — BAC 2018 (N)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - x)\,e^{-x} + x$.

Soit((u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. *0.5pt*
3. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite. *0.75pt*

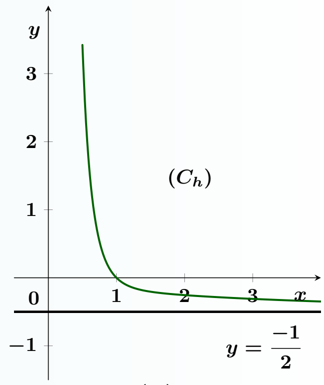
Exercice 57 — BAC 2018 (R)

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2.$$

On considère la fonction numérique h définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = f(x) - x$$



1. Vérifier que $h(1) = 0$. *0.25pt*
2. **Dans la figure ci-contre**, (C_h) est la représentation graphique de la fonction h.

Déterminer le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$ puis en déduire que : $f(x) \leq x$ pour tout x de l'intervalle $[1;+\infty[$. *0.75pt*

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. *0.75pt*
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. *0.75pt*

Exercice 58 — BAC 2019 (N)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. (a) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante. *0,5pt*
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente . *0,5pt*
2. Calculer la limite de la suite (u_n). *0,75pt*

Exercice 59 — BAC 2019 — R

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$. *0,5pt*
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente. *0,5pt*
3. Calculer la limite de la suite (u_n). *0,75pt*

Exercice 60 — BAC 2020 — N

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Calculer u_1 *0.25pt*
2. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}, u_n > 0$ *0.5pt*
3. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}, 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$
   puis en déduire que pour tout n de $\mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ *1pt*
   b. Calculer $\lim u_n$ *0.5pt*
4. On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \frac{4u_n}{2u_n+3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ *0.75pt*
   b. Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$. *1pt*

Exercice 61 — BAC 2020 — R

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n-8}{2u_n-5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}, u_n < 2$ *0.5pt*
2. On pose pour tout n de $\mathbb{N}, v_n = \frac{u_n-3}{u_n-2}$
   a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 *0.5pt*
   b. Écrire v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$. *0.75pt*
   c. Calculer la limite de la suite (u_n) *0.25pt*

Exercice 62 — BAC 2021 — N

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$ pour tout n de IN

1. Calculer u_1 *0.25pt*
2. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$ *0.5pt*
3. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ *0.5pt*
   b. En déduire la monotonie de la suite (u_n) *0.5pt*
4. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}, 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; puis calculer la limite de la suite (u_n) *0.75pt*
   b. On pose $v_n = \ln(3-2u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $\lim v_n$ *0.5pt*

5 **a** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\dfrac{1}{u_n} - 1\right)$ *0.5pt*

b En déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$ *0.5pt*

Exercice 63 — BAC 2021 — R

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{3-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}, 0 < u_n < 1$ *0.5pt*

2 **a** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)^2}{3 - u_n}$ *0.5pt*

b Montrer que la suite (u_n) est convergente. *0.5pt*

3 On pose $v_n = \dfrac{1}{1-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme. *0.75pt*

b Déterminer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = \dfrac{n+1}{n+3}$, pour tout n de $\mathbb{N}$ *0.75pt*

c Calculer la limite de la suite (u_n) *0.5pt*

4 A partir de quelle valeur de n, a-t-on $u_n \geq \dfrac{1011}{1012}$? *0.5pt*

Exercice 64 — BAC 2022 — N

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$
Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 Montrer par récurrence que $0 < u_n < \ln 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$ *0.5pt*

2 Montrer que la suite (u_n) est décroissante. *0.5pt*

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente. *0.25pt*

4 Calculer la limite de la suite (u_n). *0.5pt*

Exercice 65 — BAC 2022 — R

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}u_n + \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}; \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \end{cases}$

1 **a** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}, u_n > 1$ *0,5pt*

b Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\sqrt{2}-2}{2}(u_n - 1)$ et déduire que la suite (u_n) est décroissante et convergente *0,75pt*

2 On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme. *0,5pt*

b Écrire u_n en fonction de n puis déduire la limite de la suite (u_n). *0,5pt*

c Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{2021}$ *0,25pt*

Les Nombres Complexes

- Nombre complexe et Propriétés
- Formule de Moivre-Formule d'Euler
- Équations du second degré à coefficients réels
- Nombres Complexes et géométrie
- Écritures complexes des transformations du plan

2BAC PC-SVT

Prof: Moussaoui Chafik

NOMBRES COMPLEXES

Nombre complexe

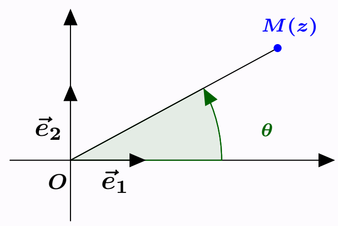
L'ensemble des nombres complexes est : $\mathbb{C} = \left\{ z = a + ib/(a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1 \right\}$

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

- **La forme algébrique** du nombre complexe z est : $a + ib$.
- **La partie réelle** du nombre complexe z est : $\mathrm{Re}(z) = a$.
- **La partie imaginaire** du nombre complexe z est : $\mathrm{Im}(z) = b$.
- Le nombre complexe z est **imaginaire pur** si $Re(z) = 0$.
- **Égalité** de deux nombres complexes : $z = z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$
- **Le conjugué** du nombre complexe z est : $\bar{z} = a - ib$
- **Le module** du nombre complexe z est : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **L'image** du nombre complexe $z = a + ib$ est le point $M(a, b)$, noté $M(z)$
- **L'affixe** du point $M(a, b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$, noté z_M
- **L'affixe du vecteur** $\vec{u}(a, b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$, noté $z_{\vec{u}}$
- **L'affixe du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- **L'argument** du nombre complexe non nul z est une mesure θ de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right)$ noté $\arg z$

$$\arg z \equiv \theta[2\pi]$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$



- **La forme trigonométrique** du nombre complexe non nul z est :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$$

avec $r = |z|$ et $\arg z \equiv \theta[2\pi]$ $[r, \theta]$ est une écriture réduite du nombre complexe $r(\cos\theta + i\sin\theta)$

- **La forme exponentielle** du nombre complexe non nul z est : $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\arg z \equiv \theta[2\pi]$

Propriétés :

	Conjugué	Module	Argument
Opposé	$\overline{-z} = -\bar{z}$	$\lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$	$\arg(-z) \equiv (\pi + \arg z)[2\pi]$
Conjugué	$\bar{\bar{z}} = z$	$\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$	$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z[2\pi]$
Produit	$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$	$\lvert z \times z'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$
Puissance	$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$\arg(z^n) \equiv n\arg z[2\pi]$
Inverse	$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$	$\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z[2\pi]$
Quotient	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$	$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\arg z - \arg z')[2\pi]$
Somme	$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$		

Propriétés :

	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
Opposé	$-[r,\theta]=[r,\pi+\theta]$	$-re^{i\theta}=re^{i(\pi+\theta)}$
Conjugué	$\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$	$\overline{re^{i\theta}}=re^{-i\theta}$
Produit	$[r,\theta]\times[r',\theta']=[rr';\theta+\theta']$	$\left(re^{i\theta}\right)^n=r^ne^{in\theta}$
Puissance	$[r,\theta]^n=[r^n;n\theta]$	$\dfrac{1}{re^{i\theta}}=\dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
Inverse	$\dfrac{1}{[r;\theta]}=\left[\dfrac{1}{r'};-\theta\right]$	$e^{i\theta'}=rr'e^{i(\theta+\theta')}$
Quotient	$\dfrac{[r;\theta]}{[r';\theta']}=\left[\dfrac{r}{r'};\theta-\theta'\right]$	$\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}=\dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

Propriétés :

- $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z-\bar{z}=2\,\mathrm{Im}(z)$
- $z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$
- $|z|=0\Leftrightarrow z=0$
- $\forall k\in\mathbb{Z}\quad [r,\theta+2k\pi]=[r,\theta]$
- z est réel $\Leftrightarrow \bar{z}=z$
- z est réel $\Leftrightarrow \arg z=k\pi/k\in\mathbb{Z}$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z}=-z$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$

Formule de Moivre

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

Formule d'Euler :

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\qquad \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$$

Équations du second degré à coefficients réels :

L'équation :	$\Delta=b^2-4ac$	Ensemble de solution :
$z\in\mathbb{C}$ $az^2+bz+c=0$	$\Delta>0$	$S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
	$\Delta=0$	$S=\left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$
	$\Delta<0$	$S=\left\{\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a};\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

Nombres Complexes et géométrie :

Notion complexe :	Notion géométrique :
$AB=\lvert z_B-z_A\rvert$	$AM=r$ (M appartient au cercle de centre A et de rayon r)
$\lvert z-z_A\rvert=\lvert z-z_B\rvert$	$AM=BM$ (M appartient à la médiatrice de $[AB]$)
$z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$	I milieu de $[AB]$
$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$	A,B et C trois points alignés
$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$	mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Nature d'un triangle :

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC est un triangle rectangle en **A**
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta]$	ABC est un triangle isocèle en **A**
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC est un triangle isocèle et rectangle en A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\frac{\pi}{3}\right]$	ABC est un triangle équilatéral

Écritures complexes des transformations du plan

Transformations :	Écriture complexe :
Translation de vecteur $\vec{u}$	$z' = z + z_{\vec{u}}$
Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

Méthodes

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2})$
Soit $M'(z')$ l'image d'un point $M(z)$ par une **transformation** F

$$\boxed{z' = az + b \quad \text{avec} \quad (a; b) \in \mathbb{C}^2 \ (a \neq 0)}$$

- Si $a = 1$ Nature du transformation F $\begin{cases} F \text{ est une } \textbf{translation} \\ \text{de vecteur } \vec{u} \quad \text{d'affixe} \quad z - \vec{u} = b \end{cases}$

- Si $a \neq 1$ $\begin{cases} a \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\} \quad \text{Nature du transformation } F \begin{cases} F \text{ est une } \textbf{homothétie} \text{ de rapport } a \\ \text{et de centre } \Omega \\ \text{d'affixe } \omega = \dfrac{b}{1-a} \\ (\omega \text{ vérifie la relation : } \omega = a\omega + b) \end{cases} \\ a \in \mathbb{C}\backslash\{1\} \\ \text{avec} |a| = 1 \quad \text{Nature du transformation } F \begin{cases} F \text{ est une } \textbf{rotation} \\ \text{d'angle : } \theta \equiv \arg a [2\pi] \\ \text{et de centre } \Omega \text{ d'affixe } \omega = \dfrac{b}{1-a} \\ (\omega \text{ vérifie la relation : } \omega = a\omega + b) \end{cases} \end{cases}$

Exercice 66 — BAC 2010 — N

1 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 10 = 0.$ *1pt*

2 On considère, dans le plan complexe rapporté á un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 3 - i, b = 3 + i, c = 7 - 3i$.
Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- **a** Montrer que : $z' = iz + 2 - 4i$. *0.5pt*
- **b** Vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $c' = 5 + 3i$. *0.25pt*
- **c** Montrer que : $\frac{c' - b}{c - b} = \frac{1}{2}i$ puis en déduire que le triangle BCC' est rectangle en B et que $BC = 2BC'$. *1.25pt*

Exercice 67 — BAC 2010 — R

1 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0.$ *1pt*

2 On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 8i, b = 4\sqrt{3} - 4i$ et $c = 2(4\sqrt{3} + 4i)$.
Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$.

- **a** Montrer que : $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$. *0.5pt*
- **b** Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R. *0.25pt*
- **c** Montrer que : $\frac{a - b}{c - b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ puis écrire le nombre $\frac{a - b}{c - b}$ sous forme trigonométrique. *0.75pt*
- **d** En déduire que le triangle ABC est équilatéral. *0.5pt*

Exercice 68 — BAC 2011 — N

1 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : *1pt*

$$z^2 - 18z + 82 = 0.$$

2 On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 9 + i, b = 9 - i \text{ et } c = 11 - i.$$

- **a** Montrer que $\frac{c - b}{a - b} = -i$ puis en déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle en B. *1pt*
- **b** Donner une forme trigonométrique du nombre complexe $4(1 - i)$. *0,5pt*
- **c** Montrer que : $(c - a)(c - b) = 4(1 - i) puis$ en déduire que : $AC \times BC = 4\sqrt{2}$. *1pt*
- **d** Soit z l'affixe d'un point M du plan et $z'l'$ affixe du point M' image de M par la rotation R de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{2}$.
  Montrer que : $z' = -iz + 10 + 8i$ puis vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $9 - 3i$. *1,5pt*

Exercice 69 — BAC 2011 (R)

1 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : *1pt*

$$z^2 - 6z + 18 = 0.$$

2 On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les deux points A et B d'affixes respectives : $a = 3 + 3i$ et $b = 3 - 3i$.

- **a** Écrire sous forme trigonométrique chacun des deux nombres complexes a et b. *0,5pt*
- **b** Montrer que b' l'affixe du point B' image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ est 6 . *0,75pt*
- **c** Montrer que : $\dfrac{b - b'}{a - b'} = i$ puis en déduire que le triangle $AB'B$ est rectangle isocèle en B'. *1pt*
- **d** Déduire de ce qui précède que le quadrilatère $OAB'B$ est un carré. *0,75pt*

Exercice 70 — BAC 2012 (N)

1 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 12z + 61 = 0.$ *0.75pt*

2 On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que :

$$a = 6 - 5i, b = 4 - 2i \text{ et } c = 2 + i.$$

- **a** Calculer $\dfrac{a - c}{b - c}$ et en déduire que les points A, B et C sont alignés. *0.5pt*
- **b** On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ tel que l'affixe de $\vec{u}$ est $1 + 5i$. Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est $d = 3 + 6i$. *0.5pt*
- **c** Montrer que : $\dfrac{d - c}{b - c} = -1 + i$ et que $\dfrac{3\pi}{4}$ est un argument du nombre complexe $-1 + i$. *0.75pt*
- **d** En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$. *0.5pt*

Exercice 71 — BAC 2012 (R)

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2 - i, b = 6 - 7i, c = 8 + 3i$.

1
- **a** Montrer que : $\dfrac{c - a}{b - a} = i$. *0.75pt*
- **b** En déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A. *0.75pt*

2 Soit z l'affixe d'un point M du plan et z ' l'affixe du point M ' image de M par la rotation R de centre Ω milieu du segment $[BC]$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

- **a** Vérifier que l'affixe du point Ω est $\omega = 7 - 2i$. *0.5pt*
- **b** Montrer que : $z' = -iz + 9 + 5i$. *0.75pt*
- **c** Montrer que le point C est l'image du point A par la rotation R. *0.25pt*

Exercice 72 — BAC 2013 (N)

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que :

$$a = 7 + 2i, b = 4 + 8i \text{ et } c = -2 + 5i.$$

1
- **a** Vérifier que : $(1 + i)(-3 + 6i) = -9 + 3i$ et montrer que : $\dfrac{c - a}{b - a} = 1 + i$. *0,75pt*
- **b** En déduire que : $AC = AB\sqrt{2}$ et donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. *1pt*

2 Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

ⓐ Montrer que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est : $d = 10 + 11i$. *0,75pt*

ⓑ Calculer $\dfrac{d-c}{b-c}$ et en déduire que les points B, C et D sont alignés. *0,5pt*

Exercice 73 — BAC 2013 — Ⓡ

1 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : *0,75pt*

$$z^2 - 8z + 25 = 0.$$

2 On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que :

$$a = 4 + 3i, b = 4 - 3i \text{ et } c = 10 + 3i$$

et la translation T de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

ⓐ Montrer que l'affixe du point D image du point A par la translation T est $d = 10 + 9i$. *0,75pt*

ⓑ Vérifier que $\dfrac{b-a}{d-a} = -\dfrac{1}{2}(1+i)$ puis écrire le nombre complexe $-\dfrac{1}{2}(1+i)$ sous une forme trigonométrique. *1pt*

ⓒ Montrer que : $\overline{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})} \equiv \dfrac{5\pi}{4}[2\pi]$ *0,5pt*

Exercice 74 — BAC 2014 — Ⓝ

1 Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - z\sqrt{2} + 2 = 0$ *0.75pt*

2 On considère le nombre complexe : $u = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$.

ⓐ Montrer que le module de u est $\sqrt{2}$ et que $\arg u \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. *0.5pt*

ⓑ En utilisant la forme trigonométrique du nombre u, montrer que u^6 est un nombre réel. *0.75pt*

3 On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$, les deux points A et B d'affixes respectives a et b tel que : $a = 4 - 4\sqrt{3}i$ et $b = 8$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

ⓐ Exprimer z' en fonction de z. *0.5pt*

ⓑ Vérifier que B est l'image de A par la rotation R et en déduire que le triangle OAB est équilatéral. *0.5pt*

Exercice 75 — BAC 2014 — Ⓡ

1 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$. *0.75pt*

2 On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$, les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives :

$$a = 2 + i, b = 2 - i, c = i, d = -i \text{ et } \omega = 1.$$

ⓐ Montrer que : $\dfrac{a-\omega}{b-\omega} = i$. *0.25pt*

ⓑ En déduire que le triangle ΩAB est rectangle et isocèle en Ω. *0.5pt*

3 Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

ⓐ Montrer que : $z' = iz + 1 - i$. *0.5pt*

ⓑ Vérifier que : $R(A) = C$ et $R(D) = B$. *0.5pt*

ⓒ Montrer que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle dont on déterminera le centre. *0.5pt*

Exercice 76 — BAC 2015 (N)

1 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : *0,75pt*

$$z^2 + 10z + 26 = 0.$$

2 On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les points A, B, C et Ω d'affixes respectives a, b, c et ω tels que :

$$a = -2 + 2i, b = -5 + i, c = -5 - i \text{ et } \omega = -3.$$

ⓐ Montrer que : $\dfrac{b - \omega}{a - \omega} = i$. *0,5pt*

ⓑ En déduire la nature du triangle ΩAB. *0,5pt*

3 Soit le point D image du point C par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $6 + 4i$

ⓐ Montrer que l'affixe d du point D est $1 + 3i$. *0,5pt*

ⓑ Montrer que : $\dfrac{b - d}{a - d} = 2$ et en déduire que le point A est le milieu du segment $[BD]$ *0,75pt*

Exercice 77 — BAC 2015 (R)

1 ⓐ Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8z + 32 = 0$. *0,75pt*

ⓑ On considère le nombre complexe a tel que : $a = 4 + 4i$.
Écrire le nombre complexe a sous sa forme trigonométrique puis en déduire que a^{12} est un nombre réel négatif. *0,75pt*

2 On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que :

$$a = 4 + 4i, b = 2 + 3i \text{ et } c = 3 + 4i$$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

ⓐ Montrer que : $z' = iz + 7 + i$. *0,5pt*

ⓑ Vérifier que d l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $3 + 5i$. *0,5pt*

ⓒ Montrer que l'ensemble des points Md' affixe z tel que : $|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$ est la droite (BC) *0,5pt*

Exercice 78 — BAC 2016 (N)

1 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbf{C}$ l'équation :

$$z^2 - 4z + 29 = 0.$$

0.75pt

2 On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les points Ω, A et B d'affixes respectives ω, $aetb$ tels que :

ⓐ Soit u le nombre complexe tel que : $u = b - \omega$.

Vérifier que $u = 3 + 3i$ puis montre que $argu = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

ⓑ Déterminer un argument du nombre complexe $\bar{u}$. *0.75pt*
($\bar{a}$ désigne le conjugué du nombre complexe u) *0.25pt*

(c) Vérifier que $a-\omega=\bar{u}$ puis en déduire que :
$\Omega A=\Omega B$ et $\arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. *0.75pt*

(d) On considère la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Déterminer l'image du point A par la rotation R. *0.5pt*

Exercice 79 — BAC 2016 (R)

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-8z+41=0$. *0.75pt*
2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B, C et Ω d'affixes respectives a, b, c et ω tels que :
$a=4+5i, b=3+4i, c=6+7i$ et $\omega=4+7i$.

(a) Calculer $\dfrac{c-b}{a-b}$ et en déduire que les points A, B et $\mathbb{C}$sont alignés. *0.75pt*

(b) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
Montrer que : $z'=-iz-3+11i$. *0.75pt*

(c) Déterminer l'image du point C par la rotation R
puis donner une forme trigonométrique du nombre $\dfrac{a-\omega}{c-\omega}$. *0.75pt*

Exercice 80 — BAC 2017 (N)

On considère les nombres complexes a et b tels que :

$$a=\sqrt{3}+i \text{ et } b=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i.$$

1. (a) Vérifier que $b=(1+i)a$. *0,25pt*

(b) En déduire que $|b|=2\sqrt{2}$ et que $\arg b\equiv\dfrac{5\pi}{12}[2\pi]$. *0,5pt*

(c) Déduire de ce qui précède que $\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. *0,5pt*

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives a et b et le point C d'affixe c telle que : $c=-1+i\sqrt{3}$.

(a)

(b) Vérifier que $c=$ ia et en déduire que $OA=OC$ et que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. *0,75pt*

(c) Montrer que le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$. *0,5pt*

(d) En déduire que le quadrilatère $OABC$ est un carré. *0,5pt*

Exercice 81 — BAC 2017 (R)

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+4z+8=0$ *0,75pt*
2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que : $a=-2+2i, b=4-4i$ et $c=4+8i$.

(a) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z ' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que : $z'=-iz-4$. *0,5pt*

(b) Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC.

0,75pt

3 Soit ω l'affixe du point Ω milieu du segment $[BC]$.

- **a** Montrer que $|c-\omega| = 6$. 0,5pt
- **b** Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z-\omega| = 6$ est le cercle circonscrit au triangle ABC. 0,5pt

Exercice 82 — BAC 2018 — N

1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes l'équation : $2z^2+2z+5=0$. 0.75pt

2 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

- **a** Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $d = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 0.25pt
- **b** On considère le point A d'affixe $a = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ et le point B image du point A par la rotation R.
  Soit b l'affixe du point B.
  Montrer que $b = d\cdot a$. 0.5pt

3 Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et C l'image de B par la translation t et c l'affixe de C.

- **a** Vérifier que $c = b+a$ et en déduire que $c = a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.
  (on pourra utiliser la question **2.b**)) 0.75pt
- **b** Déterminer $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ puis en déduire que le triangle OAC est équilatéral. 0.75pt

Exercice 83 — BAC 2018 — R

1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2-2\sqrt{2}z+4=0.$$

0.75pt

2 Dans le plan complexe rapporte à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a=\sqrt{2}(1-i)$ et la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- **a** Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe a. 0.25pt
- **b** Vérifier que l'affixe du point B image du point A par la rotation R est :
  $b = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$. 0.5pt

3
- **a** On considère le point C d'affixe $c = 1+i$.
  Montrer que $b^2-c^2 = 2\sqrt{3}$. 0.5pt
- **b** Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ et D l'image de B par la translation t.
  Montrer que $OD = |b+c|$.
- **c** En déduire que $OD\times BC = 2\sqrt{3}$. 0.5pt

Exercice 84 — BAC 2019 — N

1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-2z+4=0$. 0,75pt

2 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, Cet

D d'affixes respectives :

$$a=1-i\sqrt{3}, b=2+2i, c=\sqrt{3}+i \text{ et } d=-2+2\sqrt{3}i.$$

a Vérifier que : $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$. *0,5pt*

b En déduire que les points A, C et D sont alignés. rotation R de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{3}$. *0,25pt*

3 On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{3}$. *0,5pt*

Vérifier que : $z'=\frac{1}{2}az$

4 Soient H l'image du point B par la rotation R, h son affixe et P le point d'affixe p tel que $p=a-c$.

a Vérifier que : $h=ip$. *0,5pt*

b Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O. *0,5pt*

Exercice 85 — BAC 2019 — R

1 a Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : *0,75pt*

$$z^2-3z+3=0.$$

b On pose : $a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; écrire a sous forme trigonométrique. *0,5pt*

2 On considère le nombre complexe $b=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; vérifier que : $b^2=i$. *0,5pt*

3 On pose : $h=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$; montrer que : $h^4+1=a$. *0,5pt*

4 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a Soit c l'affixe du point C image du point B par la rotation R. *0,5pt*
Montrer que : $c=ib$.

b En déduire la nature du triangle OBC. *0,25pt*

Exercice 86 — BAC 2020 — N

1 Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation : $(E): z^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z+16=0$

a Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta=-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$ *0.5pt*

b En déduire les solutions de l'équation (E). *1pt*

2 Soient les nombres complexes $a=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2}), b=1+i\sqrt{3}$ et $c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

a Vérifier que $b\bar{c}=a$, puis en déduire que $ac=4b$ *0.75pt*

b Écrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique. *0.5pt*

c En déduire que $a=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ *0.5pt*

3 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et d telle que $d=a^4$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$

a Vérifier que $z'=\frac{1}{4}az$ *0.5pt*

b. Déterminer l'image du point C par la rotation R — 0.25pt

c. Déterminer la nature du triangle OBC. — 0.25pt

d. Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés — 0.75pt

Exercice 87 — BAC 2020 — Ⓡ

1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$ — 0.75pt

2 On pose $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

a. Écrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2020} est un nombre réel — 0.75pt

b. Soit le nombre complexe $b = \cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}$. Prouver que $b^2 = a$ — 0.5pt

3 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que $c = 1$. La rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{8}$ transforme le point M d'affixe z au point M' d'affixe z'.

a. Vérifier que $z' = bz$ — 0.25pt

b. Déterminer l'image de C par la rotation R et montrer que A est l'image de B par R. — 0.5pt

4 a. Montrer que $|a - b| = |b - c|$ et en déduire la nature du triangle ABC — 0.75pt

b. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ — 0.5pt

5 Soit T la translation de vecteur $\vec{u}$ et D l'image de A par T

a. Vérifier que l'affixe de D est $b^2 + 1$ — 0.25pt

b. Montrer que $\dfrac{b^2+1}{b} = b + \bar{b}$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés — 0.75pt

Exercice 88 — BAC 2021 — Ⓝ

1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes , les équations : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ — 0.75pt

2 Soient les nombres complexes $a = e^{\frac{i\pi}{6}}$ et $b = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

a. Écrire a sous forme algébrique. — 0.25pt

b. Vérifier que $\bar{a}b = \sqrt{3}$ — 0.5pt

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $\bar{a}$.

3 Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport. — 0.5pt

4 Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

a. Écrire z' en fonction de z et a. — 0.5pt

b. Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R, montrer que $d = a + 1$ — 0.25pt

c. Soit I le point d'affixe le nombre 1 , montrer que $ADIO$ est un losange. — 0.5pt

5 a. Vérifier que $d - b = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(1 - i)$; en déduire un argument du nombre $d - b$ — 0.75pt

b. Écrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique. — 0.5pt

c. Déduire une mesure de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD})}$ — 0.5pt

Exercice 89 — BAC 2021 (R)

1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 6z + 13 = 0$ — 0.75pt

2 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que : $a = 3 + 2i; b = 3 - 2i$ et $c = -1 - 2i$

- **a** Écrire $\dfrac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique. — 0.5pt
- **b** En déduire la nature du triangle ABC — 0.5pt

3 Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par R, et soit D le point d'affixe $d = -3 - 4i$

- **a** Écrire z' en fonction de z — 0.5pt
- **b** Vérifier que C est l'image de A par R — 0.25pt

4
- **a** Montrer que les points A, C et D sont alignés. — 0.5pt
- **b** Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre C et qui transforme A en D — 0.5pt
- **c** Déterminer l'affixe m du point E pour que le quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme — 0.5pt

5
- **a** Montrer que $\dfrac{d-a}{m-b}$ est un nombre réel. — 0.5pt
- **b** En déduire que le quadrilatère $ABED$ est un trapèze isocèle. — 0.5pt

Exercice 90 — BAC 2022 (N)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a = -1 - i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$

1 Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d = -2$ — 0.5pt

2 On considère la rotation R de centre D et d'angle $\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = -4$ — 0.5pt

3
- **a** Écrire le nombre $\dfrac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique — 0.5pt
- **b** En déduire que $\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)^2 = \dfrac{c-d}{b-d}$ — 0.5pt

4 Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2, (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant aux deux cercles (Γ) et (Γ')

- **a** Vérifier que $|z + 2| = 2$ — 0.25pt
- **b** Prouver que $z + \bar{z} = -8$ (remarquer que $|z| = 4$) — 0.5pt
- **c** En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera — 0.25pt

Exercice 91 — BAC 2022 (R)

Dans le plan complexe rapporté à in repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{t})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1 + 5i$, $Z_B = 1 - 5i$ ct $Z_C = 5 - 3i$

1 Déterminer le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$ — 0,25pt

2 Soit h homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{2}$. Déterminer le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de B par h — 0,5pt

3 On considère la rotation R de centre C et d'angle $\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)$, déterminer l'image de B par R — 0,5pt

4 Soit F le point d'affixe $Z_F = -1 + i$

- **a** Vérifier que $\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$. — 0,25pt

(b) En déduire que $\overline{(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})} + \overline{(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})} = \pi[2\pi]$ *0,5pt*

(c) Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\dfrac{Z_F - Z_F}{Z_A - Z_F}$ et déduire la nature du triangle AEF *0,5pt*

(d) Déduire que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre. *0,5pt*

La Géométrie dans Espace

- Produit scalaire-Produit vectoriel
- Aire-Distances :
- Équation cartésienne(Plan-Sphère)
- Ensemble des points M : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$
- Intersection d'une sphère et (Plan-Droite) :

2BAC PC-SVT

Prof: Moussaoui Chafik

Géométrie dans l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Expressions Analytiques :

Soient $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}\,(a',b',c')$ deux vecteurs

- **Produit scalaire** : $\vec{u}\cdot\vec{v} = aa' + bb' + cc'$
- **Norme** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
- **Produit vectoriel** : $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$

Aire d'un triangle :

L'aire d'un triangle ABC est : $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

Distances :

- **La distance entre deux points** A et B est : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- **La distance du point** M au plan (P) d'équation $ax+by+cz+d=0$ est :

$$d(M;(P)) = \frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- **La distance** du point M à la droite $\Delta(A,\vec{u})$ est : $d(M,(\Delta)) = \dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Équation cartésienne

Équation cartésienne d'un plan :

$\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal au plan (P) $\Leftrightarrow$ (P) : $ax+by+cz+d=0$

Si $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ alors les points A, B et C ne sont pas alignés

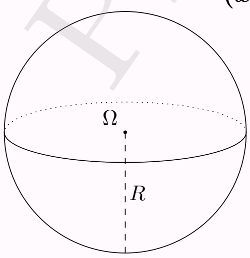
Dans ce cas : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) et l'équation cartésienne du plan (ABC) peut être déterminé à l'aide de l'équivalence suivante :

$$M\in(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}) = 0$$

Équation cartésienne d'une sphère : :

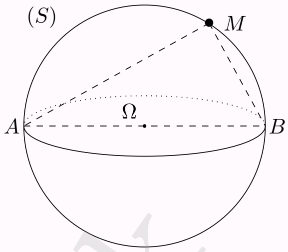
L'équation cartésienne d'une sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$$



Ensemble des points M de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

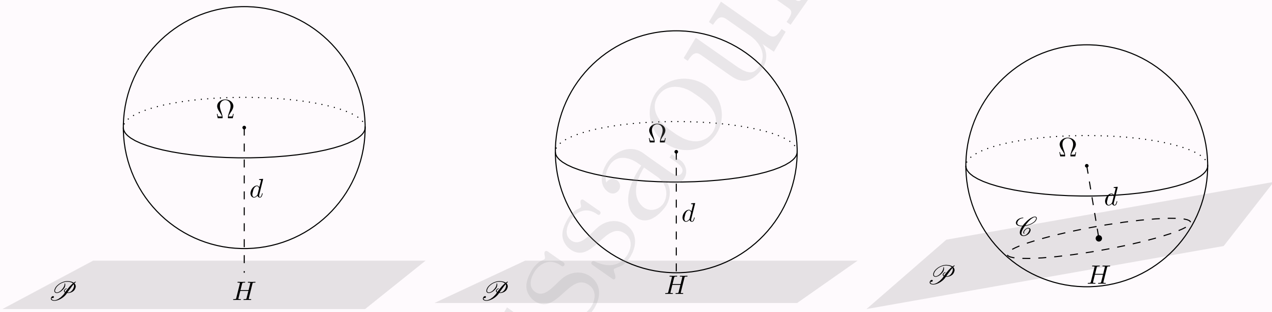
L'ensemble des points de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=\mathbf{0}$ est la sphère de diamètre $[AB]$



Intersection d'une sphère et d'un plan :

Soit $\mathcal{S}(\Omega,R)$ une sphère et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace $\mathscr{E}$. On désigne par d la distance du point Ω au plan $\mathscr{P}$ et H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathscr{P}$. On a les propriétés suivantes :

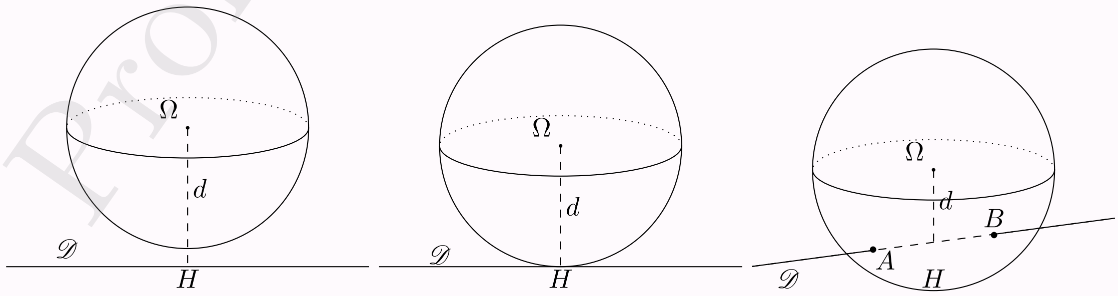
- Si $d>R$ alors $\mathscr{P}\cap\mathcal{S}=\varnothing$. On dit que le plan $\mathscr{P}$ est à l'extérieur de la sphère $\mathcal{S}$
- Si $d=R$ alors $\mathscr{P}\cap\mathcal{S}=\{H\}$. On dit que $\mathcal{P}$ est tangent à la sphère $\mathcal{S}$ au point H.
- Si $d<R$ alors $\mathscr{P}\cap\mathcal{S}=\mathscr{C}$ où $\mathscr{C}$ est le cercle de centre H et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$. On dit que le plan $\mathscr{P}$ coupe la sphère $\mathcal{S}$ selon le cercle $\mathscr{C}\left(H;\sqrt{R^2-d^2}\right)$.



L'intersection d'une sphère et une droite

Soient $(\mathscr{D})$ une droite de l'espace et $S(\Omega,R)$ une sphère de centre Ω et de rayon R, H le projeté orthogonal du point Ω sur la droite $(\mathscr{D})$.Notons $d=\Omega H$:

- Si $d>R$ alors $\mathscr{D}\cap S=\varnothing$. On dit que la droite $\mathscr{D}$ est à l'extérieur de la sphère S.
- Si $d=R$ alors $\mathscr{D}\cap S=\{H\}$. On dit que $\mathscr{D}$ est tangente à la sphère S au point H.
- Si $d<R$ alors $\mathscr{D}\cap S=\{A;B\}$. On dit que $\mathscr{D}$ est perce la sphère S aux points A et B.



le plan tangent a une sphère en un point :

Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre Ω et soit $A\in\mathcal{S}$.
Il existe un seul plan $\mathscr{P}$ tangent à la sphère $\mathcal{S}$ en A ; il est défini par : $M\in\mathscr{P}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=\mathbf{0}$. Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donnée par :

$$M(x;y;z)\in\mathscr{P}\Leftrightarrow(x_\Omega-x_A)(x-x_A)+(y_\Omega-y_A)(y-y_A)+(z_\Omega-z_A)(z-z_A)=0$$

Exercice 92 — BAC 2010 — N

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points $A(-1,0,3), B(3,0,0)$ et $C(7,1,-3)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0.$$

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$ et en déduire que $3x+4z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). *1pt*
2. Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(3,1,0)$ et son rayon est 5. *0.5pt*
3. Soit $(\triangle)$ la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).
   - a) Démontrer que $\begin{cases} x=3+3t \\ y=1 \\ z=4t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite la droite (Δ). *0.5pt*
   - b) Démontrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux deux points $E(6,1,4)$, et $F(0,1,-4)$. *1pt*

Exercice 93 — BAC 2010 — R

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points $A(0,-2,0), B(1,1,-4)$ et $C(0,1,-4)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0.$$

1. Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,2,3)$ et son rayon est 5 . *0.5pt*
2.
   - a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$ et en déduire que $4y+3z+8=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). *1pt*
   - b) Calculer $d(\Omega,(ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S). *0.5pt*
3. Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).
   - a) Démontrer que $\begin{cases} x=1 \\ y=2+4t \\ z=3+3t \end{cases}$ droite $(\Delta).\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ). *0.5pt*
   - b) Démontrer que le triplet de coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC) est $(1,-2,0)$. *0.25pt*
   - c) Vérifier que H est le point de contact du plan (ABC) et la sphère (S). *0.25pt*

Exercice 94 — BAC 2012 — N

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points $A(1,1,-1), B(0,1,-2)$ et $C(3,2,1)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0.$$

1. Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,0,1)$ et son rayon est $\sqrt{3}$. *0.5pt*
2.
   - a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$ et vérifier que $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). *0.75pt*
   - b) Vérifier que $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}$ puis en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon 1. *1pt*

3 Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a Démontrer que $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ). *0.25pt*

b Démontrer que le triplet de coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC) est $(2, 0, 0)$. *0.25pt*

c En déduire le centre du cercle (Γ). *0.25pt*

Exercice 95 — BAC 2012 (R)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(-3, 0, 0)$, $B(0, 0, -3)$ et $C(0, 2, -2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1, 1, 1)$ et de rayon 3.

1 **a** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ puis en déduire que $2x - y + 2z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). *1.25pt*

b Calculer $d(\Omega, (ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S). *0.75pt*

2 Soit (D) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a Démontrer que $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ droite $(D)\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (D). *0.5pt*

b Démontrer que le triplet de coordonnées de H point de contact du plan (ABC) et la sphère (S) est $(-1, 2, -1)$. *0.5pt*

Exercice 96 — BAC 2013 (N)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$ et $\Omega(1, 1, -1)$ et la sphère (S) de centre Ω et de rayon 3.

1 **a** Montrer que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ et vérifier que $x + y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB). *1pt*

b Vérifier que $d(\Omega, (OAB)) = \sqrt{3}$ puis montrer que le plan (OAB) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{6}$. *1pt*

2 Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (OAB).

a Démontrer que $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ). *0,5pt*

b Déterminer le triplet de coordonnées du centre du cercle (Γ). *0,5pt*

Exercice 97 — BAC 2013 (R)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$ et $C(2, 1, 2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1, -1, 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

1 Montrer que $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ est une équation cartésienne de la sphère et vérifier que le point A appartient à la sphère (S). *0,75pt*

2 a Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ et en déduire que $x-y-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). *0,75pt*

b Calculer $d(\Omega,(ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en A. *0,75pt*

3 Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a Démontrer que $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ). *0,25pt*

b En déduire les coordonnées des deux points d'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S). *0,5pt*

Exercice 98 — BAC 2014 — N

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,les points $A(0,3,1)$, $B(-1,3,0)$ et $C(0,5,0)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-4x-5=0.$$

1 a Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ et en déduire que les points A,B et C ne sont pas alignés. *0.75pt*

b Montrer que $2x-y-2z+5=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) et le sphère (S). *0.5pt*

2 a Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(2,0,0)$ et son rayon est 3. *0.5pt*

b Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S). *0.75pt*

c Déterminer le triplet de coordonnées de H point de contact du plan (ABC) et la sphère (S). *0.5pt*

Exercice 99 — BAC 2014 — R

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le point $A(0,0,1)$; le plan (P) d'équation $2x+y-2z-7=0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(0,3,-2)$ et de rayon 3 .

1 a Montrer que $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et perpendiculaire au plan (P). *0.75pt*

b Vérifier que $H(2,1,-1)$ est le point d'intersection du plan (P) et la droite (Δ). *0.5pt*

2 a Montrer que $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=3(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})$ où $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$. *0.75pt*

b Montrer que la distance du point Ω à la droite (Δ) est égale à 3. *0.5pt*

c En déduire que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) et vérifier que H est le point de contact de la droite (Δ) et la sphère (S). *0.75pt*

Exercice 100 — BAC 2015 — N

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le plan (P) d'équation

$$x+y+z+4=0$$

et la sphère (S) de centre $\Omega(1,-1,-1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

1 a) Calculer la distance $d(\Omega,(P))$ et en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S). *0,75pt*

b) Vérifier que le point $H(0,-2,-2)$ est le point de contact du plan (P) et la sphère (S). *0,5pt*

2 On considère les deux points $A(2,1,1)$ et $B(1,0,1)$.

a) Vérifier que $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ et en déduire que $x-y-z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB). *0,75pt*

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (OAB). *0,5pt*

c) Déterminer les coordonnées de chacun des deux points d'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S). *0,5pt*

Exercice 101 — BAC 2015 (R)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le plan (P) d'équation $2x-z-2=0$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0.$$

1 Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(-1,0,1)$ et son rayon est 3. *1pt*

2 a) Calculer la distance du point Ω au plan (P). *0,5pt*

b) En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ). *0,5pt*

3 Montrer que le rayon du cercle (Γ) est 2 et déterminer les coordonnées ***du*** point H centre du cercle (Γ). *1pt*

Exercice 102 — BAC 2016 (N)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points $A(2,1,3)$, $B(3,1,1)$ et $C(2,2,1)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0.$$

1 a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$. *0.5pt*

b) En déduire que $2x+2y+z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). *0.5pt*

2 a) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,-1,0)$ et son rayon est 6. *0.5pt*

b) Montrer que $d(\Omega,(ABC))=3$ et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ). *0.5pt*

3 a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC). *0.5pt*

b) Montrer que le centre du cercle (Γ) est le point B. *0.5pt*

Exercice 103 — BAC 2016 (R)

On considère, dans l'espace rapporte a un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. les deux points $A(1,3,4)$ at $B(0,1,2)$

1 a) Montrer que $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$. *0.5pt*

b) Montrer que $2x+2y+z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB). *0.5pt*

2 Soit (S) la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$.
Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(3,-3,3)$ et son rayon est 5. *0.5pt*

3 **a** Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S). *0.75pt*

b Déterminer les coordonnées de H point de contact du plan (OAB) et la sphère (S). *0.75pt*

Exercice 104 — BAC 2017 (N)

Dans l'espace rapporté á un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère le plan (P) passant par le point $A(0,1,1)$ et dont $\vec{u}(1,0,-1)$ est un vecteur normal et la sphère (S) de centre le point $\Omega(0,1,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

1 **a** Montrer que $x - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P). *0,5pt*

b Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que $B(-1,1,0)$ est le point de contact. *0,75pt*

2 **a** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P). *0,25pt*

b Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) au point $C(1,1,0)$. *0,75pt*

3 Montrer que $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OCB. *0,75pt*

Exercice 105 — BAC 2017 (R)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère la sphère (S) d'équation :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ et le plan (P) d'équation : $y - z = 0$.

1 **a** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,1,1)$ et son rayon est 2. *0,5pt*

b Calculer $d(\Omega,(P))$ et en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C). *0,5pt*

c Déterminer le centre et le rayon du cercle (C). *0,5pt*

2 Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1,-2,2)$ et orthogonale au plan (P).

a Montrer que $\vec{u}(0,1,-1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ). *0,25pt*

b Montrer que $\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2}\|\vec{u}\|$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points. *0,75pt*

c Déterminer les coordonnées de chacun des deux points de contact de la droite (Δ) et la sphère (S) *0,5pt*

Exercice 106 — BAC 2018 (N)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(0;-2;-2), B(1;-2;-4)$ et $C(-3;-1;2)$.

1 Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et en déduire que $2x + 2y + z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). *1pt*

2 On considère la sphère (S) dont une équation est :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$.
Vérifier que la sphère (S) a pour centre $\Omega(1;0;1)$ et pour rayon $R = 5$. *0.5pt*

3 **a** Vérifier que $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC). *0.25pt*

b Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC). *0.5pt*

4 Vérifier que $d(\Omega;(ABC)) = 3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S)

selon un cercle de rayon $\mathbf{4}$, dont on déterminera le centre. 0.75pt

Exercice 107 — BAC 2018 (R)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère la sphère (S) de centre $\Omega(2;1;2)$ et de rayon égale à 3 et le plan (P) passant par le point $A(-1;0;3)$ et $\vec{u}(4;0;-3)$ est un vecteur normal à (P).

1 Montrer que $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S). 0.5pt

2 Vérifier que $4x-3z+13=0$ est une équation cartésienne du plan (P). 0.5pt

3 a Vérifier que $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1 \\ z=2-3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthonormé à (P). 0.5pt

b Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (P). 0.5pt

4 a Calculer $d(\Omega;(P))$. 0.25pt

b Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera. 0.75pt

Exercice 108 — BAC 2019 (N)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(1;-1;-1)$, $B(0;-2;1)$ et $C(1;-2;0)$.

1 a Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. 0,75pt

b En déduire que $x+y+z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) 0,5pt

2 Soit (S) la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$. Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(2;-1;1)$ et que son rayon est $R=\sqrt{5}$ 0,75pt

3 a Calculer $d(\Omega;(ABC))$ la distance du point Ω au plan (ABC). 0,5pt

b En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ). 0,5pt
(la détermination du centre et du rayon de (Γ) n'est pas demandée)

Exercice 109 — BAC 2019 (R)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(1;2;2)$, $B(3;-1;6)$ et $C(1;1;3)$.

1 a Vérifier que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$. 0,75pt

b En déduire que $x-2y-2z+7=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) 0,5pt

2 Soient les points $E(5;1;4)$ et $F(-1;1;12)$ et (S) l'ensemble des points M vérifiant : $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=0$. Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(2;1;8)$ et de rayon $R=5$. 0,75pt

3 a Calculer $d(\Omega;(ABC))$ distance du point Ω au plan (ABC). 0,5pt

b En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r=4$. 0,5pt

Exercice 110 — BAC 2022 N

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(0,1,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$

1 a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i}+\vec{k}$ — *0.5pt*

b) En déduire que $x+z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) — *0.25pt*

2 Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,1,2)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$
Déterminer une équation de la sphère (S) — *0.5pt*

3 Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A — *0.5pt*

4 On considère la droite $(\triangle)$ passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) — *0.25pt*

b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées — *0.5pt*

c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot(\vec{i}+\vec{k})$, puis en déduire la distance $d(A,(\Delta))$ — *0.5pt*

Exercice 111 — BAC 2022 R

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux points $A(1,-1,1)$ et $B(5,1,-3)$. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(3,0,-1)$ et de rayon $R=3$, et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$.

1 a) Calculer la distance (ΩA) — *0,25pt*

b) Montrer que les droites (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires. — *0,5pt*

c) Déduire la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S) — *0,25pt*

2 Soit le point $M_a(2a-3,3-2a,a-1)$ où $a\in\mathbb{R}$, montrer que $\overrightarrow{AM}_a=(a-2)\vec{i}$ et déduire que $M_a\in(\Delta)$ pour tout $a\in\mathbb{R}$ — *0,5pt*

3 a) Vérifier que $2x-2y+z-9a+13=0$ est une équation du plan (P_a) passant par M_a et perpendiculaire à la droite (Δ) — *0,5pt*

b) Montrer que $d(\Omega,(P_a))=|3a-6|$ — *0,5pt*

c) Déterminer les deux valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à la sphère (S). — *0,5pt*

Calcul des Probabilités

- Dénombrement
- Probabilités d'un ensemble fini
- Loi d'une variable de probabilité aléatoire
- Probabilité conditionnelle-Événements indépendants
- L'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire
- Loi binomiale

2BAC PC-SVT

Prof: Moussaoui Chafik

Dénombrement et probabilités

Dénombrement :

Cardinal d'un ensemble :

Soit E un ensemble fini Le cardinal de E est le nombre d'éléments de E, on le note **Card** E

Soit A et B deux parties d'un ensemble fini

$$\boxed{\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B - \text{Card}(A \cap B)}$$

Principe fondamental du dénombrement :

Soit une expérience peut être réalisée en p choix ($p \in \mathbb{N}^*$)
Si le premier choix peut être réalisé en n_1 façons différentes
et le second choix peut être réalisé en n_2 façons différentes

.

.

et le p-ème choix peut être réalisé en n_p façons différentes
alors le nombre façons différentes de réaliser cette expérience est le produit :

$$\boxed{n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_p}$$

Les nombres : $n!$, A_n^p et C_n^p

$n \in \mathbb{N}^*$ $\quad n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ $\quad 0! = 1$	
$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$	$C_n^p = C_n^{n-p}$
$C_n^n = 1 \quad C_n^0 = 1$	$C_n^{n-1} = n \quad C_n^1 = n$

Types de tirages : On tire p objets parmi n objets

Type de tirage :	Nombre de tirages possible est :	L'ordre :
simultané	$C_n^p \quad (p \leq n)$	n'a pas d'importance
Successif avec remise	n^p	est important
Successif sans remise	$A_n^p \quad (p \leq n)$	est important

Le nombre de possibilités d'arrangement de n éléments. Si on a n éléments dont :

n_1 élément de type A
n_2 élément de type B
n_3 élément de type C

Alors le nombre de possibilités d'arrangement de ces n éléments est : $\dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$

Probabilités

Probabilités d'un ensemble fini :
La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaire qui le composent, on la note $p(A)$

Propriétés : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire

Probabilités :	L'événement :
A	$p \leq p(A) \leq 1$
$\bar{A}$	$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
$A \cup B$	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ Si (Aet B sont **incompatibles**) Alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

S'il y a équiprobabilité alors pour tout événement A de Ω, on a :

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}}$$

Loi d'une variable de probabilité aléatoire :

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire Pour définir la loi de probabilité de la variable X sur Ω on suit les étapes suivantes :

1. On détermine $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X
2. On calcule pour chaque valeur x_i sa probabilité $p_i = p\left(X = x_i\right)$ avec $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$
3. On résume la loi de probabilité de la variable X par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$p\left(X = x_i\right)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

Probabilité conditionnelle :

Soit A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire tel que : $p(A) \neq 0$ La probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé est le nombre :

$$p_A(B) = p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Événements indépendants :

Soit A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire

$$A \text{ et } B \textbf{ sont indépendants } \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

L'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire :

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

L'espérance mathématique de la variable X	$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + \ldots + x_n \times p_n$
La variance de la variable X	$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
L'écart-type de la variable X	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Épreuve répétée :

Soit p la probabilité d'un événement A, lors d'une expérience aléatoire
Si on répète n fois l'épreuve dans des conditions identiques alors la probabilité de réalisation de A exactement k fois durant les n épreuves est :

$$C_n^k (p)^k (1-p)^{n-k} \quad (k \leq n)$$

Loi binomiale :

Soit p la probabilité d'un événement A, lors d'une expérience aléatoire on répète n fois l'épreuve dans des conditions identiques si la variable aléatoire X, égale au nombre de réalisation de A durant les n épreuves alors la loi de probabilité de la variable X est donnée par :

$$\forall k \in \{0; 1; 2; \ldots; n\} \quad p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

On dit que la variable X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p et on a

$$E(X) = n \times p \quad \text{et } V(X) = np(1-p)$$

Exercice 112 — BAC 2010 (N)

Une urne contient cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules noires (les boules sont indiscernables au toucher).
On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

1 On considère les deux événements :
A : " tirer une seule boule rouge" et B : tirer une boule blanche au moins".
Montrer que $p(A) = \frac{1}{2}$ et que $p(B) = \frac{41}{42}$. *1pt*

2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges tirées.

- **a** Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : $0, 1, 2$ et 3. *0.25pt*
- **b** Montrer que $p(X = 2) = \frac{3}{10}$ et $p(X = 0) = \frac{1}{6}$. *1pt*
- **c** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. *0.75pt*

Exercice 113 — BAC 2010 (R)

Une urne contient huit boules portant les nombres : $1, 1, 1, 2, 2, 3$.
(les boules sont indiscernables au toucher).
On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

1 Soit A l'événement :" tirer deux boules portant le nombre 2 " et B l'événement :" tirer deux boules dont une au moins porte le nombre 1".
Montrer que $p(A) = \frac{3}{28}$ et que $p(B) = \frac{13}{28}$. *1.25pt*

2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules portant un nombre impair.

- **a** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X. *0.25pt*
- **b** Montrer que $p(X = 1) = \frac{15}{28}$. *0.75pt*
- **c** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. *0.75pt*

Exercice 114 — BAC 2012 (N)

Une urne contient huit jetons indiscernables au toucher : un jeton portant le nombre 0, cinq jetons portant chacun le nombre 1 et deux jetons portant chacun le nombre 2. On tire au hasard, simultanément, trois jetons de l'urne.

1 Soit A l'événement : "Les trois jetons tirés, portent des nombres différents deux à deux"
Montrer que $p(A) = \frac{5}{28}$. *1pt*

2 Soit B l'événement : "La somme des nombres portés par les trois jetons tirés est égale à 5"
Montrer que $p(B) = \frac{5}{56}$. *1pt*

3 Soit C l'événement : " La somme des nombres portés par les trois jetons tirés est égale à 4"
Montrer que $p(C) = \frac{3}{8}$. *1pt*

Exercice 115 — BAC 2012 (R)

Une urne contient cinq boules rouges, quatre boules blanches et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

1 Montrer que la probabilité de tirer trois boules rouges est $\frac{1}{22}$. *1pt*

2 Montrer que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\frac{3}{44}$. *1pt*

3 Montrer que la probabilité de tirer une boule rouge au moins est $\frac{37}{44}$. *1pt*

Exercice 116 — BAC 2013 — N

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules blanches. On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

1 Soient les deux événements suivants :
A :" Tirer deux boules rouges et deux boules vertes "
B : " Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées "
Montrer que $p(A) = \frac{1}{7}$ et que $p(B) = \frac{1}{3}$. *1,5pt*

2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches tirées.

a Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : $0, 1$ et 2. *0,25pt*

b Montrer que $p(X = 1) = \frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. *1,25pt*

Exercice 117 — BAC 2013 — R

Un sac contient 9 jetons indiscernables au toucher : quatre jetons blancs, trois jetons noirs et deux jetons verts. On tire au hasard, simultanément, trois jetons du sac.

1 Soient les deux événements suivants :
A :" Tirer trois jetons de même couleur "
B : "Tirer trois jetons de couleurs différentes deux à deux "
Montrer que $p(A) = \frac{5}{84}$ et que $p(B) = \frac{2}{7}$. *1pt*

2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de jetons noirs tirés.

a Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont :$0, 1, 2$ et 3. *0,25pt*

b Montrer que $p(X = 2) = \frac{3}{14}$ et $p(X = 1) = \frac{15}{28}$ *1pt*

c Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. *0,75pt*

Exercice 118 — BAC 2014 — N

Un sac contient neuf jetons indiscernables au toucher portants les nombres :

$$0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1$$

.

1 On tire au hasard, simultanément, deux jetons du sac. Soit A l'événement : "La somme des nombres portés par les deux jetons tirés est égale à 1" Montrer que $p(A) = \frac{5}{9}$. *1pt*

2 On considère le jeu suivant : Said tire au hasard, simultanément, deux jetons du sac et il est considéré gagnant s'il tire deux jetons portant chacun le nombre 1.

a Montrer que la probabilité pour que Said gagne est $\frac{1}{6}$. *1pt*

b Said a joué le jeu précédent trois fois (Said remet à chaque fois les denx jetons tirés dans le sac). Quelle est la probabilité pour que Said gagne exactement deux fois. *1pt*

Exercice 119 — BAC 2014 (R)

Pour déterminer les deux questions d'un examen oral dans un concours de recrutement, le candidat tire au hasard, successivement et sans remise, deux cartes d'une urne contenant **10** cartes : huit cartes concernant les mathématiques et deux cartes concernant la langue française
(on suppose que les cartes sont indiscernables au toucher).

1 On considère
l'événement A :" Tirer deux cartes concernant la langue française "
et l'événement B :"Tirer deux cartes concernant deux matières différentes ".
Montrer que $p(A) = \dfrac{1}{45}$ et que $p(B) = \dfrac{16}{45}$. *1.5pt*

2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de cartes tirées concernant la langue française.

- **a** Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : $0, 1$ et 2. *0.25pt*
- **b** Montrer que $p(X = 0) = \dfrac{28}{45}$ puis donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X. *1.25pt*

Exercice 120 — BAC 2015 (N)

Une urne contient huit boules : 3 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules blanches (les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1 On considère l'événement A suivant :" tirer une boule blanche au moins". et l'événement B suivant :" tirer deux boules de même couleur".
Montrer que $p(A) = \dfrac{13}{28}$ et $p(B) = \dfrac{1}{4}$. *1,5pt*

2 Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules blanches tirées.

- **a** Montrer que $p(X = 2) = \dfrac{1}{28}$. *0,5pt*
- **b** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$. *1pt*

Exercice 121 — BAC 2015 (R)

Une urne contient 5 jetons : deux jetons blancs, deux verts et un rouge (les jetons sont indiscernables au toucher). On tire au hasard successivement et avec remise trois jetons de l'urne.

1 Soit l'événement A :"les trois jetons tirés sont de même couleur ".
Montrer que $p(A) = \dfrac{17}{125}$. *1pt*

2 Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de jeton (s) blanc (s) tirés.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. *2pt*

Exercice 122 — BAC 2016 (N)

Une urne contient **10** boules : quatre boules rouges et six boules vertes. (les boules sont indiscernables au toucher). On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

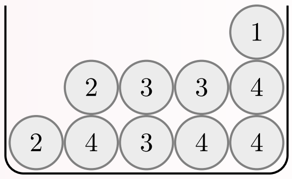
1 Soit l'événement A :" les deux boules tirées sont rouges".
Montrer que $p(A) = \dfrac{2}{15}$. *1pt*

2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne.

- **a** Montrer que l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est $\{2, 3, 4\}$. *0.5pt*
- **b** Montrer que $p(X = 3) = \dfrac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de X. *1.5pt*

Exercice 123 — BAC 2016 — R

Une urne contient **10** boules portant les nombres : $\mathbf{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4}$.
(les boules sont indiscernables au toucher).
On considère l'épreuve suivante : On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

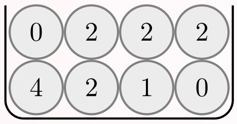


1 Soit l'événement A :" les deux boules tirées portent deux nombres pairs".
Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$. *1pt*

2 On répète l'épreuve précédente trois fois en remettant à chaque fois les deux boules tirées dans l'urne. *1pt*
Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fois où l'événement A est réalisé.
Montrer que $p(X = 1) = \frac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. *2pt*

Exercice 124 — BAC 2017 — N

Une urne contient huit boules indiscernables aut toucher portant chacune un nombre comme indiqué sur la figure ci-contre.
On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.



1 Soit A l'événement :

"Parmi les trois boules tirées, aucune ne porte le nombre 0"

et B l 'événement :

"Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égale à 8"

Montrer que $p(A) = \frac{5}{14}$ et que $p(B) = \frac{1}{7}$. *1,5pt*

2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.

a Montrer que $p(X = 16) = \frac{3}{28}$ *0,5pt*

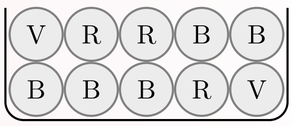
b Le tableau ci-contre concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i	0	4	8	16
$p(X = x_i)$				$\frac{3}{28}$

Recopier sur votre copie et compléter le tableau en justifiant chaque réponse. *1pt*

Exercice 125 — BAC 2017 — R

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher : cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules vertes (voir figure ci-contre).
On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.



1 Soit A l'événement : "Parmi les quatre boules tirées, il y'a une seule boule verte seulement ".
et B l'événement : "Parmi les quatre boules tirées, il y'a exactement trois boules de même couleur".
Montrer que $p(A) = \frac{8}{15}$ et que $p(B) = \frac{19}{70}$. *1,5pt*

2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.

a Montrer que $p(X = 2) = \frac{2}{15}$. *0,5pt*

b Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et montrer que l'espérance mathématique est égale à $\frac{4}{5}$. *1pt*

Exercice 126 — BAC 2018 (N)

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : **cinq boules rouges** portant les nombres $1;1;2;2;2$ et **quatre boules blanches** portant les nombres $1;2;2;2$.
On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.
Soient les événements :

A :" les trois boules tirées sont de même couleur "
B : "les trois boules tirées portent le même nombre "
C : " les trois boules tirées sont de même couleur et portent le même nombre "

1. Montrer que $p(A) = \frac{1}{6}, p(B) = \frac{1}{4}$ et $p(C) = \frac{1}{42}$. *1.5pt*
2. On répète l'expérience précédente trois fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois de réalisation de l'événement A.
   a. Déterminer les paramètres de la variable aléatoire binomiale X. *0.5pt*
   b. Montrer que $p(X = 1) = \frac{25}{72}$ et calculer $p(X = 2)$. *1pt*

Exercice 127 — BAC 2018 (R)

Une urne contient 12 boules indiscernables an toucher : 3 boules rouges portant chacune le nombre $1, 3$ boules rouges portant chacune le nombre $2et6$ boules vertes portant chacune le nombre 2 .
On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne, et on considère les événements suivants :
A : " les deux boules tirées portent le même nombre "
B : " les deux boules tirées sont de couleurs différentes "
C : " les deux boules tirées portent deux nombres dont la somme est égale à 3 "

1. Montrer que $p(A) = \frac{13}{22}$ et $p(B) = \frac{6}{11}$ puis calculer $p(C)$. *1.5pt*
2. a. Montrer que $p(A \cap B) = \frac{3}{11}$. *0.5pt*
   b. Les deux événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse. *0.5pt*
3. Sachant que l'événement B est réalisé, calculer la probabilité de tirer deux boules portant le même nombre. *0.5pt*

Exercice 128 — BAC 2019 (N)

Une urne contient dix boules : trois boules vertes, six boules rouges et une boule noire indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. On considère les événements suivants :
A : "Obtenir trois boules vertes."
B : "Obtenir trois boules de même couleur. "
C : "Obtenir au moins deux boules de même couleur."

1. Montrer que $p(A) = \frac{1}{120}$ et $p(B) = \frac{7}{40}$. *2pt*
2. Calculer $p(C)$. *1pt*

Exercice 129 — BAC 2019 (R)

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et avec remise trois boules de l'urne. Soient les événements suivants :
A : "les trois boules tirées sont de même couleur."
B : "il n'y a aucune boule blanche parmi les boules tirées."
C : "il y a exactement deux boules blanches parmi les boules tirées."

1. Montrer que $p(A) = \frac{1}{6}$ etp$(B) = \frac{8}{27}$. *2pt*
2. Calculer $p(C)$. *1pt*

Exercice 130 — BAC 2022 (N)

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard simultanément trois boules de l'urne.

1. Montrer que $p(A)=\frac{1}{6}$ où A est l'évènement " N'obtenir aucune boule rouge " *0.75pt*
2. Calculer $p(B)$ où B est l'évènement "Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes " *0.75pt*
3. Montrer que $p(C)=\frac{1}{2}$ où C est l'évènement "Obtenir exactement une boule rouge " *0.75pt*
4. Calculer $p(D)$ où D est l'évènement "Obtenir au moins deux boules rouges " *0.75pt*

Exercice 131 — BAC 2022 (R)

Une urne contient trois boules blanches, quatre boules rouges et cinq boules vertes, indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

1. On considère les événements suivants :
   - A : "Obtenir exactement deux boules rouges "
   - B : "Obtenir exactement une boule verte "

   a. Montrer que $p(A)=\frac{12}{55}$ et $p(B)=\frac{21}{44}$ *0,75pt*

   b. Calculer $p(A/B)$: la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé. Les événements A et B sont-ils indépendants ? *0,75pt*
2. Soit la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées

   a. Déterminer la loi de probabilité de X *1pt*

   b. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes. *0,5pt*