GUIDE
MATHEMATIQUE

RESUME DE COURS DE MATHS

2 Bac-SM

Année Baccalauréat

Sciences Mathématiques

SMA-SMB

Réalisé par :
Prof.Meziane LAFJIJ

SOMMAIRE

① DEFINITIONS

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists\ \alpha > 0), (\forall x \epsilon D_f)\ \ (\lvert x-a\rvert < \alpha \ \Rightarrow \ \lvert f(x)-l\rvert < \varepsilon)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{a} f = l$
$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists\ \alpha > 0), (\forall x \epsilon D_f)\ \ (0 < x-a < \alpha \ \Rightarrow \ \lvert f(x)-l\rvert < \varepsilon)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{a^+} f = l$
$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists\ \alpha > 0), (\forall x \epsilon D_f)\ \ (-\alpha < x-a < 0 \ \Rightarrow \ \lvert f(x)-l\rvert < \varepsilon)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{a^-} f = l$
$(\forall A > 0)\ (\exists\ \alpha > 0), (\forall x \epsilon D_f)\ \ (\lvert x-a\rvert < \alpha \ \Rightarrow \ f(x) > A)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = +\infty$
$(\forall A > 0)\ (\exists\ \alpha > 0), (\forall x \epsilon D_f)\ \ (0 < x-a < \alpha \ \Rightarrow \ f(x) > A)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a^+} f = +\infty$
$(\forall A > 0)\ (\exists\ \alpha > 0), (\forall x \epsilon D_f)\ \ (-\alpha < x-a < 0 \ \Rightarrow \ f(x) > A)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$
$(\forall A > 0)\ (\exists\ \alpha > 0), (\forall x \epsilon D_f)\ \ (\lvert x-a\rvert < \alpha \ \Rightarrow \ f(x) < -A)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = -\infty$
$(\forall A > 0)\ (\exists\ \alpha > 0), (\forall x \epsilon D_f)\ \ (0 < x-a < \alpha \ \Rightarrow \ f(x) < -A)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$
$(\forall A > 0)\ (\exists\ \alpha > 0), (\forall x \epsilon D_f)\ \ (-\alpha < x-a < 0 \ \Rightarrow \ f(x) < -A)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a^-} f = -\infty$
$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists\ B > 0), (\forall x \epsilon D_f)\ \ (x > B \ \Rightarrow \ \lvert f(x)-l\rvert < \varepsilon)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = l$
$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists\ B > 0), (\forall x \epsilon D_f)\ \ (x < -B \ \Rightarrow \ \lvert f(x)-l\rvert < \varepsilon)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = l$
$(\forall A > 0)\ (\exists\ B > 0), (\forall x \epsilon D_f)\ \ (x > B \ \Rightarrow \ f(x) > A)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$
$(\forall A > 0)\ (\exists\ B > 0), (\forall x \epsilon D_f)\ \ (x < -B \ \Rightarrow \ f(x) > A)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$
$(\forall A > 0)\ (\exists\ B > 0), (\forall x \epsilon D_f)\ \ (x > B \ \Rightarrow \ f(x) < -A)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$
$(\forall A > 0)\ (\exists\ B > 0), (\forall x \epsilon D_f)\ \ (x < -B \ \Rightarrow \ f(x) < -A)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

Propriété :

- Si f admet une limite , alors cette limite est unique.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x)-l) = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-l) = 0$

② LIMITES USUELLES $(n\epsilon\mathbb{N}^*)$

$\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0 \quad (n\epsilon\mathbb{N}^*)$	$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & si\ n\ est\ pair \\ -\infty & si\ n\ est\ impair \end{cases}$	
$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert}} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert}} = 0$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$	

③ LIMITE D'UNE FONCTION POLYNOME – LIMITE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

Soit P et Q deux fonctions polynômes , ax^n et bx^m sont respectivement les termes du plus haut degré des P et Q.

$\lim\limits_{x\to x_o} P(x) = P(x_0)$	$\lim\limits_{x\to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} ax^n = \infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} ax^n = \infty$
$\lim\limits_{x\to x_o}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_o)}{Q(x_o)}$, $si\ \ Q(x_o) \neq 0$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^n}{bx^m} = \begin{cases} \frac{a}{b} & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n < m \\ \infty & si \quad n > m \end{cases}$	

④ OPERATIONS SUR LES LIMITES FINIES ET INFINIE D'UNE FONCTION

Soit f et g deux fonctions numériques et $x_0\epsilon\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x_0}(f+g) = \lim\limits_{x_0} f + \lim\limits_{x_0} g$	$\lim\limits_{x_0}(f\times g) = \lim\limits_{x_0} f \times \lim\limits_{x_0} g$	$\lim\limits_{x_0}(kf) = k\lim\limits_{x_0} f$	$\lim\limits_{x_0}\sqrt{f} = \sqrt{\lim\limits_{x_0} f}$
$\lim\limits_{x_0}\frac{1}{g} = \frac{1}{\lim\limits_{x_0} g}$	$\lim\limits_{x_0}\frac{f}{g} = \frac{\lim\limits_{x_0} f}{\lim\limits_{x_0} g}$	$\lim\limits_{x_0}(f)^n = \left(\lim\limits_{x_0} f\right)^n$	$\lim\limits_{x_0}\lvert f\rvert = \left\lvert\lim\limits_{x_0} f\right\rvert$

- **Remarque** : ces opérations restent aussi valable quand x tend vers x_0 à droite ou à gauche ou $+\infty$ ou $-\infty$.

LES FORMES DETERMINEES :

La somme	Le produit	Le quotient	L'inverse	Le composé
$\infty + \ell = \infty$ $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$	$l_1 \times l_1 = l$ $(l \neq 0)\times\infty = \infty$ $\infty \times \infty = \infty$	$\frac{a}{\infty}=0$; $\frac{\infty}{a}=\infty$ $\frac{a\neq 0}{0}=\infty$ $\frac{0}{\infty}=0$; $\frac{\infty}{0}=\infty$	$\frac{1}{0^+}=+\infty$ $\frac{1}{0^-}=-\infty$ $\frac{1}{+\infty}=\frac{1}{-\infty}=0$	$\sqrt{+\infty}=+\infty$ $(+\infty)^n=+\infty$ $(-\infty)^n=\begin{cases}+\infty \text{ , } n \text{ pair}\\ -\infty \text{ , } n \text{ impair}\end{cases}$

LES FORMES INDETERMINEES :

$(+\infty)+(-\infty)$	$0\times\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$

⑤ LIMITES ET ORDRE

$Si \begin{cases} \lvert f(x)-l\rvert \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \end{cases}$ $, alors \ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$	$Si \begin{cases} h(x)\leq f(x)\leq g(x) \\ \lim\limits_{x_0} g = \lim\limits_{x_0} h = l \end{cases}$ $, alors \ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$
$Si \begin{cases} f(x)\geq g(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty \end{cases}$ $, alors \ \lim\limits_{x_0} f=+\infty$	$Si \begin{cases} f(x)\leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty \end{cases}$ $, alors \ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

Remarque : *ces propriétés restent aussi valable quand x tend vers* x_0 *à droite ou à gauche ou* $+\infty$ *ou* $-\infty$

⑥ LIMITES DE FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

$\lim\limits_{x\to a} \sin(x)=\sin(a)$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to a} \cos(x)=\cos(a)$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{x}=\frac{a^2}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{x}=a$

Techniques et Astuces :

➢ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ **F.I** : Pour lever cette indétermination, il suffit de factoriser $f(x)$ et $g(x)$ par $(x-a)^n$ puis simplifier .

→ En utilisant les identités remarquables , division euclidienne , méthode de HORNER⋯

→ si f ou g est une fonction irrationnelle alors on multiplie le numérateur et le dénominateur par son conjugué .

➢ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ **F.I** : Pour lever cette indétermination, il suffit de factoriser $f(x)$ et $g(x)$ par $\sqrt{x}, x, x^2, \dots, x^n$ puis simplifier .

→ En utilisant la technique suivante : $\sqrt{A(x)}=\lvert\dots\rvert\sqrt{\frac{A(x)}{(\dots)^2}}$; $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert=\begin{cases} x \ , \ si \ \ x\geq 0 \\ -x \ , \ si \ \ x\leq 0\end{cases}$

➢ $\lim\limits_{\infty}(f+g)=(+\infty)+(-\infty)$ **F.I** : Pour lever cette indétermination, il suffitde factoriser $f(x)$ et $g(x)$ par le terme de plus haut degré ou multiplier par l'expression conjuguée .

➢ **Les fonctions trigonométriques + partie entière :**

Pour lever une forme indéterminée, on utilise les théorèmes d'encadrement ou faire un changement de variable

- On rappelle que pour tout $x \epsilon IR$: $\lvert \sin x\rvert \leq 1$; $\lvert \cos x\rvert \leq 1$; $x-1 < E(x)\leq x$
- On a les formules suivantes : $si \ a \notin \mathbb{Z} : \lim\limits_{x\to a} E(x)=E(a)$ $si \ a\in\mathbb{Z} : \lim\limits_{x\to a^+} E(x)=a \ \ et \ \lim\limits_{x\to a^-} E(x)=a-1$

اصبر على مر الجفا من معلم
فان رسوب العلم في نفراته
ومن لم يذق مر التعلم ساعة
تجرع ذل الجهل طول حياته

Chapitre 2 LA CONTINUITE

①CONTINUITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert centré en un point x_o.

On dit que la fonction f est continue au point x_o si : $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

ou $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists\ \alpha > 0); \left(\forall x \epsilon D_f\right)\ (0 < |x - x_o| < \alpha \implies |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon)$

→**I.G** : *f est continue au point x_o signifie que la courbe (C_f) est continue au point $M\left(x_o, f(x_o)\right)$*

f est discontinue au point x_o signifie que la courbe (C_f) est discontinue au point $M\left(x_o, f(x_o)\right)$

Continuité à droite – Continuité à gauche

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_o, x_o + r[$ où $r \epsilon \mathbb{R}_*^+$

On dit que f est continue à droite en x_o si : $\lim_{x \to {x_o}^+} f(x) = f(x_o)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_o - r, x_o]$ où $r \epsilon \mathbb{R}_*^+$

On dit que f est continue à gauche en x_o si : $\lim_{x \to {x_o}^-} f(x) = f(x_o)$

→ La fonction f est continue en x_o $\Leftrightarrow$ f est continue à droite et à gauche en x_o

②PROLONGEMENT PAR CONTINUITE EN UN POINT

Soit f une fonction non définie en x_o $\left(x_o \notin D_f\right)$

On dit que f admet un prolongement par continuité au point x_o si : $x_o \notin D_f$ *et* $\lim_{x \to {x_o}^+} f(x) = l$

→ *la fonction g définie sur $D_f \cup \{x_o\}$ par :* $\begin{cases} g(x) = f(x) \\ g(x_o) = l \end{cases}$ *est appelée le prolongement par continuité de f au point x_o ,et continue en x_o.*

③ CONTINUITE D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

- f est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout point de I .
- f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a et continue à gauche en b.
- f est continue sur $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a .
- f est continue sur $]a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à gauche en b .

Propriétés :. ❶ *les fonction polynômes et Les fonctions $x \longmapsto cosx$ et $x \longmapsto sinx$ sont continues sur $\mathbb{R}$.*

❷ *Toute fonction rationnelle est continue sur tout un intervalle inclus dans son domaine de définition.*

❸ *La fonction $x \longmapsto tanx$ est continue sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$*

❹ *La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.*

❺ *La fonction $x \longmapsto E(x)$ est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.*

④ OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES

Soit f et g sont des fonctions continues sur un intervalle I et k un réel, alors :

- Les fonctions $f + g$, kf , $f \times g$, $|f|$ et f^n sont continues sur l'intervalle I.
- Si de plus $g(x) \neq 0$ pour tout réel x de I , alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur l'intervalle I
- Si f est positive et continue sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I .

Continuité de la composée de deux fonctions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, et soit x_o un élément de I.

- Si f est continue en x_o et g est continue en $f(x_o)$,alors la fonction gof est continue en x_o .
- Si f est continue sur I et g est continue sur J ,alors la fonction gof est continue sur I .
- Si $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$ et g est continue en l alors : $\lim_{x \to x_o} gof(x) = g(l)$

⑤ IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- Si f est continue sur $[a,b]$ alors :

$(\exists(m,M)\epsilon\mathbb{R}^2),\ f([a,b])=[m,M]$

↳ f est bornée : $m \leq f(x) \leq M$

↳ $M=f(\alpha)$ est le maximum de f sur $[a,b]$

↳ $m=f(\beta)$ est le minimum de f sur $[a,b]$

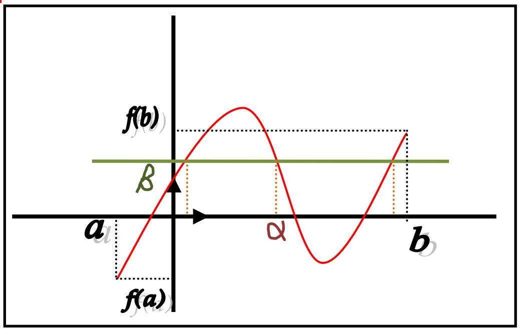
- Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , On a alors les résultats dans le tableau ci-contre

L'intervalle I	$f(I)$ l'image de l'intervalle I	
	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a),\lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f\,,f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{a^+} f\,,f(b)\right]$	$\left[f(b),\lim\limits_{a^+} f\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{a^+} f\,,\lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f\,,\lim\limits_{a^+} f\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a),\lim\limits_{+\infty} f\right[$	$\left]\lim\limits_{+\infty} f\,,f(a)\right]$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{a^+} f\,,\lim\limits_{+\infty} f\right[$	$\left]\lim\limits_{+\infty} f\,,\lim\limits_{a^+} f\right[$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{-\infty} f\,,f(a)\right]$	$\left[f(a),\lim\limits_{-\infty} f\right[$
$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{-\infty} f\,,\lim\limits_{a^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{a^-} f\,,\lim\limits_{-\infty} f\right[$
$]-\infty,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{-\infty} f\,,\lim\limits_{+\infty} f\right[$	$\left]\lim\limits_{+\infty} f\,,\lim\limits_{-\infty} f\right[$

⑥ THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES T.V.I

Théorème :

Si f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ alors, pour tout réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel α appartenant à l'intervalle $[a,b]$ tel que $f(\alpha)=\beta$



En d'autres termes : l'équation $\boldsymbol{f(x)=\beta}$ admet au moins une solution dans $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ pour tout $\boldsymbol{\beta}$ compris entre $\boldsymbol{f(a)}$ et $\boldsymbol{f(b)}$.

↳ $\begin{cases} \boldsymbol{f} \text{ est continue sur } [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] \\ \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{f}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]) \end{cases} \Rightarrow \quad (\exists \boldsymbol{\alpha} \in [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]),\ \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha})$

Corollaire :

$\begin{cases} \boldsymbol{f} \text{ est continue sur } [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] \\ \boldsymbol{f(a)\times f(b)<0} \end{cases} \Rightarrow$ L'équation $\boldsymbol{f(x)=0}$ admet au moins une solution dans $[a,b]$

→ Si de plus , la fonction $\boldsymbol{f}$ est strictement monotone, cette solution est unique.

$\begin{cases} \boldsymbol{f} \text{ est continue sur } \boldsymbol{I} \quad et \quad \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{f}(\boldsymbol{I}) \\ \boldsymbol{f} \textit{ est strictement monotone sur } \boldsymbol{I} \end{cases} \Rightarrow \quad (\exists!\, \boldsymbol{\alpha} \in [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]),\ \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha})$

Principe de la méthode de dichotomie

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ telle que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $[a,b]$ .Pour déterminer un encadrement du nombre α , on calcule alors le centre $\frac{a+b}{2}$ du segment $[a,b]$ puis son image $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ par f et on la compare à 0 .

Si	$f(a)\times f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$	$f(b)\times f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$
Alors un encadrement de α de longueur $\frac{b-a}{2}$	$a<\alpha<\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{a+b}{2}<\alpha<b$

نعمتان مغبون فيهما كثير من الناس الصحة و الفراغ -حديث نبوي شريف-

FONCTION PARTIE ENTIERE

- **DEFINITION** : Soit x un nombre réel.

  La partie entière de x est le plus grand entier relatif n qui est inférieur ou égal à x .

  On la note $E(x)$ ou $[x]$, On à : $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R})\ (\exists \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z})\ ,\ \boldsymbol{n} \leq \boldsymbol{x} < n+1$

- **PROPRIETES :** Soit x un nombre réel et n un entier relatif.

$(\forall x \in [n, n+1[)\ ,\ E(x) = n$	$(\forall p \in \mathbb{Z})\ ,\quad E(p) = p$
$(\forall x \in \mathbb{R})\ ,\ E(x) \leq x < E(x)+1$ $(\forall x \in \mathbb{R})\ ,\ x-1 < E(x) \leq x$	$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists r \in [0,1[)\ ,\quad x = E(x) + r$
$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall p \in \mathbb{Z})\ ,\ E(x+p) = E(x) + p$	$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ ,\ x \leq y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$
$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ ,\ E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$	

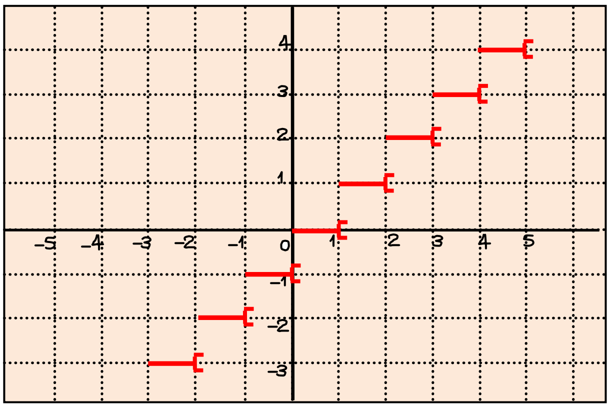
- La fonction $x \mapsto E(x)$ est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ et définie sur l'intervalle $[k-1; k+1[$ par :

$$\begin{cases} E(x) = k-1 & , x \in [k-1 ; k[\\ E(x) = k & , x \in [k ; k+1[\end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} E(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to k} E(x) = ?$	Si $k \notin \mathbb{Z}$, alors $\lim\limits_{x \to k} E(x) = E(k)$
$\lim\limits_{x \to -\infty} E(x) = -\infty$		Si $k \in \mathbb{Z}$, alors $\begin{cases} \lim\limits_{x \to k^-} E(x) = k-1 \\ \lim\limits_{x \to k^+} E(x) = k \end{cases}$

- La fonction $x \mapsto E(x)$ est discontinue en $x_o = k$ tel que $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$
- Sa courbe représentative sous forme d'un histogramme.

$$\begin{cases} \vdots \\ E(x) = -2 & , x \in [-2; -1[\\ E(x) = -1 & , x \in [-1; 0[\\ E(x) = 0 & , x \in [0; 1[\\ E(x) = 1 & , x \in [1; 2[\\ E(x) = 2 & , x \in [2; 3[\\ \vdots \end{cases}$$



لم أر في عيوب الناس عيبا كنقص القادرين على التمام

ومن يتهيب صعود الجبـــال يعش أبد الدهر بين الحفـــر

Chapitre 3 FONCTIONS RECIPROQUES

① Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Théorème de la fonction réciproque

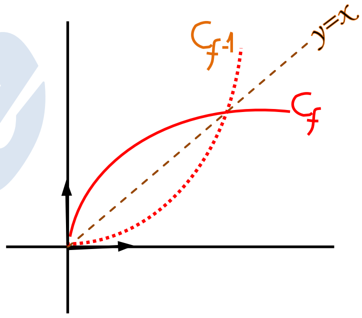
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors elle réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$

→ On dit que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(I)$.

Propriétés :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

- La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et à même sens de variation que la fonction f.
- Les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la première bissectrice (c-à-d la droite d'équation $y = x$)
- $(\forall x \in f(I)),\ f o f^{-1}(x) = x$; $(\forall x \in I),\ f^{-1} o f(x) = x$
- $(\forall x \in f(I))(\forall y \in I),\ y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$



Si La courbe de f sur I	Alors La courbe de f^{-1} sur $f(I)$
① passe par le point $A(a,b)$	① Passe par le point $A'(b,a)$
② admet une asymptote verticale d'équation $x = a$	② admet une asymptote horizontale d'équation $y = a$
③ admet une asymptote horizontale d'équation $y = a$	③ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$
④admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$	④admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$
⑤ admet une tangente verticale au point $A(a,b)$	⑤admet une tangente horizontale au point $A'(b,a)$
⑥ admet une tangente horizontale au point $A(a,b)$	⑥admet une tangente verticale au point $A'(b,a)$
⑦ admet une tangente oblique au point $A(a,b)$ de coefficient directeur m .	⑦ admet une tangente oblique au point $A'(b,a)$ de coefficient directeur $\frac{1}{m}$.
⑧ coupe la première bissectrice en un point H	⑧ coupe la première bissectrice en un point H

DERIVEE DE LA FONCTION RECIPROQUE

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $a \in I$.($f(a) = b$)

- Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors : La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$.

  Et On a : $$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

- Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors : f^{-1} est dérivable sur $f(I)$.

  et On a : $$(\forall x \in f(I)),\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

② FONCTION RACINE $n^{\text{ième}}$

Soit n un entier naturel non nul .

$$\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

Définition : La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.Sa fonction réciproque est appelée la fonction **racine $n^{ième}$** et on la note $\sqrt[n]{\ }$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt[n]{x}$ se lit « racine $n^{ième}$ » de x .

Propriétés : Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$, On a :

$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$	$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{a} = \sqrt[n\times m]{a^{n+m}}$
$\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; $(b \neq 0)$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\times m]{a}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\times m]{a^{m-n}}$; $(a \neq 0)$
$\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \leq y$	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\times m]{a^m}$		

Continuité et Dérivabilité de la fonction $\sqrt[n]{\ }$

- La fonction $\sqrt[n]{\ }$: $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Si f est une fonction positive et continue sur un intervalle I , alors la fonction $\sqrt[n]{f}$ est continue sur I.
- La fonction $\sqrt[n]{\ }$: $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$,et on a : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}),\ \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}$
- Si f est strictement positive et dérivable sur I , alors la fonction $\sqrt[n]{f}$ est dérivable sur I.

  Et on a : $\boxed{(\forall x \in I),\ \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \dfrac{(f(x))'}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}}$

Puissance rationnelle d'un nombre strictement positif

Soit a un réel strictement positif et r un nombre rationnel. On pose $r = \frac{p}{q}$ avec $p \epsilon \mathbb{Z}$ et $q \epsilon \mathbb{N}^*$.

Le nombre a^r est appelé la puissance rationnelle de nombre a d'exposant r .

On écrit : $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Remarque : Soit a un réel strictement positif et $n \epsilon \mathbb{N}^* - \{1\}$. On a : $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\left(\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}\ ,\ \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}\right)$

Solutions de l'équation $x^n = a$ dans $\mathbb{R}$.

Parité de n \ Signe de a	$a < 0$	$a \geq 0$
n pair	$S = \emptyset$	$S = \{-\sqrt[n]{a};\ \sqrt[n]{a}\}$
n impair	$S = \{-\sqrt[n]{-a}\}$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$

Solutions de l'équation $\sqrt[n]{x} = a$ dans $\mathbb{R}$

Si	$a < 0$	$a \geq 0$
Alors	$S = \emptyset$	$S = \{a^n\}$

Rappeler bien que :

- **Pour calculer $f^{-1}(x_0)$ on pose $f^{-1}(x_0) = \alpha$ tel que $\alpha \epsilon I$, puis résoudre l'équation $f(\alpha) = x_0$**
- **Pour déterminer $f^{-1}(x)$ on pose $f^{-1}(x) = y$ tel que $y \epsilon I$, puis résoudre l'équation $f(y) = x$ dans I**
- **Conjugué –Factorisation**

• $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$; $\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}+\sqrt[4]{b^3}}$.

• $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} = \frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} = \cdots = \frac{a^n-b^n}{a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}}$

• $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

• $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$

• $a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})(n.Impair)$

$\boxed{\sqrt[n]{A(x)} = |\ldots| \sqrt[n]{\dfrac{A(x)}{(\ldots)^n}}}$

مهارة

قيل لأحد العلماء- الشعبي رحمه الله- : من أين لك هذا العلم كله ؟

قال : - بنفي الاعتماد

- و السير في البلاد

- و صبر كصبر الجماد

- و بكور كبكور الغراب

③ FONCTION ARC TANGENTE

Définition : La fonction $\tan : x \mapsto \tan(x)$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.Sa fonction réciproque est appelée fonction Arctangente et on la note $Arctan$

$$\begin{aligned} Arctan : \mathbb{R} &\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\\ x &\longmapsto Arctan(x) \end{aligned}$$

Propriétés :

- La fonction $Arctan$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ,\ -\frac{\pi}{2} < Arctan(x) < \frac{\pi}{2}$

  $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^{+})\ ,\ 0 \leq Arctan(x) < \frac{\pi}{2}$

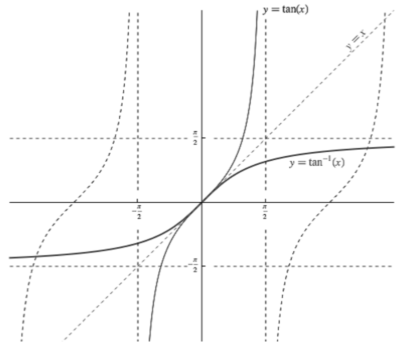
  $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^{-})\ ,\ -\frac{\pi}{2} < Arctan(x) \leq 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Arctan	$-\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$ $\frac{\pi}{2}$

- $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \left(\forall y \epsilon \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)\ ,\ Arctan(x) = y \iff x = \tan(y)$
- $\left(\forall x \epsilon \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)\ ,\ Arctan(\tan(x)) = x$
- $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ,\ \tan\big(Arctan(x)\big) = x$
- $(\forall (x,y) \epsilon \mathbb{R}^2)\ ,\ Arctan(x) = Arctan(y) \iff x = y$

  $Arctan(x) > Arctan(y) \iff x > y$

  $Arctan(x) < Arctan(y) \iff x < y$



- La fonction $Arctan$ est impaire :

  $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ : Arctan(-x) = -Arctan(x)$
- La fonction $Arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,et on a :

  $$(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ,\qquad \big(Arctan(x)\big)' = \frac{1}{1+x^2}$$
- Si u est une fonction dérivable sur I , alors la fonction $x \mapsto Arctan(u(x))$ est dérivable sur I.

  Et on a : $\boxed{(\forall x \in I)\ ,\big(Arctan(u(x))\big)' = \frac{(u(x))'}{1+(u(x))^2}}$
- **Tableau de quelque valeurs importantes :**

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$Arctan(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Solutions des équations

$\begin{cases} \tan(x) = a \\ x \epsilon \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \iff x = Arctan(a)$	$\tan(x) = a \iff x = Arctan(a) + k\pi ; k \epsilon \mathbb{Z}$	$Arctan(x) = a \iff x = \tan(a)$

Limites usuelles

$\lim\limits_{x \to a} \frac{Arctanx - Arctana}{x - a} = \frac{1}{1+a^2}$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{Arctan(x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to -\infty} Arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$	$\lim\limits_{x \to +\infty} Arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

Remarque : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_{*}^{+})\ ,\boldsymbol{Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$ **et** $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_{*}^{-}),\ \boldsymbol{Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}}$

Rappel : تذكر مزيان أن :

$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$	$\tan(a+k\pi) = \tan(a)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \frac{-1}{\tan(a)}$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \frac{1}{\tan(a)}$
$\tan(a) = \frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$	$\tan(a+b) = \frac{tana + tanb}{1-(tana)(tanb)}$		$\cos^2(a) = \frac{1}{1+\tan^2(a)}$
$\cos(a) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$	$\tan(a-b) = \frac{tana - tanb}{1+(tana)(tanb)}$		$\sin^2(a) = \frac{\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$
$\sin(a) = \frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$	$\tan(a+b+c) = \frac{tana + tanb + tanc - (tana)(tanb)(tanc)}{1-(tana)(tanb)-(tana)(tanc)-(tanb)(tanc)}$		

Chapitre 4 DÉRIVATION - ROLLE - T.A.F

① DERIVABILITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et x_o un élément de I.

On dit que f est dérivable en x_o s'il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = l$

→ Le nombre l est appelé le nombre dérivé de la fonction f en x_o . il est noté $f'(x_o)$

Dérivabilité à droite – Dérivabilité à gauche

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type ouvert $[x_o, x_o + r[$ $(r \epsilon \mathbb{R}_*^+)$

On dit que f est dérivable à droite de x_o s'il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{x \to x_o^+} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = l$

→ Le nombre l est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en x_o . il est noté $f_d'(x_o)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type ouvert $]x_o - r, x_o]$ $(r \epsilon \mathbb{R}_*^+)$

On dit que f est dérivable à gauche de x_o s'il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{x \to x_o^-} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = l$

→ Le nombre l est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en x_o . il est noté $f_g'(x_o)$

La fonction f est dérivable en x_o $\Leftrightarrow$ f est dérivable à droite et à gauche en x_o ,avec $f_g'(x_o) = f_d'(x_o)$

② INTERPRETATION GEOMETRIQUE DU NOMBRE DERIVE – LA TANGENTE A LA COURBE D'UNE FONCTION

→ Si la fonction f est dérivable en x_o alors sa courbe représentative (C_f) admet une tangente (T) au point $A\,(x_o, f(x_o))$ et dont le coefficient directeur est $f'(x_o)$.

L'équation de la tangente (T) au point A est donnée par : **(T) : $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$**

→ Si $f'(x_o) = 0$ alors la tangente (T) est horizontale, c'est-à-dire, parallèle à l'axe des abscisses.

→ Si $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \pm\infty$ alors la courbe (C_f) admet une tangente verticale au point $A\,(x_o, f(x_o))$ c'est-à-dire, parallèle à l'axe des ordonnées.

Approximation affine d'une fonction dérivable

Soit f une fonction dérivable en un point x_o

La fonction $g : x \mapsto f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de x_o .

→ On écrit alors : $f(x) \simeq f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$ au voisinage de x_o

③ DERIVABILITE D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I

- On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I.
- On dit que f est dérivable sur $[a, b]$ si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et f dérivable à droite en a et à gauche en b .

Propriétés :

- *Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition.*
- *Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$*
- *Les fonctions $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.*
- *La fonction $x \longmapsto \tan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$*
- *La fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$*
- *La fonction $x \longmapsto \arctan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.*

④ OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES

Si f et g sont des fonctions dérivables sur un intervalle I .et k un réel alors on à :

- Les fonctions $\boldsymbol{f+g}$, $\boldsymbol{kf}$, $\boldsymbol{f\times g}$ et $\boldsymbol{f^n}$ sont dérivables sur l'intervalle $\boldsymbol{I}$.
- Si de plus $g(x)\neq 0$ pour tout réel x de I , alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur l'intervalle $\boldsymbol{I}$
- Si $\boldsymbol{g}$ est dérivable sur $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur $(\boldsymbol{I})$, alors $\boldsymbol{fog}$ est dérivable sur $\boldsymbol{I}$ et on a : $(\boldsymbol{fog})' = \boldsymbol{g'\times f'og}$
- Si $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{f(x)}>0$ pour tout réel x de I, alors $\sqrt[n]{\boldsymbol{f}}$ est dérivable sur $\boldsymbol{I}$ et on a : $\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$
- Si $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur **I,** alors la fonction $x\mapsto \boldsymbol{Arctan}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ est dérivable sur $\boldsymbol{I}$ et on a :

$$\left(Arctan(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$$

⑤ APPLICATION DE LA DERIVATION :

La monotonie d'une fonction Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I .

- f est constante sur I $\Leftrightarrow$ $(\forall x\epsilon I)$, $f'(x)=0$
- f est croissante sur I $\Leftrightarrow$ $(\forall x\epsilon I)$, $f'(x)\geq 0$
- f est décroissante sur I $\Leftrightarrow$ $(\forall x\epsilon I)$, $f'(x)\leq 0$

Remarques :

- *Si f' est positive sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I .*
- *Si f' est négative sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I .*

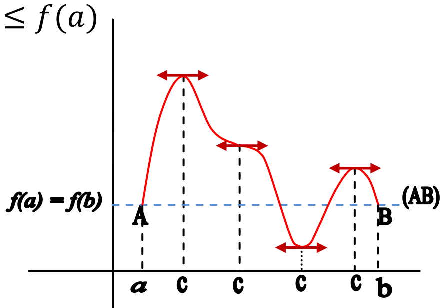
Les extremums d'une fonction dérivable

Si f' s'annule et change de signe en a , alors f admet un extremum en a .

→ f admet une valeur minimale sur I en a signifie que : $(\forall x\epsilon I)$, $f(x)\geq f(a)$

→ f admet une valeur maximale sur I en a signifie que : $(\forall x\epsilon I)$, $f(x)\leq f(a)$

⑥ THEOREME DE ROLLE :



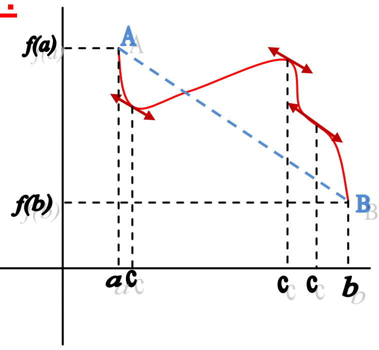
Théorème :

Si f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur$]a,b[$,
telle que $f(a)=f(b)$, Alors : $(\exists \boldsymbol{c\epsilon}]\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}[)$, $\boldsymbol{f'(c)=0}$

→ Interprétation géométrique :

le théorème de Rolle fournit l'existence d'un point $C(c\,;\,f(c))$ appartenant de (C_f) tel que la tangente de (C_f) au point C est parallèle à l'axe des abscisse ou à la droite (AB)

⑦ THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS « T.A.F » :



Théorème :

Si f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur$]a,b[$,
Alors : $(\exists \boldsymbol{c\epsilon}]\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}[)$, $\boldsymbol{f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)}$

→ Interprétation géométrique : *le théorème des accroissements finis fournit l'existence d'une tangente de (C_f) qui soit parallèle à la droite (AB)*

⑧ INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS « I.A.F » :

Théorème :

- Si f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur$]a,b[$ et $(\forall \boldsymbol{x\epsilon}]\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}[)$, $\boldsymbol{m}\leq \boldsymbol{f'(x)}\leq \boldsymbol{M}$
  Alors : $\boldsymbol{m(b-a)} \leq \boldsymbol{f(b)-f(a)} \leq \boldsymbol{M(b-a)}$
- Si f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur$]a,b[$ et $(\forall \boldsymbol{x\epsilon}]\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}[)$, $|\boldsymbol{f'(x)}|\leq \boldsymbol{k}$
  Alors : $|\boldsymbol{f(b)-f(a)}|\leq \boldsymbol{k(b-a)}$

TABLEAU DES DERIVEES USUELLES

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
a	0	$\mathbb{R}$
$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n\epsilon\mathbb{N})$	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x^{\frac{1}{n}} \quad (n\epsilon\mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$\sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$]0,+\infty[$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$]0,+\infty[$
$sin(x)$	$cos(x)$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$-sin(x)$	$\mathbb{R}$
$tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$
$Arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$k\,u(x)$	$k\,u'(x)$	$D_{u'}$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$	$D_{u'} \cap D_{v'}$
$u(x) \times v(x)$	$u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	$D_{u'} \cap D_{v'}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$	$D_{u'} \cap D_{v'} \quad (v \neq 0)$
$u(ax+b)$	$a.u'(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$uov(x)$	$v'(x).u'(v(x))$	$x \in D_{v'}$ et $v(x) \in D_{u'}$
$u^n(x)$	$nu'(x).u^{n-1}(x)$	$D_{u'}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$D_{u'} \quad (u(x) > 0)$
$\sqrt[3]{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{3\sqrt[3]{u^2(x)}}$	$D_{u'} \quad (u(x) > 0)$
$\sqrt[n]{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u^{n-1}(x)}}$	$D_{u'} \quad (u(x) > 0)$
$sin(u(x))$	$u'(x).cos(u(x))$	$D_{u'}$
$cos(u(x))$	$-u'(x).sin(u(x))$	$D_{u'}$
$tan(u(x))$	$u'(x).\left(1 + tan^2(u(x))\right) = \frac{u'(x)}{cos^2(x)}$	$D_{u'}$ et $u(x) \in D_{tan}$
$Arctan(u(x))$	$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$D_{u'}$

La limite		Dérivabilité en a	Interprétation géométrique : (C_f) admet	L'équation de la tangente
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=$	L	*f est dérivable en a et $f'(a)=L$*	*une tangente au point $A(a\ ;f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$*	$y=f'(a)(x-a)+f(a)$
	0	*f est dérivable en a et $f'(a)=0$*	*une tangente horizontale au point $A(a\ ;f(a))$*	$y=f(a)$
	$\pm\infty$	*f n'est pas dérivable en a*	*une tangente verticale au point $A(a\ ;f(a))$*	$x=a$
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=$	L	*f est dérivable à droite en a et $f_d{}'(a)=L$*	*une demi- tangente à droite au point $A(a\ ;f(a))$ de coefficient directeur $f_d{}'(a)$*	$y=f_d{}'(a)(x-a)+f(a)$
	0	*f est dérivable à droite en a et $f_d{}'(a)=0$*	*Une demi-tangente horizontale à droite au point $A(a\ ;f(a))$*	$y=f(a)$
	$+\infty$	*f n'est pas dérivable à droite en a*	*une demi-tangente verticale à droite au point $A(a\ ;f(a))$ dirigée vers le haut*	$x=a$
	$-\infty$	*f n'est pas dérivable à droite en a*	*une demi-tangente verticale à droite au point $A(a\ ;f(a))$ dirigée vers le bat*	
$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=$	L	*f est dérivable à gauche en a et $f_g{}'(a)=L$*	*une demi- tangente à gauche au point $A(a\ ;f(a))$ de coefficient directeur $f_g{}'(a)$*	$y=f_g{}'(a)(x-a)+f(a)$
	0	*f est dérivable à gauche en a et $f_g{}'(a)=0$*	*Une demi-tangente horizontale à gauche au point $A(a\ ;f(a))$*	$y=f(a)$
	$+\infty$	*f n'est pas dérivable à gauche en a*	*une demi-tangente verticale à gauche au point $A(a\ ;f(a))$ dirigée vers le bat*	$x=a$
	$-\infty$	*f n'est pas dérivable à gauche en a*	*une demi-tangente verticale à gauche au point $A(a\ ;f(a))$ dirigée vers le haut*	

Prof:Meziane Laffi Tél : 0671674078

Chapitre 5 LES FONCTIONS PRIMITIVES

DEFINITION

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction F est une primitive de f sur I si : F est dérivable sur I et $(\forall x \epsilon I)\,, F'(x) = f(x)$

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur } I \text{ et } (\forall x \epsilon I)\,, F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I}$$

PROPRIETES

1- Toute fonction continue sur un intervalle I admet une fonction primitive définie sur cet intervalle .

2- Si F est une primitive de f sur I alors les primitives de f sur I sont les fonctions: $x \mapsto F(x) + c\,, (c \epsilon \mathbb{R})$

3-Pour tout $x_0 \epsilon \mathbb{R}$ et $y_0 \epsilon \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant : $F(x_0) = y_0$

OPERATIONS SUR LES PRIMITIVES

- Si F et G sont respectivement des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I alors :
  - $F + G$ est une fonction primitive de la fonction $f + g$.
  - Pour tout $k \epsilon \mathbb{R}$, kF est une fonction primitive de la fonction kf.

-Si F et G sont des primitives de la fonction f sur un intervalle I alors :$(\exists c \epsilon \mathbb{R})$, $F(x) = G(x) + c$

TABLEAU DES PRIMITIVES USUELLES

La fonction f	Les primitives *de* f
a	$ax + c$
x^n $(n \epsilon \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$ +c
$\frac{1}{1+x^2}$	$Arctan(x) + c$
$sin(x)$	$-cos(x) + c$
$cos(x)$	$sin(x) + c$
$\frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$	$tan(x) + c$
$\frac{1}{sin^2(x)} = 1 + cotan^2(x)$	$cotan(x) + c$
$sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}cos(ax+b) + c$
$cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}sin(ax+b) + c$
$1 + tan^2(ax+b)$	$\frac{1}{a}tan(ax+b) + c$
$\frac{1}{x}$	$ln\lvert x\rvert + c$
e^x	$e^x + c$

La fonction f	Les primitives *de* f
$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x) + c$
$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	$u(x)v(x) + c$
$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$	$\frac{u(x)}{v(x)} + c$
$u'(x)(u(x))^n$ $(n \epsilon \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$-\frac{1}{u(x)} + c$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + c$
$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$Arctan(u(x)) + c$
$u'(x)sin(u(x))$	$-cos(u(x)) + c$
$u'(x)cos(u(x))$	$sin(u(x)) + c$
$u'(x)(1 + tan^2(u(x))) = \frac{u'(x)}{cos^2(u(x))}$	$tan(u(x)) + c$
$u'(x)(1 + cotan^2(u(x))) = \frac{u'(x)}{sin^2(u(x))}$	$cotan(u(x)) + c$
$u'(x).v'(u(x))$	$uov(x) + c$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$ln\lvert u(x)\rvert + c$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$

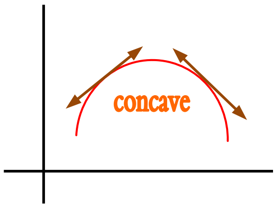
وصية : الإيمان والعمل الصالح هما سر حياتك الطيبة ، فاحرص عليهما

① CONCAVITE D'UNE COURBE – POINTS D'INFLEXION

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I

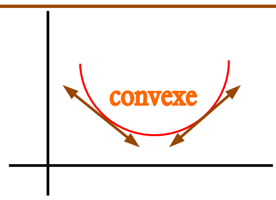
- Si f'' est négative sur l'intervalle I $\left((\forall x \epsilon I), f''(x) \leq 0\right)$, alors la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées négatives .

→ (C_f) est **concave** si elle est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.



- Si f'' est positive sur l'intervalle I$\left((\forall x \epsilon I),\ f''(x) \leq 0\right)$, alors la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives

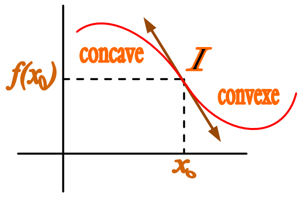
→ (C_f) est **convexe** si elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.



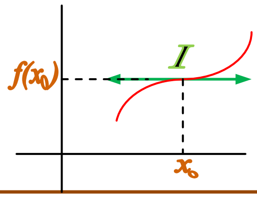
- Si f'' s'annule et change de signe en x_o ,

alors le point $I(x_o; f(x_o))$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

On appelle point d'inflexion de la courbe (C_f) , tout point où elle change de concavité.



Cas particulier : • Si f' s'annule sans changer de signe en x_o , alors la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse x_o : $I(x_o; f(x_o))$



② LES BRANCHES INFINIES (voir le schéma Page.13)

③ POSITION RELATIVE DE (Δ) PAR RAPPORT A (C_f)

Soit (D) une droite d'équation $y = ax + b$

- Si $(\forall x \epsilon I), f(x) - (ax + b) > 0$, alors (C_f) est **au-dessus** de la droite (D) .
- Si $(\forall x \epsilon I), f(x) - (ax + b) < 0$, alors (C_f) est **au-dessous** de la droite (D) .
- Si $(\exists x_o \epsilon I), f(x_o) - (ax_o + b) = 0$, alors le point $A(x_o; f(x_o))$ est le point d'intersection de (C_f) et (D)

④ AXE DE SYMETRIE – CENTRE DE SYMETRIE

- Le point $I(a, b)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) si : $\begin{cases} (\forall x \epsilon D_f) \ , \ (2a - x)\epsilon D_f \\ (\forall x \epsilon D_f) \ , \ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$

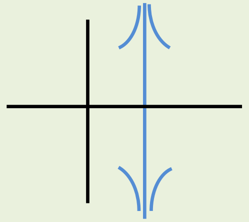
- La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) si : $\begin{cases} (\forall x \epsilon D_f), (2a - x)\epsilon D_f \\ (\forall x \epsilon D_f), f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

علمتني الرياضيات... ! أن الكسور لا تجمع أو تطرح إلا بعد توحيد المقامات ...!
و كذلك فريق العمل لن يعمل بانسجام ولن ينتج إلا بتوحيد الرؤى و الغايات ...

Les Branches infinies

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

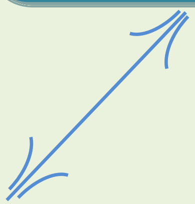
تذكر مزيان أن :

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - (ax+b) = 0$

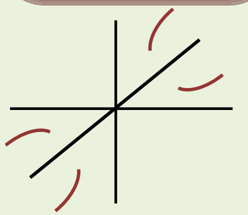
C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax+b$ au voisinage de ∞

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = ?$

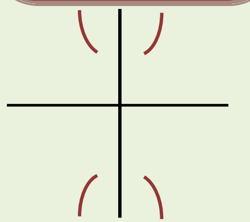
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$
  - $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - ax = ?$
    - $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - ax = b$: C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax+b$ au voisinage de ∞



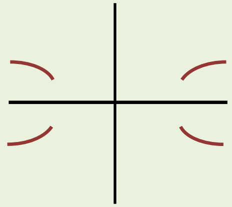
    - $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - ax = \infty$: C_f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de ∞



- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$: C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés au voisinage de ∞

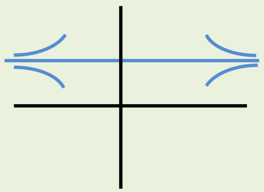


- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$: C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de ∞



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$

C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$ au voisinage de ∞



من حفظ الأصول ضمن الوصول

Prof.Meziane Lafiti Tél : 0671674078

Chapitre 7 LES SUITES NUMERIQUES

①DEFINITION ET NOTATION

Définition: Soit n_o un entire naturel . On pose : $I = \{n\epsilon\mathbb{N} \ / \ n \geq n_o\}$

toute fonction numérique définie sur I est appelée suite numérique et notée $(u_n)_{n\epsilon I}$ ou $(u_n)_{n\geq n_o}$

-l'image de n par une suite $(u_n)_{n\epsilon I}$ est appelée terme général de la suite $(u_n)_{n\epsilon I}$.

elle est notée u_n (se lit : u indice n) . u_n est appelé le terme général de la suite $(u_n)_{n\epsilon I}$

Deux façons de définir une suite :

- Suite explicite : Suite définie par la donnée explicite de leurs termes.
- Suite définie par récurrence : Suite définie par la donnée du premier terme (ou des premiers termes) et une relation permettant de calculer chaque terme en fonction de précédent (ou des précédents)

Egalité de deux suites : $\boxed{I = J \text{ و } u_n = v_n \quad \Leftrightarrow \quad (u_n)_{n\epsilon I} = (v_n)_{n\epsilon J}}$

② SUITES MAJOREES – SUITES MINOREES – SUITES BORNEES

$(u_n)_{n\epsilon I}$ est une suite majorée par β $\Leftrightarrow$ $(\forall n\epsilon I)\ ,\ u_n \leq \beta$

$(u_n)_{n\epsilon I}$ est une suite minorée par α $\Leftrightarrow$ $(\forall n\epsilon I)\ ,\ u_n \geq \alpha$

$(u_n)_{n\epsilon I}$ est une suite bornée par α et β $\Leftrightarrow$ $(\forall n\epsilon I),\ \alpha \leq u_n \leq \beta$

$(u_n)_{n\epsilon I}$ est une suite bornée $\Leftrightarrow$ $(\exists \alpha > 0)\ (\forall n\epsilon I)\ ,\ |u_n| \leq \alpha$

③SUITES PERIODIQUES.

la suite $(u_n)_{n\epsilon I}$ est périodique de période p $\Leftrightarrow$ $(\forall n\epsilon I)\ ,\ u_{n+p} = u_n$

④MONOTONIE D'UNE SUITE

la suite $(u_n)_{n\epsilon I}$ est croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n\epsilon I)\ ,\ u_{n+1} - u_n \geq 0$

la suite $(u_n)_{n\epsilon I}$ est décroissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n\epsilon I)\ ,\ u_{n+1} - u_n \leq 0$

la suite $(u_n)_{n\epsilon I}$ est constante $\Leftrightarrow$ $(\forall n\epsilon I)\ ,\ u_{n+1} = u_n$

Si : $u_n > 0$ alors

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Leftrightarrow (u_n)\ \textit{croissante}$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \Leftrightarrow (u_n)\ \textit{décroissante}$

N.B - si $(u_n)_{n\geq p}$ est croissante , alors $(u_n)_{n\geq p}$ est minorée par le premier terme u_p $(\forall n \geq p\ ,\ u_n \geq u_p)$

- si $(u_n)_{n\geq p}$ est décroissante , alors $(u_n)_{n\geq p}$ est majorée par le premier terme u_p $(\forall n \geq p\ ,\ u_n \leq u_p)$

⑤SUITES ARITHMÉTIQUES – SUITES GÉOMÉTRIQUES

	$(u_n)_{n\geq p}$ *est une Suite arithmétique de raison r et de premier terme* u_p	$(u_n)_{n\geq p}$ *est une Suite Géométrique de raison q et de premier terme* u_p
Définition	$(\forall n \geq p)\ ,\quad u_{n+1} - u_n = r$	$(\forall n \geq p)\ ,\quad u_{n+1} = qu_n$
Terme général u_n	$(\forall n \geq p)\ ,\quad u_n = u_p + (n-p)r$	$(\forall n \geq p)\ ,\quad u_n = u_p.q^{n-p}$
Somme de termes consécutifs	$S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{n-p+1}{2}(u_n + u_p)$	$S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$
a , b et c trois termes consécutifs	$2b = a + c$	$b^2 = a \times c$
Propriété Caractéristique	$2u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$	$u_n^2 = u_{n+1} \times u_{n-1}$

Cas particuliers

$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$	$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	
$\prod_{k=p}^{n} a = a^{n-p+1}$	$\sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a$	$p + (p+r) + (p+2r) + \cdots + d = \left(\frac{d-p}{r} - 1\right)\left(\frac{p+d}{2}\right)$

⑥LIMITE D'UNE SUITE

Définitions

$(\forall A>0)\ (\exists\, p\epsilon\mathbb{N})\ ,n\geq p \implies u_n > A \iff \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \ ou\ \ lim(u_n) = +\infty$
$(\forall A>0)\ (\exists\, p\epsilon\mathbb{N})\ ,n\geq p \implies u_n < -A \iff \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \ ou\ \ lim(u_n) = -\infty$
$(\forall \varepsilon>0)\ (\exists\, p\epsilon\mathbb{N})\ ,n\geq p \implies \lvert u_n - l\rvert \leq \varepsilon \iff \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \ ou\ \ lim(u_n) = l$

Limites des suites usuelles:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^p} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$	$(p\epsilon\mathbb{N}^*)\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

Limite de la suite $(n^\alpha)_n$	Limite de la suite $(a^n)_n$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & ; \quad \alpha\epsilon\mathbb{Q}^{+*} \\ 0 & ; \quad \alpha\epsilon\mathbb{Q}^{-*} \end{cases}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & ; \ -1 < a < 1 \\ +\infty & ; \quad a > 1 \\ 1 & ; \quad a = 1 \\ \text{pas de limite} & ; \ a \leq -1 \end{cases}$

⑦CONVERGENCE D'UNE SUITE

$(u_n)_{n\epsilon I}$ est une suite convergente $\iff (u_n)_{n\epsilon I}$ est croissante et majorée $\iff (u_n)_{n\epsilon I}$ est décroissante et minorée

↳ Tout suite convergente est bornée. (La réciproque est fausse)

⑧CRITERES DE CONVERGENCE D'UNE SUITE – LIMITES ET ORDRE

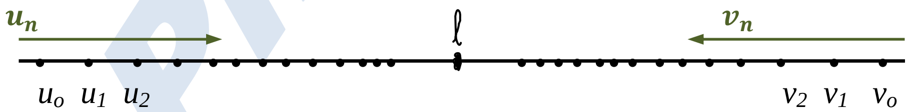
❶ $\begin{cases} \lvert u_n - l\rvert \leq v_n \\ lim(v_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \ lim(u_n) = l$	❸ $\begin{cases} u_n \leq v_n \\ lim(v_n) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \ lim(u_n) = -\infty$
❷ $\begin{cases} w_n \leq u_n \leq v_n \\ lim(v_n) = lim(w_n) = l \end{cases} \Rightarrow lim(u_n) = l$	❹ $\begin{cases} u_n \geq v_n \\ lim(v_n) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \ lim(u_n) = +\infty$

⑨SUITES ADJACENTES

On dit que deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont adjacentes si une est croissante , l'autre est décroissante et $lim(u_n - v_n) = 0$

- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes , alors elles sont convergentes et ont la même limite ℓ .
- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante,

  Alors : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$, $u_o \leq u_n \leq v_n \leq v_o$ $\big($ (u_n) est majorée par v_o et (v_n) est minorée par $u_o\big)$



⑩SUITES DE LA FORME $u_{n+1} = f(u_n)$ ET $v_n = f(u_n)$

- Si une suite (u_n) est convergente vers ℓ et f est une fonction continue en ℓ alors la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ est convergente et sa limite est $f(\ell)$.
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$,
  et $(u_n)_{n\geq p}$ une suite définie par $u_p \epsilon I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

Si la suite (u_n) est convergente de limite l et $l\epsilon I$, alors l est la solution de l'équation $f(x) = x$ dans I .

وقفة : حاسب نفسك في خلوتك ...تفكر في انقراض مدتك ...اعمل في زمان فراغك قبل شغلك ... تعلم قبل أن تسود... وأنظر هل نفسك معك أو عليك ، فإن لم تشغلها بحق شغلتك بباطل ....

Chapitre 8 FONCTIONS LOGARITHMES

① FONCTION LOGARITHME NEPERIENNE

1-1.Définition

La primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et qui s'annule en 1 est appelée la fonction Logarithme Népérienne, et on la note ln .

↳ le domaine de définition est $]0;+\infty[$ et $ln(1) = 0$ et $ln(e) = 1$ ($e \simeq 2.71$)

↳ la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et de plus $(\forall x \epsilon]0,+\infty[\,),(lnx)' = \frac{1}{x} > 0$

→ la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$

1-2.Propriétés : $(\forall a > 0)(\forall b > 0)(\forall n \epsilon \mathbb{Q}^*)$

$ln(ab) = ln(a) + ln(b)$	$ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$	$ln\left(\frac{a}{b}\right) = -ln\left(\frac{b}{a}\right)$	$ln\left(\frac{1}{a}\right) = -ln(a)$
$lna^n = n\,ln(a)$	$ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} ln(x_k)$; $(x_k \epsilon \mathbb{R}_*^+ et\ k\epsilon\{1;2;\dots;n\}, n\epsilon\mathbb{N}^*)$		
$(\forall ab > 0)$, $ln(ab) = ln\lvert a\rvert + ln\lvert b\rvert$	$(\forall x\epsilon\mathbb{R}_*^+)(\forall n\epsilon\{2k/k\epsilon\mathbb{N}\})$, $ln(x^n) = nln\lvert x\rvert$		
$ln(a) > ln(b) \Leftrightarrow a > b$	$ln(a) < ln(b) \Leftrightarrow a < b$	$ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b$	

1-3. Solutions de l'équation $ln(x) = a$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $x\epsilon\mathbb{R}_*^+$, On a : $\boxed{ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a \text{ , alors } S = \{e^a\}}$

1-4. Les limites Usuelles et Fondamentales

$\lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$	$\lim_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$	$\lim_{x\to 0^+} x^n ln(x) = 0_-$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0_+$
$\lim_{x\to 1} \frac{ln(x)}{x-1} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = 1$	$\lim_{x\to a} \frac{ln(x) - ln(a)}{x-a} = ln'(a) = \frac{1}{a}$	

Remarques :

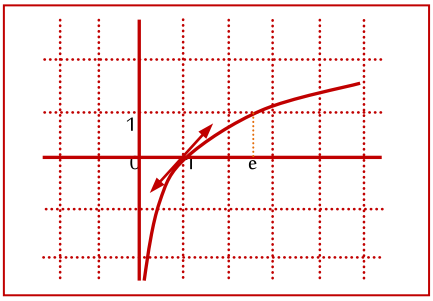
On pose : $x = t^n$ *, alors* $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^n = \lim_{x\to 0^+} (n\,t \ln t)^n = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = \lim_{x\to+\infty} n\left(\frac{\ln t}{t}\right)^n = 0$

1-5.Tableau de variations de la fonction ln

- La fonction ln est une bijection de l'intervalle $\mathbb{R}_*^+$ vers $\mathbb{R}$.
- L'équation $ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_*^+$, on la note $ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

x	0		1		$+\infty$
	‖		$+$		
ln	‖ $-\infty$	↗	0	↗	

La courbe de la fonction ln



- Le signe de $\ln(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

② LA FONCTION $x \mapsto ln(u(x))$

Domaine de définition :

- Si $f(x) = ln(u(x))$, alors $D_f = \{x\epsilon\mathbb{R} / u(x) > 0\}$
- Si $f(x) = ln\lvert u(x)\rvert$, alors $D_f = \{x\epsilon\mathbb{R} / u(x) \neq 0\}$

Dérivée Logarithmique

- Si u une fonction dérivable et strictement positive sur I, alors la fonction $x \longmapsto ln(u(x))$ est dérivable sur I et on a : $\left(ln(u(x))\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

- Si u une fonction dérivable et non nulle sur I, alors la fonction $x \longmapsto ln|u(x)|$ est dérivable sur I et on a : $(ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Limite de la fonction $x \longmapsto ln(u(x))$

- Si $u(x) \longrightarrow +\infty$, alors $ln(u(x)) \to +\infty$
- Si $u(x) \longrightarrow 0_+$, alors $ln(u(x)) \to -\infty$
- Si $u(x) \to a$ et ln est continue en a , alors $ln(u(x)) \to lna$

③ FONCTION LOGARITHME DE BASE a

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

- La fonction logarithme de base a est la fonction , notée par log_a , définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par : $log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$
- **Propriétés** :$(\forall x > 0)(\forall y > 0)(\forall r \epsilon \mathbb{Q}^*)$

$log_a(a) = 1$	$log_a(1) = 0$	$log_a(a^r) = r$
$log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$	$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$	$log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -log_a(x)$
$log_a(x^r) = rlog_a(x)$	$log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y$	$log_a(x) > y \Leftrightarrow x > a^y$

- La fonction logarithme de base e est la fonction logarithme népérienne car : $log_e(x) = \frac{ln(x)}{ln(e)} = ln(x)$

- Pour tout $x \epsilon \mathbb{R}_*^+$: $\left(log_a(x)\right)' = \frac{1}{x\, ln(a)}$

- S i $\underline{a = 10}$ alors La fonction logarithme de base 10 est appelée La fonction logarithme décimal, on la note Log et on a : pour tout $x \epsilon \mathbb{R}_*^+$, $Log(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}$

$$Log(10) = 1 \quad ; \quad Log(1) = 0 \quad , \quad Log(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^y$$

④FONCTIONS PRIMITIVES

• $\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + c$; $(c\epsilon\mathbb{R})$	• $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}ln|ax+b| + c$; $(c\epsilon\mathbb{R})$
• $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = ln|u(x)| + c$; $(c\epsilon\mathbb{R})$	

علمتني الرياضيات... !

أن أقصر طريق بين نقطتين هو – الخط المستقيم – الا أن هناك من يفضل – اللف و الدوران – للوصول إلى مبتغاه......! فاختر لنفسك الطريق الأقرب والأنجح و الأربح....!

علمتني الرياضيات... ! أن عدم وجود حل قد يكون حلا... !

Chapitre 9 FONCTIONS EXPONENTIELLES

① FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1-1.Définition : la fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_*^+$ vers $\mathbb{R}$,

La fonction réciproque de la fonction ln est appelée la fonction Exponentielle népérienne ou la fonction Exponentielle de base $\boldsymbol{e}$,et on la note exp .

$$\boldsymbol{exp} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_*^+$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{exp(x) = e^x}$$

- $exp(1) = e$; $exp(0) = 1$

1-2.Propriétés : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})(\forall b \epsilon \mathbb{R})(\forall n \epsilon \mathbb{Q}^*)$

$(\forall x \epsilon\ \mathbb{R})$, $ln(e^x) = x$	$(\forall x \epsilon\ \mathbb{R}_*^+)$, $e^{ln(x)} = x$	$(\forall x \epsilon\ \mathbb{R})(\forall x \epsilon\ \mathbb{R}), y = exp(x) \Leftrightarrow x = ln(y)$		
$e^{x+y} = e^x e^y$	$e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$	$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$	$e^{rx} = (e^x)^r$	$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$
$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$	$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$	$exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \prod_{k=1}^{n} exp(x_k)$; $(x_k \epsilon \mathbb{R}$ et $k \epsilon \{1; 2; \dots; n\}, n \epsilon \mathbb{N}^*)$		

Solutions de l'équation $\boldsymbol{e^x = a}$ dans $\mathbb{R}$.

- si $a \leq 0$, alors $S = \emptyset$
- si $a > 0$, alors $x = ln(a)$

1-3. Les limites Usuelles et Fondamentales

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} (x\, e^x) = 0_-$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x}\right) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{e^x - a}{x - a} = e^a$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0_-$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

Preuve : On pose : $\boldsymbol{x = nt}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim\limits_{t \to -\infty} (nt\, e^t)^n = \lim\limits_{t \to -\infty} n^n (t\, e^t)^n = 0_-$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^n}\right) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^{nt}}{(nt)^n} = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(\dfrac{e^t}{nt}\right)^n = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{e^t}{t}\right)^n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n \lim\limits_{t \to +\infty} \left(\dfrac{e^t}{t}\right) = +\infty$

1-4.Tableau de variations de la fonction $\boldsymbol{exp}$

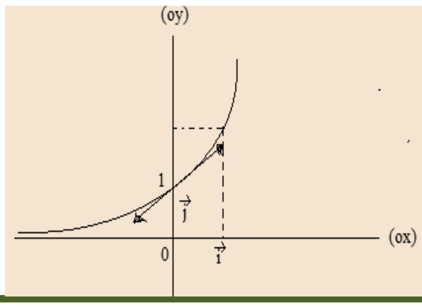
La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $(\forall x \epsilon\ \mathbb{R})$, $(e^x)' = e^x$

- La fonction exp est une bijection de l'intervalle $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_*^+$.
- Le signe de $exp(x)$: $(\forall x \epsilon\ \mathbb{R})$, $exp(x) > 0$

T.V de exp :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
	$+$ $\qquad$ e:
exp	$0 \nearrow$

La courbe de la fonction exp



② LA FONCTION : $x \mapsto exp(u(x))$

- **Domaine de définition**
  - Si $f(x) = exp(u(x)) = e^{u(x)}$, alors $D_f = D_u$
- **Dérivée de la fonction : $x \longmapsto exp(u(x))$**

  Si u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$

- **Limite de la fonction $x \longmapsto exp(u(x))$**
  - Si $u(x) \longrightarrow +\infty$ alors $e^{u(x)} \longrightarrow +\infty$
  - Si $u(x) \longrightarrow -\infty$ alors $e^{u(x)} \longrightarrow 0$
  - Si $u(x) \rightarrow a$ et exp est continue en a , alors $e^{u(x)} \longrightarrow e^{a}$

③ FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

- La fonction exponentielle de base a est la fonction réciproque de la fonction log_a, on la note exp_a , définie sur $\mathbb{R}$ par : $exp_a(x) = a^x = e^{x ln(a)}$

  $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) : log_a(a^x) = x$; $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_*^+) : a^{log_a(x)} = x$

- **Propriétés** :$(\forall x \epsilon \mathbb{R})(\forall y \epsilon \mathbb{R})(\forall n \epsilon \mathbb{Q}^*)$

$a^{x+y} = a^x a^y$	$a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$	$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$	$(a^x)^y = a^{x \times y}$
$(ab)^x = a^x b^x$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$	$a^x = y \iff x = log_a(y)$	

- La fonction $\boldsymbol{exp_a}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout $x \epsilon \mathbb{R}$: $\left(exp_a(x)\right)' = (a^x)' = ln(a)a^x$
- **Formes indéterminées** : 1^{∞} ; ∞^0 ; 0^0

$N.B$: $\lim\limits_{x \to \cdots} (u(x))^{v(x)} = \lim\limits_{x \to \cdots} e^{v(x) ln(u(x))}$; $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x - 1}{x}\right) = lna$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$

④FONCTIONS PRIMITIVES

• $\int e^{ax+b}\, dx = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} + c$; $(c \epsilon IR)$	• $\int u'(x)e^{u(x)}\, dx = e^{u(x)} + c$; $(c \epsilon IR)$

بقدر الكد تكتسب المعالي ومن طلب العلا سهر الليالي
ومن رام العلا من غير كـد أضاع العمر في طلب المحـال
تروم العز ثم تنام ليـــلا يغوص البحر من طلب اللآلي
(ديوان الشافعي رحمه الله)

Chapitre 10 CALCUL INTEGRAL

① INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et soit a et b deux éléments de I.et F une primitive de f.

Le nombre réel $F(b)-F(a)$ est appelé l'intégrale de la fonction f de a et b ,et on le note $\int_a^b f(x)dx$

On écrit alors : $\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)}$ *(se lit intégrale de f(x)dx de a et b ou somme de f(x)dx de a et b)*

Remarque : La lettre x peut remplacée par une autre lettre, on dit que la variable x est muette

Ainsi on a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \cdots$

Propriétés

• $\int_a^a f(x)dx = 0$	• $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$	• $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$,pour tout $k\epsilon\mathbb{R}$
• $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (Relation de Chasles)		
• $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$ (c'est la formule de linéarité)		
• Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$	• Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$	
• Si f est périodique de période T, alors $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$		

② TECHNIQUES DE CALCUL D'INTEGRALES

2-1. Utilisation des primitives (En utilisant le tableau des primitives des fonctions usuelles et leurs propriétés)

2-2. Intégration par partie : Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a,b]$,

Alors pour tout $(a,b)\epsilon I^2$ on a : $\boxed{\int_a^b u(x).v'(x)dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)dx}$

2-3. Intégration par Changement de variable :

Soit f une fonction continue sur I et u une fonction dérivable sur I telle que : u' est continue sur J et $u(J)\subset I$

alors pour tout $(\alpha,\beta)\epsilon J^2$ on a : $\boxed{\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx}$

➢ Si u une bijection de J vers I , alors pour tout $(a,b)\epsilon I^2$ on a : $\int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(b)}^{u^{-1}(a)} f(u(t))u'(t)dt$

(En posant $x=u(t)$ c-à-d $dx = u'(t).dt$ et $\begin{cases} x=a \Longrightarrow t=u^{-1}(a) \\ x=b \Longrightarrow t=u^{-1}(b) \end{cases}$)

③ INTEGRATION ET ORDRE

3-1.Positivité et croissante – Intégrale et Valeur absolue :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a<b)$

• Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$	• Si f est négative sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
• Si $f(x)\geq g(x)$ pour tout $x\epsilon[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$	• $\left\|\int_a^b f(x)dx\right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|dx$

3-2.Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment :

Soit f une fonction continue sur I et soit $(a,b)\epsilon I^2$ tel que $a\leq b$

➢ Si $\exists(m,M)\epsilon\mathbb{R}^2$ tels que pour tout $[a,b]$, $m\leq f(x)\leq M$, alors $m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

➢ S'il existe un réel M tels que : pour tout $x\epsilon[a,b]$; $|f(x)|\leq M$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$

↳ Le nombre réel $\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$ est appelé **la valeur moyenne** de la fonction f sur $[a,b]$.

➢ $\boxed{Si\ f\ est\ continue\ sur\ [a,b]\ ,alors\ \ (\exists\alpha\epsilon[a,b]),\ f(\alpha)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$ « Théorème de la moyenne »

↳ $f(\alpha)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \iff F(b)-F(a)=(b-a)F'(\alpha)$ (le T.A.F appliqué à la fonction F : $x\to\int_a^x f(t)dt$)

④EXPRESSION D'UNE PRIMITIVE A L'AIDE D'UNE INTEGRALE

Propriété 1 : Soit f une fonction continue sur I et a un élément de I .

La fonction φ définie sur I par $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ est la fonction primitive de f sur I s'annulant en a.

→ La fonction φ est dérivable sur I et on a : $(\forall x\epsilon I)\ ,\ \big(\varphi(x)\big)'=f(x)$

→ Pour tout $x_0\epsilon I$, on a :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)dt\right)=\varphi'(x_0)=f(x_0)$$

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur J et u une fonction dérivable sur J telle que $u(J)\subset I$,

Alors pour tout $a\epsilon I$ on a : la fonction $F:x\mapsto\int_a^{u(x)} f(t)dt$ est dérivable sur I

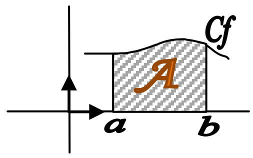
Et de plus : $(\forall x\epsilon I)\ ,F'(x)=u'(x).f\big(u(x)\big)$

⑤APPLICATION DU CALCUL INTEGRAL : CALCUL DES AIRES ET DES VOLUMES

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

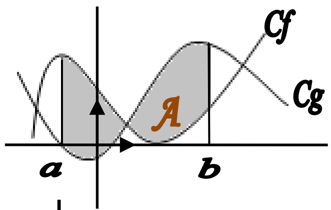
➢ **• L'aire $\mathcal{A}$ du domaine** délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est donné par la formule :

$$\boxed{\mathcal{A}=\int_a^b|f(x)|dx\,.(u.\mathcal{A})\qquad (u.\mathcal{A}=\|\vec{i}\|\ \|\vec{j}\|cm^2)}$$



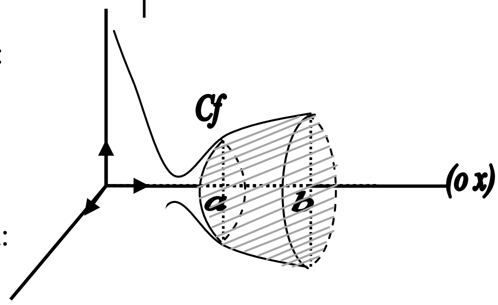
➢ **• L'aire $\mathcal{A}$ du domaine** délimité par les courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est donné par la formule :

$$\boxed{\mathcal{A}=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx\,.(u.\mathcal{A})}$$



➢ **• Le volume V du solide** engendré par la rotation de la courbe C_f autour de l'axe des abscisses un tour complet dans l'intervalle $[a,b]$ est:

$$\boxed{\mathcal{V}=\pi\int_a^b(f(x))^2\,dx\,.(u.\mathcal{V})\qquad (u.\mathcal{V}=\|\vec{i}\|^3cm^3)}$$



➢ **• Le volume V du solide** engendré par la rotation de la courbe C_f autour de l'axe des ordonnées un tour complet dans l'intervalle $[a,b]$ est:

$$\boxed{\mathcal{V}=\pi\int_{f(a)}^{f(b)}(f^{-1}(x))^2\,dx\,.(u.\mathcal{V})}$$

⑥ENCADREMENT D'UNE INTEGRALE PAR DEUX SUITES. METHODE DES RECTANGLES

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$. Pour tout $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\qquad et\qquad B_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

Alors les deux suites (A_n) et (B_n) sont convergentes et admettent une limite commune est $\int_a^b f(x)dx$.

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=\lim_{n\to+\infty}B_n=\int_a^b f(x)dx$$

Chapitre 11 EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE : $y' = ay$ et $y' = ay + b$

Soit a un réel non nul , L'équation $y' = ay$ où l'inconnue est une fonction numérique y, dérivable sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle de $\mathbb{R}$) est appelée équation différentielle du premier ordre .

L'équation différentielle	La solution générale
$y' = g(x)$	$y = G(x) + c$ où $c\epsilon\mathbb{R}$ (G est une primitive de g)
$y' = ay \quad (a \neq 0)$	$y = ke^{ax}$ où $k\epsilon\mathbb{R}$
$y' = ay + b \quad (a \neq 0)$	$y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où $k\epsilon\mathbb{R}$
$\begin{cases} y' = ay + b & (a \neq 0) \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$	$y(x) = \left(y_o + \frac{b}{a}\right) e^{a(x - x_o)} - \frac{b}{a}$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE : $y'' + ay' + by = 0$

- Soit a et b deux réels , L'équation $y'' + ay' + by = 0$ où l'inconnue est une fonction numérique y, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle de $\mathbb{R}$) est appelée équation différentielle du second ordre .
- On considère l'équation différentielle : $(E)\ \ y'' + ay' + by = 0$
  L'équation caractéristique de l'équation (E) est $r^2 + ar + b = 0$, son discriminant est $\Delta = a^2 - 4b$

Si	Alors L'équation caractéristique admet	La solution générale de (E)
$\Delta = 0$	une racine double r	$y = (\alpha x + \beta)e^{rx}$ où $(\alpha;\beta)\epsilon\mathbb{R}^2$
$\Delta > 0$	Deux racines réelles distinctes r_1 et r_2	$y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ où $(\alpha;\beta)\epsilon\mathbb{R}^2$
$\Delta < 0$	Deux racines complexes conjuguées r_1 et r_2 $r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$ où $(p;q)\epsilon\mathbb{R}^2$	$y = (\alpha cos(qx) + \beta sin(qx))e^{px}$ où $(\alpha;\beta)\epsilon\mathbb{R}^2$

Equations particulières

L'équation différentielle	La solution générale
$y'' + \omega^2 y = 0$	$y = \alpha cos(\omega x) + \beta sin(\omega x)$ où $(\alpha;\beta)\epsilon\mathbb{R}^2$
$y'' - \omega^2 y = 0$	$y = \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}$ où $(\alpha;\beta)\epsilon\mathbb{R}^2$

وصيـــــــة أخي...أختي...التلميذ(ة)

أندم على ما مضى من تفريطك..، أجتهد في لحاق الكاملين مادام في الوقت سعة ..، اسق غصنك مادامت فيه رطوبة ..
اذكر الساعات التي ضاعت منك فكفى بها عضة ... و اعلم أنك تملك طاقات كبيرة و قوى خفية تحتاج أن تزيل عنها غبار التقصير
و الكسل ... فأنت أقدر مما تتصور ... و أقوى مما تتخيل ... و أذكى بكثير مما تعتقد ... شطب كل الكلمات السلبية عن نفسك
(لست ذكيا ... أنا فاشل ... لا أستطيع ...المادة صعبة ...)، ثق بتوفيق الله و أبذل الأسباب ... احذر رفقاء السوء و قتلة
الوقت ... أد واجباتك ... راجع يوما بعد يوم ..نظم وقتك ... أحذف كلمة سوف من حياتك ... حدد أولوياتك ...
تذكر أن أحسن طريقة لاستغلال الوقت أن تبدأ الآن ...

عليك بعمل اليوم لا تنتظر غدا ❖❖❖❖❖ إن يوم العاجزين غـــــد

النجاح فكرا يبدأ و شعورا يدفع و يحفز و عملا و صبرا يترجم .... هو في الأخير رحلة.

متعـــــــة : فكر ... وأحب ... وابدأ رحلتك نحو هدفك

Chapitre 12 NOMBRES COMPLEXES

① DEFINITIONS ET NOTATIONS

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ ses éléments s'appelles des nombres complexes qui vérifie :

- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient un nombre non réel noté i et qui vérifie $i^2 = -1$
- Tout nombre complexe z s'écrit et de façon unique comme : $\boldsymbol{z = a + ib}$ où a et b sont des réels .
  L'écriture : $\boldsymbol{a + ib}$ s'appelle **la forme algébrique** du nombre complexe $\boldsymbol{z}$
  Le réel $\boldsymbol{a}$ s'appelle **la partie réelle** de z , notée $Re(z)$ et on écrit $\boldsymbol{Re(z) = a}$
  Le réel $\boldsymbol{b}$ s'appelle **la partie imaginaire** de z , notée $Im(z)$ et on écrit $\boldsymbol{Im(z) = b}$
- On définit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux opérations appelées la somme et la multiplication qui ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$.

On a : $\boxed{\mathbb{C} = \{a + ib \,/\, (a\,;b)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\}}$ $\boxed{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$ $\boxed{\mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$ $\boxed{\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}}$

L'ensemble $i\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$, s'appelle l'ensemble des imaginaires purs ; $i\mathbb{R} = \{ib \,/\, b\in\mathbb{R}\}$

Remarque : L'ensemble des nombres complexes n'est pas ordonné.

Egalité de deux nombres complexes

$$\boxed{(\forall(z;z') \in \mathbb{C}^2)\ ,\quad z = z' \iff \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases} \quad ; \quad z = 0 \iff \begin{cases} Re(z) = 0 \\ Im(z) = 0 \end{cases}}$$

② LES OPERATIONS DANS $\mathbb{C}$.

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$.

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

- $\boldsymbol{z + z' = (a + a') + (b + b')i}$
- $\boldsymbol{z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = aa' + ab'i + iba' + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + ba')i}$

③ LE CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

- **Le conjugué** du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe noté $\boldsymbol{\bar{z}}$, tel que $\boldsymbol{\bar{z} = a - ib}$.
- **Propriétés : (Règles de calculs)**

$\bar{\bar{z}} = z$	$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$	$\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$	$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$	$\overline{z^n} = (\bar{z})^n \quad (n \in \mathbb{N})$
$z + \bar{z} = 2x = 2\,Re(z)$	$z - \bar{z} = 2iy = 2iIm(z)$	$z.\bar{z} = x^2 + y^2$	$z = z' \iff \bar{z} = \bar{z'}$		
$z \in \mathbb{R} \iff Im(z) = 0 \iff z = \bar{z}$	$z \in i\,\mathbb{R} \iff Re(z) = 0 \iff z = -\bar{z}$				

④ LE MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

Le nombre réel positif $\sqrt{z.\bar{z}}$ s'appelle le module de z , noté $|z|$ et on a : $\boxed{|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}}$

Propriété :

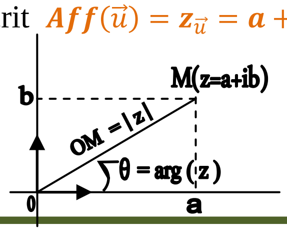
$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert.\lvert z'\rvert$	$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$(n \in \mathbb{N})\ \lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$\lvert z\rvert = \lvert\bar{z}\rvert = \lvert -\bar{z}\rvert = \lvert -z\rvert$	$\lvert z + z'\rvert \le \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$
• Si $z = a \in \mathbb{R}$, alors $\lvert z\rvert = \lvert a\rvert$ • Si $z = ib \in i\mathbb{R}$, alors $\lvert z\rvert = \lvert ib\rvert = \lvert b\rvert$	$\lvert z\rvert = 1 \iff z.\bar{z} = 1 \iff z = \frac{1}{\bar{z}}$			

⑤ L'INTERPPRETATION GEOMETRIQUE ET REPRESENTATION D'UN NOMBRE COMPLEXE

Affixe d'un point-Affixe d'un vecteur

Le plan $(\mathcal{P})$ est muni du repère orthonormé $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2})$,Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

- Le point M de coordonnées (a, b) dans $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est appelé l'image du complexe z et on écrit $M(z)$.
- Le nombre complexe z est appelé l'affixe du point M, on le note $\boldsymbol{Aff(M)}$ ou $\boldsymbol{z_M}$
- Le vecteur $\vec{u}(a; b)$ s'appelle l'image du nombre complexe z et on écrit $\vec{u}(z)$.
- Le complexe z s'appelle l'affixe du vecteur $\vec{u}(a; b)$, noté $\boldsymbol{Aff(\vec{u})}$ ou $\boldsymbol{z_{\vec{u}}}$, on écrit $\boldsymbol{Aff(\vec{u}) = z_{\vec{u}} = a + ib}$
- Le plan $(\mathcal{P})$ s'appelle un plan complexe
- L'axe $(o, \vec{e_1})$ s'appelle l'axe des réels
- L'axe $(o, \vec{e_2})$ s'appelle l'axe des imaginaires



Pour tout M et M' du Plan (P) on a : $Aff\left(\overrightarrow{MM'}\right) = Aff(M') - Aff(M)$

⑥ FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

6-1.L'argument d'un nombre complexe non nul.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

Définition : Soit z un nombre complexe non nul et M son image.

Toute mesure $\boldsymbol{\theta}$ de l'angle orienté $(\widehat{\vec{e_1},\overrightarrow{0M}})$ s'appelle **un argument** de z ,

On le note $\boldsymbol{arg}$ et on écrit $\boldsymbol{arg(z) \equiv \alpha[2\pi]}$ ou $\boldsymbol{arg(z) = \alpha + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})}$

Propriétés

$(\widehat{\vec{e_1},\overrightarrow{AB}}) \equiv arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$	$arg(zz') \equiv arg(z) + arg(z')\ [2\pi]$	$arg(\bar{z}) \equiv -arg(z)\ [2\pi]$
$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) \equiv arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$	$arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv arg(z) - arg(z')[2\pi]$	$arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -arg(z)\ [2\pi]$
$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv arg(z_{\vec{v}}) - arg(z_{\vec{u}})\ [2\pi]$	$arg(z^n) \equiv n\, arg(z)[2\pi]$	$arg(-z) \equiv arg(z) + \pi[2\pi]$
$z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow arg(z) = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow arg(z) \equiv 0[\pi]$		
$z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z} \Leftrightarrow arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$		

L'INTERPPRETATIONS GEOMETRIQUES

L'écriture complexe	Interprétation géométrique
Le module $\lvert z_A - z_B \rvert$	La distance AB
$Aff(I) = z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$	I est le milieu du segment $[AB]$
$Aff(\overrightarrow{AB}) = Aff(B) - Aff(A) = z_B - z_A$	L'Affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$
$arg(z_A - z_B)$	La mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{e_1},\overrightarrow{AB}})$
$arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)$	La mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}})$
$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$	Les points A,B et C sont alignés
$\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} \in \mathbb{R}$ ou $arg\left(\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}\right) \equiv 0[\pi]$	Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
$\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} \in i\mathbb{R}$ ou $arg\left(\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$	Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}$ ou $arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}\right) \equiv 0[\pi]$	(AB) ∥ (DC)
$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D} \in i\mathbb{R}$ ou $arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$	(AB) ⊥ (DC)
$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \times \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} \in \mathbb{R}$ et A, B et C non alignés	Les points A,B ,C et D sont cocycliques
$aff(G) = Z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$	$G = bary\{(A,\alpha)\ ;\ (B,\beta)\ ;\ (C,\gamma)\}$
$(E) = \{M \in (P) /\ \lvert z - z_A \rvert = R\}$	l'ensemble (E) est le cercle de centre A et de rayon R
$(E) = \{M \in (P) /\ \lvert z - z_A \rvert = \lvert z - z_B \rvert\}$	l'ensemble (E) est la médiatrice du segment $[AB]$
$(E) = \{M \in (P) /\ arg(z - z_A) \equiv \theta[\pi]\}$	l'ensemble (E) est la droite (D) passe par A et de coefficient directeur $tan\theta$, excepté A
$z_B - z_A = z_C - z_D$ ou $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$	ABCD est un parallélogramme
$z_B - z_A = z_C - z_D$ et $arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$	ABCD est un rectangle
$z_B - z_A = z_C - z_D$ et $\lvert z_B - z_A \rvert = \lvert z_C - z_D \rvert$	ABCD est un losange
$z_B - z_A = z_C - z_D$ et $\lvert z_B - z_A \rvert = \lvert z_C - z_D \rvert$ et $arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$	ABCD est un carré
$\lvert z_B - z_A \rvert = \lvert z_C - z_A \rvert$	ABC est un triangle isocèle en A
$arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$	ABC est un triangle rectangle en A
$arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $\lvert z_B - z_A \rvert = \lvert z_C - z_A \rvert$	ABC est un triangle rectangle isocèle en A
$arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\lvert z_B - z_A \rvert = \lvert z_C - z_A \rvert$	ABC est un triangle équilatéral

6-2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, on a donc $|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\theta \equiv arg(z)\,[2\pi]$

Tout nombre complexe non nul z à une écriture de la forme $\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = [r;\theta]}$

Cette écriture s'appelle **la forme trigonométrique** du nombre complexe non nul ,

Avec $\sin\theta = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{b}{r}$; $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{Re(z)}{|z|}$

Remarque : $\arg z = Arctan\left(\frac{b}{a}\right)[2\pi]$ $(si\ a > 0)$ *ou* $\arg z = Arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi[2\pi]$ $(si\ a < 0)$

Propriétés (Règles de calculs)

$z = z' \Leftrightarrow [r,\theta] = [r',\theta'] \Leftrightarrow r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi, (k\in\mathbb{Z})$		
$\bar{z} = \overline{[r,\theta]} = [r,-\theta]$	$z^n = [r,\theta]^n = [r^n, n\theta]$	$z\,z' = [r,\theta]\times[r',\theta'] = [rr',\theta+\theta']$
$\frac{1}{z} = \frac{1}{[r,\theta]} = \left[\frac{1}{r},-\theta\right]$	$\frac{z}{z'} = \frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = \left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$	

⑦FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ .

- L'écriture $r\,e^{i\theta}$ s'appelle la **Notation exponentielle** ou la **Forme exponentielle** du nombre z .

$$\boxed{z = r\,e^{i\theta} = [r,\theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{et} \quad e^{i\theta} = [1,\theta] = \cos\theta + i\sin\theta}$$

- **Formule de Moivre**

$$\boxed{(\forall\theta\in\mathbb{R})\,(\forall n\in\mathbb{N}), (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad ; \quad [1,\theta]^n = [1,n\theta]}$$

- **Formules d'Euler – Linéarisation**

Pour tout réel θ : $\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$

↳ $e^{inx} + e^{-inx} = 2\cos(nx)$ et $e^{inx} - e^{-inx} = 2i\sin(nx)$

⑧ ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{C}$

8-1. Les racines carrées d'un nombre complexe u non nul.

Soit u un nombre complexe non nul tel que : $u = a + i\,b = r\,e^{i\theta}$

- Les racines carrées de u sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\boldsymbol{z^2 = u}$.

On pose : $z = x + i\,y = \rho\,e^{i\alpha}$ tels que : $x; y; \alpha \in \mathbb{R}$ et $\rho\in\mathbb{R}^{+*}$.

1°Méthode : $z^2 = u \Leftrightarrow (x + i\,y)^2 = a + i\,b \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ xy = \frac{b}{2} \end{cases}$

2°Méthode : $z^2 = u \Leftrightarrow (\rho\,e^{i\alpha})^2 = r\,e^{i\theta} \Leftrightarrow z_k = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)},\ k\in\{0,1\} \Leftrightarrow z_o = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ *et* $z_1 = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$

8-2 Résolution de l'équation : $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = 0$		$z = \frac{-b}{2a}$
	$\Delta \neq 0$	$\Delta = \alpha = (\sqrt{\alpha})^2 \quad (\alpha > 0)$ $\Delta = -\alpha = (i\sqrt{\alpha})^2$ $\Delta = \alpha\,i = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(1+i)\right)^2$ $\Delta = -\alpha\,i = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(1+i)\right)^2$ $\Delta = \alpha + i\,\beta = (x+iy)^2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ x^2-y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$ $\Rightarrow \Delta = (\delta)^2$	$\boldsymbol{z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}}$ $\boldsymbol{z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}}$ $\boldsymbol{S = \{z_1 ; z_2\}}$ $\begin{cases} \boldsymbol{z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}} \\ \boldsymbol{z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}} \end{cases}$

⑨ LES RACINES $n^{ème}$ D'UN NOMBRE COMPLEXE a NON NUL($n\epsilon\mathbb{N}^* - \{1\}$)

- Les racines $n^{ème}$ de a sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = a$. (on pose $a = r\,e^{i\theta}$)

$$z^n = a \iff \boxed{z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \text{avec } k \in \{0,1,2,\dots,(n-1)\}}$$

- Les racines $n^{ème}$ de l'unité sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$.

$$z^n = 1 \iff \boxed{z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{avec } k \in \{0,1,2,\dots,(n-1)\}}$$

- L'ensemble des racines $n^{ème}$ de l'unité est noté U_n ,

et on a : $U_n = \{z\epsilon\mathbb{C} \;/\; z^n = 1\} = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}} \;/\; k\epsilon\{0,1,2,\dots,n-1\}\right\}$ et $cardU_n = n$

Propriétés : ❶ pour tout $k\epsilon\{0,1,2,\dots,n-1\}$: $\overline{z_k} = z_{n-k}$

❷ La somme de n racines $n^{ème}$ de l'unité est nulle .

❸Les racines $n^{ème}$ de l'unité sont représentées dans le plan complexe par les sommets d'un polygone régulier à n coté inscrit dans le cercle trigonométrique, et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1.Ce polygone est symétrique par rapport à l'axe des abscisses . $OM_k = |z_k| = \sqrt[n]{r}$

⑩ LES TRANSFORMATIONS USUELLES $f : M(z) \mapsto M'(z')$

La transformation f	Expression vectorielle	Ecriture complexe	f^{-1}
$t_{\vec{u}}$: Translation de vecteur $\vec{u}(b)$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + b$	$t_{-\vec{u}}$
$h(\Omega,k)$: L'Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k\,(z-\omega)$	$h^{-1}\left(\Omega,\frac{1}{k}\right)$
$R(\Omega,k)$: Rotation de centre Ω et d'angle α	$\begin{cases}\Omega M = \Omega M' \\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \alpha[2\pi]\end{cases}$	$z' - \omega = e^{i\alpha}\,(z-\omega)$	$R^{-1}(\Omega,-\alpha)$
S_Ω : Symétrie centrale de centre $\Omega(\omega)$	$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = -\,(z-\omega)$	S_Ω

Etude de la transformation f qui transforme $M(x)$ à en $M'(z')$ tel que : $z' = az + b$

Si	$a = 1$	$a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$	$a \notin \mathbb{R}$ et $\lvert a\rvert = 1$	$a \notin \mathbb{R}$ et $\lvert a\rvert \neq 1$
Alors la transformation f est	une translation de vecteur $\vec{u}$, tel que $Aff(\vec{u}) = b$	L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k = a$ avec $\omega = \frac{b}{1-a}$	La Rotation de centre $\Omega\left(\omega = \frac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $\alpha = arg(a)$	La composition de la Rotation $R(\Omega,\alpha)$ et l'homothétie $h(\Omega,k)$, tel que : $k = \lvert a\rvert$, $\alpha = arg(a)$ et $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$

تذكر مزيان أن

$1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$		$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$	
$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$		$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$	
$-i = e^{-i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$	$i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$	$-1 = e^{i\pi}$	$-e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$		$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	
$\sin\theta = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$1 - \cos\theta = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$1 + \cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$	

علاقة X : « تزوجت البطالة بالثواني فولدا غلاما و غلامة فأمالابن فسموه بفقر وأما البنت فسموها ندامة !!! . »

Chapitre 13 ARITHMETIQUE DANS $\mathbb{Z}$

① DIVISIBILITÉ DANS L'ENSEMBLE $\mathbb{Z}$ (/)

Soit a et b deux entiers relatifs. On dit que b divise a s'il existe $k\epsilon\mathbb{Z}$ tel que $\boldsymbol{a = kb}$ et on écrit $\boldsymbol{b/a}$

$$\boldsymbol{b/a \iff (\exists k\epsilon\,\mathbb{Z})\,,a = bk}$$

→ On dit aussi que a est divisible par b ou que a est multiple de b ou encore que b est un diviseur de a.

Propriétés de la divisibilité : Soit a , b , c et d des éléments de $\mathbb{Z}$.

❶ a/a ; $a/-a$ ❷ b/a et $a/c \Rightarrow b/c$ ❸ b/a et $a/b \Rightarrow \lvert b\rvert = \lvert a\rvert$	❻ b/a et $b/c \Rightarrow b/a\times c$ et $b/a+c$ $\Rightarrow b/\alpha a+\beta c$ $(\alpha,\beta\epsilon\,\mathbb{Z}^*)$ ❼ b/a et $d/c \Rightarrow b\times d/a\times c$ ❽ $(\forall k\epsilon\mathbb{Z})$, $b/kb+a \Rightarrow b/a$ ❾ $\left(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*\right)$, $b^n/a \Rightarrow b/a$ ❿ $a/1 \Rightarrow a=1$ ou $a=-1$	$a/0$; $1/a$; $-1/a$
❹ b/a et $c\epsilon\,\mathbb{Z} \Rightarrow b/ac$ ❺ b/a $(n\epsilon\,\mathbb{N}) \Rightarrow b^n/a^n$ ❻ b/a $(n\epsilon\,\mathbb{N}^*) \Rightarrow b/a^n$		$b/a \iff a\epsilon\, D_a$ $b/a \iff a\epsilon\, b\mathbb{Z}$ $b\mathbb{Z} = \{kb\ /\ k\epsilon\mathbb{Z}\}$

② DIVISION EUCLIDIENNE DANS $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

- Soit a et b deux entiers naturels tel que : $b \neq 0$.

  $(\forall(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\epsilon\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*)(\exists!\,(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})\,\epsilon\mathbb{N}^2)$, $\boldsymbol{a = bq + r}$; $(\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{r} < b)$

- Soit a et b deux entiers relatifs tel que : $b \neq 0$.

  Il existe un unique couple $(q;r)\epsilon\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ tel que : $\boldsymbol{a = bq + r}$ et $\boldsymbol{0 \leq r < |b|}$

  $(\forall(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\epsilon\,\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)\,(\exists!\,(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})\,\epsilon\,\mathbb{Z}\times\mathbb{N})$, $\boldsymbol{a = bq + r}$; $(\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{r} < |\boldsymbol{b}|)$

- **Technique très importante :** Tout entier naturel n s'écrit sous la forme : $n = bk + r$ et $0 \leq r < b-1$

  → Tout entier naturel n peut s'écrire sous la forme $2k$ ou $2k+1$ avec $k\epsilon\mathbb{N}$

  → Tout entier naturel n peut s'écrire sous la forme $3k$ ou $3k+1$ ou $3k+2$ avec $k\epsilon\mathbb{N}$

③ CONGRUENCE MODULO n ($\equiv$)

Soit n un entier naturel non nul .

• On dit que deux entiers naturels a et b sont congrus modulo n si $\boldsymbol{n}$ divise $\boldsymbol{a-b}$, c'est-à-dire s'il existe un entier $k\epsilon\mathbb{Z}$ tel que $\boldsymbol{a = b + nk}$. On écrit : $\boldsymbol{a \equiv b\,[n]}$

$$\boxed{\boldsymbol{a \equiv b\,[n] \iff n/a-b \iff (\exists k\epsilon\,\mathbb{Z}),\ a-b = nk}}$$

Propriétés de la relation « Congruence modulo » : Soit a , b , c et d des éléments de $\mathbb{Z}$

❶ $(\forall a\epsilon\mathbb{Z})$: $a \equiv a[n]$ $(\equiv)$ Réflexive ❷ $a \equiv b[n] \iff b \equiv a[n]$ $(\equiv)$ symétrique ❸ $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ b \equiv c[n] \end{cases} \Rightarrow a \equiv c[n]$ $(\equiv)$ transitive ❹ $a \equiv b[n]$ et $k\epsilon\mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} ka \equiv kb[n] \\ a+k \equiv b+k[n] \end{cases}$	❺ $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c \equiv b+d[n] \\ a\times c \equiv b\times d[n] \end{cases}$ ❻ $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases} \Rightarrow \alpha a+\beta c \equiv \alpha b+\beta d[n]$ ❼ $a \equiv b[n]$ et $p\epsilon\mathbb{N} \Rightarrow a^p \equiv b^p\,[n]$
N.B : $n \equiv 0[n]$; $\left(\forall p\epsilon\mathbb{N}^*\right)$, $a \equiv b[n] \Rightarrow pa \equiv pb[n]$	

④ L'ENSEMBLE DES CLASSES D'EQUIVALANCE $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n\epsilon\mathbb{N}^*)$

Soit n un entier naturel non nul

- L'ensemble des entiers relatifs qui ont le même reste $\boldsymbol{r}$ de la division euclidienne par n est appelé **la classe d'équivalence** de $\boldsymbol{r}$ et on la note $\bar{r}$ ou $\dot{r}$. • $\bar{r} = \{\,x\epsilon\mathbb{Z}\ /\ x \equiv r[n]\} = \{r + kn\ /k\epsilon\mathbb{Z}\}$ • $x\epsilon\,\bar{r} \iff x \equiv r[n] \iff x = r + kn$; $k\epsilon\mathbb{Z}$ • $r_1 \equiv r_2[n] \iff \bar{r}_1 \equiv \bar{r}_2$ • $(\forall x\epsilon\mathbb{Z})\ (\exists!\,r\epsilon\{0,1,2,\dots,n-1\})$: $x\epsilon\bar{r}$ • $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \dots \cup \overline{n-1}$	•L'ensemble des classes d'équivalence : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}\,;\bar{1}\,;\bar{2}\,;\dots;\overline{n-1}\}$ Pour tout $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on a : $\overline{x+y} = \bar{x}+\bar{y}$; $\overline{x\times y} = \bar{x}\times\bar{y}$ $\bar{x}+\bar{0} = \bar{x}$; $\bar{x}\times\bar{1} = \bar{x}$ " + " et " × " sont associatives et commutatives " × " est distributive par rapport à " + "

⑤PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR- PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

Soit a , b , c , d et m des éléments de $\mathbb{Z}^*$

Le PGCD de a et b est le plus grand des diviseurs strictement positifs communs à a et b , noté $\boldsymbol{a \wedge b}$ ou $\boldsymbol{PGCD(a,b)}$ ou $\Delta(\boldsymbol{a,b})$.

Propriétés : $a \wedge b = d \Longrightarrow d/a \text{ et } d/b$

$d/a \text{ et } d/b \Longrightarrow d/a \wedge b$; $a/b \Longrightarrow a \wedge b = |a|$

$a \wedge b = b \wedge a = |a| \wedge |b|$

$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

$(ka) \wedge (kb) = |k|(a \wedge b)$

$a \wedge 1 = 1$; $a \wedge a = a \wedge 0 = |a|$; $a^n \wedge a = |a|$

$\begin{cases} c/a \\ c/b \end{cases} \Longrightarrow \left(\frac{a}{c}\right) \wedge \left(\frac{b}{c}\right) = \frac{a \wedge b}{|c|}$

$a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$

Le PPCM de a et b est le plus petit des multiples strictement positifs communs à a et b , noté $\boldsymbol{a \vee b}$ ou $\boldsymbol{PPCM(a,b)}$ ou $\boldsymbol{M(a,b)}$.

Propriétés : $a \vee b = m \Longrightarrow a/m \text{ et } b/m$

$a/m \text{ et } b/m \Longrightarrow a \vee b/m$

$a/b \Longrightarrow a \vee b = |b|$

$a \vee b = b \vee a = |a| \vee |b|$

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

$(ka) \vee (kb) = |k|(a \vee b)$; $a \vee 1 = a$; $a \vee b/ab$

$\begin{cases} c/a \\ c/b \end{cases} \Longrightarrow \left(\frac{a}{c}\right) \vee \left(\frac{b}{c}\right) = \frac{a \vee b}{|c|}$

$a^n \vee b^n = (a \vee b)^n$

$(a \wedge b)(a \wedge b) = |ab|$

$d = a \wedge b \Longrightarrow \exists(a', b')\epsilon\mathbb{Z}^2 : a = da' \text{ et } b = db' \text{ et } a' \wedge b' = 1$

Soit $a, b\epsilon\mathbb{Z}^*$: $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a$ et b sont premiers entre eux

L'Algorithme d'Euclide:

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

Si $\boldsymbol{a = bq + r}$ et $\boldsymbol{0 \leq r < b}$, alors : $\boxed{\boldsymbol{a \wedge b = b \wedge r}}$

Lorsque b ne divise pas a , le **PGCD** de a et b est égal au dernier reste non nul obtenu grâce à l'algorithme d'Euclide.

$$\boldsymbol{a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = \cdots = r_{n-1} \wedge r_n}$$

$$\begin{cases} a = bq_1 + r_1 \text{ et } 0 \leq r_1 < b \\ b = r_1 q_2 + r_2 \text{ et } 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2 q_3 + r_3 \text{ et } 0 \leq r_3 < r_2 \\ \vdots \\ r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n \text{ et } 0 \leq r_n < r_{n-1} \end{cases}$$

⑥THEOREME DE BEZOUT - THEOREME DE GAUSS

- **Théorème** Soit $(a,b)\epsilon(\mathbb{Z}^*)^2$,On a l'implication : $\boxed{\boldsymbol{d = a \wedge b \Longrightarrow (\exists(u,v)\epsilon\mathbb{Z}^2)\,,\ d = au + bv}}$
- **Théorème de Bézout** $\boxed{\forall(\boldsymbol{a,b})\epsilon(\mathbb{Z}^*)^2 : \boldsymbol{a \wedge b = 1} \Leftrightarrow (\exists(\boldsymbol{u,v})\epsilon\mathbb{Z}^2)\,,\ \boldsymbol{au + bv = 1}}$
- **Théorème de Gauss** $\boxed{\forall(\boldsymbol{a,b,c})\epsilon(\mathbb{Z}^*)^3 \ ,\ \boldsymbol{a/bc \text{ et } a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a/c}}$

Propriétés : $\forall(a,b,c)\epsilon(\mathbb{Z}^*)^3$ et $\forall(n,m)\epsilon(\mathbb{N}^*)^2$

$\begin{cases} a/c \\ b/c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Longrightarrow a\,b/c$	$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \wedge bc = 1$	$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1$
	$\begin{cases} ab \equiv ac[n] \\ a \wedge n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow b \equiv c[n]$	$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^n \wedge b^n = 1$

L'EQUATION DIOPHANTIENNE : $\boldsymbol{ax + by = c}$

Solutions de l'équation : $\boldsymbol{ax + by = 1}$		**Solutions de l'équation : $\boldsymbol{ax + by = c}$**	
$a \wedge b = 1$	$a \wedge b \neq 1$	$a \wedge b/c$	$a \wedge b \not| c$
$S = \{(x_o + kb; y_o - ka)/\ k\epsilon\mathbb{Z}\}$	$S = \emptyset$	$S = \left\{\left(x_o + \frac{kb}{a \wedge b}; y_o - \frac{ka}{a \wedge b}\right)\ /\ k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$	$S = \emptyset$
Le couple $(\boldsymbol{x_o, y_o})$ est une solution particulière de l'équation $ax + by = c$			

⑦LES NOMBRES PREMIERS - THEOREME DE FERMAT

- Soit p un entier relatif .On dit que p un nombre premier si : $|p| \neq 1$ et $D_p = \{-1\,;1\,;\,-p\,;\,p\}$
  - → (p est un nombre premier dans $\mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow$ $card\ D_p = 4$
  - → Soit p un nombre premier , Si $p \neq 2$, alors $(\exists k\epsilon\mathbb{Z}^*)$, $p = 2k + 1$
- L'ensemble des nombres premiers positifs est infini . sera noté $\mathbb{P}$; $\mathbb{P} = \{x\epsilon\mathbb{N} \text{ et } x \text{ premier}\}$
  - → (n est un nombre non premier tel que $n \geq 2$) $\Leftrightarrow$ $((\exists p\epsilon\mathbb{P})\ , p\ /\ n \text{ et } p^2 \leq n)$
  - → (n est un nombre premier) $\Leftrightarrow$ (n n'admet pas de diviseur premier dans $[2; \sqrt{n}] \cap \mathbb{N}$)

➢ **Propriétés :** Soit p et q deux nombres premiers ; a , b et c de $\mathbb{Z}$; $n\epsilon\mathbb{N}^*$ ($\nmid$ signifie ne divise pas)

$p/ab \Rightarrow p/a$ ou p/b	p/ab et $p\nmid a \Rightarrow p/a$	$p/a^n \Rightarrow p/a \Rightarrow p\wedge a = \lvert p\rvert$
$\begin{cases} ac \equiv bc[p] \\ p \text{ ne divise pas } c \end{cases} \Rightarrow a \equiv [p]$	$p\nmid a \Rightarrow p\wedge a = 1$	$p/a_1a_2\dots a_n \Rightarrow \exists i\epsilon\{1,2,\dots,n\} : p/a_i$
	$\lvert p\rvert \neq \lvert p\rvert \Rightarrow p\wedge q = 1$	$p/p_1p_2\dots p_n \Rightarrow \exists i\epsilon\{1,2,\dots,n\} : p = p_i$

➢ **Théorème de Fermat :**

1- Si p est un nombre premier positif, alors $(\forall a\epsilon\mathbb{Z})$, $a^p \equiv a\,[\,p\,]$

2- Si p est un nombre premier positif, alors pour tout $a\epsilon\mathbb{Z}$: $p\wedge a = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1\,[\,p\,]$

➢ **Décomposition et Produit de Facteurs Premiers :**

Tout entier relatif n distinct de 1 et -1 peut s'écrire et de façon unique sous forme :

$$n = \varepsilon\, p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

, tel que p_i des nombres premiers et $\alpha_i\epsilon\mathbb{N}^*$ $(\varepsilon = 1 \ ou \ \varepsilon = -1)$

➢ **Propriété :** Si $(a,b)\epsilon(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ et $b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$

Alors : $a \wedge b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{inf\,(\alpha_i,\beta_i)}$ et $a \vee b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\sup\,(\alpha_i,\beta_i)}$

→ Le nombre de diviseurs positifs de a : $N = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \times \dots \times (1+\alpha_n)$

⑧ SYSTÈMES DE NUMÉRATION

Théorème Soit b un entier supérieur où égal à 2 .

Tout entier naturel non nul n peut s'écrire de manière unique sous la forme :

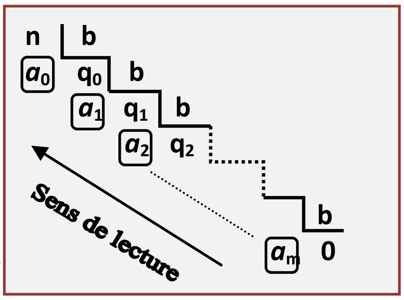
$$n = a_m\, b^m + a_{m-1}\, b^{m-1} + \dots + a_1\, b^1 + a_o$$

où a_0 , a_1 , …,a_m sont des entiers tels que : $a_m \neq 0$ et $0 \leq a_i \leq b-1$ pour tout $i\epsilon\{0,1,2,\dots,m\}$

On écrit : $n = \overline{a_m a_{m-1} \dots \dots a_1 a_0}_{(b)}$

et on dit qu'on a représenté le nombre n dans le système de numération de base b .

→ Méthode de représentation d'un entier naturel non nul n dans un système de numération de base b :
En utilisant la division euclidienne de n par b



➢ **Critères de divisibilité sur les nombres 2,3,4,5,9,11 et 25 dans le système décimal**

Soit $x\epsilon\mathbb{N}^*$ tel que $x = \overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\dots\alpha_1\alpha_0}_{(10)} = \alpha_n \times 10^n + \alpha_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + \alpha_1 \times 10 + \alpha_0$

$x \equiv 0[2] \iff \alpha_0$ pair	$x \equiv 0[3] \iff \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \equiv 0[3]$	$x \equiv 0[9] \iff \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \equiv 0[9]$
$x \equiv 0[4] \iff \overline{\alpha_1\alpha_0}_{(10)} \equiv 0[4]$	$x \equiv 0[5] \iff (\alpha_0 = 0 \ ou \ \alpha_0 = 5)$	
$x \equiv 0[25] \iff \overline{\alpha_1\alpha_0}_{(10)} \equiv 0[25] \iff \overline{\alpha_1\alpha_0}\epsilon\{\overline{00},\overline{25},\overline{50},\overline{75}\}$		
$x \equiv 0[11] \iff \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\alpha_i \equiv 0[11] \iff (\alpha_0+\alpha_2+\dots+\alpha_{2p}) \equiv (\alpha_1+\alpha_3+\dots+\alpha_{2p+1})[11]$		

$x \equiv 0[11] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\alpha_1\alpha_0} + \overline{\alpha_3\alpha_2} + \overline{\alpha_5\alpha_4} + \cdots + \overline{\alpha_n\alpha_{n-1}} \equiv 0[11]$	
$7/x \quad \Leftrightarrow \quad 7/\,\overline{\alpha_n \dots \alpha_1} - 2\overline{\alpha_o}$	$13/x \quad \Leftrightarrow \quad 13/\,\overline{\alpha_n \dots \alpha_1} + 4\overline{\alpha_o}$
$17/x \quad \Leftrightarrow 17/\ \overline{\alpha_n \dots \alpha_1} - 5\overline{\alpha_o}$	$19/x \quad \Leftrightarrow \ 19/\ \overline{\alpha_n \dots \alpha_1} + 2\overline{\alpha_o}$
$23/x \quad \Leftrightarrow 23/\ \overline{\alpha_n \dots \alpha_1} + 7\overline{\alpha_o}$	$29/x \quad \Leftrightarrow 29/\ \overline{\alpha_n \dots \alpha_1} + 3\overline{\alpha_o}$
$31/x \quad \Leftrightarrow \quad 31/\,\overline{\alpha_n \dots \alpha_1} - 3\overline{\alpha_o}$	$41/x \quad \Leftrightarrow \quad 41/\,\overline{\alpha_n \dots \alpha_1} - 4\overline{\alpha_o}$

L'ENSEMBLE $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p est un nombre premier positif)

Soit p un nombre premier positif , On a :

1- $(\forall\ \bar{x} \epsilon\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\ - \{\bar{0}\})\ (\exists\ \bar{y} \epsilon\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\ - \{\bar{0}\})\ ,\ \ \bar{x} \times \bar{y} = \bar{1}$

2- $(\forall(\bar{x};\bar{y})\epsilon(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2)\ ,\ \ \bar{x} \times \bar{y} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}\ ou\ \bar{y} = \bar{0}$

théorème de Wilson

Soit p un entier naturel , On a : $\quad (\ p\ est\ premier\ ) \ \Leftrightarrow\ (p-1)! \equiv -1\ [p]$

Le théorème chinois

Solutions de système dans $\mathbb{Z}$: $\quad (S)\ \begin{cases} x \equiv a\ [n] \\ x \equiv b\ [m] \end{cases}$

① Si $n \wedge m\ /b - a$, alors les solutions du système est :

$S = \{\ x_o + (n \wedge m)k\ \ /\ k\epsilon\mathbb{Z}\ \}$ où x_o est une solution particulière de système

② Si $n \wedge m$ ne divise pas $b - a$, alors : $S = \emptyset$

Théorème chinois

- Si $n \wedge m = 1$, alors les solutions de système (S) est :

  $S = \{\ \ anb + \beta am + nmk\ \ /k\epsilon\mathbb{Z}\ \ ;\ an + \beta m = 1\ ,(\alpha;\beta)\epsilon\mathbb{Z}^2\ \}$

Infinité de nombres premiers

Théorème d'Euclide : L'ensemble des nombres premiers est infini.

Le plus grand nombre premier actuellement connu est un nombre de Mersenne. Il a été découvert en 2008, c'est $\mathbf{2^{43112609} - 1}$

La mathématique est la reine des sciences et l'arithmétique est la reine des mathématiques.

Karl Friedrich Gauss

أعلم أن :

مفاتيح النجاح

- التوكل على الله - القيام بالأسباب

- الثقة الكاملة بالنفس

من أسرار المتفوقين

- الإهتمام - التركيز - تكرار المحاولة

Chapitre 14 STRUCTURES ALGEBRIQUES

① LOI DE COMPOSITION INTERNE.

1-1.Définitions et notations : Soit E un ensemble non vide.

$$f : E \times E \longrightarrow E$$
$$(x\,;y) \mapsto f(x\,;y)$$

- Une loi de composition interne sur E est une application f de E × E dans E .

→ l'élément $f(x\,;y)$ dans E s'appelle la composée de x et y dans l'ordre par cette loi de composition interne f et on le note : $x * y$ ou $x \perp y$ ou xTy ou $x \vee y$ … au lieu de $f(x\,;y)$

$*$ est une loi de composition interne dans E $\Leftrightarrow$ $(\forall(x,y)\epsilon E^2)$, $x * y \in$ E

↳ On dit que l'ensemble E muni d'une loi de composition interne « * » et on le note $(E\,;*)$

1-2. parties stables pour une Loi de composition interne – Loi Induite

Soit $(E\,;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne et F une partie non vide de E.

- On dit que : F est stable par $*$ si $\forall(x,y)\epsilon F^2$, $x * y \in$ F

→ Si F une partie stable dans $(E\,;*)$ alors * est une loi de composition interne dans F et on l'appelle la loi Induite par * sur F.

1-3. Propriétés des lois de composition interne

Soit $(E\,;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

❶ **Commutativité** : La loi * est commutative dans E $\Leftrightarrow$ $(\forall(a,b)\epsilon E^2)$, $a * b = b * a$

❷ **Associativité** : La loi * est associative dans E $\Leftrightarrow$ $\forall(a,b,c)\epsilon E^3$, $a * (b * c) = (a * b) * c$

Exemples : L'addition et la multiplication dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont commutatives et associatives .

❸ **L'Elément neutre** : (E ; ∗) admet un élément neutre si et seulement si : $(\exists e\epsilon E)(\forall x\epsilon E)$, $x * e = e * x = x$

- On dit aussi que e est l'élément neutre pour la loi $*$ dans E
- Si la loi $*$ admet un élément neutre dans E, celui-ci est unique .

❹ **Symétrique d'un élément** : Soit $*$ une loi interne sur E possédant un élément neutre e.

- Soit $x \in$ E : x admet un symétrique pour $*$ $\Leftrightarrow$ $(\exists x'\epsilon E)$, $x * x' = x' * x = e$
- x est symétrisable pour $*$ si et seulement si x admet un symétrique pour $*$.
- Si un élément $a\epsilon$E est symétrisable , alors le symétrique de a est unique.

❺ **Elément régulier** (simplifiable) :

Un élément a est régulier ou simplifiable dans E $\Leftrightarrow$ $(\forall(x,y)\epsilon E^2)$, $\begin{cases} x * a = y * a \Rightarrow x = y \\ a * x = a * y \Rightarrow x = y \end{cases}$

② MORPHISME OU HOMOMORPHISME.

Soient $(E\,,*)$ et $(F;T)$ deux ensembles munis de lois de composition interne et φ une application de E dans F.

- On dit que φ est un morphisme de $(E\,,*)$ dans $(F;\,T)$ lorsque : $(\forall(x,y)\epsilon E^2) :\ \varphi(x * y) = \varphi(x)T\varphi(y)$
- Si φ est bijective on dit que φ est un isomorphisme
- Si E = F et $*$ = T , on parle d'endomorphisme.
- Si φ est un endomorphisme bijectif, on parle d'automorphisme.

- **Propriétés** : soit f un homomorphisme de $(E\,,*)$ dans $(F;\,T)$ alors :
  1) $f(E)$ est une partie stable dans (F, T)
  2) si * est commutative dans $(E\,,*)$, alors T est commutative dans $(f(E)\,,T)$
  3) si * est associative dans $(E\,,*)$, alors T est associative dans $(f(E)\,,T)$
  4) si * admet un élément neutre e dans $(E\,,*)$, alors $f(e)$ est un élément neutre dans $(f(E)\,,T)$
  5) si * admet un élément neutre e dans $(E\,,*)$, et si x admet un symétrique x' dans $(E\,,*)$, alors $y = f(x)$ admet un symétrique dans $(f(E)\,,T)$ c'est $y' = f(x')$ c-à-d $(f(x))' = f(x')$

③GROUPE – SOUS-GROUPE .

3-1. Définition : Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne (notée $*$).

(G, $*$) est **un groupe** si et seulement si
$$\begin{cases} 1)\ * \text{ est associative,} \\ 2)\ * \text{ possède un élément neutre dans G} \\ 3)\ \text{tout élément de G possède un symétrique pour } * \text{ dans G.} \end{cases}$$

→ Si de plus, $*$ est commutative, on dit que (G, $*$) est un groupe commutatif ou abélien.
Exemples : $(\mathbb{Z};+)$,$(\mathbb{Q};+)$,$(\mathbb{R};+)$,$(\mathbb{C};+)$, $(\mathbb{Q}^*;\times)$, $(\mathbb{R}^*;\times)$, $(\mathbb{C}^*;\times)$, sont des groupes commutatifs

Propriétés des groupes : Soit (G, $*$) un groupe d'élément neutre e , Alors :

1) L'élément neutre dans G est unique . 2) Tout élément de G possède un symétrique unique dans G.
3) Pour tout $(x,y)\epsilon G^2$: $(x*y)' = y'*x'$ (x' est le symétrique de x et y' est le symétrique de y dans (G, $*$))
4) Tout élément de G est régulier
5) pour tout $(a,b)\epsilon G^2$, l'équation $a*x=b$ admet une solution unique dans G qui est : $x = a'*b$
En d'autres termes : $a*x=b \Leftrightarrow x=a'*b$ et $x*a=b \Leftrightarrow x=b*a'$ (a' est le symétrique de a)

3-2.Sous-groupe : Soit (G, $*$) un groupe et H une partie stable pour (G, $*$) .

- H est un sous-groupe de (G, $*$) si et seulement si (H, $*$) est un groupe.
- H est un sous-groupe de (G, $*$) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} H \neq \emptyset \\ (\forall (x,y)\epsilon H^2),\ x*y' \epsilon H \end{cases}$ où y' est le symétrique de y dans (G, $*$)

3-3.Morphismes de Groupes : Soit f un morphisme du groupe $(G,*)$ dans un groupe $(F;T)$

- L'image du groupe $(G,*)$ par le morphisme f c'est le groupe $(f(G),T)$
- Si f est surjectif ou isomorphisme, alors $f(G)=F$. dans ce cas l'image du groupe $(G,*)$ est le groupe (F,T)

→ Si f est un isomorphisme de $(G,*)$ dans $(F;T)$,alors $(G,*)$ et $(F;T)$ ont la même structure.

④ANNEAU

4-1.Distributivité d'une loi sur une autre

Définition : Soit E un ensemble non vide muni deux lois de composition interne « * » et « T » .

La loi T est **distributive** par rapport à la loi $*$ dans E $\Leftrightarrow$ $(\forall (x,y,z)\epsilon E^3)$, $\begin{cases} xT(y*z) = (xTy)*(xTz) \\ (x*y)Tz = (xTz)*(yTz) \end{cases}$

Remarque : Si on sait que T est commutative, une et une seule des deux égalités ci-dessus suffit.

4-2.Structure d'Anneau

Définition : Soit A un ensemble non vide muni deux lois de composition interne « * » et « T » .

On dit que $(A,*,T)$ est un anneau lorsque : i) $(A,*)$ est un groupe commutatif
ii) La loi T est associative et distributive par rapport la loi *.

→ Si la loi T est commutative , on dit que L'anneau $(A,*,T)$ est commutatif.
→ Si de plus ,T admet un élément neutre , on dit que L'anneau $(A,*,T)$ est unitaire.

Notations

✓- On note en général la première loi + (notation additive) et la deuxième loi × (notation multiplicative)
✓- On note 0 ou 0_A l'élément neutre pour la loi + et on l'appelle le zéro de l'anneau A .
✓- On note 1 ou 1_A l'élément neutre pour la loi × et on l'appelle l'élément unité de l'anneau A .

4-3.Les règles de Calcul dans un anneau

Soit $(A,+,\times)$ un anneau unitaire , on a les propriétés suivantes :
- Pour tout $x\epsilon A$: $0_A \times x = x \times 0_A = 0_A$ et $1_A \times x = x \times 1_A = x$
- Pour tout $(x;y)\epsilon A^2$: $(-x)\times y = x \times (-y) = -(x\times y)$

4-4. Diviseurs de zéro - Anneau intègre

Soit $(A,+,\times)$ un anneau et $a\epsilon\ A-\{0_A\}$.

- a est un diviseur de zéro dans l'Anneau A s'il existe $b\epsilon\ A-\{0_A\}$ tel que : $a\times b = 0_A$ ou $b \times a = 0_A$
- On dit que $(A,+,\times)$ est un anneau intègre s'il n'est pas réduit à zéro et n'admet aucun diviseur de zéro.

$(A,+,\times)$ est un Anneau intègre $\Leftrightarrow$ $\left((\forall (a,b)\epsilon A^2),\ a\times b = 0_A \Leftrightarrow a = 0_A \ ou\ \ b = 0_A\right)$

⑤ CORPS

Définition : Soit $(K\,;+;\times)$ un Anneau .

On dit que $(K\,;+;\times)$ est un Corps si et seulement si tout élément non nul de K admet un inverse pour × dans K.

$$(K\,;\,+\,;\times) \text{ est un Corps} \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ (K\,,+) \text{ est un groupe commutatif .} \\ 2)\ \text{La loi } \times \text{ est distributive par rapport à la loi } + . \\ 3)\ (K-\{0_K\};\times) \text{ est un groupe.} \end{cases}$$

→ Si la loi × est commutative , on dit que Le corps $(K\,;+\,;\times)$ est commutatif .

Propriétés : Soit $(K\,;+;\times)$ un corps. On a les propriétés suivantes :

1) Tout élément a de $K-\{0_K\}$ est régulier pour l'opération ×
2) $(K\,,+,\times)$ est un anneau intègre : $(\forall(x,y)\epsilon K^2)\quad x\,y=0_K \Leftrightarrow x=0_K\ ou\ y=0_K$
3) Pour tout $a\,\epsilon\,K-\{0_K\}$ et K , on a : $a\times x=b \Leftrightarrow x=a^{-1}\times b$ et $x\times a=b \Leftrightarrow x=b\times a^{-1}$
4) Solutions de l'équation $ax=b$: Si $a\neq 0_K$, alors $x=a^{-1}\times b$
Si $a=0_K$ et $b\neq 0_K$, alors $S=\emptyset$
Si $a=0_K$ et $b=0_K$, alors $S=K$

حوار بين العلم و العقل

لقد أختلف العلماء , فضل بعضهم العلم على العقل , والبعض الأخر فضل العقل على العلم ،
ولقد دار حوار لطيف بين العقل والعلم أبدى كلاً منهما فضله على الآخر

علم العليم و عقل العاقل اختلفا .... فمن ذا الذي منهما قد أحرز الشرفا
فالعلم قال أنا أحرزت غايتــه .... و العقل قال أنا الرحمن بي عرفــا
فأفصح العلم إفصاحا و قال لـه .... بأينا الله في قرآنـــه اتصفـــا
فبان للعقل أن العلم سيــــده .... فقبل العقل رأس العلم وانصرفـــا
فناداها التوفيق أن اسمعا و قفا .... لولا الوجــود لكان الكل منحرفــا

قال الشافعي- رحمه الله- : في وصف العلم وطلبة العلم: العلم بطيء اللزام، بعيد المرام، لا يدرك بالسهام، ولا يرى في المنام، ولا يورث عن الآباء والأعمام، إنما هو شجرة لا تصلح إلا بالغرس، ولا تغرس إلا في النفس، ولا تسقى إلا بالدرس،ولا محصل إلا لمن أنفق العينين، وجثا على الركبتين، ولا يحصل إلا بالاستناد إلى الحجر، وافتراش المدر، وقلة النوم، وصلة الليل باليوم،

وصية من أب لأبنائه :

تعلموا العلم ، فبالعلم يشرف الوضيع و ينبـــه الخامل و يعلو الأرقـــاء
تعلموا العلم ، فإن كنتم سادة فقتم وإن كنتم وسطا سدتم و إن كنتم سوقة عشتم .
تعلموا العلم، فان تعلمه لله خشية، و طلبه عبادة، ومذاكرته تسبيح و البحث عنه جهاد. و تعليمه لمن لا يعلمه صدقة،وبـدله لأهلها قربة، لأنه معـالم الحـلال و الحرام و منـار أهل الجنة و الأنس في الوحشة، و الصاحب في الغربة و المحدث في الخلوة، و الدليل على السراء و الضراء و السلاح على الأعـدء .

قال عمر ابن الخطاب رضي الله عنه :

تعلموا العلم و تعلموا للعلم السكينة و الوقار و الحلم و أخوف ما أخاف عليكم شح مطاع و هوى متبع و إعجاب المرء بنفسه

إذا ما علا المرءُ رام العُلا .... ويقنعُ بالدون من كان دونا

LES MATRICES CARREES D'ORDRE n avec $n\epsilon\{2;3\}$

1. LES MATRICES CARREES D'ORDRE 2

➢ **Définition** : Une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels est un tableau de quatre nombres *a,b,c et d*,

On la note $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ (Il n'y a pas de séparation verticale ou horizontale, contrairement aux tableaux)

➢ **l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2** , On le note : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \;/\; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$

La somme et la multiplication et l'égalité de deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont définies par:

- $M = M' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \\ c=c' \\ d=d' \end{cases}$
- $M + M' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$
- $M \times M' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix}$

→ La somme et le produit de deux matrices sont des lois de compositions internes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
On écrit : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +)$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \times)$

- La matrice : $0_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle est l'élément neutre dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +)$
- La matrice : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unitaire est l'élément neutre dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \times)$

2. LES MATRICES CARREES D'ORDRE 3

➢ **Définition :** Une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels est un tableau de 9 nombres .

➢ **l'ensemble des matrices carrées d'ordre3**, On le note : $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} / (a,b,c,a',b',c',a'',b'',c'')\epsilon\mathbb{R}^9 \right\}$

La somme et la multiplication de deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont définies par:

- $M + M' = \begin{pmatrix} a & d & x \\ b & e & y \\ c & f & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & d' & x' \\ b' & e' & y' \\ c' & f' & z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & d+d' & x+x' \\ b+b' & e+e' & y+y' \\ c+c' & f+f' & z+z' \end{pmatrix}$
- $M \times M' = \begin{pmatrix} a & d & x \\ b & e & y \\ c & f & z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & d' & x' \\ b' & e' & y' \\ c' & f' & z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+db'+xc' & ad'+de'+xf' & ax'+dy'+xz' \\ ba'+eb'+yc' & bd'+ee'+yf' & bx'+ey'+yz' \\ ca'+fb'+zc' & cd'+fe'+zf' & cx'+fy'+zz' \end{pmatrix}$

→ La somme et le produit de deux matrices sont des lois de composition interne dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,
On écrit : $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}); +)$ et $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}); \times)$

- La matrice : $0_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle est l'élément neutre dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}); +)$
- La matrice : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unitaire est l'élément neutre dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}); \times)$

Propriétés : Soient A , B et C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n\epsilon\{2;3\}$

$A+B=A+B$	$A+0=0+A=A$	$A+(-A)=(-A)+A=0$	$A\times 0=0\times A=0$
$A+(B+C)=(A+B)+C$	$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$		$A\times I=I\times A=A$

↳
- L'addition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est commutative et associative .
- La multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est associative
- Dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +)$ tout matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ admet un symétrique c'est la matrice : $-M = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix}$
- Dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \times)$ tout matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telle que $\det M \neq 0$ admet un symétrique c'est la matrice :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{c}{ad-bc} \\ \frac{-b}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Groupes – Anneaux – Corps (Usuelles)

Les ensembles		lois internes	La structure
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels	$+ \; ; \; \times$	
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs	$+ \; ; \; \times$	$(\mathbb{Z};+)$ Groupe commutatif $(\mathbb{Z};+;\times)$Anneau commutatif, unitaire et intègre
$\mathbb{D}$	Ensemble des nombres décimaux relatifs	$+ \; ; \; \times$	$(\mathbb{D};+)$ Groupe commutatif $(\mathbb{D};+;\times)$Anneau commutatif, unitaire et intègre
$\mathbb{Q}$	Ensemble des nombres rationnels	$+ \; ; \; \times$	$(\mathbb{Q};+)$ et $(\mathbb{Q}^*;\times)$ Groupes commutatifs $(\mathbb{Q};+;\times)$Anneau commutatif, unitaire et intègre $(\mathbb{Q};+;\times)$ Corps commutatif
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels	$+ \; ; \; \times$	$(\mathbb{R};+)$ et $(\mathbb{R}^*;\times)$ Groupes commutatifs $(\mathbb{R};+;\times)$Anneau commutatif, unitaire et intègre $(\mathbb{R};+;\times)$ Corps commutatif
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes	$+ \; ; \; \times$	$(\mathbb{C};+)$ et $(\mathbb{C}^*;+)$ Groupes commutatifs $(\mathbb{C};+;\times)$Anneau commutatif, unitaire et intègre $(\mathbb{C};+;\times)$ Corps commutatif
$M_n(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices carrées d'ordre n $n\epsilon\{2;3\}$	$+ \; ; \; \times$	$(M_n(\mathbb{R});+)$ Groupe commutatif $(M_n(\mathbb{R});+;\times)$ Anneau unitaire.
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Ensemble des classes modulo n	$+ \; ; \; \times$	$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,;+)$ Groupe commutatif. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,;+;\times)$ Anneau commutatif et unitaire.
$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	Ensemble des classes modulo p (p est un nombre premier)	$+ \; ; \; \times$	$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,;+)$ Groupe commutatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,;+;\times)$ Corps commutatif.
$\mathbb{R}_n[X]$	Ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n	$+ \; ; \; \times$	$(\mathbb{R}_n[X];+)$ Groupe commutatif $(\mathbb{R}_n[X]\,;+;\times)$ Anneau commutatif et unitaire.
$\mathcal{P}(A)$	Ensemble des parties d'un ensemble A	$\cup \; ; \; \cap \; ; \; \Delta$	$(\mathcal{P}(A);\Delta)$ Groupe commutatif $(\mathcal{P}(A)\,;\Delta;\cap\,)$ Anneau commutatif et unitaire
T_r	Ensemble des translations	o	$(T_r;o)$ Groupe commutatif.
H_o	Ensemble des homothéties de même centre O	o	$(H_0;o)$ Groupe.
R_o	Ensemble des rotations de même centre O	o	$(R_o;o)$ Groupe commutatif.
$\mathcal{T}$	Ensemble des transformations du plan	o	$(\mathcal{T};o)$ Groupe
V_n	L'ensemble des vecteurs du plan $n\epsilon\{2;3\}$	$+$	$(V_2;+)$ et $(V_3;+)$ Groupes commutatifs.

وقفـــة :

إذا كان من الصعب عليك أن تفهم كل شيء في الحياة ، فكن مع مَنْ صنع الحياة...عالم الأسرار.. الله سبحانه وتعالى (كن مع الله) ..تكسب كل شيء

MORPHISME OU HOMOMORPHISME

Soient $(E,*)$ et $(F;T)$ deux ensembles munis de lois de composition interne et f une application de E dans F.

Pour montrer que l'application f est un morphisme de de $(E,*)$ dans $(F;T)$

Il suffit de montrer que : $(\forall(x,y)\epsilon E^2)$, $f(x*y)=f(x)\,T\,f(y)$

PROPRIETES :

f un morphisme de $(E,*)$ dans $(F;T)$

si	Alors
$*$ est commutative dans $(E,*)$	T est commutative dans $(f(E),T)$
$*$ est associative dans $(E,*)$	T est associative dans $(f(E),T)$
$*$ admet un élément neutre e_* dans $(E,*)$	$f(e_*)$ est un élément neutre dans $(f(E),T)$
un élément x de E admet un symétrique x' dans $(E,*)$	$f(x)$ admet un symétrique dans $(f(E),T)$ qui est $(f(x))'=f(x')$

Si f est bijective de E dans F

$\Downarrow$

f est un isomorphisme de $(E,*)$ dans $(F;T)$

$*$ est commutative dans $(E,*)$	$\Leftrightarrow$	T est commutative dans (F,T)
$*$ est associative dans $(E,*)$	$\Leftrightarrow$	T est associative dans (F,T)
$*$ admet un élément neutre e_* dans $(E,*)$	$\Rightarrow$	$f(e_*)$ est un élément neutre dans (F,T)
Un élément x de E admet un symétrique x' dans $(E,*)$	$\Rightarrow$	$f(x)$ admet un symétrique dans (F,T) qui est $(f(x))'=f(x')$
$f^{-1}(e_T)$ est un élément neutre dans $(E,*)$	$\Leftarrow$	T admet un élément neutre e_T dans (F,T)
$f^{-1}(y)$ admet un symétrique dans (E,T) qui est $(f^{-1}(y))'=f^{-1}(y')$	$\Leftarrow$	Un élément y de F admet un symétrique y' dans (F,T)

Rappel :
- **f est bijective de E dans F** $\Leftrightarrow$ $(\forall y\epsilon F)(\exists!\, x\epsilon E)$, $y=f(x)$
  - ↳ l'équation $y=f(x)$ admet une solution unique x dans E
- **f est bijective de E dans F** $\Leftrightarrow$ **f est surjective et injective**
- **f est surjective de E dans F** $\Leftrightarrow$ $(\forall y\epsilon F)(\exists\, x\epsilon E)$, $y=f(x)$ $\Leftrightarrow$ $f(E)=F$
- **f est injective de E dans F** $\Leftrightarrow$ $\forall(x_1,x_2)\epsilon E^2$, $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

STRUCTURES ALGÉBRIQUES : RÉSUMÉ

$*$ est une loi de composition interne dans E	$\Leftrightarrow$	$(\forall(a,b)\epsilon E^2)\ ,\ a*b\ \epsilon\ E$
S est une patrie stable de $(E\ ,\ *)$	$\Leftrightarrow$	$S\neq\emptyset\ ,\ S\subset E$ et $\forall(x,y)\epsilon S^2\ ,\ x*y\in S$
φ est un morphisme de $(E\ ,*)$ dans $(F\ ,\ T)$	$\Leftrightarrow$	$(\forall(x,y)\epsilon E^2)\ ,\ \varphi(x*y)=\varphi(x)T\varphi(y)$
La loi $*$ est commutative dans E	$\Leftrightarrow$	$(\forall(a,b)\epsilon E^2)\ ,\ a*b=b*a$
La loi $*$ est associative dans E	$\Leftrightarrow$	$\forall(a,b,c)\epsilon E^3\ ,\ a*(b*c)=(a*b)*c$
e est un élément neutre de $(E\ ,*)$	$\Leftrightarrow$	$(\forall x\epsilon E)\ ,\ x*e\ =\ e*x\ =\ x$
Soit e est un élément neutre de $(E\ ,*)$: un élément x admet un symétrique x' dans $(E\ ,*)$	$\Leftrightarrow$	$x*x'=x*x'=e$
Un élément a est régulier ou simplifiable dans E	$\Leftrightarrow$	$(\forall(x,y)\epsilon E^2)\ ,\begin{cases}x*a=y*a\Rightarrow x=y\\ a*x=a*y\Rightarrow x=y\end{cases}$
La loi T est distributive par rapport à la loi $*$ dans E	$\Leftrightarrow$	$(\forall(x,y,z)\epsilon E^3)\ ,\begin{cases}xT(y*z)=(xTy)*(xTz)\\ (x*y)Tz=(xTz)*(yTz)\end{cases}$

SCHEMA DES STRUCTURES ALGEBRIQUES

❾ La loi T est commutative

❶ La loi * est associative dans E.
❷ (E,*)possède un élément neutre e_*
❸ Tout élément de E possède un symétrique dans E pour la loi * .

❹ La loi * est commutative dans E.

❺ T est distributive par rapport * .

❻ La loi T est associative dans E.

❼ T possède un élément neutre e_T

❽ tout élément autre que e_* est inversible pour la loi T.

(E,*) Groupe

(E,*) Groupe commutatif

(E\{e*},T) Groupe

(E,*,T)Corps

(E,*,T) Anneau

(E,*,T) A. Commutatif

(E,*,T) A. Unitaire

(E,*,T)Corps

(E,*,T)Corps commutatif

$(A\ ,*,T)$ **est un Anneau intègre** $\Leftrightarrow$ $\left((\forall(a,b)\epsilon A^2)\ ,aTb=0_A\Leftrightarrow a=0_A\ ou\ b=0_A\right)$

$(H,*)$ **est un sous-groupe de** $(G,*)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}H\neq\emptyset\ et\ H\subset G\\ (\forall(x,y)\epsilon H^2)\ ,\ x*y'\epsilon H\end{cases}$ où y' est le symétrique de y dans $(G,*)$

بادر إذا حاجة في وقتها عرضت فللحوائج أوقات و ساعات
إن أمكنت فرصة فانهض لها عجلا و لا تؤخر فللتأخير آفـــات

Chapitre 15 ESPACES VECTORIELS REELS

① ESPACE VECTORIEL RÉEL.

1-1.LOI DE COMPOSITION EXTERNE : Soit E un ensemble et K un corps

$$f : K \times E \to E$$
$$(\alpha ; x) \mapsto f(\alpha ; x)$$

- Une loi de composition externe de K sur E est une application f de $K \times E$ dans E .

→ l'image de $(\alpha ; x)$ par l'application f notée : $\alpha . x$ ou $\alpha\, x$

Loi de composition externe sur E à coefficients dans $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $(\forall x \epsilon E)\ (\forall \alpha \epsilon \mathbb{R})\ ,\ \alpha . y\ \epsilon E$

1-2. STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL REEL

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne et une loi de composition externe à coefficients réels.

$(E\,;+;\,\bullet)$ est **un espace vectoriel** réel $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} ①\ (E;+) \text{ est un groupe commutatif} \\ ②(\forall(\alpha,\beta)\epsilon\mathbb{R}^2)\ (\forall x \epsilon E)\ ,\ (\alpha+\beta).x = \alpha.x+\beta.x \\ ③(\forall\alpha\epsilon\mathbb{R})(\forall(x,y)\epsilon E^2)\ ,\ \alpha.(x+y) = \alpha.x+\alpha.y \\ ④(\forall(\alpha,\beta)\epsilon\mathbb{R}^2)\ (\forall x\epsilon E)\ ,\ (\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x) \\ ⑤(\forall x\epsilon E)\ ,\ 1.x = x \end{cases}$$

Notations : tout élément de E sera noté généralement $\vec{x}$

On utilise l'écriture $\alpha\vec{x}$ au lieu de $\alpha.\vec{x}$ où $\vec{x}\epsilon E$ et $\alpha\epsilon\mathbb{R}$

L'élément neutre de $(E;+)$ sera noté $\vec{0}$ .C'est le vecteur nul de l'espace vectoriel E .

Règles de calcul dans un espace vectoriel réel :

$0\vec{x} = \vec{0}$	$\alpha\vec{0} = \vec{0}$	$(-1)\vec{x} = -\vec{x}$	$(-\alpha)\vec{x} = \alpha(-\vec{x}) = -(\alpha\vec{x})$	$\alpha(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$
$\alpha(\vec{x}-\vec{y}) = \alpha\vec{x}-\alpha\vec{y}$	$(\alpha-\beta)\vec{x} = \alpha\vec{x}-\beta\vec{x}$	$\alpha\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0\ ou\ \vec{x} = \vec{0}$		

1-3. SOUS- ESPACE VECTORIEL REEL

Soit $(E;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel et F une partie de E .

$(F;+;\bullet)$ est <u>**un sous-espace vectoriel**</u> de E $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} ①\ F \neq \emptyset \\ ②\ F \subset E \\ ③\ (\forall(x,y)\epsilon F^2)\ \vec{x}+\vec{y}\ \epsilon\ F \\ ④\ (\forall(\alpha,x)\epsilon\mathbb{R}\times F)\ \ \alpha.\vec{x}\ \epsilon\ F \end{cases}$$

Propriété caractéristique

$(F;+;\bullet)$ est <u>**un sous-espace vectoriel**</u> de E $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} ①\ F \neq \emptyset \\ ②\ F \subset E \\ ③\ (\forall(\alpha,\beta)\epsilon\mathbb{R}^2)\ (\forall(x,y)\epsilon F^2)\ \ \alpha.\vec{x}+\beta.\vec{y}\ \epsilon\ F \end{cases}$$

②FAMILLES LIBRES OU GENERATRICES – BASES

2-1. COMBINAISONS LINEAIRES :

Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel réel $(E,+,\bullet)$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \epsilon\ \mathbb{R}$.

- Tout vecteur de la forme $\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\dots+\alpha_n\vec{x}_n = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$ s'appelle <u>**combinaison linéaire**</u> des vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ (ou combinaison linéaire de la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$)

→ Les réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont appelés les coefficients de la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$

2-2. FAMILLES GENERATRICES – FAMILLES LIBRES – FAMILLES LIEES :

Soit E un espace vectoriel réel, $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de E.

➢ On dit que le vecteur $\vec{x}$ engendré par la famille $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ s'il peut écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille . en d'autre termes : $(\exists(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\epsilon\mathbb{R}^n)$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$

➢ La famille B est une <u>**famille Génératrice**</u> de E $\Leftrightarrow$ $(\forall\vec{x}\epsilon E)\ (\exists(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\epsilon\mathbb{R}^n)$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$

- B est une **famille Libre** de E $\Leftrightarrow$ $(\forall(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\epsilon\mathbb{R}^n), \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

- B est une **famille Liée** de E $\Leftrightarrow (\exists(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)\epsilon\mathbb{R}^n)/(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) \neq (0; 0; \dots; 0)$ *et* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$

↳ B est une famille Liée de E , si elle n'est pas libre . (on dit encore que les vecteurs sont linéairement dépendants)

PROPRIETES : Soit E un espace vectoriel réel

- Une famille $(\vec{x})$ constituée d'un seul vecteur libre si , et seulement si , $\vec{x} \neq \vec{0}$
- Les éléments d'une famille libre sont deux à deux distincts.
- Si une famille $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ est libre, alors toute famille contenue dans B est aussi libre .
- Si une famille $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ est liée, alors toute famille contenue dans B est aussi liée .
- $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ est liée, si et seulement si, l'un des vecteurs de B est une combinaison linéaire des n-1 autres.

2-3. BASE D'UN ESPACE VECTORIEL REEL – DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL :

Soit E un espace vectoriel réel, $n\epsilon\mathbb{N}^*$ et $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de E.

La famille B est **une Base** de E, si c'est une famille Libre et Génératrice de E

La famille B est **une Base** de E $\Leftrightarrow$ $(\forall\vec{y}\epsilon E)\ (\exists!\,(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\epsilon\mathbb{R}^n)\ ,\quad \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$

→ Les nombres $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ s'appellent les coordonnées (ou composantes) du vecteur $\vec{y}$ dans la base B , et on écrit $\vec{y}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_{(B)}$ ou tout simplement $\vec{y}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

→ Toutes les bases de E ont le même cardinal, ce cardinal est appelé **la dimension** de E et noté $dimE$ ($dimE = n$)

PROPRIETES :

1- Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et $B = (\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ une base de E.
Soit $(\vec{u}; \vec{v})$ une famille de vecteurs de E tels que $\vec{u}(a; b)$ et $\vec{v}(a'; b')$ dans la base B , Alors :
$(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de E $\Leftrightarrow$ $(\vec{u}; \vec{v})$ est Génératrice de E $\Leftrightarrow$ $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre dans E $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$

2- Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $B = (\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ une base de E.
Soit $B' = (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ une famille de vecteurs de E tels que $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ dans la base B, Alors :
B' est une base de E $\Leftrightarrow$ B' est Génératrice de E $\Leftrightarrow$ B' est libre dans E $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \neq 0$

③LES ESPACES VECTORIELS RÉELS LES PLUS IMPORTANTS

L'ensemble	La loi externe	La structure
$\mathbb{R}$	$(\forall x\epsilon\mathbb{R})(\forall\alpha\epsilon\mathbb{R}),\quad \alpha\cdot x\epsilon\mathbb{R}$	$(\mathbb{R}; +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel
$\mathbb{C}$	$(\forall z\epsilon\mathbb{C})(\forall\alpha\epsilon\mathbb{R}),\quad \alpha\cdot z\epsilon\mathbb{C}$	$(\mathbb{C}; +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel
$\mathbb{R}^2$	$(\forall(a; b)\epsilon\mathbb{R}^2)(\forall\alpha\epsilon\mathbb{R}), \alpha\cdot(a; b)\epsilon\mathbb{R}^2$	$(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel
$\mathbb{R}^3$	$(\forall(a; b; c)\epsilon\mathbb{R}^3)(\forall\alpha\epsilon\mathbb{R}), \alpha\cdot(a; b; c)\epsilon\mathbb{R}^3$	$(\mathbb{R}^3; +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel
$\mathcal{V}_2$	$(\forall(\vec{u}; \vec{v})\epsilon\mathcal{V}_2)(\forall\alpha\epsilon\mathbb{R}),\quad \alpha\cdot(\vec{u}; \vec{v})\epsilon\mathcal{V}_2$	$(\mathcal{V}_2; +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel
$\mathcal{V}_3$	$(\forall(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})\epsilon\mathcal{V}_3)(\forall\alpha\epsilon\mathbb{R}), \alpha\bullet(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})\epsilon\mathcal{V}_3$	$(\mathcal{V}_3; +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel
$M_2(\mathbb{R})$	$(\forall M\epsilon M_2(\mathbb{R}))(\forall\alpha\epsilon\mathbb{R}), \alpha\cdot M\epsilon M_2(\mathbb{R})$	$(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel
$M_3(\mathbb{R})$	$(\forall M\epsilon M_3(\mathbb{R}))(\forall\alpha\epsilon\mathbb{R}),\quad \alpha\cdot M\epsilon M_3(\mathbb{R})$	$(M_3(\mathbb{R}); +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel
$\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$	$(\forall f\epsilon\,\mathcal{F}(I; \mathbb{R}))(\forall\alpha\epsilon\mathbb{R}),\quad \alpha\cdot f\epsilon\,\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$	$(\mathcal{F}(I; \mathbb{R}); +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel
$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}; \mathbb{R})$	$(\forall P\epsilon\mathcal{P}_n)(\forall\alpha\epsilon\mathbb{R}),\quad \alpha\cdot P\,\epsilon\,\mathcal{P}_n$	$(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}; \mathbb{R}); +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel

كن ابن من شئت و اكتسب أدبا يغنيك محموده عن النسب

Chapitre 16 LES PROBABILITES

① VOCABULAIRE DES PROBABILITES

Langage ensembliste	Langage probabiliste	Notation
L'ensemble des résultats possibles	Univers des possibilités	$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$
Le nombre des éléments distincts de Ω	Cardinal de Ω	$\mathrm{Card}\Omega = n$
Un élément de l'univers	Eventualité	ω_i
Une partie de l'univers	Evénement	$A \subset \Omega$
L'événement formé d'un seul élément	Evénement élémentaire	$A = \{\omega_i\}$
L'ensemble vide	Evénement impossible	$\emptyset$
L'ensemble Ω	Evénement certain	Ω
Complémentaire d'une partie A	Evénement contraire de A	$\overline{A}$
A et B sont disjoints	Les événements A et B sont compatibles	$A \cap B = \emptyset$

② PROBABILITE D'UN EVENEMENT

DEFINITION : Soit Ω un ensemble fini et non vide.

On appelle probabilité définie sur l'univers Ω, toute application P de $P(\Omega)$ dans l'intervalle $[0; 1]$ telle que :

i) $P(\Omega) = 1$ ii) Pour tous événements incompatibles A et B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

→ Le couple $(\Omega; P)$ est appelé un espace probabilisé fini.

PROPRIETES : Soit A et B deux événements de Ω .On a alors :

$P(\emptyset) = 1$	$P(\Omega) = 1$	$0 \leq P(A) \leq 1$	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$	$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A)$		
Si $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$, alors $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = 1$				

③ PROBABILITE UNIFORME

Soit $(\Omega; p)$ un espace probabilisé fini tel que : $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$

On dit que Ω est muni d'une probabilité uniforme p si et seulement si tous les événements élémentaires ont la même probabilité c-à-d $p(\omega_1) = p(\omega_2) = \cdots = p(\omega_n)$, dans ce cas : • $\forall i \epsilon \{1; 2; \dots; n\}$, $p(\omega_i) = \frac{1}{Card\,\Omega}$

$$\boxed{(\forall A \epsilon\, p(\Omega)) \quad p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$$

④ PROBABILITE CONDITIONNELLE

Soit p une probabilité définie sur un univers Ω , et soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$.

La probabilité de B sachant que A est réalisé est appelée la probabilité conditionnelle notée $p_A(B)$ ou $p(B/A)$ et se lit probabilité de B sachant A. On écrit : $\boxed{p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}}$

Formules des probabilités composées : $\boxed{p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)}$

Formule de Bayes : $p_A(B) = \dfrac{p(B) \times p_B(A)}{p(B) \times p_B(A) + p(\overline{B}) \times p_{\overline{B}}(A)}$

Formules des probabilités totales

Si A_1 , A_2 ,…, A_n forment une partition de l'univers Ω et si pour tout i compris entre 1 et n , $p(A_i) \neq 0$

alors pour tout événement B on a : $\boxed{p(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P_{A_i}(B)}$

Pour tout événements A et B de Ω , on a : $\boxed{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(A) \times P_A(B) + P(A) \times P_{\overline{A}}(B)}$

⑤ L'INDEPENDANCE

5-1. Indépendance des événements

On dit que deux événements A et B sont indépendants si on a : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

5-2. Epreuves indépendantes-Répétition d'une épreuve

Soit A un événement de probabilité p lors d'une éprouve aléatoire, et soit $n \epsilon \mathbb{N}^*$. Lorsqu'on répète cette éprouve n fois de manières identiques et indépendantes,

alors la probabilité que l'événement A soit réalisé k fois est : $C_n^k\, p^k\,(1-p)^{n-k}$ où $k \epsilon \{0; 1; \dots; n\}$

⑥ LES VARIABLES ALEATOIRES

6-1 .Définition Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire .

- Une variable aléatoire définie sur Ω est une application X définie sur Ω à valeurs dans IR.
- → L'ensemble des valeurs prises par X s'appelle le support de la variable aléatoire X , noté $X(\Omega)$

6.2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire et $X(\Omega)$ son support .

- On appelle Loi de probabilité de X l'ensemble des couple (x_i, p_i) où $x_i \epsilon X(\Omega)$ et $p_i = p(X = x_i)$ et on définit ainsi une loi de probabilité que l'on consigne en général dans un tableau.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

- **Espérance mathématique de X** : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$
- **Variance mathématique de X** : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(x_i - E(X))^2$ ou $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2$
- **Ecart-type de X** : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

⑦ LA LOI BINOMIALE

On considère une épreuve répété n fois dans des conditions identiques et indépendantes,

- la variable aléatoire qui est égale au nombre de fois la réalisation de L'événement A pour les n épreuves s'appelle une loi binomiale de paramètre n et p où $p = p(A)$, notée $B(n, p)$.
- La probabilité d'obtenir k succès $(0 \leq k \leq n)$ est donnée par la formule :

$$p(X = k) = C_n^k\, P^k\,(1-P)^{n-k} \quad \text{où } k \epsilon \{0; 1; \dots; n\}$$

- $E(X) = np$ | $V(X) = np(1-p)$ | $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

⑧ FONCTION DE REPARTITION

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega; \text{p})$.

- La fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_X(x) = p(X < x)$ est appelée la fonction de répartition de X .
- Sa courbe représentative sous forme d'un histogramme
- Soit la Loi de probabilité de la variable aléatoire X définie par le tableau

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

On a la fonction de répartition de X définie par :

- Si $x \leq x_1$ alors : $F_X(x) = p(X < x) = p(\emptyset) = 0$
- Si $x_1 < x \leq x_2$ alors : $F_X(x) = p(X = x_1) = p_1$
- Si $x_2 < x \leq x_3$ alors : $F_X(x) = p(X = x_1) + p(X = x_2) = p_2$

.   .

.   .

- Si $x > x_n$ alors : $F_X(x) = p(\Omega) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

اصنع إلى الله طريقا لا يراك فيه أحد
و لا يعلمه أحد ... خبئ لنفسك صالحات
تنفعك يوم لا ينفع فيه أحد

SCHEMA DE DÉNOMBREMENT

types de tirage
Chois de p objets parmi n

تذكر مزيان أن :

Tirage simultané
L'ordre n'est pas important

Chaque choix est une **Combinaison**

Nombre de choix possible est

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

$(p \leq n)$

Principe général de dénombrement

Soit une situation de dénombrement nécessite p choix $C_1, C_2, \dots, C_p$.

➢Si le chois C_1 peut produire n_1 résultats possibles et le chois C_2 peut produire n_2 résultats possibles ….et le chois C_p peut produire n_p résultats possibles

$\rightarrow$ Alors le nombre de choix possible est :

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$$

Tirage Successif
L'ordre est important

sans remise

Chaque choix est une Arrangement sans répétition

Nombre de choix possible est

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

avec remise

Chaque choix est une Arrangement avec répétition

Nombre de choix possible est

$$n^p$$

L'orde intervient

Le résultat (...........)	$\underbrace{(X_1\ ;\ X_2\ ;\ \dots;\ X_n)}_{p\ choix}$	$\underbrace{(k\ X\ ;\ (p-k)\ Y\ )}_{p\ choix}$	$\underbrace{(n_1\ X_1\ ;\ n_2\ X_2\ ,\dots,n_i\ X_i\ )}_{n_1+n_2+\cdots+n_i=p\ choix}$
Nombres des positions	$\frac{p!}{1!\ 1!\ \dots 1!} = p!$	$\frac{p!}{k!\ (p-k)!} = C_p^k = C_p^{p-k}$	$\frac{(n_1+n_2+\cdots+n_i)!}{n_1!\ n_2!\ \dots\ n_i!}$

Rappeler bien que

Au moins k signifie que k ou k+1 ou ….ou p . $k \leq au\ moins\ k \leq p$

Au plus k signifie que k ou k-1 ou …ou 0 . $0 \leq au\ plus\ k \leq k$

Nombres Spéciaux : n ! , A_n^p , C_n^p

$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
$A_n^n = n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$	
$C_n^1 = A_n^1 = n$	$0\,! = 1\,! = 1$
$C_n^p = C_n^{n-p}$	$C_n^n = C_n^0 = A_n^0 = 1$
$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p \Rightarrow C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$	

Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Triangle de Pascal

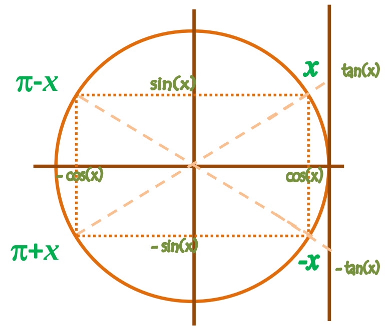
n=0	C_0^0				
n=1	C_1^0	C_1^1			
n=2	C_2^0	C_2^1	C_2^2		
n=3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	
n=4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4
…..		………………….			
n=n	C_n^0	C_n^1	… … … ..	C_n^{n-1}	C_n^n

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

CALCUL TRIGONOMETRIQUE

➢ TABLEAU DES VALEURS REMARQUABLES

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$sinx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$cosx$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tanx$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



$(\forall\, x \in \mathbb{R})\ :\ -1 \le cos(x) \le 1 \quad et \quad -1 \le sin(x) \le 1 \qquad \left(\forall\, x \in IR - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\right) :\ tan(x) \in \mathbb{R}$

➢ RELATIONS FONDAMENTALES

$cos^2(x) + sin^2(x) = 1$	$cos^2(x) = \frac{1}{1+tan^2(x)}$	$sin^2(x) = \frac{tan^2(x)}{1+tan^2(x)}$	$tan\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x} = \frac{1}{cotan\,(x)}$
$cos(-x) = cos(x)$	$cos(x + 2k\pi) = cos(x)$	$cos(\pi - x) = -cos(x)$	$cos(\pi + x) = -cos(x)$
$sin(-x) = -sin(x)$	$sin(x + 2k\pi) = sin(x)$	$sin(\pi - x) = sin(x)$	$sin(\pi + x) = -sin(x)$
$tan(-x) = -tan(x)$	$tan(x + k\pi) = tan(x)$	$tan(\pi - x) = -tan(x)$	$tan(\pi + x) = tan(x)$

$cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin(x) = -cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	$sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos(x) = sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	$tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{tan\,(x)} = -tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

➢ FORMULES DE TRANSFORMATION DE BASE

$\boldsymbol{cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)}$	$\boldsymbol{tan(a+b) = \frac{tan(a)+tan(b)}{1-tan(a)tan(b)}}$
$\boldsymbol{cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)}$	
$\boldsymbol{sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)}$	$\boldsymbol{tan(a-b) = \frac{tan(a)-tan(b)}{1+tan(a)tan(b)}}$
$\boldsymbol{sin(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)}$	

➢ Déductions

$cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sin^2\alpha$ $= 2cos^2(\alpha) - 1$ $= 1 - 2sin^2(\alpha)$	$sin(2\alpha) = 2sin(\alpha)cos(\alpha)$	$cos^2\alpha = \frac{1 + cos(2\alpha)}{2}$
	$tan(2\alpha) = \frac{2tan(\alpha)}{1 - tan^2(\alpha)}$	$sin^2\alpha = \frac{1 - cos(2\alpha)}{2}$

En posant : $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$	$cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$	$tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$

➢ TRANSFORMATION DE SOMMES EN PRODUITS

$cosa + cosb = 2cos\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$	$sina + sinb = 2sin\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$	$1 + cosa = 2cos^2\left(\frac{a}{2}\right)$
$cosa - cosb = -2sin\left(\frac{a+b}{2}\right)sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$	$sina - sinb = 2sin\left(\frac{a-b}{2}\right)cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$	$1 - cosa = 2sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$

➢ TRANSFORMATION DE PRODUITS EN SOMMES

$cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}(cos(a+b) + cos(a-b))$	$sin(a)cos(b) = \frac{1}{2}(sin(a+b) + sin(a-b))$
$sin(a)sin(b) = \frac{1}{2}(cos(a-b) - cos(a+b))$	$cos(a)sin(b) = \frac{1}{2}(sin(a+b) - sin(a-b))$

➢ TRANSFORMATION DE L'EXPRESSION $acos(x) + bsin(x)$

$$acos(x) + bsin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}sin(x)\right)$$

$acos(x) + bsin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\,cos(x-\alpha)$ tel que : $cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$acos(x) + bsin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\,sin(x+\beta)$ tel que : $sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

➢ EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

$cosx = cosa \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{vmatrix},\ k\in\mathbb{Z}$	$sinx = sina \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{vmatrix},\ k\in\mathbb{Z}$	
$tanx = tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$	$cosx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$sinx = 0 \Leftrightarrow x = k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$

FORMULAIRE 2

➢ LES ENSEMBLES USUELLES : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Ensemble des nombres Entiers Naturels	$\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\dots..\}$
Ensemble des nombres entiers relatifs	$\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$
Ensemble des nombres Décimaux	$\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^n} \ / \ a\epsilon\mathbb{Z} \ et \ n\epsilon\mathbb{N}\right\}$
Ensemble des nombres Rationnels	$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \ / \ a\epsilon\mathbb{Z} \ et \ b\epsilon\mathbb{Z}^* , a\wedge b = 1\right\}$
Ensemble des nombres Réels	$\mathbb{R}$: (les nombres rationnels et irrationnels)
Ensemble des nombres complexes	$\mathbb{C} = \{a+ib \ / \ (a\,;b)\epsilon\mathbb{R}^2 \ ; \ i^2 = -1\}$

➢ PROPRIETES

Si	Alors
$n = 2k \quad , \ k\epsilon\mathbb{N}$	n est un nombre pair
$n = 2k+1 \quad , \ k\epsilon\mathbb{N}$	n est un nombre impair
$n = a^2 \quad , \ a\epsilon\mathbb{N}$	n est un carré parfait
$a^2 < n < (a+1)^2 \quad , \ a\epsilon\mathbb{N}$	n n'est pas un carré parfait
$n = bq \quad , \ q\epsilon\mathbb{Z}$	b divise n (b/n) ou n multiple b
$a = bq + r \quad , \ 0 < r < b$	b ne divise pas a
$\lvert p\rvert \neq 1$ et $D_p = \{\pm 1 \ ; \ \pm p\}$	p est un nombre premier
$a \wedge b = 1$	a et b sont premiers entre eux

➢ LES IDENTITES REMARQUABLES

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$	$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$
$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$	$a^n + b^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-k-1} b^k$ (n Impair)
Forme canonique : $x^{2n} \pm a\,x^n = \left(x^n \pm \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$; $x^2 \pm a\,x = \left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	

➢ INEGALITES REMARQUABLES

$\lvert x\rvert - \lvert y\rvert \le \lvert x+y\rvert \le \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ L'inégalité triangulaire	$\lvert\vec{u}.\vec{v}\rvert \le \lVert\vec{u}\rVert.\lVert\vec{v}\rVert$ L'inégalité de Cauchy-Schwarz
$\lvert x\rvert \le r \iff -r \le x \le r \iff x \in [-r;r]$	
$\lvert x\rvert \ge r \iff x \le -r$ ou $x \ge r \iff x \in]-\infty;-r] \cup [r;+\infty[$	
$(\forall (x,y)\epsilon\mathbb{R}^2_{+*})$, $x \le \frac{2xy}{x+y} \le \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \le y$	$\forall x \in [a;b]$, $\left\lvert x - \frac{a+b}{2}\right\rvert \le \frac{b-a}{2}$

➤ SIGNE ET FACTORISATION DU TRINOME : $P(x) = ax^2 + bx + c$

$P(x)$	**Discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac \quad (a \neq 0)$		
	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solutions de P(x)=0	$S = \left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad et \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$	$S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	$S = \emptyset$
Factorisation de P(x)	$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$	$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	
Signe de P(x)	x : $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ P(x) : Signe de a 0 Signe de$(-a)$ 0 Signe de a	Signe de a	

➤ SIGNE DE BINOME $ax + b \quad (a \neq 0)$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $(-a)$	**0**	signe de a

➤ DOMAINE DE DEFINITION D'UNE FONCTION : Soient P et Q deux polynômes

f une fonction définie par :	Domaine de définition de f :
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = cos(x) ; f(x) = sin(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = tan(x)$	$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$
$f(x) = Arctan(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = ln(x)$	$D_f =]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x\epsilon\mathbb{R}/Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x\epsilon\mathbb{R}/P(x) \geq 0\}$
$f(x) = ln(P(x))$	$D_f = \{x\epsilon\mathbb{R}/P(x) > 0\}$
$f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x\epsilon\mathbb{R}/Q(x) > 0\}$
$f(x) = \frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x\epsilon\mathbb{R}/P(x) \geq 0 \ et \ Q(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$	$D_f = \left\{x\epsilon\mathbb{R}/\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \ et \ Q(x) \neq 0\right\}$
$\begin{cases} f(x) ; x\epsilon I \\ f(x_o) \end{cases}$	$D_f = (D \cap I) \cup \{x_o\}$
$\begin{cases} f_1(x) ; & x\epsilon I \\ f_2(x) ; & x\epsilon J \end{cases}$	$D_f = (D_1 \cap I) \cup (D_2 \cap J)$

اغتنم عمرك : ابن آدم إنما أنت أيام، كلما ذهب يوم ذهب بعضك -حسن البصري رحمه الله-

➢ SOMMES - PRODUITS

$\sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a$	$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$	$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p\,\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$
$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$	$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$	$\sum_{k=p}^{n} a x_k \;=\; a\sum_{k=p}^{n} x_k$
$\prod_{k=p}^{n} (a x_k) = a^n \prod_{k=1}^{n} x_k$	$\prod_{k=1}^{n} k = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n = n!$ (n factorielle)	
$\sum_{k=1}^{k=n} k\times k! = (n+1)!-1$	$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$	
$\sum_{k=p}^{n} (x_k+y_k) = \sum_{k=p}^{n} x_k + \sum_{k=p}^{n} y_k$	$\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_p$	$\prod_{k=p}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}$
$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \geq n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k\right)$	$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right) = \prod_{k=1}^{n} (x_k y_k)$	
$\prod_{k=1}^{n} (1+x_k) \geq 1 + \prod_{k=1}^{n} x_k \quad ; \; x_k \geq -1$	$p + (p+r) + (p+2r) + \cdots + d = \left(\frac{d-p}{r}+1\right)\left(\frac{p+d}{2}\right)$	

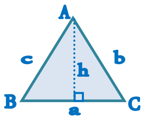
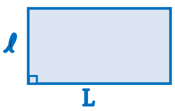
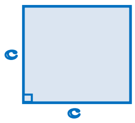
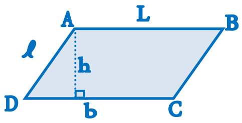
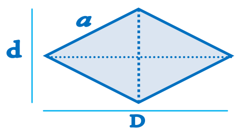
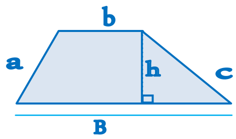
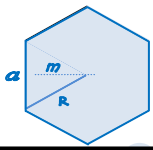
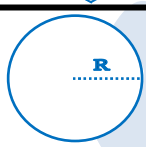
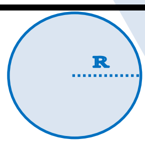
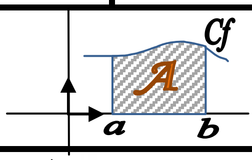
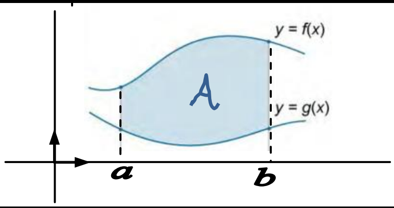
SOMMES DOUBLES

$\sum_{1\leq i,j\leq n} i\,j = \sum_{i=1}^{i=n} i \sum_{j=1}^{j=n} j = \sum_{i=1}^{i=n} i\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i\,j = \sum_{j=1}^{j=n} j \sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n} j\left(\frac{j(j+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=n} (j^3+j^2) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=n} j^3 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=n} j^2$
$\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{i}{j} = \sum_{i=1}^{i=n} i \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{j} = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{j}$

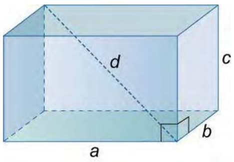
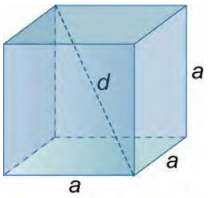
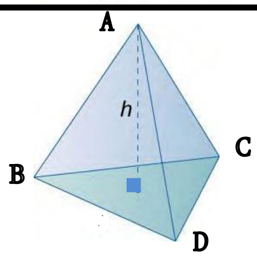
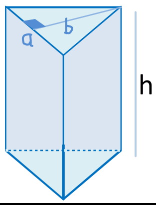
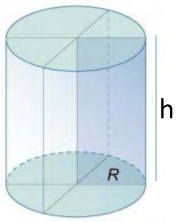
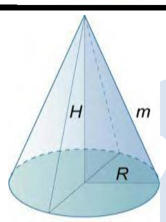
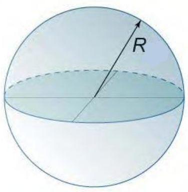
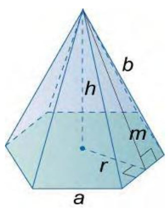
بادرِ الفرصةَ واحذرْ فَوْتَها ..... فبلوغُ العزِّ في نيلِ الفرص

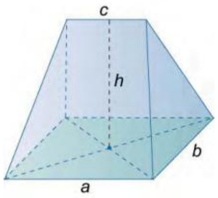
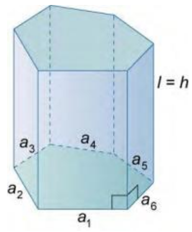
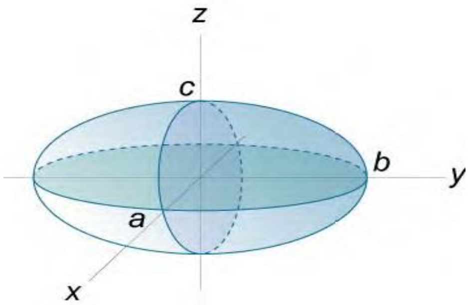
فابتدرْ مسعاكَ واعلمْ أنَّ مَنْ ..... بادَرَ الصيدَ مع الفجرِ قَنَص

LES AIRES - LES VOLUMES

La Forme	Périmètre : P	Aire ou Superficie : S
Triangle 	$P = a + b + c$	$S = \dfrac{h \times b}{2}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $S = \dfrac{1}{2} AB \times AC \ \sin\hat{A}$ $S = \dfrac{1}{2}\lvert det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\rvert = \dfrac{1}{2}\lVert \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \rVert$
Rectangle 	$P = (L + l) \times 2$	$S = L \times l$
Carré 	$P = 4 \times c$	$S = c^2$
Parallélogramme 	$P = (L + l) \times 2$	$S = h \times b$ $S = \lVert \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} \rVert$
Losange 	$P = 4 \times a$	$S = \dfrac{D \times d}{2}$
Trapèze 	$P = B + a + b + c$	$S = \dfrac{(B + b) \times h}{2}$
Hexagone régulière $R = a$ $\alpha = 120°$ 	$P = 6a$	$S = pm = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$
Cercle 	$P = 2\pi R$	
Disque 	$P = 2\pi R$	$S = \pi R^2$
Domaine délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ 		$S_A = \displaystyle\int_a^b f(x)dx \ \ (\mu A)$
Domaine délimité par les courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ 		$S_A = \displaystyle\int_a^b \lvert f(x) - g(x)\rvert dx \ \ (\mu A)$

S : Aire totale **S_L : Aire latérale** **S_B : Aire de base** **P_B : Périmètre de base**

La Forme	Aire – Superficie : S	Volume : V
Parallélépipède rectangle a : Longueur b : largeur c : Hauteur 	$S = S_L + 2S_B$ $= 2(ab + ac + bc)$ $S_L = P_B \times c$ $S_B = a \times b$	$V = S_B \times h = a \times b \times c$
Cube a : Arête 	$S = S_L + 2S_B = 6a^2$ $S_L = 4a^2$ $S_B = a^2$	$V = S_B \times h = a^3$
Tétraèdre 	$S = S_L + S_B$ $S_L = P_B \times h$ $S_B = S_{BCD} = \frac{1}{2}\lVert\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BC}\rVert$	$V = \frac{1}{3}S_B \times h$
Prisme droit 	$S = S_L + 2S_B$ $S_L = P_B \times h$ $S_B = S_{BCD}$	$V = S_B \times h = \frac{1}{2}abh$
Cylindre droit 	$S = S_L + 2S_B$ $S_L = P_B \times h = 2\pi Rh$ $S_B = \pi\,.\,R^2$	$V = S_B \times h = \pi\,.\,R^2.\,h$
Cône droit 	$S = S_L + S_B = \pi R(m + R)$ $S_L = \pi Rm$ $S_B = \pi\, R^2$	$V = \frac{1}{3}\pi\,.\,R^2.\,H$
Sphère 	$S = 4\pi\, R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi\, R^3$
Pyramide régulière p :demi périmètre $p = \frac{1}{2}P_B$ 	$S = S_L + S_B$ $S_L = pm = p\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$ $S_B = pr = 3ar$	$V = \frac{1}{3}p.r.h$

Coin droit rectangulaire 	$S = S_L + S_B$ $S_L = \frac{a+c}{2}\sqrt{4h^2 + b^2} + \sqrt{h^2 + (a-c)^2}$ $S_B = ab$	$V = \frac{1}{6}bh(2a + c)$
Tronc d'une pyramide régulière 	$S = S_L + 2S_B$ $S_L = \left(\sum_{i=1}^{6} a_i\right)h$	$V = S_B h$
Ellipsoïde 		$V = \frac{4}{3}\pi abc$

إذا غذي القلب بالتذكر و سقي بالتفكر و نقي من الفساد ،رأى العجائب و الهم الحكم.

من ترك فضول الكـــلام منـــح الحكمـــة.

من ترك فضول النظــــر منـــح الخشـــوع.

من ترك فضول الطعــــام منـــح لذة العبـادة.

من ترك فضول الضحــــك منـــح الهيبــــة.

من ترك المـــــــزاح منـــح البهـــاء .

من ترك حب الدنيـــــا منـــح حب الآخرة .

من ترك الاشتغال بغيوب غيره منح الإصلاح لعيوب نفسه.

قال الشاعر :

و النفس كالطفل ... ان تتركه شب على ... حب الرضاع ... وان تفطمه ينفطم

SIGNES ET SYMBOLES

$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres Entiers Naturels
$\mathbb{Z}$	Ensemble des nombres entiers relatifs
$\mathbb{D}$	Ensemble des nombres Décimaux
$\mathbb{Q}$	Ensemble des nombres Rationnels
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres Réels
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\emptyset$	Ensemble vide
$\in$	Appartient à
$\notin$	N’appartient pas à
$\subset$	Inclus
$\not\subset$	n’est pas inclus
$\cap$	Intersection
$\cup$	Union
C_E^A	Le complémentaire de A dans E
$\mathcal{P}(E)$	Ensemble des parties de E
$=$	Egal
$\neq$	Différent
$\simeq$	Presque (à peu près égal)
$\equiv$	congrue
$>$	Plus grand que (strictement supérieur à)
$\geq$	Plus grand (supérieur) ou égal à
$<$	Plus petit que(strictement inférieur à)
$\leq$	Plus petit(inférieur) ou égal à
$+$	Plus
$-$	Moins
$\times$	Multiplié par
$\div$	Divisé par
$\Longrightarrow$	Implique que
$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$	Somme des n éléments $x_1; x_2; \ldots; x_n$

$\Leftrightarrow$	Equivalent à (Equivaut) (si et seulement si)
$\forall$	Pour tout (quel que soit)
$\exists$	Il existe au moins
$\exists!$	Il existe un seul (unique)
$\lvert \quad \rvert$	Valeur absolue
$d = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$	déterminant
Δ	Delta , Discriminant
$\lVert\vec{u}\rVert$	norme de $\vec{u}$
$\overrightarrow{AB}$	Vecteur AB
$\vec{0}$	Vecteur nul
$[AB]$	Segment AB
(AB)	Droite AB
AB	Distance AB
$\widehat{AB}$	Arc AB
$n!$	n factorielle
$[a,b]$	Intervalle a b fermé
$]a,b[$	Intervalle a b ouvert
$[a,b[$	Intervalle a b demi-ouvert à droite
$]a,b]$	Intervalle a b demi-ouvert à gauche
$+\infty$	Plus infini
$-\infty$	Moins infini
$(o,\vec{i},\vec{j})$	Repère de plan
$(\quad)$	parenthèse
$[\quad], \{ \quad \}$	Crochet , accolade
$sin\alpha$	Sinus de α
$cos\alpha$	Cosinus de α
$tan\alpha$	Tangente de α
$cotan\alpha$	Cotangente de α
$\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$	Produit des n éléments $x_1; x_2; \ldots; x_n$

أجعل بينك و بين الله أسرار، دمعة في خلوة..صدقة لا يعلمها إلا الله... دعوة لأخيك في الغيب... صلاة في جوف الليل... قراءة القرآن...

LETTRES GRECQUES

Majuscule	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Θ	Λ
Minuscule	α	β	γ	δ	ε	ζ	θ	λ
Prononciation	*alpha*	*bêta*	*gamma*	*delta*	*epsilon*	*zêta*	*thêta*	*lambda*

Majuscule	Μ	Π	Ρ	Σ	Τ	Φ	Ψ	Ω
Minuscule	μ	π	ρ	σ	τ	ϕ	ψ	ω
Prononciation	*mu*	*pi*	*rhô*	*sigma*	*tau*	*phi*	*psi*	*oméga*

LOIS DE COMPOSITION

Symbole	$*$	T	$\perp$	$\circ$
Prononciation	*Etoile*	*Truc*	*Antitruc*	*rond*

Existe en cette collection :

GUIDE MATHEMATIQUE