BAC D SESSION DE 2022 (1er tour)

EXERCICE 1

Soit P le polynôme de la variable complexe z définie par :
$P(z) = z^3 - 7z^2 + 19\,z - 13$

1) a- Vérifier que 1 est une racine de P. En déduire les nombres complexes $\alpha\ et\ \beta$ tels que :
$P(z) = (z-1)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

b- Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

2) On pose $\alpha = 1$; $b = 3 - 2i\ \ et\ \ c = \bar{b}$.
Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{V}\right)$, on considère les points A ; $B\ et\ C$ d'affixes respectives $a, b\ et\ c$.
Soit M le point d'affixe z distinct de B.
On pose $Z = \frac{Z-1}{Z-3+2i}$

a- Calculer le module et un argument de $\frac{C-a}{b-a}$ et interpréter géométriquement le module et un argument $\frac{C-a}{b-a}$. En déduire la nature exacte du triangle ABC.

b- Donner une interprétation géométrique d'un argument de Z. En déduire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel non nul.

c- Soit D l'image du poit C par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $Z_{\vec{u}} = -5 + i$.
Déterminer l'affixe d du point D puis calculer $\frac{b-a}{d-a}$.
En déduire que D est un point de (E).

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm. On note $(\mathcal{C})$, l'ensemble des points $M(t)$ du plan de coordonnées $\left(x(t)\,;\,y(t)\right)$ telles que :

$$\begin{cases} x(t) = 2sint - sin2t \\ y(t) = 2cost - cos2t \end{cases};\quad t \in \mathbb{R}$$

1) a- Comparer $M(t)\ et\ M(t + 2\pi)$ pour tout réel t et en déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude de $(\mathcal{C})$ à l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.

b) Comparer $M(t) et\ M(-t)$ pour tout $t \in [-\pi\,;\,\pi]$ et en déduire que l'on peut à nouveau restreindre le domaine d'étude de $(\mathcal{C})$ à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

2) a- Montrer que
$x'(t) = -2(cost - 1)(2cost + 1)$ et que
$y'(t) = (2sint)(2cost - 1)$.

b- Etudier le sens de variation de $x\ et\ de\ y\ sur\ [0\,;\,\pi]$

c- Dresser le tableau de variations conjoint de $x\ et\ de\ y\ sur\ [0\,;\,\pi]$.

3) Tracer $(\mathcal{C})$ après avoir placé les points remarquables avec les tangentes associées.
(On admettra qu'au point de paramètre 0, la demi-tangente à $(\mathcal{C})$ est verticale).

On donne : $\sqrt{3} \approx 1,7$.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $]-1\,.\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + 2ln(1+x)\ si\ x \in\ ]-1\,;0[\\ f(x) = x - 1 + e^{-x}\ si\ x \in [0\,;\,+\infty[\end{cases}$$

de courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique $2cm$.

Partie A

1) a- Etudier la continuité de $f\ en\ 0$.

b- Etudier la dérivabilité de $f\ en\ 0$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a- Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c- Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

3) a- Déterminer le sens de variations de $f\ sur\ ]-1\,;0[\ puis\ sur\ ]0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.

b- Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes.

4) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-1\,;0[$.

a- Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} donc on précisera l'ensemble de définition.

b- Construire en pointillés la courbe $(\Gamma)\ de\ h^{-1}$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$. Justifier la construction.

Partie B

1) On considère un réel α supérieur à 1. Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équation $x = 1\,; x = \alpha\,; y = x - 1$ et la courbe $(\mathcal{C})$.

a- Calculer en cm^2, l'aire $A(\alpha)$ en fonction de α.

b- Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$.

2) On considère $\sum$, la portion du plan comprise entre les droites d'équation $x = 0\,; x = 1$; l'axe des abscisses et la courbe $(\mathcal{C})$. On note V le volume engendré par la rotation complète de $\sum atour$ de l'axe des abscisses.

a- Calculer en intégrant par parties $I = \int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$.

b- Calculer V en cm^3.

On donne e $\approx 2,7$.

BAC D SESSION DE 2022 (2nd tour)

EXERCICE 1

L'espace est rapporté à un repère orthonrmal $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ d'unité graphique $2cm$.
Soient les points $A(1; 2;\ -1)$, $B(2\,; 0; 1)$
, $C(2\,; 3; 1)\ et\ D(3;\ -2; 2)$

1) a- Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b- Les points A, B, C déterminent-ils un plan ? Justifier.

c- Les point $A, B, C\ et\ D$ sont-ils coplanaires ?

2) Calculer en cm^2, l'aire du triangle ABC.

3) Calculer en cm^3, le volume du tétraèdre $ABCD$.

EXERCICE 2

Lors d'une campagne publicitaire, un agent commercial d'une société de la place a dans son sac 20 tee-shirts dont trois (03) de couleur noire, sept (07) de couleur blanche et dix (10) de couleur jaune. Il tire au hasard et simultanément de son sac trois tee-shirts qu'il remet à un client.

1) a- Calculer la probabilité des événements suivants :

E: « Parmi les trois tee-shirts figurent un noir et au moins un jaune »

F: « Les trois tee-shirts sont toutes de couleurs différentes »

b- Calculer la probabilité que les trois tee-shirts soient toutes de couleurs différentes sachant qu'y figurent un seul tee-shirt noir et au moins un tee-shirt jaune.

2) Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de tee-shirts blancs obtenus par le client.

a- Déterminer la loi de probabilité de X.

b- Calculer l'espérance mathématique de X.

c- Déterminer la fonction de répartition de X.

PROBLEME

On considère la fonction $f\ définie\ sur\ \mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2 - 3 + 2(1 - x)e^{1+x}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ )$ d'unité graphique $2cm$.

Partie A

1) a- Vérifier que, pour $x \neq 0$,

$f(x) = x^2\left[1 - \frac{3}{x^2} - 2e\frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right]$

b- Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

c- Calculer la limite de $f\ \ en - \infty$.

2) a- Montrer que pour tout réel x,

$f'(x) = 2x(1 - e^{1+x})$

b- En déduire le sens de variations de f, puis dresser son tableau de variations.

3) a- Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [0\ , +\infty]$. Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.

b- Montrer que l'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution $\alpha\ dans\ ]1\ , 2[$.

4) Construire la parabole (P) d'équation $y = x^2 - 3$, puis les courbes $(\mathcal{C})\ et\ (\Gamma)\ de\ \mathrm{g}^{-1}$ dans le même repère.

Partie B

1) Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$k(x) = (1 - x)e^{1+x}$

a- Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$G(x) = (-x + 2)e^{1+x}$ est une primitive de $k\ sur\ \mathbb{R}$.

b- Soit λ un réel inferieur ou égal à -1.

Déterminer en cm^2, l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la parabole (P) et les droites d'équations $x = -1\ et\ x = \lambda$.

c- Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$

2) On désigne par (Σ) La partie du plan délimitée par la parabole (P) et les droites d'équations :

$x = 0\ , x = \sqrt{3}\ et\ y = 0$.

Calculer en cm^3, le volume V du solide engendré par la rotation complète de (Σ) autour de l'axe des abscisses.

3) On considère la fonction h définie par

$h(x) = x^2 - 3 + 2(1 + |x|)e^{1-|x|}, x \in \mathbb{R}$.

a- Etudier la parité de h.

b- Compare $h\ et\ f\ sur\ ]-\infty\ , 0]$

c- Sans étudier les variations de h, déduire la construction de la courbe représentative $(\mathcal{C}')\ de\ h$. Justifier.

On donne $e^3 \approx 20{,}08$; $e \approx 2{,}72$; $e^2 \approx 7{,}4$

CORRIGE SESSION 2022 (1er tour)

EXERCICE 1

Soit P le polynôme de la variable complexe z définie par :

$P(z) = z^3 - 7z^2 + 19\,z - 13$.

1) a- Vérifions que 1 est une racine de P

$P(1) = (1)^3 - 7(1)^2 + 19(1) - 13$

$= 1 - 7 + 19 - 13$

$= 20 - 20$

$P(1) = 0\ donc\ 1$ est une racine de P.

Déduisons-en les nombres complexes $\alpha\ et\ \beta$ tels que :

$P(z) = (z - 1)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

$P(z) = (z - 1)(z^2 - \alpha z + \beta)$

$= z^3 + \alpha z^2 + \beta z - z^2 - \alpha z - \beta$

$P(z) = z^3 + (\alpha - 1)z^2 + (\beta - \alpha)z - \beta$

Par identification ; il vient que :

$\begin{cases} \alpha - 1 = -7 \\ \beta - \alpha = 19 \\ -\beta = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -6 \\ \beta = 13 \end{cases}$

Par suite : $P(z) = (z - 1)(z^2 - 6z + 13)$

b- Résolvons l'équation $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1\ ou\ \ z^2 - 6z + 13 = 0$

$\Delta = 36 - 52 = -16 = (4i)^2$

$z_1 = \frac{6-4i}{2}$; $z_2 = \frac{6+4i}{2}$

$z_1 = 3 - 2i$; $z_2 = 3 + 2i$

$S_{\mathbb{C}} = \{1\ ; 3 - 2i\ ; 3 + 2i\}$

2) On pose : $a = 1$; $b = 3 - 2i\ \ et\ c = \overline{b}$

a- Calculons le module et un argument de $\frac{C-a}{b-a}$ et interpréter géométriquement le module et un argument de ce quotient.

$\frac{C-a}{b-a} = \frac{3+2i-1}{3-2i-1} = \frac{2+2i}{2-2i} = \frac{(1+i)(1+i)}{2} = i$

* $\left|\frac{C-a}{b-a}\right| = |i| = 1$

* $\arg\left(\frac{C-a}{b-a}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$

Interprétation géométrique du module et d'un argument du quotient :

* $\left|\frac{C-a}{b-a}\right| = \frac{|c-a|}{|b-a|} = \frac{AC}{AB}$

* $\arg\left(\frac{C-a}{b-a}\right) = (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})\ (2\pi)$

Déduisons-en la nature exacte du triangle ABC.

On a : $\left|\frac{C-a}{b-a}\right| = 1\ et\ \left|\frac{C-a}{b-a}\right| = \frac{AC}{AB}$ donc : $\frac{AC}{AB} = 1$

On a aussi :

$\arg\left(\frac{C-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}\ et\ \ \arg\left(\frac{C-a}{b-a}\right) = (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$

Donc $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2}$

$\frac{AC}{AB} = 1 \Leftrightarrow AB = AC\ et\ (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2}$ donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

b- Donnons une interprétation géométrique d'un argument de Z.

$Z = \frac{z-1}{z-3+2i} = \frac{z-1}{z-(3-2i)} = \frac{z-a}{z-b}$

$\arg(Z) = arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$

$\arg(Z) = \left(\widehat{\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}}\right)$

Déduisons-en l'ensemble (E) , des points M d'affixe z tels que z soit un réel non nul

z est un réel non nul $\Leftrightarrow \arg(z) = k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$

$or\ \arg(z) = \left(\widehat{\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}}\right)$ donc :

z est un réel non nul

$\Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}}\right) = k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$

On en déduit alors que (E) est l'ensemble des points de la droite (AB) privée des points $A\ et\ B$.

c- Déterminons l'affixe d du point D.

$$\begin{aligned} t_{\vec{u}}(C) = D &\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \vec{u} \\ &\Leftrightarrow z_D - z_C = z_{\vec{u}} \\ &\Leftrightarrow z_D = z_C + z_{\vec{u}} \\ &\Leftrightarrow z_D = 3 + 2i - 5 + i \\ &\Leftrightarrow z_D = -2 + 3i \text{ donc } d = -2 + 3i \end{aligned}$$

Calculons $\frac{b-a}{d-a}$

$\frac{b-a}{d-a} = \frac{3-2i-1}{-2+3i-1} = \frac{2-2i}{-3+3i} = \frac{(2-2i)(-3-3i)}{18}$

$= \frac{-6-6i+6i-6}{18} = \frac{-12}{18} \Longrightarrow \frac{b-a}{d-a} = \frac{-2}{3}$

Déduisons-en que D est un point de (E)

Comme $\frac{b-a}{d-a} = \frac{-2}{3} \in \mathbb{R}^*\ et\ D \neq A$; $D \neq B$ ou en déduit alors que D appartient à (E)

EXERCICE 2

$\begin{cases} x(t) = 2sint - sin2t \\ y(t) = 2cost - cos2t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

1) a- Comparons $M(t)\ et\ M(t + 2\pi)$ pour tout réel t .

$M(t + 2\pi)$:

$\begin{cases} x(t + 2\pi) = 2sin(t + 2\pi) - sin2(t + 2\pi) \\ y(t + 2\pi) = 2cos(t + 2\pi) - cos2(t + 2\pi) \end{cases}$

$\begin{cases} x(t + 2\pi) = 2sint - sin(2t + 4\pi) \\ y(t + 2\pi) = 2cost - cos(2t + 4\pi) \end{cases}$

$\begin{cases} x(t + 2\pi) = 2sint - sin2t \\ y(t + 2\pi) = 2cost - cos2t \end{cases}$

$\begin{cases} x(t + 2\pi) = x(t) \\ y(t + 2\pi) = y(t) \end{cases}$ donc les points $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$ sont confondus.

Déduisons-en :

Comme les points $M(t)\ et\ M(t + 2\pi)$ sont confondus alors la courbe $(\mathcal{C})$ est entièrement obtenue sur un intervalle quelconque d'amplitude 2π. On peut donc restreindre le domaine d'étude de $(\mathcal{C})$ à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

b- Comparons $M(t) et\ M(-t)$ pour tout réel $t \in [-\pi\ ;\ \pi]$

Pour tout réel $t \in [-\pi\ ;\ \pi]$; $-t \in [-\pi\ ;\ \pi]$ et on a :

$\begin{cases} x(-t) = 2sin(-t) - 2sin(-2t) \\ y(-t) = 2cos(-t) - 2cos(-2t) \end{cases}$

$\begin{cases} x(-t) = -2sint + 2sin2t \\ y(-t) = 2cost - 2cos2t \end{cases}$

$\begin{cases} x(-t) = -(2sint - 2sin2t) \\ y(-t) = 2cost - 2cos2t \end{cases}$

$\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$ donc les points $M(t)\ et\ M(-t)$ sont symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Déduisons-en :

Comme les points $M(t)\ et\ M(-t)$ sont symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on en déduit que $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et par conséquent on peut restreindre le domaine d'étude de $(\mathcal{C})$ à l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

2) a- Montrons :

$* \ x(t) = 2sint - sin2t$

x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2cost - 2cos2t \\ &= 2cost - 2(2cos^2t - 1) \\ &= -2(2cos^2t - 1 - cost) \\ &= -2(2cos^2t - cost - 1) \end{aligned}$$

$= -2\left[2(cost-1)\left(cost+\frac{1}{2}\right)\right]$

$x'(t) = -2\ (cost-1)(2cost+1).$

$*\ y(t) = 2cost - cos2t$

y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$y'(t) = -2sint + 2sin2t$

$= -2sint + 2 \times 2sint.cost$

$y'(t) = (2sint)(2cost-1)$.

b- Etudions le sens de variation de $x\ et\ y\ sur\ [0\ ;\ \pi]$.

* Pour tout $t \in [0\ ;\ \pi]$;

$x'(t) = -2(cost-1)(2cost+1)$

On sait que pour tout $t \in [0\ ;\ \pi]$;

$cost \leq 1 \Leftrightarrow cost - 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow -2(cost-1) \geq 0$ donc le signe de $x'(t)$ est celui de $2cost+1$.

$sur\ [0\ ;\ \pi]$; $2cost+1=0 \Longrightarrow t=\frac{2\pi}{3}$; par suit

Pour tout $t \in \left[0\ ;\ \frac{2\pi}{3}\right]$; $x'(t) \geq 0$ et pour tout

$t \in \left[\frac{2\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$; $x'(t) \leq 0$

D'où x est croissante sur $\left[0\ ;\ \frac{2\pi}{3}\right]$ $et\ x$ est décroissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$.

* Pour tout $t\ \in\ [0\ ;\ \pi]$; $y'(t) = (2sint)(2cost-1)$

Pour tout $t\ \in\ [0\ ;\ \pi]$; $(2sint) \geq 0$ donc le signe de $y'(t)$ est celui de $2cost-1$

Ainsi :

Pour tout $t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]$; $y'(t) \geq 0$ et pour tout

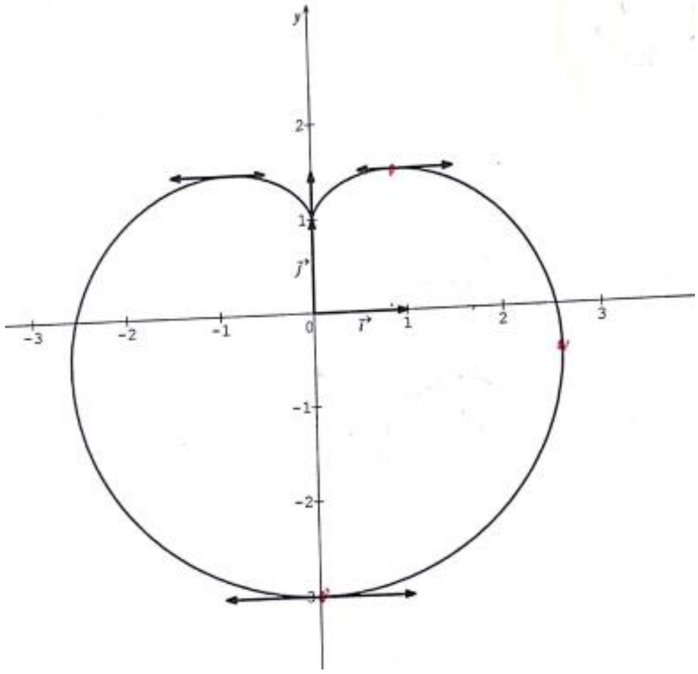
$t \in \left[\frac{\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$; $y'(t) \leq 0$; par suite :

y es croissante sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]$ et y est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$

c- Dressons le tableau de variation conjoint de $x\ et\ y\ sur\ [\ 0\ ;\ \pi]$

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	-4
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	$-2\sqrt{3}$	$-$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
$y(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-3

3) Traçons $(\mathcal{C})$



PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$\begin{cases} f(x) = -x + 2ln(1+x) si\ x \in\ ]-1\ ; 0[\\ f(x) = x - 1 + e^{-x} \quad si\ x \in [0\ ;\ +\infty[\end{cases}$

Partie A

1) a- Etudions la continuité de $f\ en\ 0$

$f(0) = 0 - 1 + e^{-0} = 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(-x + 2ln(1+x)\right) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x - 1 + e^{-0}) = 0$

Comme $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)\ alors\ f$ est continue en 0.

b- Etudions la dérivabilité de $f\ en\ 0$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-x+2ln(1+x)}{x}\right)$

$= \lim_{x\to 0^-}\left(-1 + 2\frac{ln(1+x)}{x}\right) = 1 \Longrightarrow f'_g(0) = 1$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-1+e^{-x}}{x}\right)$

$= \lim_{x\to 0^+}\left[1 - \frac{e^{-x}-1}{-x}\right] = 0 \Longrightarrow f'_d(0) = 0$

Comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)\ alors\ f$ n'est pas dérivable en 0

* Interprétons graphiquement le résultat

La courbe $(\mathcal{C})\ de\ f$ admet au point d'abscisse 0 la demi-tangente à gauche de coefficient directeur $f'_g(0) = 1$ et de demi-tangente horizontale à droite.

2) a- Calculons $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ et interprétons

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}[-x + 2ln(1+x)] = -\infty$

Comme $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à $(\mathcal{C})\ en - \infty$.

b- Calculons $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}(x - 1 + e^{-x}) = +\infty$

c- Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})\ en\ +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}) = 0$ donc la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})\ en\ +\infty$.

3) a- Déterminons le sens de variation f.

$*\ sur\ ]-1\,;0[\,;f(x) = -x + 2ln(1+x)$

f est dérivable $sur\ ]-1\,;0[\ on\ a$:

$f'(x) = -1 + \frac{2}{1+x} = \frac{1-x}{1+x}$

Pour tout $x \in\ ]-1\,;0[\,; 1 + x > 0\ et\ 1 - x > 0$ donc $\frac{1-x}{1+x} > 0$ c'est-à dire que $f'(x) > 0$. Par conséquent f est strictement croissante $sur\ ]-1\,;0[$.

$*\ Sur\ [0\,;\ +\infty[\,;f(x) = x - 1 + e^{-x}$

f est dérivable $sur\ ]0\,;+\infty[\ on\ a$:

$f'(x) = 1 - e^{-x}$

Pour tout $x \in\ [0\,;\ +\infty[;on\ a$:

$x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0 \ \Leftrightarrow e^{-x} \leq 1 \ \Leftrightarrow -e^{-x} \geq -1$

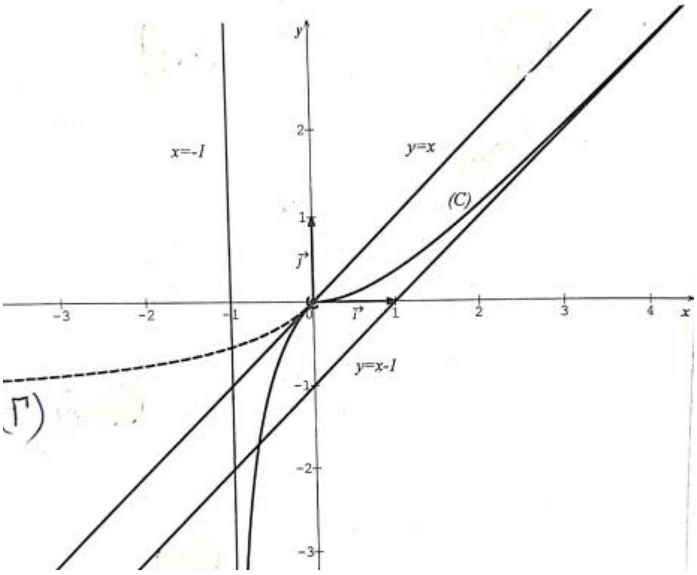
$\quad \Leftrightarrow 1 - e^{-x} \geq 0$

Donc $sur\ ]0\,;+\infty[\,; f(x) \geq 0$ et par conséquent f est croissante $[0\,;\ +\infty[$.

* Dressons le tableau de variation de f

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	1 ‖ 0	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

b- Traçons la courbe $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes



4) a- Montrons

f est continue et strictement croissante sur $]-1\,;0[\,; donc\ f$ réalise une bijection sur $]-1\,;0[\ vers\ f(\,]-1\,;0[\,) =]-\infty\,;0[$.

b- Construisons la courbe $(\Gamma)\ de\ h^{-1}$

(Γ) est le symétrique de la partie de $(\mathcal{C})$ correspondant à $x\ \in\ ]-1\,;0[$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Partie B

1) a- Calculons en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α.

$\mathcal{A}(\alpha) = \int_1^{\alpha}[f(x) - (x-1)]\ et\ x \times u.a$

$\quad = \int_1^{\alpha} e^{-x}dx \times u.a = 4(e^{-1} - e^{-\alpha})cm^2$

b- Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha) = \lim\limits_{x\to+\infty}4(e^{-1} - e^{-\alpha}) = 4e^{-1}cm^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha) = \frac{4}{e}\ cm^2$

2) a- Calculons en intégrant par partie I.

$I = \int_0^1(x-1)e^{-x}dx$

Posons $u(x) = x - 1\ et\ V'(x) = e^{-x}$

D'où : $\ u'(x) = 1 \qquad et\ V(x) = -e^{-x}$

Par suite :

$I = [-(x-1)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\ dx$

$I = [-xe^{-x}]_0^1 = -e^{-1}$

b- Calculons $v\ en\ cm^3$

$v = \int_0^1 \pi[f(x)]^2\,dx \times u.v$

$\ = \int_0^1 \pi(x^2 - 2x + 1 - 2(x-1)e^{-x} + e^{-2x})\,dx.u.v$

$\ = \left(\pi\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 - 2I\pi\right).u.v$

$v = 8\pi\left(\frac{5}{6} + 2e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2}\right)cm^3$

CORRIGE SESSION 2022 (2nd tour)

EXERCICE 1

1) a- Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\ et\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\ d'où\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}$.

b- Justifions si les points $A, B\ et\ C$ forment un plan.

Selon 1°) a) On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$

Par conséquent les points $A, B\ et\ C$ ne sont pas alignés. On en déduit alors que $A, B\ et\ C$ forme un plan de l'espace.

c- Vérifions si les points $A, B, C\ et\ D$ sont coplanaire.

On $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}\ et\ \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}\ d'où$

$\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = -12 + 9 \Longrightarrow \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = -3$.

Or $-3 \neq 0. Donc\ \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \neq 0$.

On en déduit alors que les points $A, B, C\ et\ D$ ne sont pas coplanaires.

2) Calculons en cm^2 l'aire du triangle ABC.

Soit $\mathcal{A}(ABC)$ cette aire.

$\mathcal{A}(ABC) = \frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2} uA \Rightarrow \mathcal{A}(ABC) = \frac{3\sqrt{5}}{2} \times 4\ cm^2$

$\Rightarrow \mathcal{A}(ABC) = 6\sqrt{5}\ cm^2$

3) Calculons en cm^3 le volume du tétraèdre $ABCD$.

Soit $V(ABCD)$ ce volume.

$V(ABCD) = \frac{1}{3}\ \mathcal{A}(ABC)\ \times d\big(D, (ABC)\big)uV$

$= \frac{1}{3}\ \frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2} \times \frac{|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|} = \frac{1}{6}\ \left|\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|.uV$

$= \frac{1}{6} \times |-3| \times 8cm^3 = 4cm^3$

EXERCICE 2

1) a- Calculons la probabilité des évènements $E\ et\ F$.

L'univers Ω à cette épreuve est l'ensemble des combinaisons de trois tee-shirts parmi les 20.

Donc $Card\ \Omega = C_{20}^3 \Rightarrow card\Omega = 1140$

$P(E) = \frac{CardE}{Card\Omega} \Rightarrow P(E) = \frac{C_3^1\times C_{10}^1\times C_7^1 + C_3^1\times C_{10}^2\times C_7^0}{Card\Omega}$

$\Rightarrow P(E) = \frac{345}{1140} \Rightarrow P(E) = \frac{23}{76}$

$P(F) = \frac{CardF}{Card\Omega} \Rightarrow P(F) = \frac{C_3^1\times C_{10}^1\times C_7^1}{Card\Omega}$

$\Rightarrow P(F) = \frac{210}{1140} \quad \Rightarrow P(F) = \frac{7}{38}$

b) Calculons la probabilité de $E/_F$

$P(E/_F) = \frac{P(F\cap E)}{P(E)}\ or\ F\cap E = F$

Donc $P(E/_F) = \frac{P(F)}{P(E)} \Rightarrow P(F/_E) = \frac{14}{23}$

2) a- Déterminons la loi de probabilité de X.

Soit $X(\Omega)$ l'univers image de X.

On a : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(X=0) = \frac{C_7^0\times C_{13}^3}{card\Omega} \Rightarrow P(X=0) = \frac{286}{1140}$

$P(X=1) = \frac{C_7^1\times C_{13}^2}{card\Omega} \Rightarrow P(X=1) = \frac{546}{1140}$

$P(X=2) = \frac{C_7^2\times C_{13}^1}{card\Omega} \Rightarrow P(X=2) = \frac{273}{1140}$

$P(X=3) = \frac{C_7^3\times C_{13}^0}{card\Omega} \Rightarrow P(X=3) = \frac{35}{1140}$

Résumé

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{286}{1140}$	$\frac{546}{1140}$	$\frac{273}{1140}$	$\frac{35}{1140}$

b) Calculons l'espérance mathématique de X.

$E(X) = \frac{0\times286+1\times546+2\times273+3\times35}{1140}$

$\Rightarrow E(X) = \frac{1197}{1140} \Rightarrow E(X) = \frac{399}{380}$

c) Déterminons la fonction de répartition de X.

$$F(x) = \begin{cases} 0\ si\ x < 0 \\ \frac{143}{570}\ si\ 0 \le x < 1 \\ \frac{208}{285}\ si\ 1 \le x < 2 \\ \frac{1105}{1140} si\ 2 \le x < 3 \\ 1\ si\ x \ge 3 \end{cases}$$

PROBLEME

Partie A

1) a- Vérifions que , pour $x \neq 0$;

On a $f(x) = x^2 - 3 + 2(1-x)e^{1+x}$

$\Rightarrow f(x) = x^2\left[1 - \frac{3}{x^2} + 2\left(\frac{1}{x} - 1\right)\frac{e\times e^x}{x}\right]$

$\Rightarrow f(x) = x^2\left[1 - \frac{3}{x^2} - 2e.\frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right]$

b) Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[1 - \frac{3}{x^2} - 2e\frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right] \quad = -\infty$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} - 2e\frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) = -\infty \end{cases}$

c- Calculons la limite de $f\ en - \infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left[1 - \frac{3}{x^2} - 2e\frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right] \quad = +\infty$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left[1 - \frac{3}{x^2} - 2e\frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right] = 1 \end{cases}$

2) a- Montrons

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions $(x \mapsto x^2 - 3, x \mapsto 2(1-x)e^{1+x})$ dérivable et on a :

$f'(x) = 2x + \big(-2 + (2-2x)\big)e^{1+x}$

$\Rightarrow f'(x) = 2x - 2xe^{1+x} \Rightarrow f'(x) = 2x(1 - e^{1+x})$

b- En déduisons le sens de variation de f.

$\forall\ x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x(1 - e^{1+x})$

On a $1 - e^{1+x} \ge 0 \Leftrightarrow e^{1+x} \le 1$

$\Leftrightarrow x \le -1$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$2e-3$	$\searrow$	$-\infty$

Par suite $\forall x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[, f'(x) \le 0\ et$

f est alors strictement décroissante sur $]-\infty, -1]\ et\ sur\ [0, +\infty[$.

Et, $\forall x \in [-1, 0], f'(x) \ge 0\ et$

f est alors strictement croissante sur $[-1, 0]$.

Dressons le tableau de variations de f.

$f(-1) = 2 \quad , \ f(0) = 2e - 3$

3) a- Montrons que g réalise une bijection de I vers J que l'on précisera.

g est continue et strictement décroissante sur I. Donc g réalise une bijection de I vers $\mathrm{g(I)} = f(I) = J$.

D'où $J =]-\infty \, ; 2e - 3]$

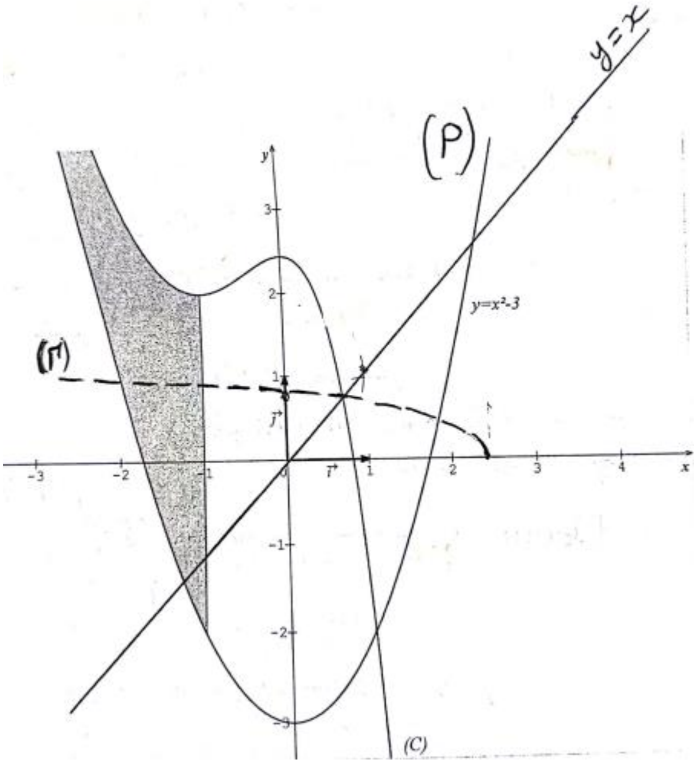
b- Montrons que l'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution $\alpha \ dans \ ]1,2[$

$f \ est$ continue et strictement décroissante sur $[0\,,+\infty[$. Or $[1,2] \subset [0,+\infty[$. Donc f est continue et strictement décroissante sur $[1,2]$. Par conséquent f réalise une bijection de $[1,2] \ vers \ f([1,2]) = [1 - \ 2e^3\,, -2]$ car $f(1) = -2 \ et \ f(2) = 1 - 2e^3$.

De plus $-3 \in [1 - \ 2e^3\,; -2]$

Puisque $1 - 2e^3 \simeq -39{,}16$. On e déduit alors que l'équation $f(x) = -3$ admet une solution unique $\alpha \ dans \ ]1, \ 2[$.

4) Construisons la parabole (P)puis les courbes $(\mathcal{C}) \ et \ (\Gamma)$ dans le même repère.



Partie B

1) a- Montrons que la fonction G est une primitive de k.

$G(x) = (-x+2)e^{1+x}\,, x \in \mathbb{R}$

On a : $G'(x) = (-1 - x + 2)e^{1+x}$

$\Rightarrow G'(x) = (1-x)e^{1+x}$ or $k(x) = (1-x)e^{1+x}$

Donc $G'(x) = k(x), x \in \mathbb{R}$

On en déduit alors que G est une primitive de $k \ sur \ \mathbb{R}$.

b- Déterminons en cm², l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$

$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^{-1}\big(f(x) - (x^2-3)\big)dx \ u.a$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^{-1} 2(1-x)e^{1+x}.\,dx \ u.a$

Or $k(x) = (1-x)e^{1+x}\,, x \in \mathbb{R}$

Donc $\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^{-1} 2k(x)u.a$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\lambda) = 2\int_\lambda^{-1} k(x)dx \ u.a$

Selon la question précédente G est une primitive de $k \ sur \ \mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{A}(\lambda) = [2G(x)]_\lambda^{-1} \ u.a$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\lambda) = 4\big(6 - 2(-\lambda+2)e^{1+\lambda}\big) \ cm^2$

c- Calculons $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} 4\big[6 - 2(-\lambda+2)e^{1+\lambda}\big] \ cm^2$$
$$= 24cm^2 \ car \lim_{\lambda \to -\infty} (-\lambda+2)e^{1+\lambda} = 0$$

2) Calculons en cm^3, le volume V.

$V = \int_0^{\sqrt{3}} \pi \, (x^2-3)^2 \, dx \ u.V$

$\Rightarrow V = \pi\left[\frac{x^5}{5} - 2x^3 + 9x\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{192\pi\sqrt{3}}{5} cm^3$

3) a- Etudions la parité de h.

$h(x) = x^2 - 3 + 2(1+x)e^{1-|x|}\,, x \in \mathbb{R}$

h est définie sur $\mathbb{R} \ et, \forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$.

Puis $h(-x) = (-x)^2 - 3 + 2(1+|x|)e^{1-|-x|}$

$\Rightarrow h(-x) = x^2 - 3 + 2(1+|x|)e^{1-|x|}$

$\Rightarrow h(-x) = h(x)$

On en déduit alors que h est une fonction paire.

b- Comparons $h \ et \ f \ sur \ ]-\infty\,,0]$

$\forall x \in]-\infty\,,0]\,, x \leq 0 \ donc \ |x| = -x$.

Par suite $h(x) = x^2 - 3 + 2(1-x)e^{1+x}\,, x \in]-\infty\,,0]$

Or $f(x) = x^2 - 3 + 2(1-x)e^{1+x}\,, x \in \mathbb{R}$.

Donc $\forall x \in]-\infty\,,0], h(x) = f(x)$.

c- Déduisons la construction de $(\mathcal{C}')$.

$h = f \ sur \ ]-\infty\,,0]\,, donc \ (\mathcal{C}') \ et \ (\mathcal{C})$ sont confondues sur $]-\infty\,,0]$. Et comme h est paire alors la portion de $(\mathcal{C}') \ sur \ [0\,,+\infty[$ est le symétrique de celle de $(\mathcal{C}) \ sur \ ]-\infty\,,0]$ par rapport à l'axe des ordonnées.