

DEVOIRS RÉGIONAUX
DÉCEMBRE 2023
NIVEAU : TERMINALE C
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3 , 2/3 et 3/3.
 Chaque candidat utilisera un (01) feuille de papier millimétré.
 Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.*

EXERCICE 1 (2 points)

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque proposition du tableau ci-dessous suivi de **Vrai** si la Proposition est vraie ou de **Faux** si la proposition est fausse

N°	PROPOSITIONS
1	f étant une fonction continue et strictement décroissante sur un intervalle $[a ; b]$ tels que : $f(a) \times f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]a; b[$.
2	(Γ) étant une conique de foyer F, de directrice ($\mathcal{D}$) et d'excentricité e . (Γ) est l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{d(M, \mathcal{D})} = e$
3	(C_k) étant la courbe représentative de la fonction k continue sur $\mathbb{R}$ tels que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x} = +\infty$. La courbe (C_k) admet une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$.
4	a et b étant des nombres réels. La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax + b)$ est la fonction f' définie par $f'(x) = -a \cos(ax + b)$

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des colonnes A, B et C permettent trois affirmations dont une seule est vraie. Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque énoncé suivi de la lettre de la colonne qui donne l'affirmation vraie.

N°	ÉNONCÉS	A	B	C
1	la fonction $u: x \mapsto 2^x$ définie sur $\mathbb{R}$ est ...	constante sur $\mathbb{R}$.	strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + 1}$ est égale à ...	$+\infty$	0	$-\infty$
3	La fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{x^3} - 2\sqrt{x}$ est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par ...	$f(x) = \frac{3}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}}$	$f(x) = \frac{3}{x^4} - \frac{1}{\sqrt{x}}$	$f(x) = -\frac{3}{x^4} - \frac{1}{\sqrt{x}}$
4	L'espace étant muni d'un repère (O; I; J; K). Un vecteur normal au plan (P) d'équation : $2x - z + 1 = 0$ est ...	$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 3 (2 points)

Soit n un entier supérieur ou égal à 4. On considère dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, les

nombre A , B et C écrits en base n : $A = \overline{20}^n$; $B = \overline{32}^n$; $C = \overline{1300}^n$

1. a) Justifie que $A \times B = C$ si et seulement si n est solution de l'équation (E) : $n^3 - 3n^2 - 4n = 0$ dans $\mathbb{N}$
 b) Détermine la valeur de n pour laquelle $A \times B = C$
2. On suppose dans la suite de l'exercice que $n = 4$ et on considère l'entier naturel D qui s'écrit $5xy$ dans le système décimal.
 a) Justifie que D est divisible par 4 si et seulement si $2x + y \equiv 0[4]$
 b) Détermine pour quelles valeurs de x et y D est divisible par 4.

EXERCICE 4 (4 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On donne les points $A(2; 1; 3)$; $B(-3; -1; 7)$ et $C(3; 2; 4)$.

1. Justifie que les points A ; B et C ne sont pas alignés
2. Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$.
 a) Montre que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC) .
 b) Donne une équation cartésienne du plan (ABC) .
3. Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC) .
 a. Montre que H est le barycentre de $\{(A; -2) ; (B; -1) ; (C; 2)\}$
 b. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ_1) des points M de l'espace telle que : $(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$.
4. Démontre que l'ensemble (Γ_2) des points M de l'espace telle que $\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \sqrt{29}$ est une sphère de centre H et de rayon $\sqrt{29}$.
5. Précise la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2
6. Justifie que le point $S(-8; 1; 3)$ appartient à l'ensemble $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

EXERCICE 5 (5 points)

Dans tout cet exercice, n un entier naturel non nul et différent de 1.

Soit la fonction f_n définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1}{n!} \times \frac{(\ln x)^n}{x^2}$

On note (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

1. a) Calcule la limite de f_n en $+\infty$.
 b) Calcule, selon la parité de n , la limite de f_n en 0.
2. a) Démontre que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'_n(x) = \frac{(n-2\ln x)(\ln x)^{n-1}}{n!x^3}$

b) Étudie, selon la parité de n , le sens de variation de f_n .

3. a) Démontre que la valeur maximale α_n de f_n sur $]1; +\infty[$ est $\alpha_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{2e}\right)^n$

b) Dresse le tableau de variation de f_n selon la parité de n .

4. a) Dresse le tableau de variation de f_1 et f_2 .

b) Construis, dans le même repère, les courbes (C_1) et (C_2) des fonctions respectives f_1 et f_2 .

5. a) Montre que $\forall x \in [1; +\infty[: f_{n+1}(x) = \frac{\ln x}{n+1} \times f_n(x)$.

b) Dédus du résultat précédent que $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2} f_n \left(e^{\frac{n+1}{2}} \right)$.

c) Justifie que $\alpha_{n+1} < \frac{1}{2} \alpha_n$.

EXERCICE 6 (5 points)

Monsieur Coulibaly veut construire une piscine près du mur de son jardin non loin d'une pompe à eau. Par soucis d'espace, il veut que la distance de chaque position du bord de la piscine à la pompe soit la moitié de la distance de ce bord au mur de la maison. Il parle de son projet à un ami, professeur de mathématiques, qui décide de lui donner un coup de main.

Ce dernier, après observation de l'espace, définit un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 m dans le jardin, considère la position de la pompe à eau comme un point F et le mur comme une droite (D) . Après quelques calculs il réalise que les coordonnées des points du bord de la piscine vérifient la relation suivante :

$$3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0.$$

Étant appelé à la maison pour une urgence, il remet le résultat de ses analyses à monsieur Coulibaly. Ne pouvant pas rendre opérationnel cette aide, Monsieur Coulibaly demande à son fils qui est en terminale C de le faire.

Le fils te sollicite pour représenter avec lui la piscine de son père.

En utilisant des outils mathématiques au programme de Terminale C, aide le fils de monsieur Coulibaly à réaliser ce plan.