MATHEMATIQUES

Durée : 04 heures

Coeff : 04

Série : D

Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.
Chaque candidat recevra une feuille de papier millimétré.

EXERCICE 1 (2 points)

On donne les énoncés et les mots ou groupes de mots : une bijection, la puissance, dérivable, indépendants.

Ecris le numéro de chaque énoncé suivi du mot ou groupe de mots à écrire à la place des pointillés pour que l'énoncé soit vrai.

1. Soit A et B deux événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P.
   A et B sont … si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
2. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K.
   La fonction f réalise … de K vers f(K).
3. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur un intervalle contenant f(K). La fonction composée g o f est … sur K et on a :
   $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.
4. Pour tous p élément $\mathbb{Z}^*$, q élément de $\mathbb{N}^*$ et x élément de $]0\,;+\infty[$.
   On appelle x à … $\frac{p}{q}$ le nombre réel, noté $x^{\frac{p}{q}}$, défini par : $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chaque énoncé quatre informations a, b, c et d sont proposées dont une seule est vraie.

Ecris le numéro de chaque énoncé suivi de la lettre de l'information vraie.

1. On lance successivement deux fois et de façon indépendante un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note chaque fois le numéro de la face supérieure.
   La probabilité d'obtenir 6 deux fois est …

   a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{25}{36}$ c) $\frac{35}{36}$ d) $\frac{1}{36}$
2. Soit f la bijection de $[0\,;+\infty[$ dans $[0\,;+\infty[$ définie par : $f(x) = x\sqrt{x}$. On note f^{-1} la bijection réciproque de f.

Pour tout x élément de $[0 ; +\infty[$, $f^{-1}(x)$ est …

a) $\sqrt[3]{x}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt{x}$ d) $\sqrt{x^3}$

3. On note (C) la courbe représentative de la fonction ln dans le plan muni d'un repère.

   Une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $\frac{1}{e}$ est …

   a) $y = ex - 2$ b) $y = \frac{x}{e} - \frac{1}{e^2} - 1$ c) $y = ex$ d) $y = \frac{x}{e}$

4. La limite de la fonction $x \longmapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers $+\infty$ est …

   a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $+\infty$

EXERCICE 3 (2 points)

1. On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

   a) Détermine les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

   b) Détermine la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que : $F(0) = 2$

2. On donne la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$.

   Détermine une primitive H de h sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \ln(U_n + 5)$.

1. On donne les fonctions f et g définies sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = \ln(x + 5)$ et $g(x) = f(x) - x$.

   Les fonctions f et g sont dérivables sur $[0 ; 4]$.

   a) Justifie que la fonction g est strictement décroissante sur $[0 ; 4]$.

   b) Justifie que l'équation : $f(x) = x$, a une unique solution α comprise entre 1,93 et 1,94.

2. Justifie que : $f([0 ; 3]) \subset [0 ; 4]$.

   (On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [0 ; 4]$)

3. a) Justifie que : $\forall x \in [0 ; 4]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{5}$.

   b) En appliquant l'inégalité des accroissements finis, démontre par récurrence que :

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{4}{5^n}$.

4. Déduis de la consigne 3b) que la suite U est convergente et donne sa limite.

EXERCICE 5 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) d'unité graphique 1cm.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (x-1)e^{x^2-2x+1}$.

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J).

1. a) Calcule la limite de f en $-\infty$ puis vérifie que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

   b) Interprète graphiquement l'ensemble des résultats précédents.

2. a) Justifie que pour tout nombre réel, $f'(x) = (2x^2 - 4x + 3)e^{x^2-2x+1}$.

   b) Etudie le sens de variation de f.

3. On admet que pour tout nombre réel, $f''(x) = 2(x - 1)(2x^2 - 4x + 5)e^{x^2-2x+1}$.

   Justifie que le point I est un point d'inflexion de (C).

4. On admet que le point I est un centre de symétrie de (C) et que la droite (T) d'équation $y = x-1$ est tangente à (C) au point I.

   Trace (T) et (C).

EXERCICE 6 (5 points)

Lors de la kermesse en fin d'année dans ton établissement d'enseignement secondaire, un promoteur de jeu organise un jeu de tirage de boules d'un sac qui contient 10 boules indiscernables au toucher dont 5 vertes et 5 rouges.

Le jeu se déroule de la façon suivante :

Le joueur mise 800 FCFA non remboursables, prend au hasard une boule du sac, note sa couleur puis la replace dans le sac.

- Si la boule est rouge, le jeu s'arrête.
- Si la boule est verte, le joueur tire simultanément et au hasard 2 boules du sac.
  - Pour chaque boule verte obtenue, le joueur reçoit 2000 FCFA.
  - Pour chaque boule rouge obtenue, le joueur paye 1000 FCFA.

Ton professeur de mathématiques signale à l'administration de ton établissement que le jeu est favorable au promoteur.

L'ordre est immédiatement donné au promoteur de changer la mise pour en faire un jeu équitable. Ce dernier te sollicite.
A l'aide d'une production argumentée, basée sur tes connaissances en mathématiques, détermine la mise pour laquelle le jeu équitable.

SIMILI BAC D 2024 – DREN ABIDJAN 2

EXERCICE 1 **(2 points = 4×0,5pt)**

1. indépendants 2. une bijection 3. dérivable 4. la puissance

EXERCICE 2 **(2 points = 4×0,5pt)**

1.d) 2.b) 3.a) 4.c)

EXERCICE 3 **(2 points)**

1. Df = ℝ

a) Pour tout nombre réel x,

$f(x) = 2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 2u'(x)$ où $u(x) = \sqrt{x^2+1}$

D'où, les primitives de f sur ℝ sont les fonctions $x \mapsto 2\sqrt{x^2+1} + c$ ($c \in \mathbb{R}$)

----------- 0,5pt

b) Pour tout nombre réel x, $F(x) = 2\sqrt{x^2+1} + c$ et $F(0) = 0$

$F(0) = 0 \iff 2 + c = 2$

$\iff c = 0$ ----------------------------------- 0,25pt

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = 2\sqrt{x^2+1}$ ----------------------------- 0,25pt

2. Dh = ℝ

Pour tout nombre réel x,

$h(x) = \frac{-sn2x}{\sqrt{1+cos^2x}}$

$= \frac{-2cosx \times snx}{\sqrt{1+cos^2x}}$ --- 0,5pt

$= \frac{v\prime(x)}{\sqrt{v(x)}}$ où $v(x) = 1 + cos^2x$

D'où, on peut prendre : $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = 2\sqrt{1+cos^2x}$ -------- 0,5pt

EXERCICE 4 **(5 points)**

Les fonctions f et g sont dérivables sur [0 ; 4].

On considère la suite U définie sur ℕ par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \ln(U_n + 5)$.

1. On donne les fonctions f et g définies sur [0 ; 4] par $f(x) = \ln(x+5)$ et $g(x) = f(x) - x$.

a) Df = Dg = [0 ; 4]

Pour tout x élément de [0 ; 4],

$g'(x) = \frac{1}{x+5} - 1 = \frac{-x-4}{x+5} = -\frac{x+4}{x+5}$ ------------------------- 0,25pt

$x+5 > 0$ et $-(x+4) < 0$

$g'(x) < 0$ --- 0,25pt

D'où, la fonction g est strictement décroissante.

b) $f(x) = x \iff g(x) = 0$ --- 0,25pt

*$g(1{,}93) \approx 0{,}005$ et $g(1{,}94) \approx -0{,}002$ (par défaut à 10^{-3} près) ----- 0,25pt

* g est continue et strictement décroissante sur [0 ; 4] -------------- 0,25pt

Et, $g(1{,}93) \times g(1{,}94) < 0$ ------------------------------------- 0,25pt

D'où, l'équation $g(x) = 0$ ou encore $f(x) = x$ admet une unique solution α comprise entre 1,93 et 1,94.

2. * f est continue et strictement croissante sur [0 ; 4] -------- 0,25pt + 0,25pt

   D'où, $f([0 ; 4]) = [f(0) ; f(4)] = [\ln 5 ; \ln 9]$ ------------------------ 0,5pt

   * $\ln(5) \approx 1,6$ (par défaut à 0,1 près) et $\ln(9) \approx 2,2$ (par excès à 0,1 près)

   D'où, $\ln(5) \in [0 ; 4]$ et $\ln(9) \in [0 ; 4]$ ---------------------------- 0,5pt

   Donc, $f([0 ; 4]) \subset [0 ; 4]$.

3. a) $\forall x \in [0 ; 4]$,

   $0 \leq x \leq 4$

   $5 \leq x+5 \leq 9$

   $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{x+5} \leq \frac{1}{5}$

   $\frac{1}{9} \leq f'(x) \leq \frac{1}{5}$ -- 0,25pt

   $\frac{1}{9} \leq |f'(x)| \leq \frac{1}{5}$ $\quad |f'(x)| > 0$ ---------------------- 0,25pt

   $|f'(x)| \leq \frac{1}{5}$

   b) $|U_0 - \alpha| = |0 - \alpha| = \alpha$ et $\frac{\alpha}{5^0} = \alpha$

   Par suite : $|U_0 - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^0}$ -- 0,25pt

   Soit k un élément de $\mathbb{N}$, supposons $|U_k - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^k}$

   $U_k \in [0 ; 4]$, $\alpha \in [0 ; 4]$ et $\forall x \in [0 ; 4]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{5}$

   D'après l'inégalité des accroissements finis,

   $|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{5}|U_n - \alpha|$ ------------------------------ 0,25pt

   $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5}|U_n - \alpha|$ $\quad |f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$

   $|U_k - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^k} \Rightarrow |U_{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5} \times \frac{\alpha}{5^k}$

   $\Rightarrow |U_{k+1} - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^{k+1}}$ ------------------- 0,25pt

   En définitive, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^n}$

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^n}$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\alpha}{5^n} = 0$ ---------------- 0,25pt + 0,25pt

   D'où, la suite U est convergente et $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \alpha$ ------------ 0,25pt

EXERCICE 5 **(4 points)**

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J).

1. a) Df = $\mathbb{R}$

* $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2-2x+1}=+\infty\end{array}\right\}$ ---------------------------------- 0,25pt + 0,25pt

par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

* Pur tout x de]-∞ ; 0[, $\frac{f(x)}{x} = (1-\frac{1}{x})e^{x^2-2x+1}$ -------------- 0,25pt

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x})=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2-2x+1}=+\infty\end{array}\right\}$ par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$ -------- 0,25pt

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$

D'où, (C) admet en -∞ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) --- 0,5pt

2. a) Pour tout nombre réel x,

$f'(x) = (1+2(x-1)(x-1))e^{x^2-2x+1}$.

$f'(x) = (1+2(x^2-2x+1))e^{x^2-2x+1}$ -------------- 0,25pt

$f'(x) = (2x^2-4x+3)e^{x^2-2x+1}$

b) * $\Delta = 16 - 24 = -8$

$\Delta < 0 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ 2x^2-4x+3>0$ ----------------------- 0,5pt

* $\forall x\in\mathbb{R}$,

$2x^2-4x+3>0$ et $e^{x^2-2x+1}>0$

$f'(x) > 0$ -- 0,5pt

D'où, f est strictement croissante.

3. Pour tout nombre réel x,

$f''(x) = 2(x-1)[(2x-1)^2+4]e^{x^2-2x+1}$.

$2[(2x-1)^2+4]e^{x^2-2x+1} > 0$

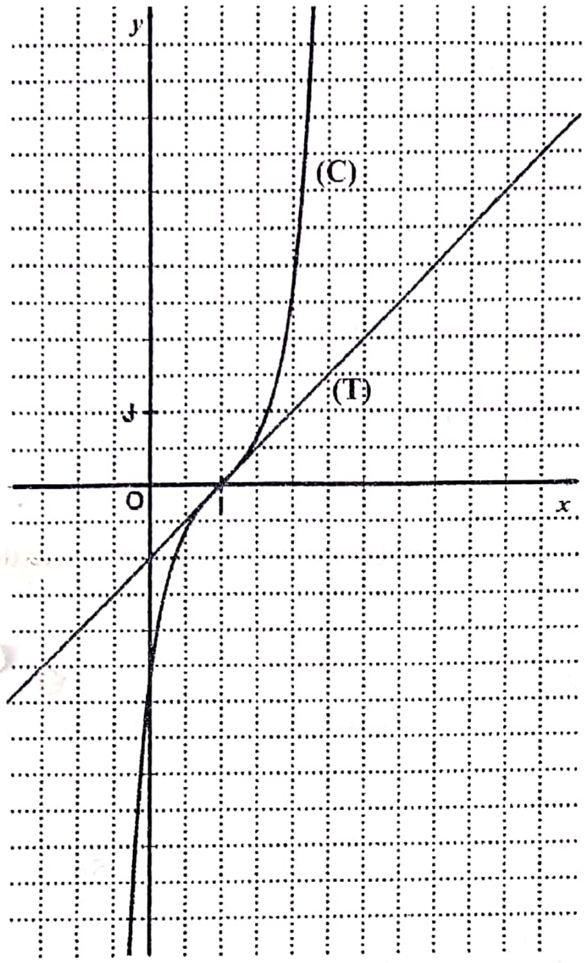
$f''(x)$ a le même signe que $x - 1$

D'où, f '' s'annule en 1 et change de signe ---------- 0,25pt + 0,25pt

Or, f(1) = 0

Donc, le point I est un point d'inflexion de (C).

4. On admet que le point I est un centre de symétrie de (C) et que la droite (T) d'équation $y = x-1$ est tangente à (C) au point I.

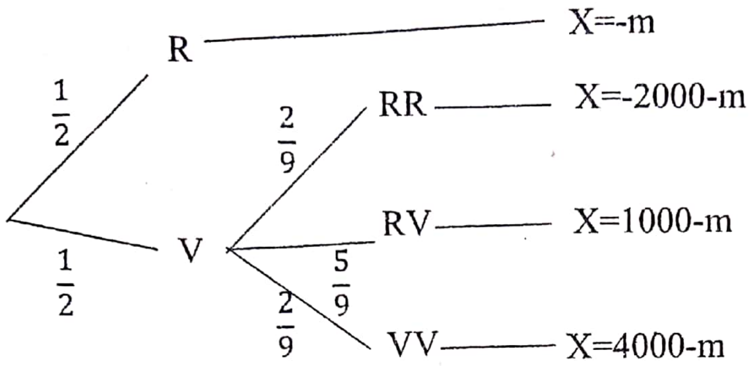


(C) -- 0,5pt
(T) -- 0,25pt

EXERCICE 6 (5 points)

Corrigé succinct

Notons m ($m \geq 0$) la mise en FCFA et X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.



$P_V(RR) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{9}$

$P_V(RV) = \frac{5\times5}{C_{10}^2} = \frac{5}{9}$

$P_V(VV) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{9}$

x_i	-m	-2000-m	1000-m	4000-m
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$

$E(X) = \frac{1}{18}(9000 - 18m)$

$E(X) = 500 - m$

$E(X) = 0 \iff m = 500$

Barème critérié

Critères	Indicateurs	Barème de notation
CM1 (Le critère minimal 1) : ▪ **La pertinence**	- Annonce de la leçon probabilité et variable aléatoire, annonce de la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur, … - Annonce des calculs de probabilités des valeurs respectives de la variable aléatoire, calcul de l'espérance mathématique de la variable aléatoire - Annonce de la résolution de l'équation l'espérance mathématique égale à zéro	**0,75 point :** ***Règle des 2/3*** ***3 indicateurs*** $3\times\frac{2}{3}=2$ 1 *ind sur* 3 → 0,5 2 *ind sur* 3 → 0,75
CM2 (Le critère minimal 2) : ▪ **L'utilisation correcte des outils mathématiques en situation**	- Présence de la notation de la mise inconnue (par exemple : m) - Présence de la variable X égale au gain algébrique du joueur - Présence d'un arbre pondéré qui traduit la situation - Présence d'un tableau qui présente la loi de probabilité de X - Présence du calcul de E(X) - Présence de la résolution de l'équation : E(X) = 0 - Présence de la réponse de l'apprenant - Exactitude des formules - Justesse de l'argumentation	**2,5 points :** ***Règle des 2/3*** ***9 indicateurs*** $9\times\frac{2}{3}=6$ 1 *ind sur* 9 → 0,25 2 *ind sur* 9 → 0,5 3 *ind sur* 9 → 1 4 *ind sur* 9 → 1,25 5 *ind sur* 9 → 1,5 6 *ind sur* 9 → 2,5
CM3 (Le critère minimal 3) : ▪ **La cohérence de la réponse**	- Les résultats de calculs sont conformes à ce qui est attendu, la réponse au problème est égale à ce qui est attendu - La réponse, les résultats sont en adéquation avec la démarche (le résultat produit, qu'il soit juste ou faux est le produit parfait des calculs effectués, de opérations posées, …) - La qualité des enchainements de la démarche *(les conjonctions de coordination, chaque partie est à la bonne place, …)*	**1,25 point :** ***Règle des 2/3*** ***3 indicateurs*** $3\times\frac{2}{3}=2$ 1 *indsur* 3 → 0,75 2 *indsur* 3 → 1,25
CP (Les critères de perfectionnement) : ▪ **La concision** ▪ **L'originalité** ▪ **La bonne présentation**	- *Production juste en peu de mots, esprit de synthèse, calcul en peu d'étape* - *Démarche correcte non classique au-delà de la production attendue* - *Présence des titres, d'étapes, d'espacement des parties, absence de rature, absence de surcharge, de blanco, absence de tache*	**0,5 point :** ***Règle des 2/3*** ***3 indicateurs*** $3\times\frac{2}{3}=2$ 1 *indsur* 3 → 0,25 2 *indsur* 3 → 0,5

EXERCICE 1 $0,5\times4 = 02pts$

1- indépendants 3- dérivable

2- une bijection 4- la puissance

EXERCICE 2 $0,5\times4 = 02pts$

1- d 3- d

2- b 4- c

EXERCICE 3

1- on donne $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

a- les primitives de f sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

$u=x^2+1 \Rightarrow u'=2x$

on a : $f(x)=u'u^{-\frac{1}{2}}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}+1}+c$, $c\in\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}+c$ 0,5

$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=2\sqrt{x^2+1}+c}$ $c\in\mathbb{R}$

b- La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=2$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=2\sqrt{x^2+1}+c$, $c\in\mathbb{R}$

on a : $F(0)=2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{0+1}+c=2$

$\Leftrightarrow \boxed{c=0}$ 0,25

D'où $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=2\sqrt{x^2+1}}$ 0,25

2) $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$

Une primitive de h sur $\mathbb{R}$

on sait que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin 2x = 2\cos x\sin x$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$

$h(x)=\frac{-2\sin x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ 0,5

$h(x)=(-2\sin x\cos x)(1+\cos^2 x)^{-\frac{1}{2}}$

Posons $u=1+\cos^2 x \Rightarrow u'=2(\cos x)'\cos x$

$=-2\sin x\cos x$

donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=u'u^{-\frac{1}{2}}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $H(x)=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(1+\cos^2 x)^{-\frac{1}{2}+1}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $H(x)=2(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}$

$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ H(x)=2\sqrt{1+\cos^2 x}}$ 0,5

EXERCICE 4

1- a- Justification

$\forall x\in[0;4]$, $g(x)=f(x)-x$

$=\ln(x+5)-x$

$\forall x\in[0;4]$, $g'(x)=[\ln(x+5)-x]'$

$=\frac{1}{x+5}-1$

$\boxed{\forall x\in[0;4],\ g'(x)=\frac{-x-4}{x+5}}$ 0,25

Le signe de $g'(x)$ est celui de $-x-4$
Car $x+5>0$ sur $[0;4]$

Posons $-x-4=0$

$x=-4$

x	0 $\qquad\qquad$ 4
$-x-4$	$-$
$g'(x)$	$-$

$\forall x\in]0;4[$, $g'(x)<0$ donc g est strictement décroissante sur $]0;4[$. 0,25

b- Justification

- $g(0)=\ln(0+5)-0=\ln 5$
- $g(4)=\ln(4+5)-4=\ln 9-4$.

x	0	4
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$\ln 5$ $\searrow$	$-4+\ln 9$

$\forall x\in]0;4[$, g est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $]0;4[$ vers $g(]0;4[)=]-4+\ln 9;\ln 5[$

or $0\in]-4+\ln 9;5[$ donc l'équation $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=x$ admet une solution unique dans $]0;4[$ 0,25

on sait que $[1,93;1,94]\in[0;4]$

- $g(1,93)=\ln(1,93+5)-1,93=0,01$
- $g(1,94)=\ln(1,94+5)-1,94=-0,003$

on a: $g(1,93)\times g(1,94)<0$ donc 0,25

$$\boxed{1,93<\alpha<1,94}$$

2- Justifions que $f([0;4])\subset[0;4]$

* le sens de variation de f

$\forall x\in[0;4]$, $f'(x)=[\ln(x+5)]'=\dfrac{1}{x+5}$ 0,25

le signe de $f'(x)$ est celui de 1
Car $x+5>0$ sur $]0;+\infty[$

or $1>0$ donc $f'(x)>0$ d'où f est strictement croissante sur $]0;4[$ 0,25

* Justifions que $f([0;4])\subset[0;4]$

f est strictement croissante sur $[0;4]$.

donc $f([0;4])=[f(0);f(4)]$

- $f(0)=\ln 5=1,6$ $\quad$ • $f(4)=\ln 9=2,2$

on a: $[\ln 5;\ln 9]\subset[0;4]$

donc $\boxed{f([0;4])\subset[0;4]}$ 0,5

3-a- justification

$\forall x\in[0;4]$, $f'(x)=\dfrac{1}{x+5}$

Pour $x\in[0;4]$, $\Leftrightarrow 0\leq x\leq 4$

$\Leftrightarrow 5\leq x+5\leq 9$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{9}\leq\dfrac{1}{x+5}\leq\dfrac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{9}\leq f'(x)\leq\dfrac{1}{5}$ 0,5

$$\boxed{\forall x\in[0;4],\ |f'(x)|\leq\frac{1}{5}}$$

Exercice 4 suite

3-b- Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^n}$

* Démontrons en application le théorème des accroissements finis que :

$\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5}|U_n - \alpha|$

On sait que : $\forall x \in [0;4], |f'(x)| \leq \frac{1}{5}$
en appliquant le théorème des accroissements finis à l'intervalle $[x;\alpha[$

on a, $\forall x \in [0;4], |f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{5}|x - \alpha|$

or $f(x) = x \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$.

donc $\forall x \in [0;4], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{5}|x - \alpha|$

$\Leftrightarrow |f(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{5}|U_n - \alpha|$ 0,25

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5}|U_n - \alpha|}$

* Démontrons par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^n}$

⊙ Vérifions U_0

$U_0 = 0$

- $|U_0 - \alpha| = |0 - \alpha|$
$= |-\alpha| = \alpha$

- $\frac{\alpha}{5^0} = \frac{\alpha}{1} = \alpha$

on a : $|U_0 - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^0}$ 0,25

donc U_0 est vraie.

⊙ supposons que U_k est vraie

$\forall k \in \mathbb{N}, |U_k - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^n}$

⊙ Démontrons que U_{k+1} est vraie

$\forall k \in \mathbb{N}, |U_k - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^n}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5}|U_k - \alpha| \leq \frac{1}{5} \times \frac{\alpha}{5^n}$

or $|U_{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5}|U_k - \alpha|$

donc $|U_{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5} \times \frac{\alpha}{5^n}$

$\Leftrightarrow |U_{k+1} - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^{n+1}}$ 0,25

donc U_{k+1} est vraie

alors $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^n}$

4- Déduisons de la suite U est convergente

$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^n}$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\alpha}{5^n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ 0,5

Car $-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n - \alpha = 0$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha}$ 0,25

U converge vers α.

Exercice 5

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-1)e^{x^2-2x+1}$

1. a. La limite de f en $-\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^{x^2-2x+1}$

on a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \text{et } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x-1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \end{cases}$ 0,25

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ 0,25

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x-1)e^{x^2-2x+1}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)e^{x^2-2x+1}$

on a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{1}{x} = 1 \text{ car } \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \text{et } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \end{cases}$ 0,25

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty}$

b. Interprétation graphique

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.

2. a. Justification

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \left[(x-1)e^{x^2-2x+1}\right]'$

$= (x-1)'e^{x^2-2x+1} + \left(e^{x^2-2x+1}\right)'(x-1)$

$= e^{x^2-2x+1} + (x^2-2x+1)'(x-1)e^{x^2-2x+1}$

$= e^{x^2-2x+1} + (2x-2)(x-1)e^{x^2-2x+1}$

$= \left[1+(2x-2)(x-1)\right]e^{x^2-2x+1}$

$= (1+2x^2-2x-2x+2)e^{x^2-2x+1}$ 0,25

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (2x^2-4x+3)e^{x^2-2x+1}}$

b. Le sens de variation de f.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $2x^2-4x+3$ car $e^{x^2-2x+1} > 0$ sur $\mathbb{R}$

Posons $2x^2-4x+3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4\times2\times3$

$= 16-24$

$\Delta = -8$ 0,5

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$2x^2-4x+3$	+
$f'(x)$	+

$\forall x \in]-\infty;+\infty[,\ f'(x) > 0$ 0,5

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 suite.

2-b. tableau de variation de f.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\left(e^{x^2-2x+1}\right)$

on a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \text{et } \lim\limits_{x\to+\infty} e^X = +\infty \\ \text{et } \lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3- Justifions que le point I est un point d'inflexion de $(\mathcal{E})$

on a : $f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-1)(2x^2-4x+5)e^{x^2-2x+1} = 0$

$\Leftrightarrow x-1 = 0$ ou $2x^2-4x+5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ $\qquad \Delta = (-4)^2 - 4\times2\times5$

$= 16 - 40$

$= -24$ 0,5

• $f(1) = (1-1)e^{1^2-2+1} = 0$

Donc le point $I(1;0)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{E})$.

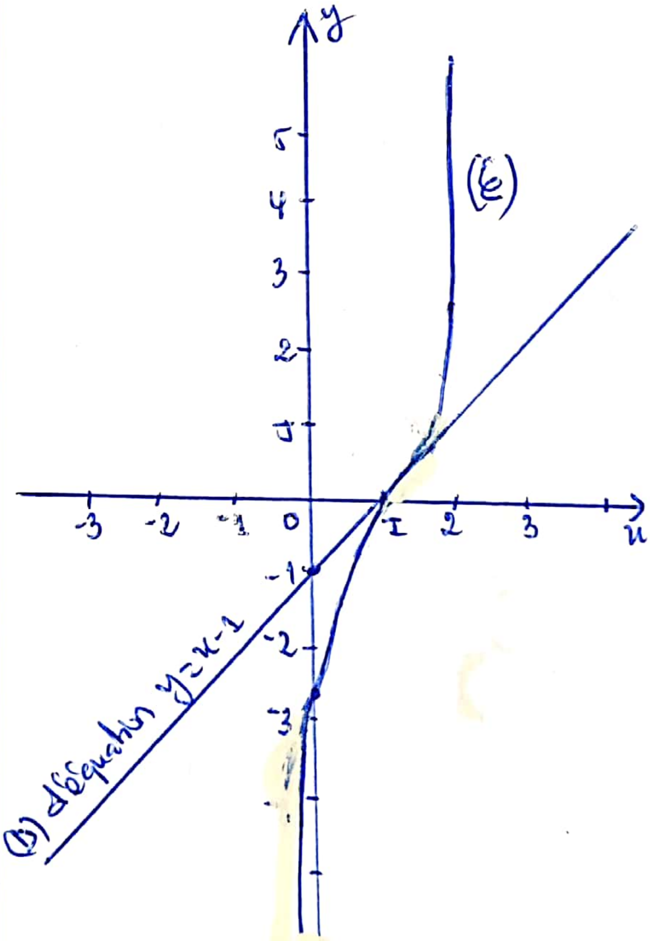
4- Construction de $(\mathcal{E})$ et (T)

. (T) d'équation $y = x-1$

x	0	1
y	-1	0

• $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-1)e^{x^2-2x+1}$

x	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	-14,2	-2,7	-0,6	0	0,6	2,7



$(\mathcal{E})$: 0,5

(T) : 0,25

Exercice 6

Pour répondre à la préoccupation posée dans le sujet, je vais utiliser la leçon la Probabilité conditionnelle et variable aléatoire.

Je vais procéder de la façon suivante:

- Définir les événements
- Faire l'arbre pondéré
- Définir la variable aléatoire
- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire
- Calculer l'espérance mathématique
- Déterminer la valeur de la mise.

0,75

* Choix des événements

Soit les événements suivants:

R: « obtenir une boule rouge »

V: « obtenir une boule verte »

* Arbre pondéré

$$P(R) = \frac{C_5^1}{C_{10}^1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Le nombre de tirages possibles est une combinaison de deux boules parmi 10.

on a $\text{Card}\,\Omega = C_{10}^2 = 45$.

. tirer deux boules vertes:

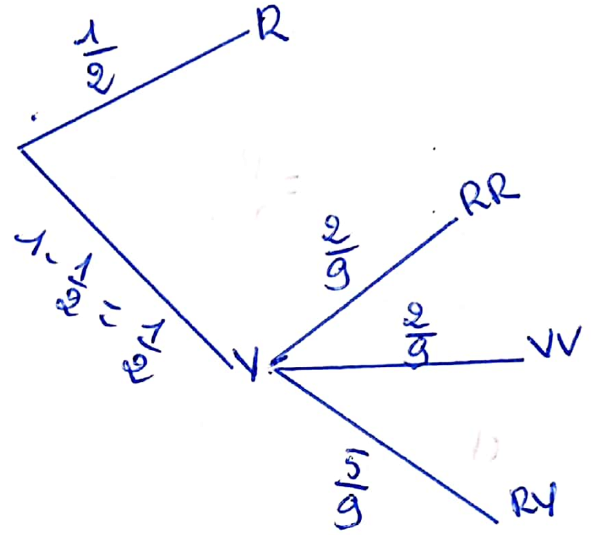
$$P_1 = \frac{C_5^2}{45} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

. tirer deux boules Rouge:

$$P_2 = \frac{C_5^2}{45} = \frac{2}{9}$$

. tirer une boule de chaque couleur:

$$P_3 = \frac{C_5^1 \times C_5^1}{45} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$



* La variable aléatoire

Soit X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur.

* Loi de probabilité de X

02,50

. les valeurs prises par X

Soit m la mise du joueur $(m > 0)$

$X = \text{gain} - \text{mise}$

- $X = 0 - m = -m$

$X = -2 \times 1000 - m = -2000 - m$

$X = 2 \times 2000 - m = 4000 - m$

$X = 2000 - 1000 - m = 1000 - m$

- $P(X = -m) = \frac{1}{2} = \frac{9}{18}$
- $P(X = -2000 - m) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{18}$
- $P(X = 4000 - m) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{18}$
- $P(X = 1000 - m) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$

Exercice 6 suite

. La loi de probabilité de x

X	-m	-2000-m	1000-m	4000-m	total
P(x)	$\frac{9}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$	1

* L'espérance mathématique de x

$$E(x) = \frac{-9m + 2(-2000-m) + 5(1000-m) + 2(4000-m)}{18}$$

$$E(x) = \frac{9000 - 18m}{18}$$

$$\boxed{E(x) = 500 - m}$$

* La valeur de la mise pour que le jeu soit équitable

Le jeu est équitable si :

$E(x) = 0$

$\Leftrightarrow 500 - m = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{m = 500}$

Pour avoir un jeu équitable, le promoteur doit fixer la mise à la somme de 500 FCFA. 01,25

Cohérence : +0,5

 M. FOFANA L. 01 03 05 63 57

 m.e.n.a - Brevet d'Etude du Premier Cycle Blanc Régional - Session 2024

MATHEMATIQUES

Durée : 2heures

Coeff : 3

L'épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3et 3/3
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé

EXERCICE 1 : (2 points)

Pour chacun des énoncés, les informations A, B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie. Ecris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre qui donne l'affirmation vraie.

1. L'expression développée de $(x-y)^2$ est…

A) $x^2 - y^2$ B) $x^2 - 2xy + y^2$ C) $x^2 + 2xy + y^2$ D) $x^2 - 2xy - y^2$

2. Pour tout nombre décimal relatif a non nul et pour tout entier relatif n, $\frac{-1}{a^n}$ est égal à…

A) a^{-n} B) a^n C) $-a^{-n}$ D) $-a^n$

3. L'expression « $x \in [a; b]$ » se traduit en terme d'encadrement par …

A) $a \leq x \leq b$ B) $a < x < b$ C) $a \leq x < b$ D) $a < x \leq b$

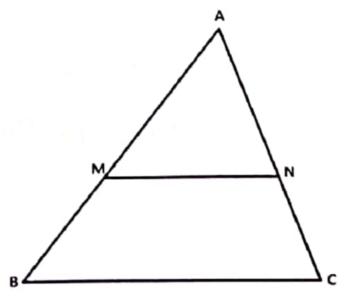
4. Le nombre $\sqrt{36 \times 5}$ est égal à …

A) $5\sqrt{36}$ B) $36\sqrt{5}$ C) $6 + \sqrt{5}$ D) $6\sqrt{5}$

EXERCICE 2 : (3 points)

Réordonne les séquences suivantes en recopiant simplement la lettre correspondante pour obtenir l'énoncé d'une propriété :

a) tels que la position de M par rapport à A et B ;
b) ABC est un triangle.
c) Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
d) et N est un point de la droite (AC)
e) alors $(MN) // (BC)$
f) M est un point de la droite (AB)
g) soit la même que celle de N par rapport à A et C.



 m.e.n.a - Brevet d'Etude du Premier Cycle Blanc Régional - Session 2024

MATHEMATIQUES

Durée : 2heures
Coeff : 3

L'épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3et 3/3
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé

EXERCICE 1 : (2 points)

Pour chacun des énoncés, les informations A, B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie. Ecris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre qui donne l'affirmation vraie.

1. L'expression développée de $(x-y)^2$ est…

A) $x^2 - y^2$ B) $x^2 - 2xy + y^2$ C) $x^2 + 2xy + y^2$ D) $x^2 - 2xy - y^2$

2. Pour tout nombre décimal relatif a non nul et pour tout entier relatif n, $\frac{-1}{a^n}$ est égal à…

A) a^{-n} B) a^n C) $-a^{-n}$ D) $-a^n$

3. L'expression « $x \in [a;b]$ » se traduit en terme d'encadrement par …

A) $a \leq x \leq b$ B) $a < x < b$ C) $a \leq x < b$ D) $a < x \leq b$

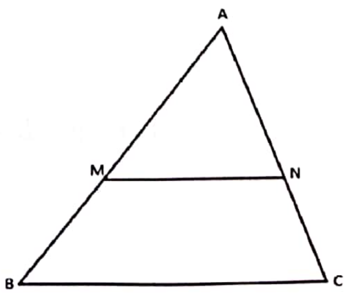
4. Le nombre $\sqrt{36 \times 5}$ est égal à …

A) $5\sqrt{36}$ B) $36\sqrt{5}$ C) $6+\sqrt{5}$ D) $6\sqrt{5}$

EXERCICE 2 : (3 points)

Réordonne les séquences suivantes en recopiant simplement la lettre correspondante pour obtenir l'énoncé d'une propriété :

a) tels que la position de M par rapport à A et B ;
b) ABC est un triangle.
c) Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
d) et N est un point de la droite (AC)
e) alors $(MN) // (BC)$
f) M est un point de la droite (AB)
g) soit la même que celle de N par rapport à A et C.



EXERCICE 3 : (3 points)

On donne la fraction rationnelle $S = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)^2-1}$

1. Justifie que $(x-3)^2 - 1 = (x-4)(x-2)$.
2. **a)** Détermine les valeurs de la variable x pour lesquelles S existe.

   b) Lorsque S existe, justifie que $S = \frac{x-1}{x-4}$
3. Calcule la valeur numérique de S pour $x = -2$

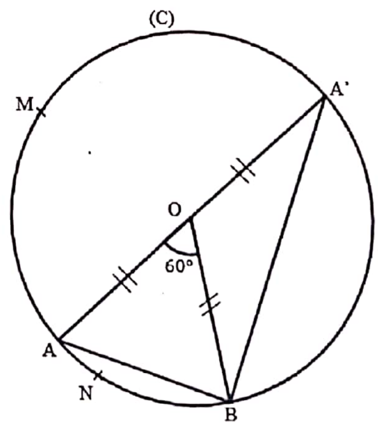
EXERCICE 4 : (3 points)

ABC est un triangle, I est le milieu de $[BC]$, le point E tel que :
$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AI}$

1) Recopie et complète les égalités suivantes :
   a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{I\ldots}$
   b) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{\ldots I} + \overrightarrow{\ldots E}$
2) Déduis de la question 1) que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$

EXERCICE 5 : (5 points)

On donne le cercle (C) de centre O et de rayon 3cm. Les points A et B deux points du cercle tels mes $\widehat{AOB} = 60\ °$, un point M sur le grand arc $\overset{\frown}{AB}$ et un point N sur le petit arc $\overset{\frown}{AB}$. A' est le symétrique du point A par rapport



1. Donne la nature du triangle AOB en justifiant ta réponse.
2. Justifie que mes $\widehat{AMB} = 30\ °$
3. Justifie que mes $\widehat{MNA'} =$ mes $\widehat{MAA'}$
4. Justifie que mes $\widehat{ABA'} = 90°$
5. Justifie que $BA' = 3\sqrt{3}$.

EXERCICE 6 : (4 points)

A la veille des congés de Pâques, la présidente de la promotion 3ème de ton établissement projette d'organiser une sortie-détente dans une ville du pays. Pour le déplacement, elle se renseigne auprès de deux compagnies de transport C_1 et C_2 de la place.

- La compagnie C_1 propose 700 F à payer par kilomètre parcouru.
- La compagnie C_2 propose 200 F à payer par kilomètre parcouru et 30.000 F pour le carburant.

La présidente voudrait choisir la compagnie qui présente l'offre la moins chère.

On désigne par x la distance parcourue pour cette sortie.

1. Exprime en fonction de x :

   a) Le prix P_1 à payer si la compagnie C_1 est choisie.

   b) Le prix P_2 à payer si la compagnie C_2 est choisie.

2. a) Résous l'inéquation suivante : $700x > 200x + 30.000$

   b) Détermine la distance à partir de laquelle l'offre de la compagnie C_2 est la meilleure.

EXERCICE 1

1 - B   3 - A
2 - C   4 - D   0,5x4 = 02pts

EXERCICE 2

b - f - d - a - g - c - e   03

EXERCICE 3

$$S = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)^2-1}$$

1 - justification

$(x-3)^2 - 1^2 = (x-3-1)(x-3+1)$

$\boxed{(x-3)^2-1 = (x-4)(x-2)}$ 01

2 - a. les valeurs de x pour lesquelles S existe

S existe $\Leftrightarrow (x-3)^2-1 \neq 0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x-2) \neq 0$

$\Leftrightarrow x-4 \neq 0$ et $x-2 \neq 0$

$\boxed{S \text{ existe } \Leftrightarrow x \neq 4 \text{ et } x \neq 2}$ 0,5

b. simplification

Pour $x \neq 4$ et $x \neq 2$, $S = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)^2-1}$

$= \frac{(x-1)(x-2)}{(x-4)(x-2)}$

$\boxed{\text{Pour } x \neq 4 \text{ et } x \neq 2, \ S = \frac{x-1}{x-4}}$

01

3 - Valeur numérique de S pour $x = -2$

$S = \frac{x-1}{x-4}$

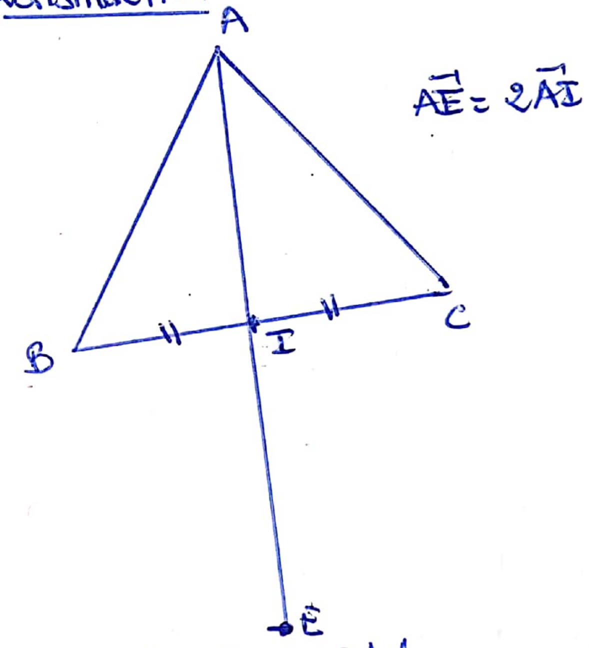
Pour $x = -2$, $S = \frac{-2-1}{-2-4}$

$= \frac{3}{6}$

$\boxed{S = \frac{1}{2}}$ 0,5

EXERCICE 4

- Construction



1 - Complétons les égalités

a) $\vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB}$ 01

b) $\vec{CE} = \vec{CI} + \vec{IE}$ 01

2 - Déduisons que $\vec{AB} = \vec{CE}$

- I est le milieu de [BC] $\Leftrightarrow \vec{IB} = \vec{CI}$
- $\vec{AE} = 2\vec{AI}$ donc I est milieu de [AE]

donc $\vec{AI} = \vec{IE}$.

or $\vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB}$ et $\vec{CE} = \vec{CI} + \vec{IE}$.

$= \vec{IE} + \vec{CI} = \vec{CI} + \vec{IE}$

$\boxed{\vec{AB} = \vec{CE}}$ 01

Exercice 1

1- B 3- A

2- C 4- D 0,5x4 = 02pts

Exercice 2

b-f-d-a-g-c-e 03

Exercice 3

$$S = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)^2-1}$$

1- justification

$(x-3)^2 - 1^2 = (x-3-1)(x-3+1)$

$\boxed{(x-3)^2 - 1 = (x-4)(x-2)}$ 01

2-a. les valeurs de x pour lesquelles S existe

S existe $\Leftrightarrow (x-3)^2 - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x-2) \neq 0$

$\Leftrightarrow x-4 \neq 0$ et $x-2 \neq 0$ 0,5

$\boxed{S \text{ existe } \Leftrightarrow x \neq 4 \text{ et } x \neq 2}$

b. simplification

Pour $x \neq 4$ et $x \neq 2$, $S = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)^2-1}$

$= \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-4)(x-2)}$

$\boxed{\text{Pour } x \neq 4 \text{ et } x \neq 2,\ S = \dfrac{x-1}{x-4}}$ 01

3- Valeur numérique de S pour $x = -2$

$S = \dfrac{x-1}{x-4}$

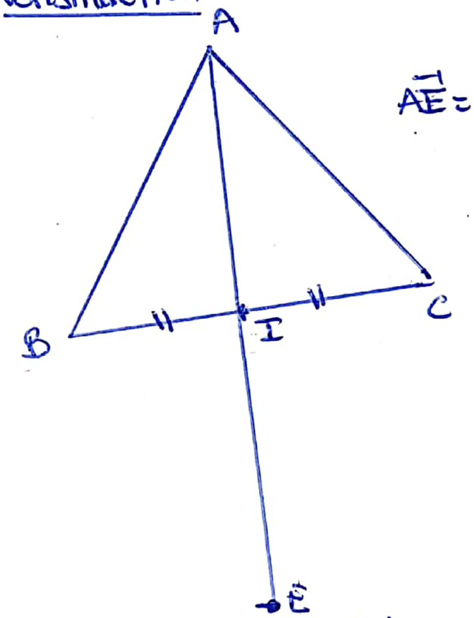
Pour $x = -2$, $S = \dfrac{-2-1}{-2-4}$

$= \dfrac{3}{6}$

$\boxed{S = \frac{1}{2}}$ 0,5

Exercice 4

Construction



$\vec{AE} = 2\vec{AI}$

1- Complétons les égalités

a) $\vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB}$ 01

b) $\vec{CE} = \vec{CI} + \vec{IE}$ 01

2- Déduisons que $\vec{AB} = \vec{CE}$

- I est le milieu de [BC] $\Leftrightarrow \vec{IB} = \vec{CI}$
- $\vec{AE} = 2\vec{AI}$ donc I est milieu de [AE]

donc $\vec{AI} = \vec{IE}$.

or $\vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB}$ et $\vec{CE} = \vec{CI} + \vec{IE}$

$= \vec{IE} + \vec{CI} = \vec{CI} + \vec{IE}$

$\boxed{\vec{AB} = \vec{CE}}$ 01

Exercice 5

1- Nature du triangle AOB

AOB est un triangle équilatéral.
Car $AO = OB$ et $mes\ \widehat{AOB} = 60°$ 01

2- Justifions que $\widehat{AMB} = 30°$

$\widehat{AMB}$ est un angle aigu inscrit associé à l'angle au centre $\widehat{AOB}$

donc $mes\ \widehat{AMB} = \frac{1}{2} mes\ \widehat{AOB}$

$$mes\ \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \times 60°$$

$$\boxed{mes\ \widehat{AMB} = 30°}$$ 01

3- Justifions que $\widehat{MNA'} = mes\ \widehat{MAA'}$

$\widehat{MNA'}$ et $\widehat{MAA'}$ sont deux angles aigus inscrits dans le cercle $(\mathscr{C})$ qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{MA'}$ donc

$\boxed{mes\ \widehat{MNA'} = mes\ \widehat{MAA'}}$ 01

4- Justifions que $mes\ \widehat{ABA'} = 90°$

ABA' est un triangle inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre [AA'] donc ABA' est rectangle en B.

Par suite $mes\ \widehat{ABA'} = 90°$

5- Justifions que $BA' = 3\sqrt{3}$

. ABA' est un triangle rectangle en B d'après la propriété de pythagore.

$AA'^2 = AB^2 + A'B^2$

$\Leftrightarrow BA'^2 = AA'^2 - AB^2$ avec $AB = OA = 3$

$$= (2\times 3)^2 - 3^2$$

$$= 36 - 9 = 27$$ 01

$\boxed{BA' = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}}$

Exercice 6

1- Exprimons en fonction de x

a. le Prix P_1 à payer :

$P_1 = 700x$ 0,5

b. le prix P_2 à payer

$P_2 = 200x + 30\,000$ 0,5

2- a. Résolution

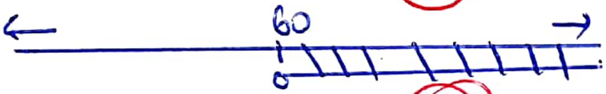
$700x > 200x + 30\,000$

$\Leftrightarrow 700x - 200x > 30\,000$

$\Leftrightarrow 500x > 30\,000$

$x > \frac{30\,000}{500}$

$x > 60$ 01



$\boxed{S_{\mathbb{R}} =]60 ; \rightarrow[}$ 0,5

b. La distance à partir de laquelle l'offre de la Compagnie C_2 est meilleure

on a, $P_1 > P_2$

$\Leftrightarrow 700x > 200x + 30\,000$

$\Leftrightarrow x > 60$ 01,5

A partir d'une distance supérieure à 60 km, l'offre de la Compagnie C_2 est meilleure.

M. FOFANA L. 01 03 05 63 57

MATHEMATIQUES

Durée : 02 heures
Coeff : 2

Série : A2

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.

EXERCICE 1 (2 points)

Ecris le numéro de chaque proposition, suivi de Vrai si la proposition est vraie ou de Faux si la proposition est fausse.

1. La limite en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{3x^2+x-1}{5x^3-8x+4}$ est égale à $\frac{3}{5}$.

2. Si A et B sont deux évènements contraires d'un univers Ω, alors A et B sont incompatibles.

3. Si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ alors la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. La fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement positive sur $]1\,;+\infty[$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés ci-dessous les informations A, B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.

Ecris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre qui donne l'affirmation vraie.

1. Si f est une fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ln(x^2 + x + 3)$, alors…

A) $f'(x) = \frac{1}{x^2+x+3}$ B) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3}$ C) $f'(x) = 2x + 1$ D) $f'(x) = \frac{x^2+x+3}{2x+1}$

2. Le nombre de possibilités de tirer simultanément et au hasard 3 éléments parmi 2024 est…

A) A_{2024}^3 B) 3^{2024} C) C_{2024}^3 D) $(2024)^3$

3. Si A et B sont deux évènements d'un univers Ω et P une probabilité sur Ω telle que $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$ alors $P(A \cup B)$ est égal à…

A) 0,1 B) 0,7 C) 0,9 D) 0,8

4. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(lnx)^2 - 2lnx + 1 = 0$ est…

A) $\{1\}$ B) $\{-1\}$ C) $\{0\}$ D) $\{e\}$

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la fonction polynôme P définie par : $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

1. Vérifie que : $P(x) = (x+2)(2x^2 - 3x + 1)$.
2. a. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

   b. Déduis-en les solutions de l'équation : $P(x) = 0$.
3. Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $2(lnx)^3 + (lnx)^2 - 5lnx + 2 = 0$.

EXERCICE 4 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unité graphique : $OI = 2\ cm$ et $OJ = 1cm$.

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = -2x + 3 - lnx$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f.

1.a) Justifie que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$.

b) Interprète graphiquement le résultat obtenu dans la question 1.a).

c) Justifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. a) Justifie que pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f'(x) = -(2 + \frac{1}{x})$.

   b) Justifie que f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

   c) Dresse le tableau de variation de f.

3. a) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1\ ; 1,5\ [$.

   b) Justifie que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = -3x + 4$.

EXERCICE 5 (5 points)

Lors de la kermesse en fin d'année dans ton établissement d'enseignement secondaire, un promoteur organise un jeu de tirage de boules d'un sac qui contient 12 boules indiscernables au toucher dont 5 vertes, 4 jaunes et 3 rouges.

Le jeu se déroule de la façon suivante :

Le joueur tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

Si les trois boules tirées sont exactement de deux couleurs, alors le joueur gagne.

Si non, il perd.

Deux amis se disputent. L'un affirme que le joueur a plus de 70% de chance de gagner. Ce que conteste l'autre. Tu es sollicité pour les départager.

A l'aide d'une production argumentée, basée sur tes connaissances mathématiques, départage les deux joueurs.

EXERCICE 1

1 -

2 - VRAI

3 - FAUX

4 - VRAI

$0,5 \times 4 = 02pts$

EXERCICE 2

1 - B

2 - C

3 - B

4 - D

$0,5 \times 4 = 02pts$

EXERCICE 3

1 - Vérification

On a, $(x+2)(2x^2-3x+1)$

$= 2x^3 - 3x^2 + x + 4x^2 - 6x + 2$

$= 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ 0,5

$= P(x)$ 01

Donc $\boxed{P(x) = (x+2)(2x^2-3x+1)}$

2 - a - Résolution

$2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1$

$= 9 - 8$

$\Delta = 1$

$\sqrt{\Delta} = 1$

$x_1 = \dfrac{3-1}{2\times2}$ $x_2 = \dfrac{3+1}{2\times2}$

$x_1 = \dfrac{2}{4}$ $= \dfrac{4}{4}$

$x_1 = \dfrac{1}{2}$ $x_2 = 1$ 02

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1}{2} ; 1\right\}}$

b - Déduisons les solutions de l'équation $P(x) = 0$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^2-3x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x+2 = 0$ ou $2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = \frac{1}{2}$ ou $x = 1$

(d'après la question 2-a)

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{-2 ; \frac{1}{2} ; 1\right\}}$ 01

3 - Résolution de l'équation

(E) : $2(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$

* Ensemble de validité

$x \in V \Leftrightarrow x > 0$

$-\infty$ 0 $+\infty$

$\boxed{V =]0 ; +\infty[}$

* Résolution

Posons $X = \ln x$

On a, $2X^3 + X^2 - 5X + 2 = 0$

D'après la question 2b,

$X = -2$ ou $X = \frac{1}{2}$ ou $X = 1$

$\Leftrightarrow \ln x = -2$ ou $\ln x = \frac{1}{2}$ ou $\ln x = 1$

$\Leftrightarrow x = e^{-2}$ ou $x = e^{\frac{1}{2}}$ ou $x = e^{1}$

$\Leftrightarrow x = e^{-2}$ ou $x = e^{\frac{1}{2}}$ ou $x = e$

* Solution

Pour $x \in]0 ; +\infty[$ 01

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{e^{-2} ; e^{\frac{1}{2}} ; e\right\}}$

EXERCICE 4

$\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = -2x+3-\ln x$

1-a- justification

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} -2x+3-\ln x$

on a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} -2x+3 = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} -\ln x = +\infty \end{cases}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$ 0,5

b- Interprétation graphique

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $(\mathcal{E})$. 0,5

c- justification

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x+3-\ln x$

on a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -2x+3 = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -\ln x = -\infty \end{cases}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

2-a- justification

$\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = (-2x+3-\ln x)'$

$= -2 - \frac{1}{x}$

$\boxed{f'(x) = -\left(2 + \frac{1}{x}\right)}$ 0,5

b- justification

le signe de $f'(x)$ est celui de -1

car $2 + \frac{1}{x} > 0$ sur $]0;+\infty[$

or $-1 < 0$ donc $f'(x) < 0$ alors 01

f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

c- tableau de variation de f

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

01

3-a- Démonstration

$\forall x \in]0;+\infty[$, f est strictement décroissante

- $f(1) = -2\times1+3-\ln 1 = 1$
- $f(1,5) = -2\times1,5+3-\ln 3 = -1,097$

on a, $f(1) \times f(1,5) < 0$ 01

donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1;1,5[$.

Exercice 4 suite

3-b. Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1

(T) d'équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

- $f(1) = -2\times 1 + 3 - \ln 1 = 1$
- $f'(1) = -\left(2 + \frac{1}{1}\right) = -3$

(T) d'équation $y = -3(x-1) + 1$

$y = -3x + 3 + 1$ (01)

$\boxed{(T) \text{ d'équation } y = -3x + 4}$

Exercice 5

Pour départager les deux amis, je vais utiliser la leçon sur la probabilité. Ainsi, je vais suivre la démarche ci-dessous: (0,75)

- Déterminer le nombre de tirages possibles
- Déterminer les cas où les trois boules tirées sont exactement de deux couleurs.
- Déterminer la probabilité de tirer exactement trois de deux couleurs.

* le nombre de tirages possibles

le tirage étant simultané, le nombre de tirages possibles est une combinaison de 3 boules parmi 12.

$Card\,\Omega = C_{12}^{3}$

$\boxed{Card\,\Omega = 220}$

* les cas où les trois boules tirées sont exactement de deux couleurs

5	7
V	J+R
2	1

ou

4	8
J	R+J
2	1

ou

3	9
R	V+J
2	1

(02,50)

* La probabilité pour que les trois boules tirées soit exactement de deux couleurs.

$$P = \frac{C_5^2 \times C_7^1 + C_4^2 \times C_8^1 + C_3^2 \times C_9^1}{220}$$

$$P = \frac{145}{220}$$ (+0,5)

$$P = \frac{29}{44}$$

soit $\boxed{P = 0,66 \text{ ou } P = 66\%}$ (01,5)

Le joueur a 66% de chance de gagner. Il a donc moins de 70% de chance de gagner.