B.A.C. BLANC RÉGIONAL
SESSION DE MARS 2024

CORRIGE ET BARÈME
MATIÈRE : MATHÉMATIQUES
SÉRIE C

EXERCICE	Corrigé	Barème
EXERCICE 1 *(2 points)*	1. FAUX ; 2. FAUX ; 3. VRAI ; 4. FAUX	0,5×4 points
EXERCICE 2 *(2 points)*	1. D ; 2. B ; 3. B ; 4. A	0,5×4 points

EXERCICE 3 *([illegible] points)*

1. On a : $\overrightarrow{AB}\,(1\,;-1\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(2\,;-5\,;-3)$ ne sont pas colinéaires car $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{5}$.
D'où les points A, B et C ne sont pas alignés .... **0,5 point**

2.a) $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 + 1 - 3 = 0$ et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 5 - 9 = 0$
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, alors ils sont des vecteurs directeurs de (ABC).
Le vecteur $\vec{u}$ étant un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, il est normal au plan (ABC).
D'où la droite (Δ) est orthogonale au plan (ABC). .... **0,5 point**

b) $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $2x - y + 3z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
Le point A appartient au plan (ABC), donc $2 \times 0 - 4 + 3 \times 1 + d = 0$; d'où $d = 1$.
Par suite, une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + 3z + 1 = 0$ ... **0,5 point**

c) La droite (Δ) passe par $E(7; -1; 4)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$.
Donc le système $\begin{cases} x = 7 + 2k \\ y = -1 - k \\ z = 4 + 3k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ). .... **0,25 point**

d) Remplaçons x, y et z dans l'équation cartésienne du plan (ABC).
$2 \times (7 + 2k) - (-1 - k) + 3(4 + 3k) + 1 = 0$, soit $k = -2$.
Ainsi (Δ) coupe le plan (ABC) en un point H.
Pour $k = -2$, on a : $x = 3$; $y = 1$ et $z = -2$.
Ainsi le point H, point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) a pour coordonnées $(3\,; 1; -2)$. .... **0,5 point**

3. La droite d'intersection (D) des plans (P_1) et (P_2) a pour système d'équations : $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$.
On pose $z = d$.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - d \\ 3y = d - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}d \\ y = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}d \\ z = d \end{cases}$$

Par suite, (D) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}d \\ y = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}d \\ z = d \end{cases}$ $(d \in \mathbb{R})$

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{w}(-4; 1; 3)$.
On a : $\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \times (-4) - 1 \times 1 + 3 \times 3 = -8 - 1 + 9 = 0$,
donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

Ainsi, la droite (D) est parallèle au plan (ABC). .... **0,75 point**

EXERCICE 4
(4 points)

1. a) Pour $x > 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\sqrt{1-e^{-x}}}{x} = \frac{e^{-x}-1}{-x} \times \frac{1}{\sqrt{1-e^{-x}}}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^{-x}-1}{-x} \times \frac{1}{\sqrt{1-e^{-x}}} = +\infty$$

car $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^{-x}-1}{-x} = 1$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{1-e^{-x}}} = +\infty$.

Donc, f n'est pas dérivable en 0. .... **0,5 point**

b) $(\mathcal{C}_f)$ admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale. .... **0,25 point**

2. a) f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{1-e^{-x}}} = \frac{e^{-x}}{2 f(x)}$ .... **0,25 point**

b) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. **0,25 point**

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

.... **0,25 point**

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

c) f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$

et $f(\,]0;+\infty[\,) = \left]f(0); \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[=]0;1[$.

Donc, f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]0;1[$.

Ainsi f admet une bijection réciproque g définie sur l'intervalle $]0;1[$,

par suite $J =]0;1[$. .... **0,5 point**

d) $x \in]0;+\infty[$ et $y \in]0;1[$

$f(x) = y \iff \sqrt{1-e^{-x}} = y$

$\iff x = -\ln(1-y^2)$

Par suite, $g(x) = -\ln(1-x^2)$, pour tout x élément de $]0;1[$. .... **0,5 point**

3. a) f' est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f''(x) = \frac{e^{-x}(e^{-x}-2)}{4(1-e^{-x})\sqrt{1-e^{-x}}}$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $\frac{e^{-x}}{4(1-e^{-x})\sqrt{1-e^{-x}}} > 0$ donc le signe de $f''(x)$ dépend du signe de $e^{-x}-2$.

Or : $e^{-x} - 2 = \frac{1-2e^{x}}{e^{x}}$ et $e^{x} > 0$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $x > 0$ d'où $e^{x} > 1$, donc $1 - 2e^{x} < 0$.

Par suite : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f''(x) < 0$.

Donc, f' est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. .... **0,5 point**

b) $x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, $\frac{1}{2} < x$

$f'(x) < f'\left(\frac{1}{2}\right)$ car f'est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

	$f'(x) < 1$ car $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-\frac{1}{2}}}} \approx 0{,}48$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) < 1$. Donc, pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[, f'(x) < 1$.	0,5 point
	c) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$. Posons : $\varphi(x) = f(x) - x$, pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$. φ est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et $\forall x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[, \varphi'(x) = f'(x) - 1$. Comme $f'(x) < 1$, alors $\varphi'(x) < 0$. Donc, φ est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$. φ est continue et strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et $\varphi\left(\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\right) = \left]-\infty; \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right[$, avec $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, car $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}13$. De plus $0 \in \left]-\infty; \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right[$, donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$. Par suite, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$	0,5 point
EXERCICE 5 *(4 points)*	n est un entier naturel non nul. 1. $5 \equiv 1\ [4]$, donc $5^n \equiv 1^n\ [4]$, ainsi $5^n \equiv 1\ [4]$, d'où $5^n - 1 \equiv 0\ [4]$. Par suite $5^n - 1$ est divisible par 4.	0,5 point
	2. a) $PGCD(4\,; 5^n) = PGCD(2^2\,; 5^n) = 1$ et 1 divise 1. Donc, l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.	0,5 point
	b) On a : $4 \times (-a_n) + 5^n \times 1 = 4 \times \left(-\frac{5^n-1}{4}\right) + 5^n \times 1$ $= -5^n + 1 + 5^n = 1$ Donc $(-\,a_n\,;\,1)$ est une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, de l'équation (E).	0,25 point
	c) On a $4x + 5^n y = 1$ et $4 \times (-a_n) + 5^n \times 1 = 1$. Donc : $4x + 5^n y = 4 \times (-a_n) + 5^n \times 1$ $4x + 5^n y = 4 \times (-a_n) + 5^n \times 1 \Leftrightarrow 4(x + a_n) = 5^n(1 - y)$ $PGCD(4\,; 5^n) = 1$, d'après Gauss 5^n divise $x + a_n$, il existe donc un entier relatif k tel que $x + a_n = 5^n k$. D'où $x = -\,a_n + 5^n k$. D'autre part 4 divise $1 - y$, il existe donc un entier relatif k tel que $1 - y = 4k$. D'où $y = 1 - 4k$. Réciproquement, $4 \times (-\,a_n + 5^n k) + 5^n(1 - 4k) = 4 \times (-a_n) + 5^n = 1$. $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(-\,a_n + 5^n k\,; 1 - 4k);\ k \in \mathbb{Z}\}$	0,75 point
	3. Soit (E_n) l'ellipse d'équation : $5x^2 + y^2 = 5(a_n)^2$. a) $5x^2 + y^2 = 5(a_n)^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(a_n)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5}\,a_n)^2} = 1$ On a : $a = a_n$; $b = \sqrt{5}\,a_n$ donc $0 < a < b$ et $c = 2\,a_n$ Dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les sommets de (E_n) sont $A(a_n\,; 0)$; $A'(-\,a_n\,; 0)$; $B(0\,; \sqrt{5}\,a_n)$ et $B'(0\,; -\sqrt{5}\,a_n)$;	

	les foyers sont $F(0\,;2\,a_n)$ et $F'(0\,;-2\,a_n)$	0,75 point
	b) $M \in (E_n) \Leftrightarrow 5(5^n k - a_n)^2 + (1-4k)^2 = 5(a_n)^2$ $\Leftrightarrow 5^{2n+1}k^2 - 2a_n k \times 5^{n+1} + 5{a_n}^2 - 1 + 8k - 16k^2 = 5(a_n)^2$ $\Leftrightarrow k(5^{2n+1}k - 2a_n \times 5^{n+1} + 8 - 16k) = 1$ Donc, k divise 1 car $(5^{2n+1}k - 2a_n \times 5^{n+1} + 8 - 16k) \in \mathbb{Z}$. D'où $k = 1$ ou $k = -1$. Ainsi, M appartient à l'ellipse (E_n), pour $k = 1$ ou $k = -1$. -------------	0,75 point
	c) $M(x,y) \in (\Gamma_n) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 5^n y - 1 = 0 \\ 5x^2 + y^2 = 5(a_n)^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -a_n + 5^n k \text{ et } y = 1 - 4k \\ k = 1 \text{ ou } k = -1 \end{cases}$ Pour $= 1$, on a : $x = -a_n + 5^n$ et $y = -3$ Pour $k = -1$, on a : $x = -a_n - 5^n$ et $y = 5$ Par suite, il existe exactement deux points de l'ensemble (Γ_n) appartenant à l'ellipse (E_n).	0,5 point

EXERCICE 6 *(5 points)*

GRILLE DE CORRECTION DE LA SITUATION COMPLEXE DU BAC BLANC ABIDJAN 4 SÉRIE C

Critères	Indicateurs de performance	Barème de notation
CM1 : **Pertinence** Identification du modèle correspondant au problème posé (Interprétation correcte de la situation complexe, pertinence des choix opérés sur les données de la situation)	• Pour résoudre le problème posé, je vais utiliser le logarithme népérien Pour ce faire, je vais : • D'abord définir une fonction g traduisant la situation • Étudier les variations de la fonction et dresser le tableau de variation • Enfin justifier qu'il existe des réels k tels que $g(x) = k$ admette deux solutions	**0,75 point** $1\ ind\ sur\ 4 \rightarrow 0{,}25$ $2\ ind\ sur\ 4 \rightarrow 0{,}5$ À partir de $3\ ind\ sur\ 4 \rightarrow 0{,}75$