



BACCALAUREAT BLANC NATIONAL - SESSION 2024

SERIE: D

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Coefficient : 05

Durée : 4h

NB : (la calculatrice n'est pas autorisée)

Exercice 1 (4,5pts)

Soit le polynôme $P(z) = z^3 - (1 + 2i)z^2 - 3z + 2i - 1$

- 1) Montrer que le polynôme $P(z)$ admet une racine réelle z_0 que l'on déterminera
- 2) Déterminer trois nombres complexes a , b et c tels que :

$$P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$$

- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(z) = 0$
- 4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 2cm), on désigne par A , B et C les points d'affixes respectives i , $2 + i$ et -1 .
 - a) Placer les points A , B et C
 - b) Soit D l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. Calculer l'affixe de D .
 - c) Calculer le nombre $Z = \frac{ZA}{ZA-ZB}$
 - d) Déterminer le module et un argument de Z .
 - e) En déduire la nature du triangle OAB

Exercice 2 (4,5pts)

On pose $A = \frac{2\ln(x-1)}{x^2-x}$

- 1) a) Montrer que pour tout $x \geq 2$ on a : $\frac{1}{(x-1)^2} \leq \frac{2}{x^2-x} \leq \frac{1}{x-1}$
b) En déduire que pour tout $x \geq 2$, $\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} \leq A \leq \frac{\ln(x-1)}{x-1}$

2) a) Calculer $I = \int_2^5 \frac{\ln(x-1)}{x-1} dx$

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $J = \int_2^5 \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} dx$

3) Déduire de ce qui précède un encadrement de $K = \int_2^5 A dx$

Problème (11pts)

Soit f la fonction par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm et (Δ) la droite d'équation $y = -2x$

A.E.E.M.B. ; la conviction d'une jeunesse !

Partie A

- 1- Préciser l'ensemble de définition Df de f.
- 2- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
b) Montrer que pour tout nombre réel x, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$
c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 3a) Montrer que pour tout réel x, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = 0$
a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) > 0$ puis en déduire le signe de $(f(x) + 2x)$

b) Interpréter graphiquement tous ces résultats.
- 4- a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$
c) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

c) Déduire de ce qui précède que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I que l'on précisera.
- 5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
- 6) Tracer (Δ) ; (T) et (C) dans le repère.
- 7) Tracer la courbe (Γ) de f^{-1} dans le même repère que (C). On expliquera la construction.

Partie B

- 1- Démontrer que $\frac{\sqrt{3}}{3}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.
- 2- Démontrer que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$, $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{4}$ et que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$, $f'(x) \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$
- 3- On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout entier n.
a- Démontrer que pour tout entier n, $U_n \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$
b- Démontrer que pour tout entier n, $\left|U_{n+1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} \left|U_n - \frac{\sqrt{3}}{3}\right|$
c- En déduire que $\left|U_n - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$.
d- Montrer que la suite (U_n) converge et calculer sa limite.
On donne : $\frac{2}{\sqrt{5}} = 0,89$; $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,57$; $\frac{\sqrt{5}}{2} = 1,11$