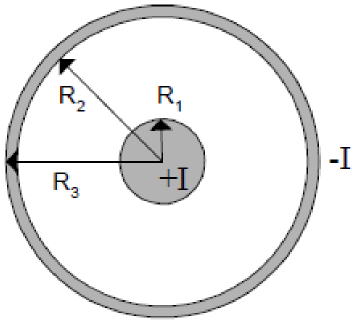
Année Universitaire 2012-2013
UFR SSMT

Licence 2 PC, EEM, EEAI

ELECTOMAGNETISME
1ère Session
Durée 2heures

Exercice 1 : Champ magnétique crée par un câble coaxial

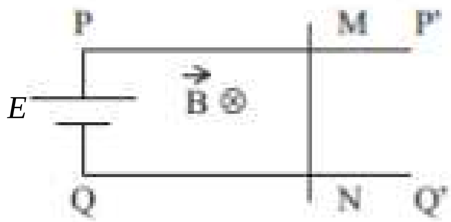
On considère un câble coaxial infini cylindrique de rayons R1, R2 et R3. Le courant d'intensité totale I passe dans un sens dans le conducteur intérieur et revient dans l'autre sens par le conducteur extérieur (Voir le Schéma ci-dessous).
Calculer le champ magnétique en tout point.
Tracer la courbe B(r).



Exercice 2 : Force de Laplace

Deux rails métalliques, parallèles, horizontaux *PP'* et *QQ'*, distants de 20 cm, sont reliés à un générateur de courant continu de *f.e.m.* $E = 4\ V$ et de résistance interne *r*. Sur ces deux rails une tige métallique *MN* peut glisser sans frottement en restant perpendiculaire aux rails. Le circuit est parcouru par un courant *d'intensité* $I = 0,5$A et sa résistance équivalente a pour valeur $R = 6\Omega$. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme, d'intensité $B = 0,5\ T$, perpendiculaire au plan des rails.

1- Déterminer la valeur de la résistance interne du générateur.
2- Déterminer les caractéristiques (Direction, sens et module) de la force exercée sur la tige, la représenter sur un schéma.



Exercice 3 : Solénoïde et dipôle.

A-

Soit une spire circulaire de rayon R, de centre O, d'axe Ox et parcourue par le courant I.

1) Calculer le champ magnétique en un point M de l'axe en fonction de l'angle α sous lequel on voit le rayon de la spire depuis M.

2) Dans quel cas peut-on représenter approximativement le champ magnétique d'une spire par celui d'un dipôle ?

3) Donner l'expression du moment dipolaire magnétique $\vec{M}$ de ce circuit.

B-

Un solénoïde est constitué par un fil électrique enroulé suivant N tours répartis régulièrement sur un cylindre de rayon R et d'axe Ox entre les abscisses x_1 et x_2 $(0 < x_1 < x_2)$. Il est parcouru par un courant I qui vu de l'origine tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. On pose $l = (x_2 - x_1)$, $n=N/l$ et $B_0 = \mu_0 nI$. On néglige dans tout le problème le caractère hélicoïdal du fil et considère que ce solénoïde est assimilable à une série de spires situées dans des plans perpendiculaires à l'axe.

4) Combien de spires comporte une tranche de solénoïde située entre les abscisses x et $x + dx$

5) Quel est le moment dipolaire $d\vec{M}$ de cette tranche ?

6) Dans cette approximation, quel est le champ magnétique en O d'une tranche de solénoïde située entre les abscisses x *et* $x+dx$

7) Dans cette approximation, quel est le champ magnétique $\vec{B}_d$ que crée le solénoïde en O ?

8) Déterminer l'expression de la self-inductance L du solénoïde.

Le solénoïde est traversé par un courant de I=0,5 A.

A.N. N = 1000 spires; l = 80 cm ; R = 3,6 cm, $x_1 = 20$ cm

9) Quelle est l'énergie emmagasinée par le solénoïde ?

CORRIGE
ELECTOMAGNETISME
1ère Session

Exercice 1 : Champ magnétique crée par un câble coaxial (*sur 6pts*)

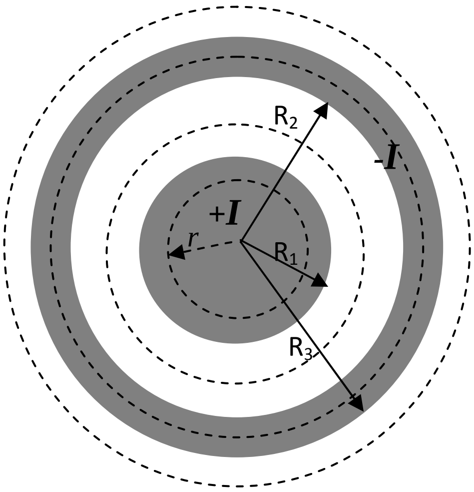
1) Calcul du champ magnétique en tout :

On applique le théorème d'Ampère pour calculer le champ magnétique produit en tout point par le câble coaxial.

Soit $\mathcal{C}$ la circulation de B le long du contour fermé C, d'après le théorème d'Ampère on a :

$$\mathcal{C} = \oint_C B(r)dr = \mu_0 \sum I_e$$

Pour le câble coaxial, les contours d'Ampère que l'on considère sont des cercles en pointillés de centre O et rayons r.



On considère les 4 domaines suivants

- $r \leq R_1$
- $R_1 \leq r \leq R_2$
- $R_2 \leq r \leq R_3$
- $R_3 \leq r$

(0,5pt)

- Dans le domaine $r \leq R_1$, la densité de courant est :

$$\vec{J_1} = \frac{+I}{S_1} = \frac{+I}{\pi R_1^2} \qquad (0,5pt)$$

$$\mathcal{C} = B(r) \times 2\pi r = \mu_0 \iint j_1\, dS = \mu_0 j_1 \pi r^2$$

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 j_1}{2} r = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r} \qquad (1pt)$$

- Dans le domaine $R_1 \leq r \leq R_2$, on a :

$\mathcal{C} = B(r) \times 2\pi r = \mu_0 \iint j_1\, dS = \mu_0 I$, car le courant embrassé par le contour C est $+I$

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \qquad (1pt)$$

- Dans le domaine $R_2 \leq r \leq R_3$, la densité de courant est :

$\vec{J_2} = \frac{-I}{S_2}$ où S_2 est la surface du domaine $R_2 \leq r \leq R_3$

$$\vec{J_2} = \frac{-I}{S_2} = \frac{-I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \qquad (0,5pt)$$

$\mathcal{C} = B(r) \times 2\pi r = \mu_0(+I + \iint j_2\, dS)$

$\mathcal{C} = B(r) \times 2\pi r = \mu_0[+I + j_2\pi(r^2 - R_2^2)]$

$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}[+I + j_2\pi(r^2 - R_2^2)]$

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left[1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right]}$$ (1,5pt)

- Dans le domaine $R_3 \leq r$, on a :

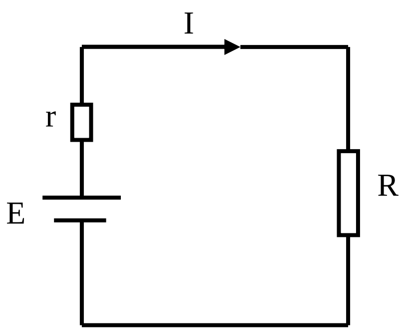
$\mathcal{C} = B(r) \times 2\pi r = \mu_0(I - I) = 0$

$\boxed{B(r) = 0}$ (1pt)

Exercice 2 : Force de Laplace (*sur 3pts*)

1) La résistance interne du générateur :

Circuit équivalent de ce système :



On a :

$E = (r + R)I$

$r = \frac{E}{I} - R$

$I = 0{,}5A$, $E = 4V$, $R = 6\Omega$

$\boxed{r = 2\Omega}$ (1pt)

2) Caractéristiques de la force magnétique qui s'exerce sur la tige :

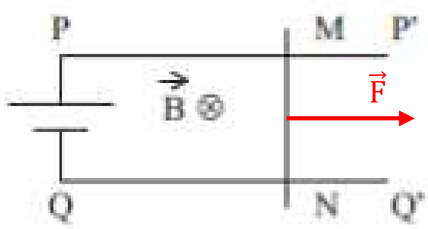
Soit l la longueur de la tige métallique, la force de Lapace qui s'exerce sur elle s'écrit :

$\vec{F} = I\vec{l} \wedge \vec{B}$

$\vec{l} \perp \vec{B}$, le module de $\vec{F}$ est :

$F = IlB = 0{,}5 \times 0{,}2 \times 0{,}5$

$\boxed{F = 0{,}05N}$ (1pt)



(1pt)

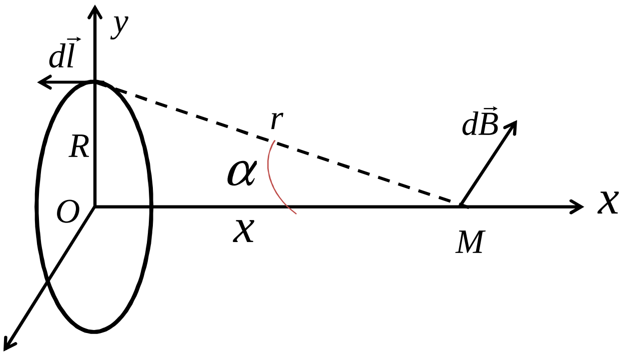
Exercice 3 : Solénoïde et dipôle (*sur 11,5pts*)

A-

1) Calcul du champ magnétique produit par la spire au point M de son axe :

La loi de Biot-Savart :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{dl}\wedge\vec{r}}{r^3}$$



En raison de la symétrie circulaire, le champ résultant en un point M de l'axe de la spire est axial. Il suffit dont d'exprimer la composante dB_x de $d\vec{B}$ en le projetant sur l'axe Ox. On a alors

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2}sin\alpha$$

En considérant le schéma, on a : $\frac{1}{r^2} = \frac{sin^3\alpha}{R^2}$ d'où

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{sin^3\alpha}{R^2}dl$$

Le champ résultant au point M est obtenu en intégrant dl:

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{sin^3\alpha}{R^2}2\pi R$$

$$\boxed{B(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}sin^3}$$ (1,5pt)

On peut représenter le champ magnétique produit par une spire de rayon R par celui d'un dipôle magnétique lorsque celui-ci est déterminé à une distance r telle que $r \gg R$. (0,5pt)

2) Le moment dipolaire s'exprime par :

$\vec{M} = IS\vec{n}$ où S est une surface qui s'appuie sur la spire et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface S, dirigé dans le sens de progression du tirebouchon tournant comme le courant I.

La spire étant circulaire, $S = \pi R^2$

$$\boxed{\vec{M} = \pi R^2 I\vec{n}}$$ (1pt)

B-

3) Le nombre de spires comprises dans la tranche x et $x+dx$ est :

$$\boxed{dN = ndx}$$ (0,5pt)

4) Le moment dipolaire de la tranche [x, $x+dx$] du solénoïde:

$$d\vec{M} = dN.I\pi R^2\vec{n}$$

$$\boxed{d\vec{M} = nI\pi R^2 dx.\vec{n}}$$

(1pt)

5) Dans l'approximation dipolaire, e champ magnétique de la tranche [x, $x+dx$] du solénoïde en O :

Les composantes du champ magnétique dans de ce dipôle s'écrit en coordonnées polaires :

$$d\vec{B}_r = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r^3}.d\vec{M}$$

$$d\vec{B}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^3}.d\vec{M}$$

Le point O étant sur l'axe de la spire, $\theta = 0$, soit $cos\theta = 1$ et $sin\theta = 0$, d'où

$d\vec{B}_r = \frac{\mu_0}{2\pi r^3}.d\vec{M}$ et $d\vec{B}_\theta = 0$

On peut donc écrire que

$$d\vec{B}_d = d\vec{B}_r = \frac{\mu_0}{2\pi r^3}.d\vec{M}$$

Soit O_1 le centre de la tranche [x, $x+dx$], $r = OO_1 = x$

$$d\vec{B}_d = \frac{\mu_0}{2\pi x^3}.d\vec{M} = \frac{\mu_0}{2\pi x^3}.nI\pi R^2 dx.\vec{n}$$

$$\boxed{d\vec{B}_d = \frac{\mu_0 nIR^2}{2}.\frac{dx}{x^3}.\vec{n}}$$

(1,5pt)

6) Déterminons à présent le champ $\vec{B}_d$en O.

$$\vec{B}_d = \int_{x_1}^{x_2} d\vec{B}_d = \frac{\mu_0 nIR^2}{2}.\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^3}.\vec{n}$$

$$\vec{B}_d = \frac{\mu_0 nIR^2}{4}.[\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}].\vec{n}$$

$$\vec{B}_d = \frac{B_0 R^2}{4}.[\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}].\vec{n}$$

Ou

$$\vec{B}_d = \frac{\mu_0 NIR^2}{4l}.[\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}].\vec{n}$$

(1,5pt)

NB : si l'étudiant trouve l'une ou l'autre de ces deux expression, donner lui les points correspondant.

7) La self inductance du solénoïde :

Le flux de $\vec{B}_d$à travers le solénoïde est :

$$\emptyset(\vec{B}_d) = B_d S_T = B_d \pi R^2 N$$

$$\emptyset(\vec{B}_d) = \frac{\mu_0 N I R^2}{4l} . [\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}] . \pi R^2 N$$

$$\emptyset(\vec{B}_d) = \frac{\mu_0 \pi N^2 R^4}{4l} . \left[\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}\right] . I$$

Comme $\emptyset(\vec{B}_d) = L.I$, on en déduit que la self inductance L du solénoïde :

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 \pi N^2 R^4}{4l} . \left[\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}\right]}$$

(1,5pt)

AN :

N = 1000 spires; l = 80 cm ; R = 3,6 cm, $x_1 = 20$ cm

(1pt)

$$L = \frac{4\pi^2 10^{-7} \times 10^6 (3.6)^4}{4 \times 0{,}8} . \left[\frac{100}{4} - \frac{1}{1}\right]$$

$$\boxed{L = 49{,}7.10^{-6}\text{H} = 49{,}7\ \mu\text{H}}$$

8) L'énergie emmagasinée par le solénoïde :

(1pt)

$$\boxed{W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 \pi N^2 R^4 I^2}{8l} . \left[\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}\right]}$$

AN:

$$I = 0{,}5A$$

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \times 49{,}7.10^{-6} \times 0{,}25$$

$$\boxed{W = 6{,}2.10^{-6} Joules}$$

(0,5pt)