

FEUILLE D'EXERCICES : CALCUL MATRICIEL

OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

Exercice 1 : Calculez A^2, A^3, A^4 puis A^n dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculez A^{100} .

Indication : vous pourrez utiliser la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculez A^2 et A^3 .
2. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n s'écrit sous la forme :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Déterminez les relations de récurrence vérifiées par les suites (a_n) et (b_n) puis en déduire l'expression de A^n en fonction de n .
4. Soit $B = A - I$. Calculez B^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire un autre mode de calcul de A^n .

Exercice 4 : On considère les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculez J^2 et J^3 . En déduire les puissances successives de $J : J^k, k \geq 3$.

2. On pose $T = 2I + J$.

Donnez l'expression de T^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

3. On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par les relations de récurrence :

$$\forall n \geq 2 \begin{cases} a_n = 2a_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ c_n = b_{n-1} + 2c_{n-1} \end{cases}$$

Utilisez les résultats des questions précédentes pour déterminer les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de a_1, b_1, c_1 et de n .

INVERSIBILITÉ

Exercice 5 :

1. Résoudre en fonction de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le système (S)
$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = a \\ x - y = b \\ -x + 2y + z = c \end{cases}$$
2. En déduire que la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminez son inverse.

Exercice 6 :

1. Calculez l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Déduisez-en les solutions des systèmes
$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ x - y + z = 1 \\ 2x - 4y + 5z = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x - 4y + 5z = 2 \end{cases}$$

Exercice 7 : Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, inversez-les !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculez $A^3 - 3A^2 + 3A - I$.
2. En déduire que A est inversible et calculez son inverse.

Exercice 9 : On considère la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. A est-elle inversible ?
 2. Vérifiez que $A - I$ est nilpotent puis calculez l'inverse de A
- Rappel :* une matrice M est dite **nilpotente** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^n = 0$.

Exercice 10 : Déterminez les valeurs du paramètre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquelles la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 3 + \lambda & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 + \lambda & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 + \lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 + \lambda \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

APPLICATIONS

Exercice 11 : On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

- la donnée de ses premiers termes u_0 et u_1
- la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

On se propose de calculer l'expression des termes de cette suite par une méthode matricielle.

1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 \end{pmatrix}$$

2. Vérifiez que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

4. Retrouvez ce résultat par la méthode habituelle.

Exercice 12 : Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & x^2 \\ 1/x & 0 & x \\ 1/x^2 & 1/x & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrez qu'il existe deux réels λ et μ tel que :
 $(A - \lambda I) \times (A - \mu I) = 0$
2. En déduire que A est inversible et calculez son inverse.
3. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \alpha_n A + \beta_n I$$

où α_n et β_n sont des entiers naturels.

4. On définit les suites u et v par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha_n - \beta_n \text{ et } v_n = 2\alpha_n + \beta_n$$

Montrez que les suites u et v sont géométriques. En déduire les expressions de u_n et de v_n en fonction de n .

5. Utilisez les résultats précédents pour exprimer α_n et β_n en fonction de n .
Explicitez finalement A^n .

Exercice 13 : On considère les suites réelles u et v définies par la donnée de leurs premiers termes u_0 et v_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 6u_n & -v_n \\ v_{n+1} = u_n & +4v_n \end{cases}$$

1. Démontrez qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

2. Montrez que l'on peut écrire $A = 5I + J$ où I est la matrice identité et J est une matrice que vous déterminerez.
3. Calculez A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. Déduisez de la question précédente les expressions de u_n et v_n en fonction de n .

Exercice 14 : Pour quelles valeurs de k le système

$$\begin{cases} kx & +y = 1 \\ x & +ky = 1 \end{cases}$$

admet-il

- aucune solution ?
- une solution unique ?
- une infinité de solutions ?

Exercice 15 : Résoudre par la méthode de Gauss le système

$$\begin{cases} 2x & -3y & & = 8 \\ 4x & -5y & +z = 15 \\ 2x & & +4z = 1 \end{cases}$$

Exercice 16 : Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système suivant :

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & -2t = 6 \\ 2x & -y & -2z & -3t = 8 \\ 3x & +2y & -z & +2t = 4 \\ 2x & -3y & +2z & +t = -8 \end{cases}$$

Exercice 17 : Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}^3$, suivant les valeurs du paramètre réel m le système

$$\begin{cases} 2mx & +(m-1)y & +(-m+5)z = 0 \\ (m-1)x & +2my & +(m+7)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 18 : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, suivant la valeur du paramètre réel a le système

$$\begin{cases} 2x & +y & +z = 3 \\ x & -y & +3z = 8 \\ x & +2y & +2z = -3 \\ x & +y & +2z = a \end{cases}$$

Exercice 19 : Résoudre suivant la valeur du paramètre réel t

$$\begin{cases} (2+t)x & +2y & & -z = 0 \\ 2x & +(t-1)y & & +2z = 0 \\ -x & +2y & +(2+t)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 20 : Résoudre et discuter suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} mx & +2y & & +3z = 3 \\ (m-1)x & +my & & +z = 1 \\ (m+1)x & +my & +(m-1)z = m-1 \end{cases}$$

Exercice 21 : Résoudre dans $\mathbb{R}^5$ le système

$$\begin{cases} x & -y & +2z & +3t & +u & = 13 \\ x & +y & +2z & +7t & +3u & = 25 \\ -x & +4y & -5z & +12t & -4u & = 2 \\ 2x & -4y & +5z & +t & & = 13 \\ 4x & -3y & +4z & +23t & +9u & = 84 \end{cases}$$

Exercice 22 : Soit $n \in \mathbb{N}$, un entier naturel supérieur ou égal à 2, a et b deux réels. Résoudre dans $\mathbb{R}^n$ le système

$$\begin{cases} x_2 = ax_1 + b \\ x_3 = ax_2 + b \\ \vdots = \vdots \\ x_n = ax_{n-1} + b \\ x_1 = ax_n + b \end{cases}$$

Exercice 23 : Résoudre en fonction du paramètre réel α le système :

$$\begin{cases} x & +\alpha y & +\alpha^2 z & +\alpha^3 t & = 1 \\ \alpha x & +\alpha^2 y & +\alpha^3 z & +t & = 1 \\ \alpha^2 x & +\alpha^3 y & +z & +\alpha t & = 1 \\ \alpha^3 x & +y & +\alpha z & +\alpha^2 t & = 1 \end{cases}$$

Exercice 24 : Résoudre et discuter en fonction des paramètres réels m et a, b, c, d le système :

$$\begin{cases} x & +my & & +2mz & = a \\ mx & +y & & +mz & = b \\ 2mx & +2my & & +z & = c \\ (2m+1)x & +3my & + (2m+1)z & = d \end{cases}$$

CALCUL MATRICIEL

Exercice 25 : On considère la matrice carrée d'ordre 3 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouvez toutes les matrices carrées B d'ordre 3 telles que $A \times B = 0$.
2. Trouvez toutes les matrices carrées C d'ordre 3 telles que $A \times C = C \times A = 0$.

Exercice 26 : Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - I$.

1. Calculez B^2 puis B^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 27 : On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. A l'aide de la méthode de Gauss-Jordan démontrez que ces matrices sont inversibles et calculez leurs inverses.

2. Démontrez que

(a) $A^3 - 3A^2 + 2A - 2I = 0$. En déduire que A est inversible et calculez son inverse.

(b) $B^3 - 6B^2 - 4B - 24I = 0$. En déduire que B est inversible et calculez son inverse.

(c) $C^3 - 3C^2 + 6C + 6I = 0$. En déduire que C est inversible et calculez son inverse.

Exercice 28 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrez qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n I + b_n A$$

2. Explicitiez a_n et b_n en fonction de n et en déduire l'expression de A^n .

Exercice 29 : Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que A est inversible et calculez son inverse.

2. Montrez qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

3. Prouvez que les suites (a_n) et (b_n) vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0$$

Calculez α et β . En déduire l'expression de A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

4. Calculez A^{-n} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 30 : Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0$.

2. Montrez que $X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X - 1)^2(X - 2)$.

3. En déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

1. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n peut s'écrire sous la forme d'une fraction $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ où p_n et q_n sont des entiers naturels vérifiant

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

- et A est une matrice carré d'ordre 2, indépendante de n que l'on déterminera.
2. Calculez pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n .
3. La suite u est-elle convergente. Précisez le cas échéant sa limite.

Exercice 32 : On considère la suite u définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

On se propose d'étudier cette suite arithmético-géométrique par une méthode matricielle.

1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 2 - 2^{1-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Montrez que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0 et n .

Exercice 33 : On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrez que la matrice P est inversible et calculez son inverse par la méthode de Gauss-Jordan.
2. Soit a un nombre réel. Déterminez sans calcul, les valeurs de a pour lesquelles $A_a I$ n'est pas inversible. A est-elle inversible ?
3. Vérifiez que $P^{-1} \times A \times P = D$ est une matrice diagonale. Que remarquez-vous ?
4. Montrez par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$A^n = P \times D^n \times P^{-1}$$

En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n .

5. Exprimez la matrice A^{-1} en fonction P , P^{-1} et D puis en déduire son expression.