

Devoir à la maison corrigé

Méthode simplexe

Exercice 1

A) Résoudre avec la méthode du simplexe primal le problème suivant :

$$(P_1) \begin{cases} \text{Max } z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.c. } -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Réponse :

#1	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e1	-1	2	1	1	0	0	6	6
e2	1	1	0	0	1	0	24	-
e3	1	-1	1	0	0	1	9	9
z	-2	-1	-3	0	0	0	0	

L1
L2
L3
Lz

x3 entre et e1 sort $\Rightarrow Li^* = L1 \leftarrow L1 / 1$. Ensuite,
 $L2 \leftarrow L2 - 0 \times L1$, $L3 \leftarrow L3 - 1 \times L1$, $Lz \leftarrow Lz + 3 \times L1$

#2	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
x3	-1	2	1	1	0	0	6	-
e2	1	1	0	0	1	0	24	24
e3	2	-3	0	-1	0	1	3	3/2
z	-5	5	0	3	0	0	18	

x1 entre et e3 sort $\Rightarrow Li^* = L3 \leftarrow L3 / 2$. Ensuite,
 $L1 \leftarrow L1 + 1 \times L3$, $L2 \leftarrow L2 - 1 \times L3$, $Lz \leftarrow Lz + 5 \times L1$

#3	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
x3	0	1/2	1	1/2	0	1/2	15/2	15
e2	0	5/2	0	1/2	1	-1/2	45/2	9
x1	1	-3/2	0	-1/2	0	1/2	3/2	-
z	0	-5/2	0	1/2	0	5/2	51/2	

x2 entre et e2 sort $\Rightarrow Li^* = L2 \leftarrow L2 \times 2/5$. Ensuite,
 $L1 \leftarrow L1 - 1/2 \times L2$, $L3 \leftarrow L3 + 3/2 \times L2$, $Lz \leftarrow Lz + 5/2 \times L2$

#4	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
x3	0	0	1	2/5	- 1/5	3/5	3	
x2	0	1	0	1/5	2/5	- 1/5	9	
x1	1	0	0	- 1/5	3/5	1/5	15	
z	0	0	0	1	1	2	48	

Solution de Base Réalisable (SBR) optimale (ligne $z \geq 0$)

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad x_L = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad z^* = 48$$

Remarque 1 : les commentaires entre les tableaux sont facultatifs si l'étudiant peut garantir un calcul sans fautes. Dans le cas contraire, un minimum de commentaires permet de montrer une bonne compréhension de la méthode.

Remarque 2 : l'étudiant peut vérifier l'exactitude de son calcul en recalculant z^* en revenant à son expression : $z^* = 2x_1^* + x_2^* + 3x_3^* = 2 \times 15 + 9 + 3 \times 3 = 48$ (ok)

B) Résoudre avec les méthodes du simplexe en deux phases et du simplexe dual le problème suivant :

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad z = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.c.} \quad -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ \quad \quad x_1 - 4x_3 \leq -2 \quad (\Leftrightarrow -x_1 + 4x_3 \geq 2) \\ \quad \quad x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Méthode 1 :

Simplexe dual								
#1	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e1	-1	2	2	1	0	0	10	L1
e2	1	0	-4	0	1	0	-2	L2
e3	1	-1	2	0	0	1	4	L3
z	-2	1	-1	0	0	0	0	Lz
Lz/Li*	-	-	1/4	-	-	-		

e2 sort et x3 entre $\Rightarrow Li^* = L2 \leftarrow L2 / -4$. Ensuite,
 $L1 \leftarrow L1 - 2 \times L2$, $L1 \leftarrow L1 - 2 \times L2$, $Lz \leftarrow Lz + L2$

phase 2

#3	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e1	- 1/2	2	0	1	1/2	0	9	-
x3	- 1/4	0	1	0	- 1/4	0	1/2	-
e3	3/2	-1	0	0	1/2	1	3	2
z	-2	1	-1	0	0	0	0	
z	-9/4	1	0	0	- 1/4	0	1/2	

Rq (correction du tableau): la ligne z a été recalculée selon la formule $Lz' \leftarrow Lz' + L2$ pour que la variable de base x3 admette une colonne valide.
 L'ancienne ligne z peut être barrée.

x1 entre et e3 sort $\Rightarrow Li^* = L3 \leftarrow L3 \times 2/3$. Ensuite,
 $L1 \leftarrow L1 + 1/2 \times L3$, $L2 \leftarrow L2 + 1/4 \times L3$, $Lz' \leftarrow Lz' + 9/4 \times L3$

#4	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e1	0	5/3	0	1	2/3	1/3	10	6
x3	0	- 1/6	1	0	- 1/6	1/6	1	-
x1	1	- 2/3	0	0	1/3	2/3	2	-
z	0	- 1/2	0	0	1/2	3/2	5	

x2 entre et e1 sort $\Rightarrow Li^* = L1 \leftarrow L1 \times 3/5$. Ensuite,
 $L2 \leftarrow L2 + 1/6 \times L1$, $L3 \leftarrow L3 + 2/3 \times L1$, $Lz' \leftarrow Lz' + 1/2 \times L1$

#5	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
x2	0	1	0	3/5	2/5	1/5	6	
x3	0	0	1	1/10	-1/10	1/5	2	
x1	1	0	0	2/5	3/5	4/5	6	
z	0	0	0	2/7	2/3	8/5	8	

SBR optimale (ligne $z \geq 0$)

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad x_L = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad z^* = 8$$

Exercice 2

Résoudre avec la méthode du simplexe en deux phases le problème suivant :

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.c.} \quad -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ \quad \quad x_3 \geq 3 \\ \quad \quad x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Réponse (les tableaux):

phase 1

	x1	x2	x3	e1	e2	e3	a1	b	
e1	-1	2	1	1	0	0	0	6	6
a1	0	0	1	0	-1	0	1	3	3
e3	1	-1	2	0	0	1	0	12	6
z'	0	0	0	0	0	0	1	0	
z'	0	0	-1	0	1	0	0	-3	

	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e1	-1	2	0	1	1	0	3	3
x3	0	0	1	0	-1	0	3	
e3	1	-1	0	0	2	1	6	3
z'	0	0	0	0	0	0	0	

phase 2

	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e1	-1	2	0	1	1	0	3	3
x3	0	0	1	0	-1	0	3	
e3	1	-1	0	0	2	1	6	3
z	-2	-1	-3	0	0	0	0	
z	-2	-1	0	0	-3	0	9	

	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e2	-1	2	0	1	1	0	3	
x3	-1	2	1	1	0	0	6	
e3	3	-5	0	-2	0	1	0	0
z	-5	5	0	3	0	0	18	

	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e2	0	1/3	0	1/3	1	1/3	3	9
x3	0	1/3	1	1/3	0	1/3	6	18
x1	1	-5/3	0	-2/3	0	1/3	0	
z	0	-10/3	0	-1/3	0	5/3	18	

	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
x2	0	1	0	1	3	1	9	
x3	0	0	1	0	-1	0	3	
x1	1	0	0	1	5	2	15	
z	0	0	0	3	10	5	48	

Exercice 3

Résoudre le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Max } z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.c.} \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Réponse :

#1	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e1	1	1	2	1	0	0	4	2
e2	2	3	0	0	1	0	7	7/3
e3	2	1	3	0	0	1	7	
z	-3	-2	-4	0	0	0	0	

x3 entre et e1 sort $\Rightarrow Li^* = L1 \leftarrow L1 / 2$. Ensuite,

$L2 \leftarrow L2 - 0 \times L1$, $L3 \leftarrow L3 - 3 \times L1$, $Lz \leftarrow Lz + 4 \times L1$

#2	x1	x2	x3	e1	E2	e3	b	
x3	1/2	1/2	1	1/2	0	0	2	4
e2	2	3	0	0	1	0	7	7/2
e3	1/2	-1/2	0	-3/2	0	1	1	2
z	-1	0	0	2	0	0	8	

x1 entre et e3 sort $\Rightarrow Li^* = L3 \leftarrow L3 \times 2$. Ensuite,

$L1 \leftarrow L1 - 1/2 \times L3$, $L2 \leftarrow L2 - 2 \times L3$, $Lz \leftarrow Lz + L3$

#3	x1	x2	x3	e1	E2	e3	b	
x3	0	1	1	2	0	-1	1	1
e2	0	5	0	6	1	-4	3	3/5
x1	1	-1	0	-3	0	2	2	
z	0	-1	0	-1	0	2	10	

x2 entre et e2 sort $\Rightarrow Li^* = L2 \leftarrow L2 / 5$. Ensuite,

$L1 \leftarrow L1 - 1 \times L2$, $L3 \leftarrow L3 - (-1) \times L2$, $Lz \leftarrow Lz + L2$

#4	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
x3	0	0	1	4/5	-1/5	-1/5	2/5	
x2	0	1	0	6/5	1/5	-4/5	3/5	
x1	1	0	0	-9/5	1/5	6/5	13/5	
z	0	0	0	1/5	1/5	6/5	63/5	

SBR optimale (ligne z positive ou nulle)

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/5 \\ 13/5 \end{bmatrix}, \quad x_L = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad z^* = \frac{63}{5} = 12,6$$

Exercice 4

Résoudre le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Max } z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.c.} \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Réponse (tableaux) :

	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
e1	-1	2	1	1	0	0	6	6
e2	1	1	0	0	1	0	24	-
e3	1	-1	2	0	0	1	12	6
z	-2	-1	-3	0	0	0	0	

	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
x3	-1	2	1	1	0	0	6	
e2	1	1	0	0	1	0	24	24
e3	3	-5	0	-2	0	1	0	0
z	-5	5	0	3	0	0	18	

	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
x3	0	1/3	1	1/3	0	1/3	6	18
e2	0	8/3	0	2/3	1	-1/3	24	9
x1	1	-5/3	0	-2/3	0	1/3	0	
z	0	-10/3	0	-1/3	0	5/3	18	

	x1	x2	x3	e1	e2	e3	b	
x3	0	0	1	1/4	-1/8	3/8	3	
x2	0	1	0	1/4	3/8	-1/8	9	
x1	1	0	0	-1/4	5/8	1/8	15	
z	0	0	0	1/2	5/4	5/4	48	