

Série d'exercices 1

- Exercice 1**
1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r \cdot x \notin \mathbb{Q}$.
 2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
 3. En déduire qu'entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.
 4. Soient a et b deux rationnels positifs tels que \sqrt{a} et \sqrt{b} soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est irrationnel.

Exercice 2 Trouver sous la forme $\frac{p}{q}$ des rationnels x dont les développements décimaux périodiques sont donnés par :

$$3,14\widehat{14} \dots ; \quad 0,999\widehat{9} \dots ; \quad 3,1499\widehat{9} \dots$$

Exercice 3 Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x, y)$. De même on notera $\min(x, y)$ le plus petit des deux nombres x, y . Démontrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 4 Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Exercice 5 Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q}, \quad]0, 1[\cap \mathbb{Q}, \quad \mathbb{N}, \quad \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Exercice 6 Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{a+b}.$$

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n \cdot f(1).$
2. $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n) = n \cdot f(1).$
3. $\forall q \in \mathbb{Q} \quad f(q) = q \cdot f(1).$
4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x \cdot f(1)$ si f est croissante.

Correction 1 1. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde supposons que $r + x \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p', q' tels que $r + x = \frac{p'}{q'}$. Donc $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{qp' - pq'}{qq'}$ $\in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$.

De la même façon si $r \cdot x \in \mathbb{Q}$ alors $r \cdot x = \frac{p'}{q'}$ Et donc $x = \frac{p'}{q'} \cdot \frac{q}{p}$. Ce qui est absurde.

2. Méthode "classique". Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p, q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. De plus nous pouvons supposer que la fraction est irréductible (p et q sont premiers entre eux). En élevant l'égalité au carré nous obtenons $q^2 \times 2 = p^2$. Donc p^2 est un nombre pair, cela implique que p est un nombre pair (si vous n'êtes pas convaincu écrivez la contraposée " p impair $\Rightarrow p^2$ impair"). Donc $p = 2 \times p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$, d'où $p^2 = 4 \times p'^2$. Nous obtenons $q^2 = 2 \times p'^2$. Nous en déduisons maintenant que q^2 est pair et comme ci-dessus que q est pair. Nous obtenons ainsi une contradiction car p et q étant tous les deux pairs la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible et aurait pu être simplifiée. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Autre méthode. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ pour deux entiers $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors nous avons $q \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Considérons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{N} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Cet ensemble \mathcal{N} est une partie de \mathbb{N}^* qui est non vide car $q \in \mathcal{N}$. On peut alors prendre le plus petit élément de \mathcal{N} : $n_0 = \min \mathcal{N}$. En particulier $n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Définissons maintenant n_1 de la façon suivante : $n_1 = n_0 \cdot \sqrt{2} - n_0$. Il se trouve que n_1 appartient aussi à \mathcal{N} car d'une part $n_1 \in \mathbb{N}$ (car n_0 et $n_0 \cdot \sqrt{2}$ sont des entiers) et d'autre part $n_1 \cdot \sqrt{2} = n_0 \cdot 2 - n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Montrons maintenant que n_1 est plus petit que n_0 . Comme $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ alors $n_1 = n_0(\sqrt{2} - 1) < n_0$ et est non nul.

Bilan : nous avons trouvé $n_1 \in \mathcal{N}$ strictement plus petit que $n_0 = \min \mathcal{N}$. Ceci fournit une contradiction. Conclusion : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

3. Soient r, r' deux rationnels avec $r < r'$. Notons $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$. D'une part $x \in]r, r'[$ (car $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$) et d'après les deux premières questions $\sqrt{2} \left(\frac{r' - r}{2} \right) \notin \mathbb{Q}$ donc $x \notin \mathbb{Q}$. Et donc x est un nombre irrationnel compris entre r et r' .

4. $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

Correction 2 On multiplie avec 10^p avec p bien choisit, puis on fait la différence pour obtenir un entier.

Correction 3 Explicitons la formule pour $\max(x, y)$. Si $x \geq y$, alors $|x - y| = x - y$ donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x$. De même si $x \leq y$, alors $|x - y| = -x + y$ donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = y$.

Pour trois éléments, nous avons $\max(x, y, z) = \max(\max(x, y), z)$, donc d'après les formules pour deux éléments :

$$\begin{aligned} \max(x, y, z) &= \frac{\max(x, y) + z + |\max(x, y) - z|}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) + z + \left| \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) - z \right|}{2}. \end{aligned}$$

Correction 4 $(u_{2k})_k$ tend vers $+\infty$ et donc A ne possède pas de majorant, ainsi A n'a pas de borne supérieure (cependant certains écrivent alors $\sup A = +\infty$). D'autre part toutes les valeurs de (u_n) sont positives et $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0, donc $\inf A = 0$.

Correction 5 1. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1, +\infty[$. Les minorants : $] -\infty, 0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Le plus grand élément : 1. Le plus petit élément 0.

2. $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1, +\infty[$. Les minorants : $] -\infty, 0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Il n'existe pas de plus grand élément ni de plus petit élément.
3. \mathbb{N} . Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants : $] -\infty, 0]$. La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.
4. $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Les majorants : $[\frac{5}{4}, +\infty[$. Les minorants : $] -\infty, -1]$. La borne supérieure : $\frac{5}{4}$. La borne inférieure : -1. Le plus grand élément : $\frac{5}{4}$. Pas de plus petit élément.

Correction 6

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{a+b} \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leq 2(a+b)$$

car les termes sont positifs, et la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur \mathbb{R}_+ . Évaluons la différence $2(a+b) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$:

$$2(a+b) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a+b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Donc par l'équivalence, nous obtenons l'inégalité recherchée.

- Correction 7**
1. Calculons d'abord $f(0)$. Nous savons $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$, donc $f(0) = 0$. Montrons le résultat demandé par récurrence : pour $n = 1$, nous avons bien $f(1) = 1 \times f(1)$. Si $f(n) = nf(1)$ alors $f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1)$.
 2. $0 = f(0) = f(-1+1) = f(-1) + f(1)$. Donc $f(-1) = -f(1)$. Puis comme ci-dessus $f(-n) = nf(-1) = -nf(1)$.
 3. Soit $q = \frac{a}{b}$. Alors $f(a) = f(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b}) = f(\frac{a}{b}) + \dots + f(\frac{a}{b})$ (b termes dans ces sommes). Donc $f(a) = bf(\frac{a}{b})$. Soit $af(1) = bf(\frac{a}{b})$. Ce qui s'écrit aussi $f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}f(1)$.
 4. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Soit (α_i) une suite croissante de rationnels qui tend vers x . Soit (β_i) une suite décroissante de rationnels qui tend vers x :

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \dots \leq x \leq \dots \leq \beta_2 \leq \beta_1.$$

Alors comme $\alpha_i \leq x \leq \beta_i$ et que f est croissante nous avons $f(\alpha_i) \leq f(x) \leq f(\beta_i)$. D'après la question précédent cette inéquation devient : $\alpha_i f(1) \leq f(x) \leq \beta_i f(1)$. Comme (α_i) et (β_i) tendent vers x . Par le "théorème des gendarmes" nous obtenons en passant à la limite : $xf(1) \leq f(x) \leq xf(1)$. Soit $f(x) = xf(1)$.