

Exercices corrigés sur les séries de Fourier

1 Enoncés

Exercice 1 Calculer la série de Fourier trigonométrique de la fonction 2π -périodique $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \pi - |x|$ sur $]-\pi, \pi]$. La série converge-t-elle vers f ?

Exercice 2 Calculer la série de Fourier, sous forme trigonométrique, de la fonction 2π -périodique $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ sur $[0, 2\pi[$. La série converge-t-elle vers f ?

Exercice 3 Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique, impaire, telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi. \end{cases}$$

- (1) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .
- (2) étudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f .
- (3) En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Exercice 4 Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

- (1) Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de la fonction f .
- (2) étudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f .
- (3) En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Exercice 5 Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par

$$f(x) = (x - \pi)^2, \quad x \in [0, 2\pi[.$$

- (1) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .
- (2) Étudier la convergence de la série de Fourier de f .
- (3) En déduire les sommes des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 6 Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique continûment différentiable, et soit α un réel non nul. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) + \alpha x(t) = f(t).$$

Trouver une solution 2π -périodique de cette équation en écrivant $x(t)$ et $f(t)$ sous la forme de séries de Fourier trigonométrique. Appliquer ce résultat au cas où $\alpha = 1$ et

$$f(t) = \begin{cases} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 & \text{si } t \in [0, \pi[, \\ -\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2} & \text{si } t \in [\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

Exercice 7 (Théorème de Féjer) On note $\mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et 2π -périodiques. On définit le produit de convolution de deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ par

$$(f_1 \otimes f_2)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x-y) f_2(y) dy.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $\varphi_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^l e^{imx}.$$

(1) Montrer que

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} \frac{1 - \cos kx}{1 - \cos x} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ k & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

(2) Montrer que φ_k satisfait les propriétés suivantes :

- (a) pour tout k , $(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x) dx = 1$;
- (b) pour tout $\varepsilon \in]0, \pi[$, $(2\pi)^{-1} \int_{|x| \in [\varepsilon, \pi]} \varphi_k(x) dx \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

En déduire que, si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, alors $f \otimes \varphi_k$ converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.

(3) Calculer $f \otimes \varphi_k$. Conclure.

2 Solutions

Solution de l'exercice 1 Il est facile de voir que la fonction f est paire, de sorte que les coefficients b_n sont tous nuls, et que

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt = 2 \int_0^\pi \cos(nt) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos(nt) dt = \begin{cases} \frac{2}{\pi n^2} (1 - (-1)^n) & \text{si } n \neq 0, \\ \frac{2}{\pi} & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

On a donc :

$$SF(f)(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)t).$$

Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet montre que la série converge vers f en tout point de $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 2 La fonction f n'est ni paire ni impaire. Calculons ses coefficients de Fourier trigonométriques. D'une part,

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

et d'autre part, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[t^2 \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2t \frac{\sin(nt)}{n} dt \right\} \\ &= -\frac{2}{\pi} \left\{ \left[t \left(-\frac{\cos(nt)}{n^2} \right) \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{n^2} dt \right\} \\ &= -\frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{2\pi}{n^2} + \left[\frac{\sin(nt)}{n^3} \right]_0^{2\pi} \right\} \\ &= \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[-t^2 \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2t \frac{\cos(nt)}{n} dt \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{4\pi^2}{n} + \left[2t \frac{\sin(nt)}{n^2} \right]_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt)}{n^2} dt \right\} \\ &= -\frac{4\pi}{n} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(nt)}{n^3} \right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{4\pi}{n}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$SF(f)(t) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\cos(nt)}{n^2} - \frac{\pi \sin(nt)}{n} \right).$$

La fonction f satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet, et la série $SF(f)$ converge en tout t vers

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2\pi^2 & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Solution de l'exercice 3

(1) La fonction f étant impaire, $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq 1$,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt = \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La série de Fourier trigonométrique de f est donc donnée par

$$SF(f)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)t).$$

(2) La fonction f satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet, et la série $SF(f)$ converge en tout t vers

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = f(t).$$

La convergence ne peut être uniforme car la limite f n'est pas continue.

(3) Pour $t = \pi/2$, on a :

$$\sin((2k+1)t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Puisque f est impaire, l'égalité de Parseval donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f)|^2 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ensuite, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Enfin,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Solution de l'exercice 4

(1) On a :

$$\begin{aligned}
 c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)t} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(1-in)t}}{1-in} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}}{1-in} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left((-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{1-in} \right) \\
 &= \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{1-in}.
 \end{aligned}$$

(2) On vérifie facilement que les hypothèses du théorème de Dirichlet sont satisfaites. Il s'ensuit que

$$SF(f)(t) = c_0(f) + \sum_{n \geq 1} (c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int})$$

converge vers $f(t)$ si $t \in]-\pi, \pi[$ et vers $(f(\pi+) + f(\pi-))/2 = \text{ch } \pi$ si $t = \pi$. Autrement dit,

$$\frac{\text{sh } \pi}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1-in} e^{int} = \begin{cases} e^t & \text{si } t \in]-\pi, \pi[\\ \text{ch } \pi & \text{si } t = \pi. \end{cases}$$

La fonction somme n'étant pas continue, la convergence ne peut pas être uniforme.

(3) Pour $t = 0$, on obtient :

$$1 = \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1-in},$$

soit

$$\frac{\pi}{\text{sh } \pi} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in} \right) = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1+n^2},$$

d'où l'on tire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\text{sh } \pi} + 1 \right).$$

Pour $t = \pi$, on obtient :

$$\text{ch } \pi = \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1-in},$$

soit

$$\frac{\pi}{\text{th } \pi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1-in} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{1+n^2},$$

d'où l'on tire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\text{th } \pi} + 1 \right).$$

Solution de l'exercice 5 :

(1) On remarque que f est paire, de sorte que $b_n(f) = 0$ pour tout n . Par ailleurs,

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y^2 dy = \frac{1}{\pi} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

et, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y^2 \cos(ny + n\pi) dy \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y^2 \cos(ny) dy \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \cdot \frac{4}{n^2} (-1)^n \pi \\ &= \frac{4}{n^2}, \end{aligned}$$

où l'on a effectué deux intégrations par parties. La série de Fourier de f s'écrit donc

$$SF(f)(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

(2) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Le théorème de Dirichlet permet donc de conclure que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $SF(f)(x) = f(x)$.

(3) D'après la question précédente,

$$\pi^2 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad 0 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Solution de l'exercice 6 : On écrit :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt)$$

et, en dérivant terme à terme,

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (nB_n \cos nt - nA_n \sin nt).$$

On a alors

$$x'(t) + \alpha x(t) = \frac{\alpha A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(nB_n + \alpha A_n) \cos nt + (\alpha B_n - nA_n) \sin nt].$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a_0 &= \alpha A_0, \\ a_n &= nB_n + \alpha A_n, \\ b_n &= \alpha B_n - nA_n, \end{cases} \quad i.e. \quad \begin{cases} A_0 &= \frac{a_0}{\alpha}, \\ A_n &= \frac{\alpha a_n - nb_n}{n^2 + \alpha^2}, \\ B_n &= \frac{na_n + \alpha b_n}{n^2 + \alpha^2}. \end{cases}$$

La fonction f proposée est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons ses coefficients de Fourier. On a :

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 dt + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \left[-\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right] dt = \frac{\pi^2}{2}.$$

Par ailleurs, on remarque que la fonction $f - a_0(f)/2$ est impaire, de sorte que $a_n(f) = 0$ pour $n \geq 1$. Enfin,

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin nt dt + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \left[-\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right] \sin nt dt \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{\pi} \int_0^\pi \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin nt dt + \frac{\pi}{2} \int_\pi^{2\pi} \sin nt dt \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{\pi} I_1 + \frac{\pi}{2} I_2, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin nt dt \\ &= \left[-\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\cos nt}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\cos nt}{n} dt \\ &= \frac{\pi^2}{4n} (1 - (-1)^n) + \frac{2}{n} \int_0^\pi \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cos nt dt \\ &= \frac{\pi^2}{4n} (1 - (-1)^n) + \frac{2}{n} \left(\left[\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin nt}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nt}{n} dt\right) \\ &= \frac{\pi^2}{4n} (1 - (-1)^n) + \frac{2}{n^2} \left[\frac{\cos nt}{n}\right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^2}{4n} (1 - (-1)^n) + \frac{2}{n^3} (1 - (-1)^n) \\ &= (1 - (-1)^n) \left[\frac{\pi^2}{4n} - \frac{2}{n^3}\right] \end{aligned}$$

et

$$I_2 = \int_\pi^{2\pi} \sin nt dt = \left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_\pi^{2\pi} = -\frac{1}{n} (1 - (-1)^n).$$

Donc

$$b_n(f) = \frac{-4(1 - (-1)^n)}{\pi n^3}.$$

On obtient $A_0 = \pi^2/2$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_{2k} = B_{2k} = 0$,

$$\begin{aligned} A_{2k-1} &= \frac{8}{\pi(2k-1)^2((2k-1)^2+1)} \\ \text{et } B_{2k-1} &= \frac{-8}{\pi(2k-1)^3((2k-1)^2+1)}. \end{aligned}$$

Finalement, il est facile de voir que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nB_n \cos nt - nA_n \sin nt)$$

est uniformément convergente, et que par conséquent la série

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt),$$

qui est aussi uniformément convergente, a pour somme une fonction $x(t)$ continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, qui est solution de l'équation différentielle donnée.

Solution de l'exercice 7 :

- (1) Il est facile de voir que, pour tout $l \in \mathbb{N}$ et tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{m=-l}^l e^{imx} = \sum_{m=0}^l e^{imx} + \sum_{m=0}^l e^{-imx} - 1 = \frac{\cos lx - \cos(l+1)x}{1 - \cos x},$$

de sorte que

$$\sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^l e^{imx} = \frac{1 - \cos kx}{1 - \cos x}.$$

La valeur de φ_k en tout $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ s'obtient aisément par un argument de continuité, ou par un calcul direct.

- (2) Comme $\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx$ est nulle pour $m \neq 0$ et vaut 2π pour $m = 0$, nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x) dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^l \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx = 1.$$

Fixons maintenant $\varepsilon \in]0, \pi[$, et posons $K_\varepsilon := 2(1 - \cos \varepsilon)^{-1}$. Il est clair que, pour tout $x \in [-\pi, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|\varphi_k(x)| = \frac{1}{k} \left| \frac{1 - \cos kx}{1 - \cos x} \right| \leq \frac{K_\varepsilon}{k}.$$

Donc, pour k suffisamment grand, $|\varphi_k(x)| \leq \varepsilon$, de sorte que

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{|x| \in [\varepsilon, \pi]} \varphi_k(x) dx \right| \leq \varepsilon,$$

et le point (b) s'ensuit. Puisque f est continue et 2π -périodique, elle est uniformément continue. Etant donné $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\eta \in]0, \pi[$ tel que

$$\forall y, y' \in \mathbb{R}, \quad |y' - y| < \eta \implies |f(y') - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} & 2\pi |(f \otimes \varphi_k - f)(x)| \\ &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - f(x)) \varphi_k(y) dy \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)| \varphi_k(y) dy \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

où

$$I_1 := \int_{|y| < \eta} |f(x-y) - f(x)| \varphi_k(y) \, dy \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et

$$I_2 := \int_{|y| \in [\eta, \pi]} |f(x-y) - f(x)| \varphi_k(y) \, dy \leq 2 \|f\|_\infty \cdot \int_{|y| \in [\eta, \pi]} \varphi_k(y) \, dy.$$

La propriété (b) montre que

$$2 \|f\|_\infty \int_{|y| \in [\eta, \pi]} \varphi_k(y) \, dy \leq \varepsilon/2$$

pour k suffisamment grand, et le résultat s'ensuit.

(3) Nous avons :

$$\begin{aligned} (f \circledast \varphi_k)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) \varphi_k(y) \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^l \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) e^{imy} \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^l e^{imx} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(y') e^{-imy'} \, dy', \end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variable $y' = x - y$. En notant $c_m(f)$ le coefficient de Fourier complexe de f d'ordre m et $S_l(f)(x)$ la somme partielle d'ordre l de la série de Fourier de f , c'est à dire,

$$c_m(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-imy} \, dy \quad \text{et} \quad S_l(f)(x) := \sum_{m=-l}^l c_m(f) e^{imx},$$

nous voyons que

$$(f \circledast \varphi_k)(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^l c_m(f) e^{imx} = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} S_l(f)(x).$$

Nous avons donc montré le théorème de Féjer : si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, la série de Fourier de f converge uniformément vers f au sens de Césaro.