

AVRIL 2019  
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A  
PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES  
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices,  $\mathbf{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels et  $\ln$  le logarithme népérien. On rappelle l'égalité, pour tout entier  $k \geq 1$  :

$$\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \quad (1)$$

**Exercice 1**

1. Calculer sous la forme la plus simple possible  $\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x}$ .

Il vient directement que

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{dx}{x \ln x} &= \ln \ln 4 - \ln \ln 2 \\ &= \ln(2 \ln 2) - \ln \ln 2 \\ &= \ln 2 + \ln \ln 2 - \ln \ln 2 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

2. Donner le domaine de définition et la dérivée de la fonction  $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$ .

$f$  est définie sur  $]0, 1/e[ \cup ]1/e, +\infty[$  et pour tout  $x$  de son domaine de définition,

$$f'(x) = \frac{3}{x(\ln x + 1)^2}$$

3. Donner la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f(x) = e^{\frac{4x^3-1}{x^2}}$ .

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $(4x^3 - 1)/x^2 \rightarrow +\infty$  et donc  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

4. Donner la limite en  $x = 0$  de la fonction de la question précédente.

Quand  $x \rightarrow 0$ ,  $(4x^3 - 1)/x^2 \rightarrow -\infty$  et donc  $f(x) \rightarrow 0$ .

5. Ecrire le nombre complexe  $z = 4 - 4\sqrt{3}i$  sous forme trigonométrique.

$$z = 8 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

6. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos x},$$

expliquer quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de  $f$ .

$f$  est de période  $\pi$ , et impaire. Il suffit donc de l'étudier sur l'intervalle  $[0, \pi/2[$ , d'en déduire par parité l'étude sur  $] -\pi/2, 0]$  puis de compléter par périodicité à l'ensemble de définition de  $f$  (c'est-à-dire  $\mathbf{R}$  privé des points de la forme  $\pi/2 + k\pi$ , avec  $k$  entier).

7. Un sac contient dix boules numérotées de 1 à 10. On sort trois boules simultanément. Donner la probabilité pour que le numéro d'au moins une de ces boules soit un multiple de 5.

Il existe  $10 \times 9 \times 8 = 720$  tirages possibles de 3 de ces 10 boules. Comme les boules 5 et 10 sont les seules dont le numéro est un multiple de 5, il reste 8 boules dont les numéros ne sont pas des multiples de 5, et donc  $8 \times 7 \times 6 = 336$  tirages possibles de 3 boules parmi ces 8. La probabilité qu'au moins une des boules tirées soit un multiple de 5 est donc

$$p = 1 - \frac{336}{720} = \frac{8}{15}.$$

8. Etudier la convergence de la suite définie par  $u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$ .

En multipliant au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée, on trouve

$$u_n = \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$$

et donc la suite  $(u_n)$  tend vers  $1/2$ .

9. Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{3 - u_n}$$

pour  $n \geq 1$ . On admettra que  $u_n < 1$  pour tout  $n \geq 0$ .

Montrer que la suite définie par  $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$  est une suite arithmétique, et en déduire l'étude de la convergence de la suite  $(u_n)$ .

Un calcul sans problème montre que  $v_{n+1} = v_n - 1/2$ . Par conséquent, la suite  $(v_n)$  est une suite arithmétique tendant vers  $-\infty$ , et comme  $u_n = 1 + 1/v_n$ , on en déduit que  $u_n$  tend vers 1.

10. Résoudre l'équation  $x^2 + ix + 1 = 0$  dans  $\mathbf{C}$ , puis dans  $\mathbf{R}$ .

Le discriminant de cette équation vaut  $-5$  : les solutions dans  $\mathbf{C}$  sont donc  $i(-1 + \sqrt{5})/2$  et  $i(-1 - \sqrt{5})/2$ . Il n'y a pas de solution réelle.

### Exercice 2

1.  $a$  étant un réel strictement positif, on considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$$

définie pour tout  $x > 0$ .

(a) Résoudre l'équation  $f(x) = x$ .

On se ramène à une équation du second degré dont l'unique solution positive est  $x = \sqrt{a}$ .

(b) Etudier les variations de la fonction  $f$  en précisant notamment la nature de ses branches infinies, et tracer le graphe de  $f$  dans le cas où  $a = 4$ .

La dérivée de  $f$ , définie pour tout  $x > 0$ , vaut

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{x^2} \right)$$

et est donc négative pour  $x < \sqrt{a}$ , nulle en  $\sqrt{a}$ , et positive pour  $x > \sqrt{a}$ . On en déduit que  $f$  est décroissante sur  $]0, \sqrt{a}[$ , et croissante sur  $]\sqrt{a}, +\infty[$ . Un calcul immédiat montre qu'il y a une asymptote verticale d'équation  $x = 0$ , et que  $f$  tend vers l'infini en l'infini. Comme  $f(x) - x/2$  tend vers 0 en  $+\infty$ , on en déduit l'asymptote oblique  $y = x/2$ , la courbe de  $f$  restant au-dessus de l'asymptote. Le graphe de  $f$  s'en déduit aisément.

2. On considère un nombre  $u_0 > \sqrt{a}$  et la suite définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour  $n \geq 0$ .

(a) Déduire de la question précédente que pour tout  $n$ ,  $u_n > \sqrt{a}$ .

Comme  $f$  est croissante sur  $]\sqrt{a}, +\infty[$ , partant de  $u_0 > \sqrt{a}$ , une récurrence immédiate prouve que si  $u_n > \sqrt{a}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n) > f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$  d'où le résultat

(b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est monotone, et convergente vers une limite qu'on précisera.

D'après la question précédente,  $f(u_n) < 1/2(u_n + u_n^2/u_n) = u_n$ . La suite  $(u_n)$  est donc décroissante. Comme elle est minorée par  $\sqrt{a}$ , elle converge vers une limite  $l$  vérifiant  $f(l) = l$ , et on tire de la première question que  $l = \sqrt{a}$ .

3. On considère désormais la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n - \sqrt{a}$

(a) Montrer que  $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{2u_n}$ .

Il suffit d'écrire  $v_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  et de tout mettre au même dénominateur pour obtenir le résultat.

(b) En déduire que  $v_n \leq 2\sqrt{a} \left( \frac{v_0}{2\sqrt{a}} \right)^{2^n}$ .

Il suffit d'exprimer que  $u_n > a$  dans l'égalité précédente, et de raisonner par induction.

4. Déduire de ce qui précède une méthode pour approcher numériquement la racine carrée d'un nombre donné.

Pour approcher numériquement  $\sqrt{a}$ , il suffit de partir d'une valeur  $u_0 > \sqrt{a}$  (par exemple  $a$  si  $a > 1$  ou  $1$  si  $a < 1$ ), et d'itérer la suite  $u_n$ .

5. Montrer que si on veut approcher  $\sqrt{5}$  par cette méthode en partant de  $u_0 = 3$ , la précision est meilleure que  $10^{-4}$  dès la troisième itération.

En utilisant que  $\sqrt{5} < 3$  et que  $\sqrt{5}^{2^n} = 5^{2^{n-1}}$ , on trouve que  $v_3 < 3,75 \times 10^{-5} < 10^{-4}$ , d'où le résultat.

**Exercice 3**

1. On considère la fonction  $\phi$  qui à  $x$  associée

$$\phi(x) = \ln x + \frac{1-x}{1-2x}$$

- (a) Donner le domaine de définition de la fonction  $\phi$  ainsi que ses limites aux bornes de ce domaine de définition.

$\phi$  est définie sur  $]0, 1/2[ \cup ]1/2, +\infty[$ . Elle a pour limites  $-\infty$  en  $0^+$ ,  $+\infty$  en  $1/2^-$ ,  $-\infty$  en  $1/2^+$ , et  $+\infty$  en  $+\infty$ .

- (b) Calculer la dérivée  $\phi'$  de  $\phi$ , et en déduire le tableau de variations de  $\phi$ .

Un calcul standard montre que

$$\phi'(x) = \frac{1-4x+5x^2}{(1-2x)^2}.$$

Le signe du numérateur est constant, donc on a  $\phi'(x) > 0$  pour tout  $x$  appartenant au domaine de définition de  $\phi$ . Par suite,  $\phi$  est croissante sur chacun des intervalles  $]0, 1/2[$  et  $]1/2, +\infty[$ , d'où le tableau de variations.

- (c) Faire l'étude des branches infinies de  $\phi$

$\phi$  admet deux asymptotes verticales, d'équations  $x = 0$  et  $x = 1/2$ . De plus, en  $+\infty$ ,  $\phi(x)/x$  tend vers 0 en vertu de la croissance comparée du logarithme népérien et des fonctions puissances, donc  $\phi$  y admet une branche parabolique de direction l'axe  $Ox$ .

- (d) Montrer que l'équation  $\phi(x) = 0$  admet deux solutions. Donner la solution évidente, et placer l'autre, qu'on notera  $\alpha$ , par rapport à  $1/2$ .

$\phi$  est continue et strictement croissante de  $-\infty$  à  $+\infty$  sur chacun des intervalles  $]0, 1/2[$  et  $]1/2, +\infty[$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule donc une fois sur chacun de ces intervalles. 1 est une solution évidente de l'équation  $\phi(x) = 0$ , l'autre solution  $\alpha$  se trouve donc entre 0 et  $1/2$ .

2. On s'intéresse maintenant à la fonction  $f$  qui à  $x > 0$  associe

$$f(x) = e^{(x-x^2)\ln x}.$$

- (a) Calculer  $f'(x)$ .

Par un calcul standard,

$$f'(x) = [(1-2x)\ln x + 1-x] e^{(x-x^2)\ln x}.$$

- (b) En vous aidant de la partie précédente, déterminer le signe de  $f'(x)$  selon la valeur de  $x$ .

$(1 - 2x) \ln x + 1 - x$  est du même signe que  $\phi(x)$  si  $x < 1/2$ , et de signe contraire si  $x > 1/2$ . Par suite  $f'(x)$  est négatif si  $0 < x < \alpha$  ou  $x > 1$ , positif si  $\alpha < x < 1$  (on vérifie directement que  $f'(1/2) > 0$ ).

- (c) Donner la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers l'infini, et en déduire la nature de la branche infinie correspondante.

On trouve directement que la limite de  $f$  en l'infini vaut 0, et que  $f$  admet donc une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$ .

- (d) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

Il se déduit des questions précédentes, en notant que  $f(1) = 1$ , et que  $f(x)$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers 0.

- (e) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty.$$

comme  $x \ln x$  tend vers 0 en 0, la limite de  $f'(x)$  à droite de 0 vaut  $-\infty$ , et on a donc une demi-tangente verticale en ce point.

- (f) Dessiner la courbe représentative de  $f$ .

Elle se déduit de ce qui précède.

#### Exercice 4

On considère la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx.$$

1. (a) Calculer  $I_0$  et  $I_1$  (on pourra remarquer que

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

pour tout  $x \in [0, 1]$ ).

$$I_0 = [\ln 2]_0^1 = \ln 2.$$

Pour  $I_1$ , on fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \ln(1+x) dx \\ &= [x \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \\ &= \ln 2 - 1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \text{ (en utilisant l'indication de l'énoncé)} \\ &= \ln 2 - 1 + \ln 2 \\ &= 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

(b) Monter que, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$0 \leq I_n \leq \ln 2.$$

Pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $0 \leq \ln(1 + x^n) \leq \ln 2$ . Par suite,

$$\int_0^1 0 dx \leq I_n \leq \int_0^1 \ln 2 dx$$

d'où le résultat demandé.

(c) Etudier les variations de la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$ , et en déduire qu'elle converge.

Pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $x^{n+1} \leq x^n$  donc  $\ln(1 + x^{n+1}) \leq \ln(1 + x^n)$  d'où  $I_{n+1} \leq I_n$  : la suite est décroissante, et comme elle est minorée par 0, elle converge.

2. Soit  $g$  la fonction définie pour tout  $x \geq 0$  par  $g(x) = \ln(1 + x) - x$ .

(a) Etudier le signe de  $g$  sur  $\mathbf{R}^+$ .

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

qui est strictement négatif dès que  $x > 0$ . On en déduit que  $g$  est strictement décroissante sur  $\mathbf{R}^+$ , et comme  $g(0) = 0$ ,  $g(x) < 0$  pour tout  $x > 0$ .

(b) En déduire la limite de la suite  $(I_n)$ .

Si  $x \in [0, 1]$ ,  $x^n \in [0, 1]$  et d'après ce qui précède,  $\ln(1 + x^n) \leq x^n$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} I_n &\leq \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

et comme  $I_n \geq 0$ , on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$$

### Exercice 5

1. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'équation  $x^2 + \lambda x + \lambda^2 + 2 = 0$ , où  $\lambda$  désigne un paramètre réel.

Le discriminant de cette équation du second degré vaut  $\Delta = \lambda^2 - 4(\lambda^2 + 2) = -3\lambda^2 - 8 < 0$ . On en déduit que l'équation n'admet pas de solution réelle.

2. On considère la fonction de la variable réelle  $f(x) = x^3 + 2x + 1$  et deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $f(a) = f(b)$ .

(a) Montrer que  $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 2) = 0$ .

En développant, on trouve que  $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 2) = a^3 - b^3 + 2a - 2b = 0$  puisque  $f(a) = f(b)$ .

(b) En déduire que  $a = b$ .

On a donc  $f(a) - f(b) = (a - b)(a^2 + ab + b^2 + 2)$ . Par suite, si  $f(a) = f(b)$ , on a soit  $a = b$ , soit  $a^2 + ab + b^2 + 2 = 0$ , ce qui est impossible d'après la première question : on en déduit donc que  $a = b$ .

**Exercice 6** On considère deux nombres complexes  $z_1 = 1 - i$  et  $z_2 = 2 + \sqrt{3} + i$ .

1. Ecrire  $z_1$  sous forme trigonométrique.

$$z_1 = \sqrt{2} (\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4))$$

2. Ecrire  $\frac{z_1}{z_2}$  sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

En multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(1 - i)(2 + \sqrt{3} - i)}{(2 + \sqrt{3} + i)(2 + \sqrt{3} - i)} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3} - i(3 + \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}i)}{8 + 4\sqrt{3}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}} (\cos(-\pi/3) + i \sin(-\pi/3)). \end{aligned}$$

3. En déduire la forme trigonométrique de  $z_2$ .

On a  $z_2 = z_1/(z_1/z_2)$  et donc le module de  $z_2$  est le quotient du module de  $z_1$  par celui de  $z_1/z_2$ , et son argument est la différence de l'argument de  $z_1$  et de celui de  $z_1/z_2$ . Tous calculs effectués, on trouve

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}(4 + 2\sqrt{3})}{1 + \sqrt{3}} (\cos(\pi/12) + i \sin(\pi/12)).$$

4. Donner la valeur de  $\cos(\pi/12)$  et de  $\sin(\pi/12)$ .

En comparant les écritures algébrique et trigonométrique de  $z_2$ , il vient

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{(1 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{2\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})} = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}$$

et

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{(1 + \sqrt{3})}{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}.$$

**Exercice 7** Dans une épreuve sportive, des dossards numérotés de 1 à  $n$  ont été distribués aléatoirement à  $n$  candidats, qui passeront l'épreuve dans l'ordre des numéros de dossards. Deux amis  $A$  et  $B$  participent à cette épreuve. On note  $n_A$  et  $n_B$  leurs numéros de dossards respectifs.

1. Combien y a-t-il de couples  $(n_A, n_B)$  possibles ?

Il y en a  $n(n-1)$ .

2. Soit  $r$  un entier tel que  $1 \leq r \leq n-1$ . Montrer que  $2(n-r)$  des couples de la question précédente vérifient  $|n_A - n_B| = r$ .

Parmi les couples pour lesquels le dossard de  $B$  a un numéro inférieur à celui de  $A$ , pour avoir  $n_A - n_B = r$ , on a  $(1, r+1), (2, r+2), \dots, (n-r, n)$ , soit  $n-r$  possibilités. On en a évidemment autant si le dossard de  $A$  a un numéro inférieur à celui de  $B$ , d'où le résultat.

3. Quel est l'écart le plus probable entre  $n_A$  et  $n_B$  ?

D'après ce qui précède, la probabilité pour que cet écart soit égal à  $r$  est

$$p_r = \frac{2(n-r)}{n(n-1)}$$

qui est maximum pour  $r = 1$ . Le plus probable est donc que les deux candidats partent immédiatement l'un derrière l'autre.

4. Quel est l'écart moyen entre  $n_A$  et  $n_B$  ?

L'espérance  $E$  de l'écart entre  $n_A$  et  $n_B$  se calcule comme suit, en utilisant le rappel donné en début de l'énoncé :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{r=1}^{n-1} r \frac{2(n-r)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} r - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{r=1}^{n-1} r^2 \\ &= \frac{2}{n-1} \frac{(n-1)n}{2} - \frac{2}{n(n-1)} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n+1}{3}. \end{aligned}$$

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie A**

**Corrigé de la 2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

Dans toute l'épreuve,  $\ln$  désigne le logarithme népérien,  $e$  le nombre de Néper et  $R$  l'ensemble des nombres réels.

**Exercice n° 1**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f(x) = x \ln x - 2x + e$$

1. Etudier les variations de  $f$  et tracer son graphe.

La dérivée de la fonction est égale à :  $f'(x) = \ln x - 1$  et elle s'annule pour  $x = e$ . Le graphe de  $f$  admet une branche parabolique dans la direction verticale. La fonction est strictement décroissante sur  $]0, e]$  et croissante sur  $[e, +\infty[$ . On a :  $f(e) = 0$ . On peut prolonger la fonction par continuité à droite en zéro, en posant  $f(0) = e$

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation suivante, où  $a \in R$  :

$$x \ln x - (2+a)x = 0$$

L'équation devient  $x(\ln x - (2+a)) = 0$ , soit  $x = e^{2+a}$ , on a donc une solution.

3. Calculer Pour  $\alpha > 0$ , Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^e f(x) dx$

$$\int_{\alpha}^e f(x) dx = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - x^2 + ex \right]_{\alpha}^e = \frac{e^2}{4} - \left[ \frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha - \frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2 + e\alpha \right] \rightarrow \frac{e^2}{4}$$

## Exercice n° 2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $R$  par :  $f(x) = x - \sqrt{1+x^2}$

1. Etudier les variations de  $f$  et tracer son graphe.

La fonction est bien définie et sa dérivée est égale à :

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}+x)} > 0$$

La fonction est donc strictement croissante de  $R$  sur  $]-\infty, 0[$ . Elle admet l'axe  $Ox$  et la droite d'équation  $y=2x$ , comme asymptotes ( $f(x) \approx x + x\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)$  au voisinage de moins l'infini).

On a :  $f(0) = -1$ .

2. Etudier la convexité de  $f$ .

La dérivée seconde de  $f$  est égale à :  $f''(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} < 0$  et la fonction est donc concave.

3. Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in R$  et la relation de récurrence :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Comme la fonction  $f$  est continue, si la suite converge vers une limite  $l$ , elle est solution de l'équation :  $l = f(l)$  ou encore  $\sqrt{1+l^2} = 0$ , ce qui est impossible, donc la suite (qui est décroissante) est divergente.

## Exercice n° 3

Pour  $x \in R$ , on rappelle que la partie entière de  $x$ , notée  $E(x)$ , correspond au plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ . Pour  $x$  non nul, on pose  $f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Calculer  $I = \int_{1/2}^2 f(x) dx$

$$\text{On a : } I = \int_{1/2}^2 xE\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{1/2}^1 xE\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_1^2 xE\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{1/2}^1 x dx + \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 3/8$$

2. Déterminer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t f(x) dx$

Pour  $x > 1$ , la partie entière  $E\left(\frac{1}{x}\right)$  est identiquement nulle, donc la limite demandée est nulle.

3. Expliciter  $f$  (sans l'expression de la partie entière) et étudier sa continuité sur  $R$

Pour  $x > 1$ ,  $E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$  et  $f(x) = 0$ , donc elle est continue ;

Pour  $x < -1$ ,  $E\left(\frac{1}{x}\right) = -1$  et  $f(x) = -x$ , donc elle est continue ;

En zéro, la fonction n'est pas définie ;

Pour  $x \in \left] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$  avec  $k$  entier positif non nul,  $E\left(\frac{1}{x}\right) = k$  et  $f(x) = kx$ , donc elle est continue ;

Pour  $x \in \left[ \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right[$  avec  $k$  entier négatif non nul,  $E\left(\frac{1}{x}\right) = k+1$  et  $f(x) = (k+1)x$ , donc elle est continue ;

Pour  $x = \frac{1}{k}$ , la limite à droite est différente de la limite à gauche et la fonction est non continue.

#### Exercice n° 4

1. Résoudre dans  $C$  (ensemble des nombres complexes), l'équation :  $\frac{z-2}{z-1} = i$

On pose  $z = x + iy$  pour obtenir :  $(x-2) + iy = i(x-1) - y$ , d'où  $x-2 = -y$ ;  $x-1 = y$  et  $z = \frac{1}{2}(3+i)$

2. Soient  $M$ ,  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $z$ , 1 et 2. On suppose que  $M$  est distinct de  $A$  et  $B$ .

- Interpréter géométriquement le module et l'argument de  $\frac{z-2}{z-1}$  ;

Le module correspond au rapport de longueur des deux segments  $\frac{BM}{AM}$  et l'argument à l'angle entre  $\vec{MB}$  et  $\vec{MA}$

- Retrouver géométriquement la solution de la première question.

La solution de l'équation correspond à l'intersection entre la médiatrice de  $AB$  ( $x=3/2$ ) et du demi-cercle tel que  $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{\pi}{2}$ .

3. Résoudre dans  $C$ , l'équation :  $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$

On procède comme dans la première question pour obtenir d'abord  $x$  puis  $y$ . On obtient deux solutions :

$$z_1 = \frac{3}{2} + i \left( \frac{1-\sqrt{2}}{2} \right); z_2 = \frac{3}{2} + i \left( \frac{1+\sqrt{2}}{2} \right)$$

### Exercice n° 5

Pour  $n$  entier supérieur ou égal à 1, on définit les fonctions  $f_n$  sur  $R$  par :  $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$

1. Etudier les variations de  $f_1$  et tracer son graphe.

La dérivée est égale à :  $f_1'(x) = e^{-x^2} (2x^2 + 1) > 0$  et la fonction est impaire et strictement croissante de  $R$  sur  $R$  avec une branche parabolique dans la direction Oy.

2. Comparer les graphes de  $f_{2n}$  et  $f_{2n+1}$ .

Le graphe de  $f_{2n}$  est symétrique par rapport à l'axe Oy et le graphe de  $f_{2n+1}$  est symétrique par rapport à l'origine. Les deux graphes admettent une branche parabolique dans la direction Oy.

Une différence : la pente de la tangente à l'origine est égale à 1 pour  $f_{2n+1}$  et nulle pour  $f_{2n}$ .

3. Pour  $p$  entier strictement positif fixé, étudier la convergence de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 > 1$  et la relation de récurrence :  $u_{n+1} = f_p(u_n)$ .

On a évidemment  $u_n > 1$ . Si la suite est convergente,  $u_n \rightarrow l$ , alors  $l = f_p(l)$  et  $l \geq 1$ , d'où  $l^{p-1} e^{l^2} = 0$  est impossible. La suite  $(u_n)$ , strictement positive et croissante, ne peut pas converger vers une limite finie, elle tend vers l'infini.

4. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$

$$\text{On a : } 0 < \int_0^1 f_n(x) dx < e \int_0^1 x^n dx = \frac{e}{n+1} \rightarrow 0$$

### Exercice n° 6

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence  $u_{n+1} = (a+2)(u_n + 1)$ , où  $a$  est un paramètre réel.

1. Déterminer  $a$  pour que cette suite soit constante.

Si la suite est constante, on a :  $u_n = (a+2)(u_n + 1) = (a+2)(2) = 1$ , soit  $a = -3/2$

2. Déterminer  $a$  pour que cette suite soit une suite arithmétique (on en précisera la raison).

Pour une suite arithmétique, on a :  $u_{n+1} = (a+2)(u_n + 1) = u_n + r$ , soit  $a = -1; r = 1$

3. Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$  pour  $a > 0$ .

La suite  $(u_n)$  est toujours strictement positive et si elle converge, sa limite  $l$  vérifie :

$l = (a+2)(l+1)$ , d'où  $l = -\frac{a+2}{a+1} < 0$ . Par conséquent la suite n'est pas convergente. On peut

remarquer qu'elle est croissante  $u_{n+1} - u_n = (a+1)u_n + a + 2 > 0$  et non majorée, donc elle tend vers plus l'infini.

### Exercice n° 7

On dispose de 3 dés (chaque dé a 6 faces) : les faces du premier dé sont numérotées de 1 à 6, le deuxième dé possède trois faces numérotées 1 et 3 faces numérotées 2, enfin le troisième dé a de deux faces avec 1, deux faces avec 2 et deux faces avec 3.

On jette les trois dés ensemble et on suppose que chaque dé tombe sur une face.

1. Soit  $X$  la variable aléatoire égale à la somme des points des 3 dés. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

La loi de probabilité est :

$X$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p(X)$	1/36	3/36	5/36	6/36	6/36	6/36	5/36	3/36	1/36

2. Calculer l'espérance de  $X$ . Ce résultat est-il prévisible ?

L'espérance de  $X$  est donnée par :  $E(X) = \sum_{i=3}^{11} x_i p(X=x_i) = 7$ . Ce résultat était prévisible car cette distribution discrète avec un nombre impair de valeurs est symétrique.

3. Un joueur mise une unité monétaire sur  $X$ .

Si  $X=3$  ou 11, il reçoit 3 unités ;

Si  $X=4$  ou 10, il reçoit 1,5 unités ;

Si  $X=5$  ou 9, il reçoit 1/2 unité ; sinon il ne reçoit rien.

Quelle est l'espérance de gain du joueur ? Ce jeu est-il réaliste ?

L'espérance de gain est égale à :  $\frac{1}{36}(3 \times 2 + 1,5 \times 6 + 10 \times 0,5 - 18) = 1/18$

Ce jeu n'est pas réaliste car dans tous les jeux d'argent l'espérance de gain des joueurs est négative.