CORRECTION DU CONCOURS DIRECT D'ENTREE À L'ESATIC

SESSION 2015

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Dans chacun des cas choisir la bonne réponse

Q1 : La suite $U_n = n - 4\ln n$ définie sur **N** est croissante

A : Vrai ■ **B : Faux** □

Justification : Soit f : $R^*{}_+ \longrightarrow R$ telle que $f_{(x)} = x - 4\ln x$. $f^{'}{}_{(x)} = 1 - \frac{4}{x}$ pour des x assez grands $f^{'}{}_{(x)}\rangle 0$ donc f est strictement croissante dans ce cas. comme on étudie les suites pour des n très grands, et que $f_x = U_x$ donc U_n croit

Q2 : Soit la suite définie sur **N** par : $v_n = \frac{\ln 4n}{\ln 3n}$ alors $lim(v_n) = 1$

A : Vrai ■ **B : Faux** □

Justification : $v_n = \frac{\ln 4 + \ln n}{\ln 3 + \ln n}$ d'où $lim(v_n) = lim(\frac{\ln n}{\ln n}) = 1$

Q3 : x est un réel quelconque. soient : $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 1 + i$; $z_2 = \cos(x) + i\sin(x)$ $z = z_1 * z_2 * z_3$

■**A :** $\mid z \mid \leq \mid z_1 \mid^3$

□**B :** $arg(z) = x[\pi]$

□**C : z est un réel équivaut à** $x = 0(\frac{\pi}{4})$

□**D :** $arg(z) = -x[2\pi]$

Justification : $\mid z_1 \mid = \sqrt{2}$; $\mid z_2 \mid = \sqrt{2}$; $\mid z_3 \mid = 1 \quad \Rightarrow \mid z_1 \mid = \mid z_1 \mid * \mid z_2 \mid * \mid z_3 \mid = \sqrt{2} * \sqrt{2} * 1 = 2$

$\mid z_1 \mid^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \mid z \mid \langle \mid z_1 \mid^3$

Q4 : Soient $\Omega, M, M^{'}$ d'affixes respectives : $\frac{-1}{\sqrt{3}}, z, z^{'}$ tels que $z^{'} = (1 + i\sqrt{3})z + i$

□**A :** $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M^{'}}) = \frac{-\pi}{6}(2\pi)$

■**B :** $\Omega M^{'} = 2\Omega M$

□**C :** $\Omega M^{'} = \Omega M$

□**D :** $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M^{'}}) = \frac{\pi}{6}(2\pi)$

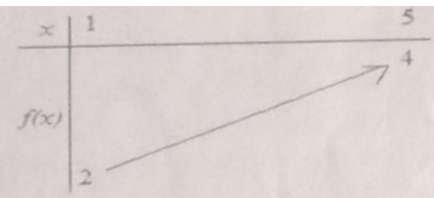
Justification : $z_\Omega = \frac{-1}{\sqrt{3}}$; $z_M = z = x + iy$; $z_{M^{'}} = (1 + i\sqrt{3})(x + iy) + i = x - y\sqrt{3} + i(x\sqrt{3} + y + 1)$

On a : $\Omega M = \mid z_M - z_\Omega \mid = \mid x + iy + \frac{1}{\sqrt{3}} \mid = \sqrt{(x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (y)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{3} + y^2} \qquad (1)$

$\Omega M^{'} = \mid z_{M^{'}} - z_\Omega \mid = \mid x - y\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + i(x\sqrt{3} + y + 1) \mid = \sqrt{4(x^2 + y^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{3})} \qquad (2)$

$(1)et(2) \Rightarrow \Omega M^{'} = 2 * \Omega M$

Q5 : Le tableau de variation d'une fonction f est le suivant :



Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

■**A : $\forall n \in \mathbf{N}$, on a :** $1 \leq u_n \leq 5$

□**B : $\forall n \in \mathbf{N}$, on a :** $u_{n+1} \leq u_n$

□**C : Pour $u_0 = 5$, la suite (u_n) est encore croissante**

□**D : Si $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mid u_n - \frac{5}{2} \mid \leq (\frac{1}{3})^n$, alors** $lim(u_n = 0)$

Justification : $u_0 = 1$; $f(u_0) = 2 \in [1;4]$ d'où $u_1 \in [1;4] \Rightarrow u_1 \in [1;5]$ soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $u_k \in [1;5]$ On vérifie simplement que $u_{k+1} \in [1;5]$ On déduis donc par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, on a : $1 \leq u_n \leq 5$

Q6 : Une étude statistique sur des séances de «tirs au but» a montré que 75% des tirs au but étaient réussis. Au cours d'un match de football, 4 tirs au but que l'on suppose être épreuves aléatoires indépendantes ont été effectués. La probabilité qu'au moins un des quatre tirs au but échoue est de 0.254.

A : Vrai □ **B : Faux** ■

Justification : Soit P : la probabilité de réusir un tir au but.

Soit n : le nombre de tirs au but $(n = 4)$

Il s'agit d'un schema de Bernoulli de paramètres n et P. La probabilité d'avoir k tirs réussis sur n est :

$P_k = {C_n}^k P^k (1-P)^{n-k}$. soient les evenements E et F définis tels que E :« au moins 4 tirs au but échouent », F : «aucun tir au but n'échoue». E et F sont deux événements contraire donc $P(E) = 1 - P(F)$ or l'événement F est équivalent à l'événement : Tous les tirs sont réussi. Donc $P(F) = {C_n}^n P^n (1-P)^{n-n} = P^n$

$P(E) = 1 - P^n = 1 - (0.75)^4 = 0.684 \neq 0.254$

Q7 : Pour $n \geq 2$ On définit sur $]0; +\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = x^n(2\ln(x) - 1)$

□**A : Pour $x \geq 0$,** $f_n^{'}(x) = x^{n-1}(2n\ln(x) - n + 1)$

□**B : $f_n^{'}$ s'annulle pour la valeur** $a_n = e^{\frac{1}{2} - n}$

□**C : Pour tout entier $n \geq 2$,** $1 \leq a_n \leq \sqrt{e}$

□**D :** $lim(a_n) = 1$

Justification : $\forall x > 0$, $f_n'(x) = x^{n-1}(2n\ln(n) - n + 2) \neq x^{n-1}(2n\ln(x) - n + 1)$; $f'(a_n) = e^{(\frac{1}{2}-n)(n-1)}[-2n^2 + 2] \neq 0$; $\forall n \leq 2$; $a_n = e^{\frac{1}{2}-n} \Rightarrow a_n \notin [1; \sqrt{e}]$; $lim(a_n) = 0 \neq 1$

Q8 : Un professeur initie ses élèves au calcul de la première année de mathematiques. Il définit une loi $*$ dans $\mathbf{R}$ tel que : $x * y = [x^2 + y]y$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$, en application il affirme que : $(x * y) * z = 3y^2(x^2 + y^2)^2 + 9$

A : Vrai □ **B : Faux** ■

Justification : $(x * y) * z = ([(x^2 + y)y]^2 + z)z = zy^2(x^2 + y)^2 + z^2 \neq 3y^2(x^2 + y^2) + 9$

Q9 : On considère l'équation $(E) : (z+1)^4 + (z-1)^4 = 0$; $z \in \mathbf{C}$ et $u = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$.

z_1, z_2, z_3, z_4 étant les solutions de (E)

□**A :** $u = i\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

□**B :** $u = -12$

□**C :** $u = -i\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

■**D : Aucune reponse**

Justification : Par simple calcul des propositions A, B et C on tire la conclusion

Q10 : Soit P(x) le polynôme défini par : $P(x) = {\Sigma^n}_{i=1}(a_i x + b_i)^2$; $a_i et b_i$ sont des nombres réels non tous nuls. Son discriminant est $\Delta^{'} = ({\Sigma^n}_{i=1} a_i^2)^2 - ({\Sigma^n}_{i=1} a_i b_i)({\Sigma^n}_{i=1} b_i^2)$

A : Vrai ☐ **B : Faux** ■

Justification : Pour tout polynôme $P(x) = ax^2+bx+c$, a,b et c $\in \mathbf{R}$ le discriminant réduit vaut : $\Delta' = b^2-ac$
On a : $P(x) = \Sigma^n{}_{i=1}(a_i^2x^2 + 2a_ib_ix + b_i^2) = (\Sigma^n{}_{i=1}a_i^2)x^2 + (2\Sigma^n{}_{i=1}a_ib_i)x + (\Sigma^n{}_{i=1}b_i^2)$
$\Delta' = (2\Sigma^n{}_{i=1}a_ib_i)^2 - \Sigma^n{}_{i=1}a_i^2\Sigma^n{}_{i=1}b_i^2$

Q11 : Soit la suite de nombres complexes (z_k) où $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, k $\in \mathbf{N}$ et n un entier positif supérieur ou égal à 2 fixé avec M_k l'image de de z_k

☐**A :** $\forall k \geq 0$ **,** $(z_k)^n = -1$

☐**B :** $M_kM_{k+1} = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

☐**C :** $\forall k \geq 0$ **,** $\overline{(z_k^n)} = -1$

☐**D :** $z_0 - z_1 - z_2 - ... - z_{n-1} = 0$

Justification :

Q12 : A, B, et C sont des ensembles : $A\bigcup[(B\bigcap C)\bigcap A] = (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

A : Vrai ☐ **B : Faux** ■

Justification : $A\bigcup[(B\bigcap C)\bigcap A] = A \neq (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

Q13 : Un dé à six faces est déséquilibré de façon que les probabilité $P_1, P_2, ..., P_6$ d'obtenir les numéro 1 ;2 ;... ;6 sont dans cet ordre, les termes consécutif d'une suite arithmétique de raison $\frac{-1}{30}$

☐**A : On lance le dé une fois, sachant que $P_6 = \frac{1}{12}$, on obtien $P_1 = \frac{7}{60}$**

☐**B : On lance le dé n fois. Si on nomme u_n la probabilité de l'événement E_n : « Obténir our la première fois le numéro 6 au $n^{ième}$ lancer» alors pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{12}(\frac{11}{12})^{n+1}$**

☐**C : La suite (u_n) est une suite géométrique divergente**

☐**D : La probabilité de l'événement F : «Obtenir au moins une fois le numéro 6 en 10 lancer est :** $P(F) = 0.681$

Justification :

Q14 : La dérivée $n^{ième}$ du produit de deux fonctions f et g n fois dérivable est est :
$(fg)^{(n)} = \Sigma_{i=1}^n(C_n^kf^kg^{n-k})$ avec $f^{(0)} = f$ et $g^{(0)} = g$

A : Vrai ■ **B : Faux** ☐

Justification : Il s'agit de la **formule de Leibniz** pour les derivées successive d'un produit de fonctions réelles d'une variable réelle (**NB :** formule démontrable par récurrence)

Q15 : On considère la suite (u_n) =, définie par le terme $u_0 > 0$ donnée; $u_{n+1} = \frac{7u_n+3}{u_n+5}$ et $v_n = u_n - 3$ alors $\frac{v_n}{v_n+4} = \frac{1}{2}\frac{v_{n-1}}{v_{n-1}+4}$

A : Vrai ☐ **B : Faux** ■

Justification : $v_{n-1} = \frac{8u_n-24}{7-u_n} \Rightarrow v_{n-1} + 4 = \frac{4u_n+4}{7-u_n} \Rightarrow \frac{v_{n-1}}{v_{n-1}+4} = \frac{2u_n-6}{u_n+1}$

Q16 : On donne $g(x) = (1-x)^{\sqrt{x}}$. son ensemble de définition est :

☐**A :** $[0;1[$

☐**B :** $D_g = \varnothing$

■**C :** $[0;+\infty[$

□**D : n'existe pas**

Justification : $D_g = \{x \in \mathbf{R}$ telque $x \geq 0\} = [0;+\infty[$

Q17 : soit $x \in C$ et (E) l'équation définie par $(E) : z + \frac{1}{z} = 2\cos(\theta)$, $\theta \in \mathbf{R}$ Les solutions de (E) ont pour module 1 et d'argument $\theta + 2k\pi$

A : Vrai □ **B : Faux** ■

Justification : $(E) : z + \frac{1}{z} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow (E) : z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0$

$\Delta = 4i^2\sin^2(\theta) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i\sin(\theta)$ les solutions de (E) sont z_1 et z_2 telles que $z_1 = \frac{2\cos(\theta)-2i\sin(\theta)}{2}$ et $z_2 = \frac{2\cos(\theta)+2i\sin(\theta)}{2}$ donc $z_1 = e^{-i\theta}$ et $z_2 = e^{i\theta}$

Q18 : A l'instant $t = 0$, on injecte une substance à un animal. La concentration $y(t), (t > 0)$ de cette substance à une date t est $y(t) = 8(e^-t - e^{-2t})$; t(en s). A qelle date cette concentration atteint 10^-3

□**A :** $t = 5$

■**B : un temps t_0 autre que celles proposés**

□**C :** $t = 3600$

□**D :** $t = 9$

Justification : $y(5) \neq 10^{-3}$, $y(3600) \neq 10^{-3}$, $y(9) \neq 10^{-3}$

Q19 : Soit f une fonction complexe définie par : $f(z) = \frac{z^2-1}{z(z+3)}$; $z \neq 0$ et $z \neq -3$ on a :

□**A :** $f(\overline{z}) = f(\alpha)$

□**B :** $f(\overline{z}) = -f(\alpha)$

■**C :** $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$

□**D : Aucune solution n'est valable.**

Justification : Pour $z = x + iy$, on a $z^2 = x^2 + 2ixy - y^2$ $f(z) = \frac{x^2-y^2-1+2ixy}{(x+iy)(x+3+iy)} = \frac{x^2-y^2-1+2ixy}{x(x+3)-y^2+iy(2x+3)}$

$f(\overline{z}) = \frac{x^2-y^2-1-2ixy}{x(x+3)-y^2+iy(2x+3)}$; $\overline{f(z)} = \frac{x^2-y^2-1-2ixy}{x(x+3)-y^2-iy(2x+3)}$ donc $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$

Q20 : Dans un laboratoire de recherche en medecine, la vitesse de proliferation des microbes à l'instant t, $y'(t)$ est telle que : $y''(t) = ky'(t)$; $k > 0$ avec $y(t)$ la proliferation de ces microbes, $(y(t) > 0; t > 0)$ on obtient

□**A :** $y'(t) = A(t) + B(t)e^{kt}$

□**B :** $y'(t) = e^{\alpha e^{kt}}$

□**C :** $y'(t) = t_0(Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t})$

■**D : Aucune solution n'est valable**

Justification : Supposons $f = y'(t) \Rightarrow f' = y''(t)$ alors (E) devient $f'(t) = kf(t) \Rightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = k \Rightarrow \ln|f(t)| = kt + C$, $C \in \mathbf{R} \Rightarrow f(t) = e^{kt+C} = y'(t) = Ae^{kt}$ avec $A = e^C$

Q21 : Soit $n \in \mathbf{N}$, $2^{3n} \equiv 1(modulo\ \ 7)$

A : Vrai ■ **B : Faux** □

Justification : Démonstration par récurrence

Q22 : Soient x et y deux nombres. Les systèmes

$$(E) : \begin{cases} \cos(x) + \cos(y) &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \\ \cos(2x) + \cos(2y) &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(E') : \begin{cases} \cos(x) + \cos(y) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(2x) \times \cos(2y) &= \frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

sont équivalent

A : Vrai ☐ **B : Faux** ■

Justification : $\cos(2x) + \cos(2y) = \frac{1}{2} \neq \cos(2x) \times \cos(2y) = \frac{\sqrt{6}}{4}$

Q23 : La somme $S = 7 + 10 + 13 + 16 + ... + 64$ est

■**A :** $S = 710$

☐**B :** $S = 777$

☐**C :** $S = 646$

☐**D :** $S = 707$

Justification : S est la somme des n premiers termes d'une suite arithemétique de raison 3 et de premier terme 7. $n = \frac{64-7}{3} = 19$ donc $S = (19+1) \times 7 + \frac{19 \times (19+1)}{2} \times 3 = 710$

Q24 : La limite en $+\infty$ d'une suite arithemétique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 1$ est

☐**A :** $+\infty$

☐**B : il n'y a pas de limite**

☐**C : 0**

■**D :** $-\infty$

Justification : $u_n = u_0 - 2n \Rightarrow lim(u_n) = -\infty$

Q25 : Soient a et b nombres réels et $f_{a,b}$ la fonction définie par :
Pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-b\}$, $f_{a,b}(x) = \frac{ax^2-4}{x+b}$. Pour toutes valeur (a ;b) la courbe de $f_{a,b}$ admet une asymptote verticale

A : Vrai ■ **B : Faux** ☐

Justification : $\forall(a;b)$, $f_{a,b}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -b$

Réalisé par OVI Jude Schadrac, KONE Namogo Ben Armel, BOUAKI Kouadio Julien, DJAKI Loba Stephane
Etudiants à L'Ecole Supérieure Africaine des Technologies de l'Information et de la Communication
Mail : elitech32@gmail.com

58-79-51-80 - 48-73-43-15 - 48-59-49-99 - 79-87-94-36