

Réduction d'endomorphismes

1. Qu'est-ce que réduire un endomorphisme ?

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E . Si on se place dans une base de E , on peut représenter f par une matrice. Le but de ce chapitre est de trouver une base de E telle que la matrice représentant f dans cette base soit la plus "simple" possible (on prend la même base pour E ensemble de départ que pour E ensemble d'arrivée).

Définition 1 –

- on dit que f est **diagonalisable**, s'il existe une base $\{e_i\}$ de E telle que

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- on dit que f est **triangularisable** (ou trigonalisable), s'il existe une base $\{e_i\}$ de E telle que

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ou } M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dans toute la suite, on suppose que E est un espace vectoriel de dimension **finie** sur un corps $\mathbb{K}$.

2. Vecteurs propres - Valeurs propres

2.1. Vecteurs propres

Définition 2 – Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un vecteur $u \in E$ est un vecteur propre de f si

- 1) u est non nul
- 2) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(u) = \lambda u$

Le scalaire λ est appelé **valeur propre** associée à u .

Remarque - Si u est vecteur propre de f , alors, par linéarité de f , αu est vecteur propre de f pour tout $\alpha \neq 0$.

Théorème 3 – L'endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .

Démonstration : si f est diagonalisable, alors il existe une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ telle que

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On en déduit que, pour tout vecteur e_i de cette base $f(e_i) = a_{ii}e_i$ avec $e_i \neq 0$ donc cette base est formée de vecteurs propres. Réciproquement, si E admet une base de vecteurs propres de f , il est clair que la matrice de f dans cette base sera diagonale. $\square$

Remarque - Si f est diagonalisable, les termes qui apparaissent sur la diagonale de la matrice représentant f dans une base de vecteurs propres sont les valeurs propres associées.

2.2. Polynôme caractéristique

Soit λ une valeur propre de f . L'endomorphisme $f - \lambda Id$ n'est alors pas injectif puisqu'il existe $u \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda u$. Comme on est en dimension finie, c'est équivalent à sa non-bijektivité, donc à ce que le déterminant de $f - \lambda Id$ soit nul.

Proposition 4 – Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme $P_f(\lambda) = \text{Dét}(f - \lambda Id)$. $P_f(\lambda)$ est un polynôme de degré n , appelé **polynôme caractéristique** de f .

Remarque - Si A et B sont deux matrices représentant un même endomorphisme f dans deux bases distinctes, alors elles sont semblables donc $\text{Dét}(A - \lambda I) = \text{Dét}(B - \lambda I)$. On appelle également polynôme caractéristique de la matrice A le polynôme $\text{Dét}(A - \lambda I_n)$.

Définition 5 – On dit qu'une valeur propre de f est de multiplicité α si elle est racine d'ordre α du polynôme caractéristique de f .

Une fois déterminées les valeurs propres, on détermine l'espace des vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs en résolvant le système linéaire $(A - \lambda Id)(u) = 0$ où A est la matrice de f dans une certaine base.

Définition 6 – L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé le **spectre** de f .

Proposition 7 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est de degré n et, plus précisément, on a :

$$\text{Dét}(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i \text{ avec } a_0 = \text{Dét } A, a_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{tr } A$$

3. Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Proposition 8 – Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda Id) = \{x \in E; f(x) = \lambda x\}$. E_λ est un sous-espace vectoriel de E , appelé **espace propre** associé à λ . L'espace E_λ est stable par f .

Démonstration : E_λ est le noyau d'un endomorphisme donc c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de départ de cet endomorphisme.

Montrons qu'il est stable par f . Soit $x \in E_\lambda$, alors $f(x) = \lambda x$. Donc $f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$. On a montré que $f(x) \in E_\lambda$, ce qui prouve que E_λ est stable par f . $\square$

Remarque -

- si λ n'est pas valeur propre, $E_\lambda = \{0\}$.
- si λ est valeur propre, $\dim E_\lambda \geq 1$.

Proposition 9 – Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des scalaires distincts deux à deux. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

Démonstration : on prouve le résultat par récurrence sur p . Si $p = 1$, il n'y a rien à montrer. Supposons que les espaces $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ soient en somme directe et montrons que les espaces $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}, E_{\lambda_{p+1}}$ sont aussi en somme directe.

Pour cela, il suffit de montrer que $(E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p}) \cap E_{\lambda_{p+1}} = \{0\}$.

Soit $x \in (E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p}) \cap E_{\lambda_{p+1}}$. On a $f(x) = \lambda_{p+1}x$ car $x \in E_{\lambda_{p+1}}$.

Comme $x \in E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p}$, il existe $x_1 \in E_{\lambda_1}, \dots, x_p \in E_{\lambda_p}$ tel que $x = x_1 + \dots + x_p$.

On a donc également $f(x) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p$. On déduit de ces deux calculs que

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_{p+1})x_1 + \dots + (\lambda_p - \lambda_{p+1})x_p.$$

Les espaces $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe donc

$$\text{pour } k \in \{1, \dots, p\}, \quad (\lambda_k - \lambda_{p+1})x_k = 0.$$

Comme les λ_i sont deux à deux distincts, on en déduit que $x = 0$.

□

Corollaire 10 – L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si E est somme directe de ses sous-espaces propres.

Si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f , on a

Corollaire 11 – L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si $\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p}$.

Proposition 12 – Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de multiplicité α . Alors $\dim E_\lambda \leq \alpha$.

Démonstration : supposons $\dim E_\lambda \geq \alpha + 1$. Soient $u_1, \dots, u_{\alpha+1}$ des vecteurs propres linéairement indépendants de E_λ . Complétons cette famille en une base $\mathcal{B}$ de E . On a

$$M(f)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & B \end{array} \right)$$

d'où $P_f(X) = \text{Dét}[(\lambda - X)I_{\alpha+1}] \text{Dét}(B - X I_{n-\alpha-1}) = (\lambda - X)^{\alpha+1} \text{Dét}(B - X I_{n-\alpha-1})$. λ serait donc valeur propre de multiplicité strictement supérieure à α . Absurde

□

Des propositions précédentes, on déduit le

Théorème 13 – Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si les deux propositions suivantes sont vérifiées :

1) $P_f(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$, ce qui veut dire que

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ scalaires et $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n$.

2) Pour chaque valeur propre λ de multiplicité α , on a $\dim E_\lambda = \alpha$.

Corollaire 14 – Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n . Si f admet n valeurs propres distinctes deux à deux, alors f est diagonalisable.

4. Applications de la diagonalisation

4.1. Calcul de la puissance d'une matrice

Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale. Alors $A = PDP^{-1}$ et

$$A^k = PD^kP^{-1} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

La matrice A est alors inversible si, et seulement si, D est inversible et $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. La formule précédente se généralise alors à $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque - Si A est la matrice d'un endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}_0$, alors P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de A . La matrice P est obtenue en mettant les coordonnées dans la base $\mathcal{B}_0$ des vecteurs propres de A en colonnes. (De l'ordre des vecteurs propres dans la base $\mathcal{B}$ dépend l'ordre des valeurs de la diagonale de D , et réciproquement.)

4.2. Suites récurrentes linéaires

Soient a et b deux réels donnés non simultanément nuls. Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifie la relation

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}, \quad u_0 \text{ et } u_1 \text{ donnés.}$$

Matriciellement, ceci peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

On est donc ramené à un calcul de puissance de matrice.

Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$ k réels donnés non tous nuls. Une suite récurrente linéaire d'ordre k vérifie la relation

$$u_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i u_{n+i}, \quad \{u_0, \dots, u_{k-1}\} \text{ donnés.}$$

On écrit cette égalité sous forme matricielle et on est encore ramené à un calcul de puissance de matrice d'ordre k .

4.3. Systèmes de suites récurrentes

Illustrons cela par un exemple :

déterminer les trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = w_0 = 0$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 4w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 4v_n + 12w_n \\ w_{n+1} = u_n - 2v_n + 5w_n \end{cases}$$

Posons $X_n = {}^t(u_n, v_n, w_n)$, alors $X_0 = {}^t(1, 0, 0)$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit alors $X_{n+1} = AX_n$, d'où, par récurrence, $X_n = A^n X_0$. On est ainsi ramené au calcul de A^n .

4.4. Systèmes différentiels à coefficients constants

On veut résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}$ et $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables. On pose $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$, alors le système s'écrit sous forme matricielle

$$\frac{dX}{dt} = AX.$$

Supposons A diagonalisable. Il existe alors une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$. Si on pose $X' = P^{-1}X$, le système devient $\frac{dX'}{dt} = DX$, système qui s'intègre facilement car D est diagonale.

5. Trigonalisation

Définition 15 – Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure (respectivement inférieure) si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{resp. } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix})$$

Remarque - Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure. En effet, soit A une matrice triangulaire supérieure et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ représenté par A dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. f est représenté par une matrice triangulaire inférieure dans la base $(e_n, \dots, e_1)$.

Théorème 16 – Un endomorphisme est triangularisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.

Démonstration : si l'endomorphisme f est triangularisable, alors il existe une base telle que la matrice de f dans cette base soit triangulaire supérieure. On a alors

$$P_f(\lambda) = \text{Dét} \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & & a_{1n} \\ 0 & \ddots & a_{2n} \\ \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - \lambda)$$

donc $P_f(X)$ est scindé. De plus, les éléments diagonaux de la matrice triangulaire sont les valeurs propres de f .

Réciproquement, supposons que le polynôme caractéristique de f soit scindé et montrons par récurrence que f est triangularisable. Pour $n = 1$, il n'y a rien à montrer. Supposons le résultat vrai à l'ordre $n - 1$. Puisque $P_f(\lambda)$ est scindé, il admet au moins une racine $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit u_1 un vecteur propre associé. On complète $\{u_1\}$ en une base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de E . On a alors

$$M(f)_{u_i} = \left(\begin{array}{c|ccc} a & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

On a $P_f(\lambda) = (a - \lambda) \text{Dét}(B - \lambda I_{n-1}) = (a - \lambda) P_g(\lambda)$ où g est l'endomorphisme représenté par la matrice B dans la base $(u_2, \dots, u_n)$. Comme $P_f(\lambda)$ est scindé, $P_g(\lambda)$ l'est aussi et, d'après l'hypothèse de récurrence, la matrice B est triangularisable. Il existe donc une base $(v_2, \dots, v_n)$ de $\text{Vect}\{u_2, \dots, u_n\}$ telle que la matrice de g dans cette base soit triangulaire supérieure.

Ainsi, dans la base $\{u_1, v_2, \dots, v_n\}$, la matrice de f est triangulaire supérieure. $\square$

Corollaire 17 – Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration : un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}$. $\square$

Remarque – Si la matrice A est triangularisable, les éléments diagonaux de la matrice triangulaire semblable à A sont les valeurs propres de A .

6. Le théorème de Cayley-Hamilton

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$:

$$P(X) = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par :

$$P(f) = a_m f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \text{Id}$$

où $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Définition 18 – Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un polynôme $P(x)$ de $\mathbb{K}[X]$ est dit annulateur de f si $P(f) = 0$.

Proposition 19 – Soit $P(X)$ un polynôme annulateur de f . Alors les valeurs propres de f sont des racines de P .

Démonstration : si λ est valeur propre de f , il existe un vecteur u non nul tel que $f(u) = \lambda u$. On a alors $f^k(u) = \lambda^k u$ pour tout entier k . On en déduit que $[P(f)]u = 0 = P(\lambda)u$ donc $P(\lambda) = 0$ car $u \neq 0$. $\square$

Remarque – Un endomorphisme qui vérifie $P(f) = 0$ ne peut avoir pour valeur propre que des racines de P ; par contre, toutes les racines de P ne sont pas forcément des valeurs propres de f .

Théorème 20 – Théorème de Cayley-Hamilton

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P_f(X)$ son polynôme caractéristique. On a

$$\boxed{P_f(f) = 0}$$

Démonstration : on se place dans la clôture algébrique de $\mathbb{K}$ (ici, il s'agit de $\mathbb{C}$ car $\mathbb{K}$ est supposé être un sous-corps de $\mathbb{C}$). Dans ce cas, l'endomorphisme f est triangularisable donc son polynôme caractéristique est scindé :

$$P_f(X) = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X) \dots (\lambda_n - X).$$

Si on note $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base de E dans laquelle la matrice représentant f est triangulaire, on a $(\lambda_1 Id - f)(e_1) = 0$. On montre alors par récurrence que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, pour tout $j \in \{1, \dots, i\}$, $(\lambda_1 Id - f) \circ \dots \circ (\lambda_i Id - f)(e_j) = 0$ car les $(\lambda_k Id - f)$ commutent entre eux. On en déduit que $P_f(f) = 0$. □

7. Théorème de décomposition des noyaux

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E .

Théorème 21 – Soient $P_1, \dots, P_q$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux. On pose $P = P_1 \times \dots \times P_q$. Alors on a

$$\boxed{\text{Ker } P(f) = \text{Ker } P_1(f) \oplus \dots \oplus \text{Ker } P_q(f)}$$

Démonstration : par récurrence sur q .

Si $q = 2$: P_1 et P_2 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que $UP_1 + VP_2 = 1$, d'où $UP_1(f) + VP_2(f) = Id$. Soit $x \in \text{Ker } f$, on a $x = UP_1(f)(x) + VP_2(f)(x)$. Posons $y = UP_1(f)(x)$ et $z = VP_2(f)(x)$. On a $P_2(f)y = P_2UP_1(f)(x) = UP_1P_2(f)(x) = 0$ car $x \in \text{Ker } P$ et les endomorphismes $P_1(f)$ et $U(f)$ commutent. On en déduit que $y \in \text{Ker } P_1$. On montre de même que $z \in \text{Ker } P_2$, d'où $\text{Ker } P = \text{Ker } P_1 + \text{Ker } P_2$.

Soit maintenant $x \in \text{Ker } P_1 \cap \text{Ker } P_2$. Comme $x = UP_1(f)(x) + VP_2(f)(x)$, on a trivialement $x = 0$. On a donc montré que $\text{Ker } P = \text{Ker } P_1 \oplus \text{Ker } P_2$.

Supposons le résultat vrai à l'ordre $q - 1$ et soient $P_1, \dots, P_q$ des polynômes premiers entre eux deux à deux. Le polynôme P_1 est alors premier avec le produit $P_2 \times \dots \times P_q$ donc, d'après ce qui précède, $\text{Ker } P = \text{Ker } P_1 \oplus \text{Ker } (P_2 \times \dots \times P_q)$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à $P_2 \times \dots \times P_q$, ce qui prouve le résultat. □

Remarque - Si $P(f) = 0$ et si $P = P_1 \times \dots \times P_q$ où les polynômes $P_1, \dots, P_q$ sont premiers entre eux deux à deux, alors $E = \text{Ker } P_1(f) \oplus \dots \oplus \text{Ker } P_q(f)$.

Théorème 22 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$, n'ayant que des racines simples et annihilant f .

Démonstration : la condition est suffisante d'après le théorème précédent.

Supposons f diagonalisable, alors il existe une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E de vecteurs propres de f . Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes, il est clair que le polynôme $P(X) = (X - \lambda_1) \times \dots \times (X - \lambda_p)$ vérifie $P(f)(e_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Comme les e_i forment une base de E , on en déduit que $P(f) = 0$. □

8. Polynôme minimal

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. L'ensemble I_f des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P(f) = 0$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. $\mathbb{K}[X]$ étant un anneau principal, il existe un polynôme μ engendrant I_f . De plus, ce polynôme est unique si on le suppose unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1).

Définition 23 – On appelle **polynôme minimal** de f l'unique polynôme μ unitaire qui engendre I_f .

Remarque - Comme $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie, la famille $(Id, f, \dots, f^{n^2})$ où $\dim E = n$ est liée. Il existe donc une combinaison linéaire non triviale de ses éléments qui est nulle. On en déduit que $I_f \neq \{0\}$ et donc $1 \leq \deg \mu$.

Corollaire 24 – Le polynôme minimal de f est un diviseur du polynôme caractéristique de f .

Proposition 25 – Les racines du polynôme caractéristique d'un endomorphisme f sont exactement les racines de son polynôme minimal.

Démonstration : il est clair que les racines du polynôme minimal sont racines du polynôme caractéristique. Réciproquement, soit λ une racine de P_f . Il existe alors $v \neq 0$ tel que $(f - \lambda Id)(v) = 0$.

Posons $\mu_f(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0$. Puisque $\mu_f(f) = 0$, on a $f^p(v) + a_{p-1}f^{p-1}(v) + \dots + a_1f(v) + a_0v = 0$. En utilisant que $f^r(v) = \lambda^r v$, on obtient que $\mu_f(\lambda) = 0$ car $v \neq 0$. $\square$

Théorème 26 – Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé et a toutes ses racines simples.

Démonstration : la condition est suffisante car $\mu_f(f) = 0$. Réciproquement, supposons que f soit diagonalisable et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres correspondant à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Supposons, au besoin en changeant la numérotation, que $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ soient distinctes deux à deux et représentent toutes les valeurs propres de f . Si $v \in \mathcal{B}$, alors

$$(f - \lambda_1 Id) \circ \dots \circ (v - \lambda_p Id)v = 0$$

donc le polynôme $P(X) = (X - \lambda_1) \times \dots \times (X - \lambda_p)$ est un polynôme annulateur de f . Comme $\mu_f(X)$ divise $P(X)$ et que $P(X)$ n'a que des racines simples, on en déduit que μ_f n'a que des racines simples. $\square$

9. Sous-espaces caractéristiques

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n . On note $P_f(X)$ le polynôme caractéristique de f .

On suppose que $P_f(X)$ est scindé et s'écrit

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

où les λ_i sont distincts deux à deux.

Définition 27 – On appelle **sous-espace caractéristique** associé à la valeur propre λ_i le sous-espace vectoriel

$$N_{\lambda_i} = \text{Ker}(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}.$$

Proposition 28 – N_{λ_i} est stable par f .

Démonstration : soit $x \in N_{\lambda_i}$. Montrons que $f(x) \in N_{\lambda_i}$. On a $(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}(x) = 0$. Les endomorphismes f et $(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$ commutent donc $(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}(f(x)) = f \circ (f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}(x) = 0$ et on a prouvé que $f(x) \in \text{Ker}(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$. $\square$

Remarque - On a toujours $E = N_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus N_{\lambda_p}$ que f soit diagonalisable ou pas.

Théorème 29 – Réduction selon les sous-espaces caractéristiques

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que son polynôme caractéristique soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe une base $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\}$ où $\mathcal{B}_i$ est une base de N_{λ_i} telle que

$$M(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{matrix}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_p & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

où $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix}$ est la matrice (triangulaire supérieure) de la restriction de f à N_{λ_i} dans la base $\mathcal{B}_i$. C'est une matrice de $\mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{K})$.

Démonstration : elle se fait en plusieurs étapes. Remarquons d'abord que les espaces N_{λ_i} sont stables par f donc il existe une base $\mathcal{B}' = \{\mathcal{B}'_1, \dots, \mathcal{B}'_p\}$ de E où $\mathcal{B}'_i$ est une base de N_{λ_i} telle que la matrice de f soit diagonale par blocs, chaque bloc représentant la restriction f_i de f à N_{λ_i} . Notons M_{λ_i} un de ces blocs non nuls. Il reste à montrer que M_{λ_i} est triangularisable et que la diagonale de la matrice triangulaire obtenue ne contient que des λ_i .

Comme $N_{\lambda_i} = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i}$, le polynôme $Q(X) = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est annulateur de f_i . Par conséquent le polynôme minimal de f_i est du type

$$\mu_{f_i} = (X - \lambda_i)^{\beta_i} \text{ avec } 1 \leq \beta_i \leq \alpha_i.$$

Comme les racines de P_{f_i} sont exactement les racines de μ_{f_i} , on en déduit que le polynôme caractéristique de f_i est scindé, que M_{λ_i} est triangularisable et que sa diagonale est formée de termes tous égaux à λ_i □

10. Diagonalisation simultanée

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$.

On considère deux endomorphismes f et g de E tels que

- 1) f et g soient diagonalisables
- 2) $f \circ g = g \circ f$

Proposition 30 – Il existe une base de E telle que les matrices représentatives dans cette base de f et g respectivement soient diagonales. On dit que f et g sont simultanément diagonalisables.

Démonstration : raisonnons par récurrence sur n .

Si $n = 1$, le résultat est trivialement vrai.

Supposons qu'il soit vrai sur tout espace de dimension inférieure ou égale à $n - 1$. Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f distinctes deux à deux. Si f est une homothétie, le résultat est vrai car toute base qui diagonalise g diagonalise f . Si f n'est pas une homothétie, E est somme directe de ses sous-espaces propres qui sont tous de dimensions strictement inférieures à n (car f n'est pas une homothétie). Soit E_{λ} un sous-espace propre de f . Montrons qu'il est stable par g . Soit $x \in E_{\lambda}$. On a $(f - \lambda \text{Id}) \circ g(x) = g \circ (f - \lambda \text{Id})(x)$ car f et g commutent. Donc $(f - \lambda \text{Id}) \circ g(x) = 0$

car $(f - \lambda Id)(x) = 0$. D'où $g(x) \in E_\lambda$. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à chacun des sous-espaces propres de f pour obtenir le résultat. $\square$

11. Décomposition de Dunford

11.1. Endomorphismes nilpotents

Définition 31 – Un endomorphisme f de E est dit nilpotent s'il existe un entier p non nul tel que $f^p = 0$. On pose alors $n_0 = \min\{p \in \mathbb{N}^* ; f^p = 0\}$. L'entier naturel n_0 est appelé indice de u .

Proposition 32 – Soient deux endomorphismes nilpotents qui commutent alors leur somme est nilpotente.

Démonstration : soient f et g deux endomorphismes nilpotents d'indices respectifs p et q . Comme f et g commutent, on peut utiliser la formule de Newton :

$$(f + g)^{p+q} = \sum_{i=0}^{p+q} C_{p+q}^i f^i g^{p+q-i}.$$

Dans chaque terme de la somme, on a soit $i \geq p$, soit $n + p - i \geq q$ donc soit $f^i = 0$, soit $g^{p+q-i} = 0$. On en déduit que $f + g$ est nilpotent. $\square$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$.

11.2. Décomposition de Dunford

Théorème 33 – Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que son polynôme caractéristique $P_f(X)$ est scindé.

Alors f s'écrit de manière unique $f = d + n$ où d est un endomorphisme diagonalisable de E et n un endomorphisme nilpotent de E tels que $d \circ n = n \circ d$. De plus d et n sont des polynômes en u à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Démonstration : notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines de $P_f(X)$ distinctes deux à deux et α_k leurs multiplicités respectives. Soit $N_k = \text{Ker}(f - \lambda_k Id)^{\alpha_k}$ et f_k la restriction de f à N_k . F_k est bien définie car N_k est stable par f . On note également g_k la restriction de $f - \lambda_k$ à N_k . On a $f_k = \lambda_k Id + g_k$; or $\lambda_k Id$ est diagonalisable et g_k est nilpotente et ces deux endomorphismes commutent entre eux. On a donc montré l'existence de la décomposition.

Montrons maintenant que les endomorphismes d et n sont des polynômes en u .

On pose $P_i(X) = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$ pour $1 \leq i \leq p$. Les polynômes $P_i(X)$ sont premiers entre

eux dans leur ensemble. D'après le théorème de Bezout, il existe des polynômes $Q_i(X)$ tels que $P_1 Q_1 + \dots + P_p Q_p = 1$. On a donc

$$P_1(f)Q_1(f) + \dots + P_p(f)Q_p(f) = Id_E.$$

Posons $R_k(f) = P_k(f)Q_k(f)$. Pour tout $x \in E$, on a $x = R_1(f)(x) + \dots + R_p(f)(x)$. Comme $R_k(f)(x) \in N_k$, cette somme est en fait la décomposition de x dans la somme directe $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_p$. L'application $R_k(f)$ est donc la projection sur N_k parallèlement

à la somme directe des autres espaces. On pose alors $d = \sum_{i=1}^p \lambda_i R_i(f)$ et $n = u - d$. Ce

sont bien des polynômes en u . L'endomorphisme d est bien diagonalisable car les $R_k(f)$ commutent entre eux deux à deux et sont diagonalisables. L'endomorphisme n est nilpotent car le polynôme caractéristique de f est scindé donc il existe une base de E dans laquelle

RÉDUCTION D'ENDOMORPHISMES

la matrice représentative de f est triangulaire supérieure ; or, dans cette base, la matrice de n est triangulaire supérieure avec une diagonale nulle.

Montrons enfin l'unicité de cette décomposition. Supposons qu'il existe D et N tels que $f = D + N$, D et N vérifiant les mêmes hypothèses que d et n . Comme D et N commutent, ils commutent avec f , donc ils commutent avec d et n car ce sont des polynômes en f . Posons $h = D - d = n - N$. $n - N$ est nilpotent car n et N le sont. De plus D et d commutent et sont diagonalisables donc ils sont simultanément diagonalisables et $D - d$ est diagonalisable. L'endomorphisme h est donc nilpotent et diagonalisable ; on en déduit qu'il est nul. $\square$

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

1. Qu'est-ce que réduire un endomorphisme ?	1
2. Vecteurs propres - Valeurs propres	1
2.1. Vecteurs propres	1
2.2. Polynôme caractéristique	2
3. Caractérisation des endomorphismes diagonalisables	2
4. Applications de la diagonalisation	3
4.1. Calcul de la puissance d'une matrice	4
4.2. Suites récurrentes linéaires	4
4.3. Systèmes de suites récurrentes	4
4.4. Systèmes différentiels à coefficients constants	5
5. Trigonalisation	5
6. Le théorème de Cayley-Hamilton	6
7. Théorème de décomposition des noyaux	7
8. Polynôme minimal	7
9. Sous-espaces caractéristiques	8
10. Diagonalisation simultanée	9
11. Décomposition de Dunford	10
11.1. Endomorphismes nilpotents	10
11.2. Décomposition de Dunford	10