Collection Butterfly

Terminale D

Etude de Fonctions

Tome 3

OUALE K. Fidèle
Professeur de Mathématiques
au Lycée Moderne d'Agnibilékrou
Cel : 58 22 07 09 / 02 58 82 72 / 05 65 91 86

Les Mathématiques, depuis toujours, sont des mystères pour les élèves, tout simplement parce qu'ils ignorent certains principes d'apprentissage :

1ère étape : la connaissance

2ème étape : la compréhension

3ème étape : l'application

4ème étape : l'analyse

5ème étape : la synthèse

Ces cinq différentes étapes sont primordiales pour assimiler les cours de mathématiques afin de pouvoir aisément traiter des exercices …

La connaissance

Cette étape passe par la mémorisation des définitions, des propriétés et des formules. Chaque élève doit être capable de se souvenir simplement, de se rappeler des formules qu'il a vu durant le cours …

La compréhension

Elle vient après la connaissance ; en effet peut-on comprendre ce qu'on ne connait pas ? Comprendre les formules, c'est saisir leur signification afin de pouvoir les traduire, les interpréter, les reformuler.

L'application

C'est utiliser ce qu'on a compris dans des situations nouvelles ; résoudre un exercice qui fait simplement appel à votre mémoire et votre compréhension : passer du général au concret

L'analyse

Cette étape consiste à décomposer les parties d'un exercice, identifier les formules à utiliser : mettre en relation vos connaissances, votre compréhension et votre attitude à appliquer les formules.

La synthèse

C'est mettre en rapport des connaissances des différentes parties d'une leçon ou de plusieurs leçons

L'objectif premier de l'auteur est d'aider les élèves à s'approprier dans l'ordre ces cinq étapes ; à cet effet les annales de la collection qu'il a mis à la disposition des apprenants sont composées de trois (3) grandes parties :

- ***Les cours***
- ***Des exercices corrigés*** (corrections détaillées et commentées)
- ***Des exercices proposés*** (non corrigés)

Afin de mettre à la disposition des élèves de Terminale D ,
des annales de mathématiques leur permettant d'***optimiser leur résultat scolaire*** ,
l'auteur a scindé en ***trois (3) tomes*** les cours qui font la spécificité de la série D .

Tome 1

Quelques formules utiles pour la Terminale D - Limites et continuité - Dérivée et primitives - Intégrales - Equations différentielles - Suites numériques - Dénombrements et probabilités

Tome 2

Fonction logarithme népérien - Fonction exponentielle népérienne, Fonctions exponentielles , Fonctions puissances - Etude de fonctions Nombres complexes - Similitudes - Statistiques

Tome 3

Etude de fonctions *(les Corrections sont détaillées et commentées)*

« Sans la maîtrise des formules , les Mathématiques restent un mystère »
L'auteur

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

L’objectif des annales de Mathématiques que vous tenez dans vos mains est de permettre aux élèves des classes de Terminale D d’affronter aisément les études de fonctions dans les problèmes dans un devoir, un examen blanc ou l’examen du Baccalauréat en fin d’année scolaire.

Un sujet de Mathématiques en Terminale D noté sur 20 , est généralement composé de deux exercices et d’une étude de fonction communément appelée problème ; la note du problème varie entre 09 et 12 .

Comprendre et maitriser une étude de fonction revient à maitriser :

- Le questionnement
- Les méthodes de résolution
- La rédaction

De plus chaque élève doit savoir qu’une étude de fonctions a pour objectifs de faire ressortir certains éléments qui permettront de construire la courbe représentative de la fonction dans un repère.

Voici la liste de quelques chapitres qui interviennent dans une étude de fonction

- Limites et continuité
- Dérivées et primitives
- Fonctions logarithme népérien
- Fonction exponentielle népérienne
- Calcul intégral
- Equations différentielles
- …

Il existe au moins trois (3) types de problèmes :

- une ***fonction*** donnée de manière explicite suivie de questions
- un ***tableau de variation*** suivi de questions
- une ***courbe*** suivie de questions

L’un des objectifs de ces annales c’est exposer des problèmes " de types BAC " afin d’aider les élèves à mieux se préparer.

Quelques propriétés à retenir

(1) Quelques éléments intervenant dans la construction de la courbe représentative d'une fonction

(1) ***L'ensemble de définition***
Il donne sur l'axe (OI) des abscisses l'intervalle sur lequel on doit tracer la courbe

(2) ***Les extremums relatifs et les limites aux bornes de l'ensemble de définition***
Ils donnent l'axe (OJ) des ordonnées l'intervalle sur lequel on doit tracer la courbe

(3) ***La continuité et/ou la dérivabilité en un point***
Elles apportent une certaine précision de la construction de la courbe à l'approche du point concerné

(4) ***Les asymptotes, les tangentes et les demi-tangentes***
Elles guident la courbe

(5) ***Les positions relatives de la courbe par rapport à une tangente***
Elles permettent de mieux disposer la courbe par rapport à une tangente
Attention : Une tangente à une courbe en un point d'abscisse x_0 peut couper la courbe en un autre point

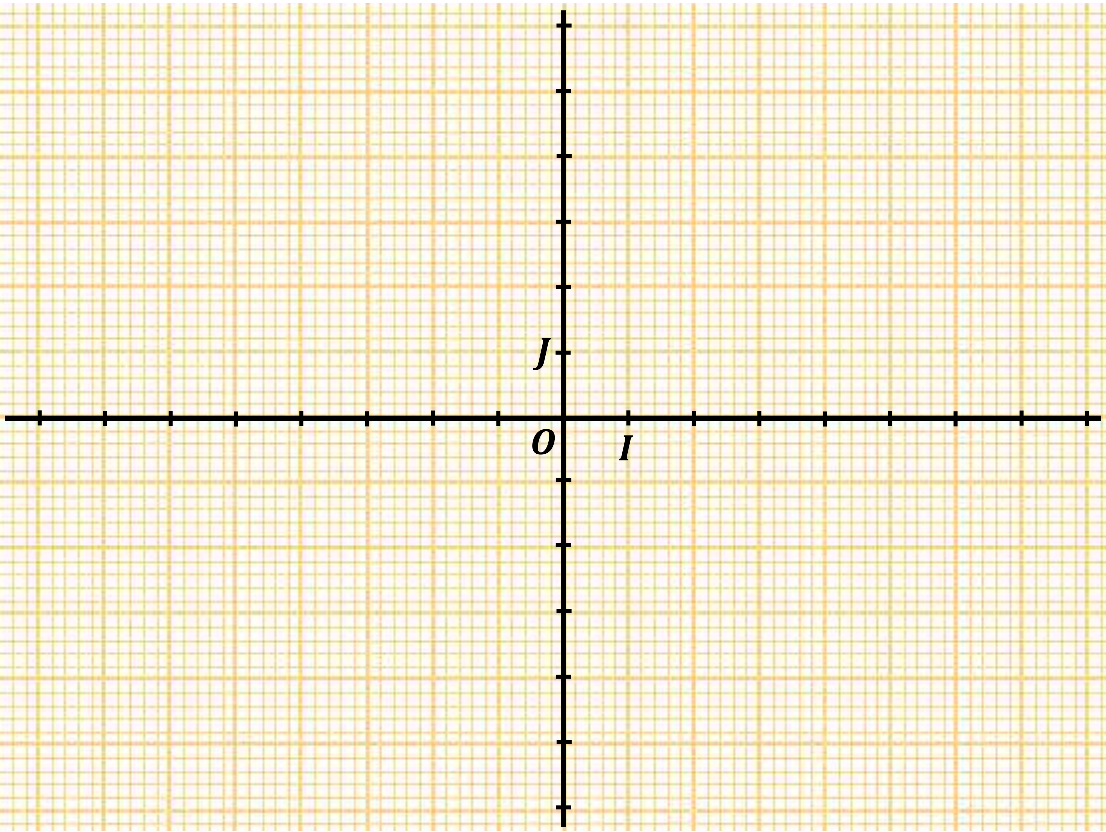
(6) ***Les branches paraboliques***
Elles donnent l'allure de la courbe en $-\infty$ et/ou $+\infty$

(7) ***Le tableau de variation***
Il donne l'allure générale de la courbe

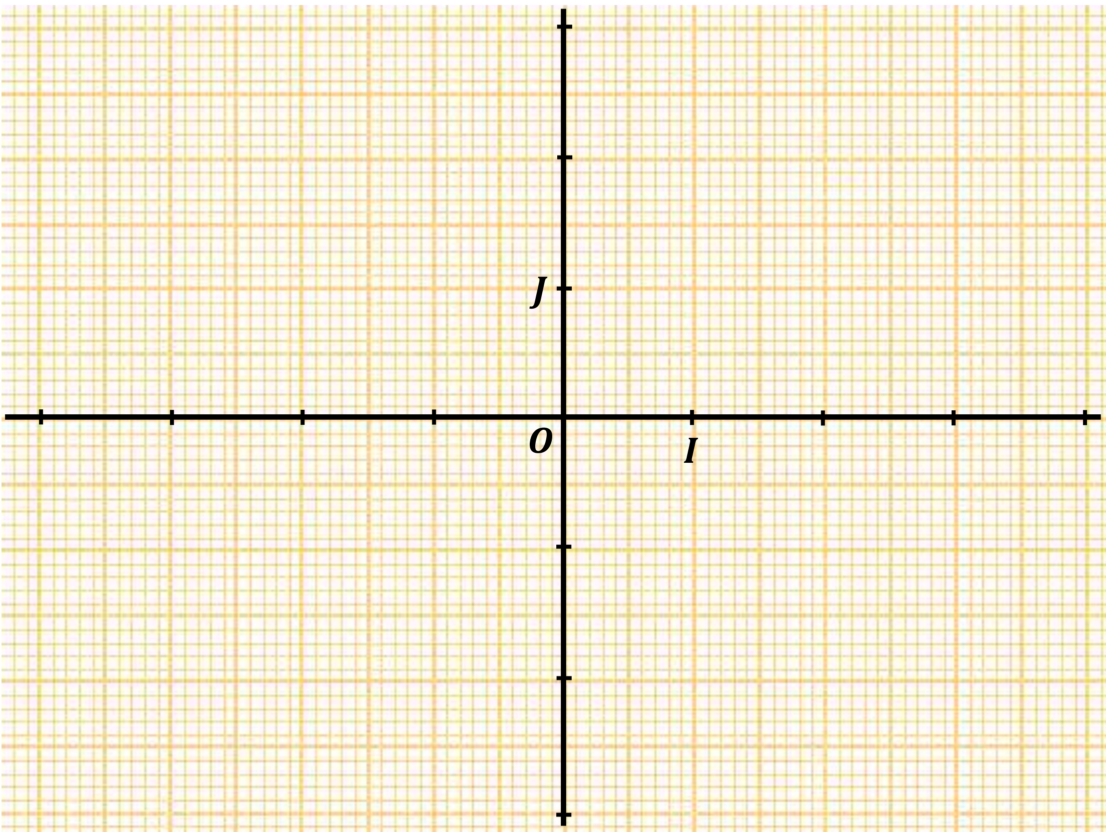
(8) ***Unités graphiques*** (cas particulier du papier millimétré)

- Pour tracer les axes du repère, on tient compte de deux éléments :
  1- L'ensemble de définition pour l'axe des abscisses
  2- Les extremums (maximums et minimums) pour l'axe des ordonnés
- Pour graduer le repère, on tient compte des unités graphiques proposées par l'exercice sans oublier que le papier millimétré est déjà gradué en cm ;

Unité graphique : $1\ cm$

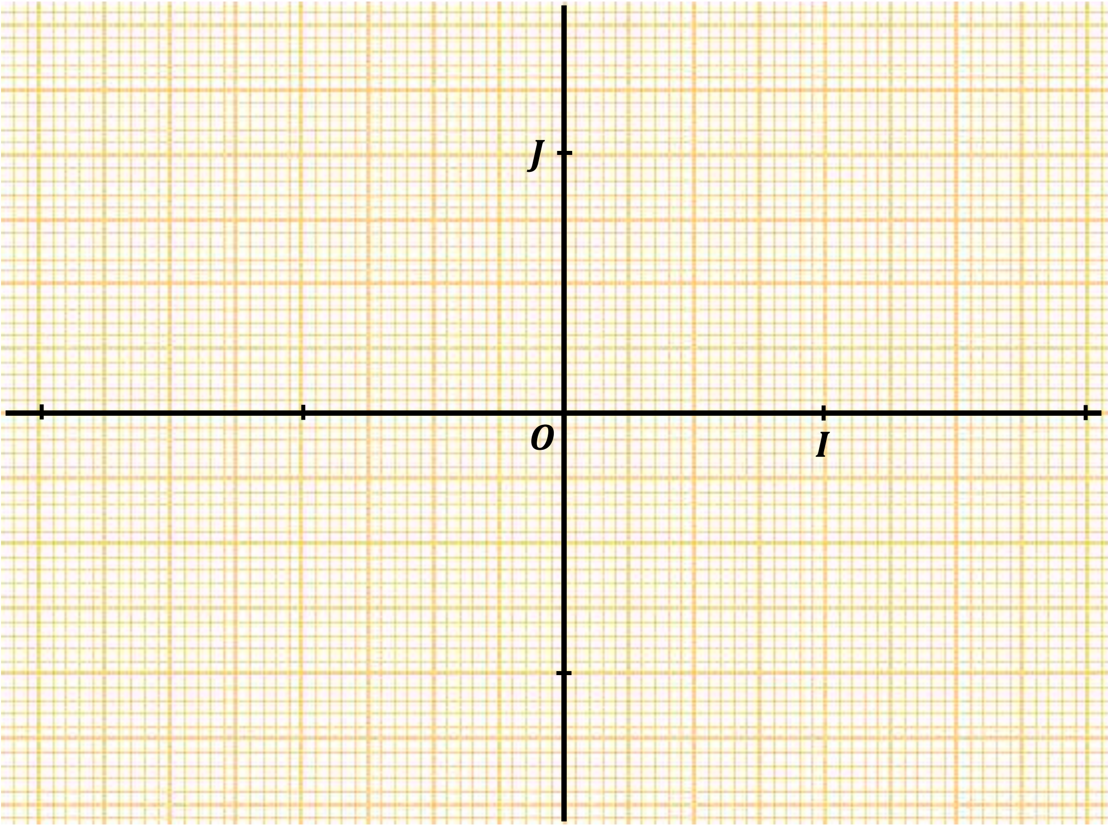


Unité graphique : $2\ cm$

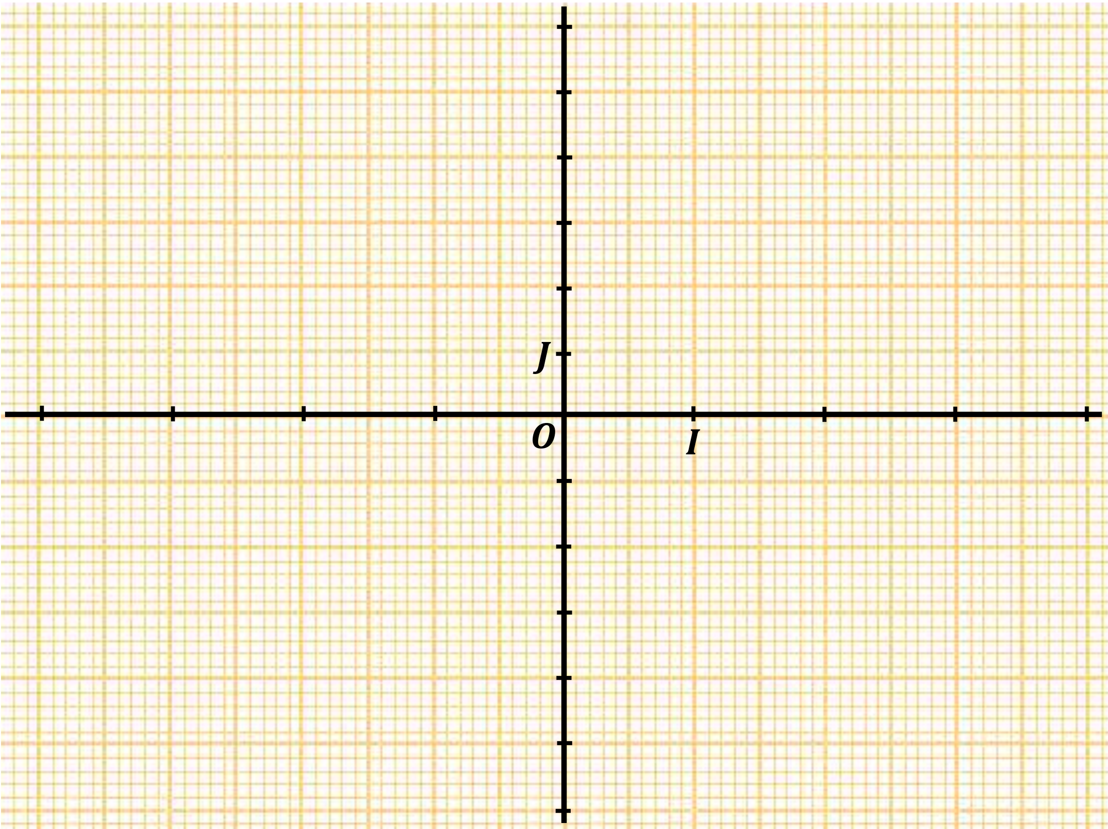


Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

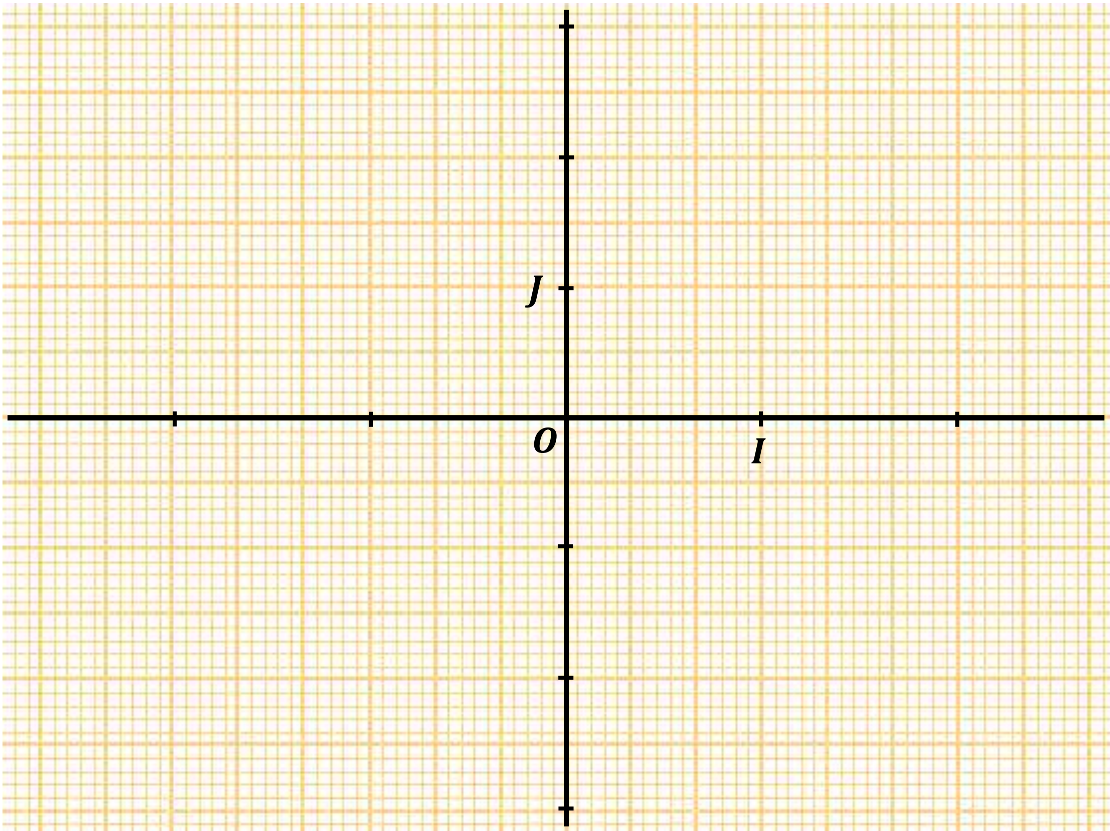
Unité graphique : $4\ cm$



Unité graphique : $OI = 2\ cm$ et $OJ = 1\ cm$



Unité graphique : $OI = 3\ cm$ et $OJ = 2\ cm$



	Quelques éléments à considérer avant la construction d'une courbe
1	Ensemble de définition
2	Extremums (relatifs et/ou absolus)
3	Tangentes , asymptotes et branches paraboliques
4	Position relative de la courbe par rapport à une tangente
5	Continuité et dérivabilité en des points particuliers
	Tableau de variation

$$\lim_{\text{Elève} \to \text{Travail}} \textbf{Terminale} = \boldsymbol{BAC}$$

(2) Limites et continuité

Détermination de l'ensemble de définition d'une fonction

Les fonctions données de manière explicite se présentent généralement sous deux (2) formes : avec ou sans raccordement

Proposition de méthode

(1) Toute expression qui est ***sous une racine carrée*** doit être supérieure ou égale à 0

Si $f(x) = \sqrt{u(x)}$ alors $x \in D_f \iff u(x) \geq 0$ et conditions sur la fonction u

(2) Tout ***dénominateur d'un quotient*** doit être différent de 0

Si $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ alors $x \in D_f \iff v(x) \neq 0$ et conditions sur la fonction u

En particulier si la ***racine carrée est au dénominateur*** alors la condition change

Si $f(x) = \dfrac{u(x)}{\sqrt{v(x)}}$ alors $x \in D_f \iff v(x) > 0$ et conditions sur la fonction u

Si $f(x) = \dfrac{u(x)}{\sqrt{v(x)} + \alpha}$ alors $x \in D_f \iff v(x) \geq 0$ et $\sqrt{v(x)} + \alpha \neq 0$
et conditions sur la fonction u

Fonction avec raccordement

1er cas

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a \in I$ (il est aussi possible que $a \notin I$)

$$\begin{cases} \forall\, x \in I\,,\ f(x) = g(x) & ;\quad si\ x \neq a \\ \qquad f(a) = b & \end{cases}$$

$$D_f = \{\, x \in I \ \text{et} \ x \in D_g \} \cup \{\, \alpha \,\}$$
$$= \{\, I \cap D_g \} \cup \{\, \alpha \,\}$$

Email : oualefidele@gmail.com Cel : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

2ème cas

Soit I et J deux ensembles non vides de $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \forall\, x \in I \ , \ f(x) = g(x) \\ \forall\, x \in J \ , \ f(x) = h(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in I \ et \ x \in D_g\} \cup \{ x \in J \ et \ x \in D_h \} \\ &= \{I \cap D_g\} \cup \{J \cap D_h\} \end{aligned}$$

Dans un calcul de limites, lorsqu'on ne peut pas conclure, on dit qu'il y'a une ***forme indéterminée***. On relève quatre (4) types de formes indéterminées :

(1) $\infty - \infty$ (2) $\mathbf{0} \times \infty$ (3) $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ (4) $\dfrac{\infty}{\infty}$

Astuce

Les formes suivantes ne sont pas des formes indéterminées :

$\dfrac{\infty}{Réel}$; $\dfrac{0}{Réel}$; $\dfrac{Réel}{0}$; $\dfrac{Réel}{\infty}$

Pour ne pas les oublier on peut se servir de la phrase : « **IRI** de **ORO** est le **ROI** de **RIO**»

IRI : Infini sur Réel donne Infini

ORO : zéro sur Réel donne zéro

ROI : Réel sur zéro donne Infini

RIO : Réel sur Infini donne zéro

- **Propositions de méthodes pour les calculs de limites $\lim_{x \to x_0} f(x)$**

En Terminale le calcul de limites se fait par étapes, en tenant compte des propriétés particulières comme :

(1) ***les limites de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles à l'infini***

Limite à l'infini d'une fonction polynôme

La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite à l'infini du monôme de plus haut degré de ce polynôme (***Attention*** au signe du coefficient)

Limite à l'infini d'une fonction rationnelle

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur et du monôme de plus haut degré du dénominateur (***Attention*** au signe des coefficients)

(2) les limites à gauche et à droite

Soit a un nombre réel.

Limite à gauche *(ou limite par* ***valeurs inférieures*** *) :* $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{1}{x-a} = -\infty$

Limite à droite *(ou limite par* ***valeurs supérieures*** *) :* $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{1}{x-a} = +\infty$

Attention à l'utilisation de ces formules :

Pour certains élèves, limite à droite donne toujours $+\infty$ et limite à gauche donne $-\infty$.

<u>Ce n'est pas toujours vrai</u> !!!

Sinon , le calcul d'une limite , de manière générale se fait par étapes :

1ère étape : ***la vérification*** (elle se fait rapidement ***au " brouillon "***)

Cette étape consiste à remplacer simplement le x de la fonction par x_0 , puis vérifier le résultat du calcul obtenu :

$$\lim_{x \to 3}(2\boldsymbol{x}^2 + 5\boldsymbol{x} - 4) = 2 \times \mathbf{3}^2 + 5 \times \mathbf{3} - 4$$
$$= 2 \times 9 + 15 - 4$$
$$= 18 + 15 - 4$$
$$= 29 \quad (\text{ réel })$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{-5\boldsymbol{x} + 8}{\boldsymbol{x} - 2} = \frac{-5 \times \mathbf{2} + 8}{\mathbf{2} - 2}$$
$$= \frac{-10 + 8}{0}$$
$$= \frac{-2}{0} \quad (= \infty)$$

$$\lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{2x^2 - x + 2} = +\infty - (+\infty) \quad (\ Forme\ indéterminée\ )$$

On peut obtenir comme résultat de cette vérification : trois (3) types de résultats

- un ***réel*** (nul ou non nul)
- ***infini*** ($-\infty$ ou $+\infty$)
- ***une forme indéterminée***

2ème étape : ***utilisation du résultat de la vérification***

* Si le résultat est un ***réel ,*** on " peut " recopier la démarche sur la copie

$$\lim_{x \to 3}(2\boldsymbol{x}^2 + 5\boldsymbol{x} - 4) = 2 \times \mathbf{3}^2 + 5 \times \mathbf{3} - 4$$
$$= 2 \times 9 + 15 - 4$$
$$= 18 + 15 - 4$$
$$= 29$$

* Si le résultat est ***infini ,*** on peut utiliser les propriétés concernant les limites à gauche et à droite pour déterminer le signe (c'est-à-dire $-\infty$ ou $+\infty$)

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{-5\boldsymbol{x}+8}{\boldsymbol{x}-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left[(-5\boldsymbol{x}+8) \times \frac{1}{\boldsymbol{x}-2}\right]$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} (-5\boldsymbol{x}+8) \times \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{1}{\boldsymbol{x}-2}$$

$$\text{or} \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} (-5\boldsymbol{x}+8) = -5 \times 2 + 8 = -2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{1}{\boldsymbol{x}-2} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{-5\boldsymbol{x}+8}{\boldsymbol{x}-2} = -2 \times (+\infty)$$

$$= -\infty$$

* Si le résultat est une ***forme indéterminée***, on ne peut pas conclure , mais on peut utiliser l'une méthodes ci-dessous pour lever l'indétermination :

(1) Expression conjuguée
(2) Factorisation
(3) Expression conjuguée et factorisation
(4) Définition du nombre dérivé (ou taux de variation)
(5) Changement de variable
(6) Théorème des Gendarmes (Encadrement)

Méthode de *changement de variable affine*
en posant $\boldsymbol{X = ax + b}$ où a et b sont des réels

De manière générale, lors du calcul d'une limite à l'aide de la méthode de ***changement de variable*** , il y'a une transformation de la limite afin d'obtenir une limite de référence ou une limite dont on connait déjà le résultat :

1ère étape : en tenant compte de la condition posée : $X = ax + b$
si x tend vers $\boldsymbol{A}$ alors X tend vers $a\boldsymbol{A} + b$ (*on calcule*)

2ème étape : remplacer, si possible , tous les x de la fonction par X à l'aide de la relation $X = ax + b$

Exemple
Sachant que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$, calculer $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{4x-12}$ en posant $X = x - 3$

Posons $X = \boldsymbol{x} - 3$

- quand x tend vers 3 , X tend vers $\boldsymbol{3} - 3 = 0$
- ***Au dénominateur*** $4x - 12 = 4(x-3)$ devient $4X$, car $x - 3 = X$
- ***Sous la racine carrée***
  $X = x - 3 \implies x = X + 3$
  $\implies x - 2 = (X+3) - 2$
  $\implies x - 2 = X + 1$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{4x-12} = \lim_{X \to 0} \frac{\sqrt{X+1}-1}{4X}$$
$$= \lim_{X \to 0} \frac{1}{4} \times \frac{\boldsymbol{\sqrt{X+1}-1}}{\boldsymbol{X}}$$
$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \quad ; \quad car \quad \lim_{X \to 0} \frac{\sqrt{X+1}-1}{X} = \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{8}$$

Lorsque $x \underset{>}{\to} A$ (x tends vers A par valeurs supérieures ou x tends vers A par la droite)

- si a est positif ($a > 0$) alors $X \underset{>}{\to} aA + b$
- si a est négatif ($a < 0$) alors $X \underset{<}{\to} aA + b$

Lorsque $x \underset{<}{\to} A$ (x tends vers A par valeurs inférieures ou x tends vers A par la gauche)

- si a est positif ($a > 0$) alors $X \underset{<}{\to} aA + b$
- si a est négatif ($a < 0$) alors $X \underset{>}{\to} aA + b$

Applications et exemples

Calculer les limites suivantes à l'aide du changement de variable proposé

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{x+1}{2x-4}$ en posant $X = 2x - 4$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{4x+7}{-x-3}$ en posant $X = -x - 3$

Proposition de solution

On rappelle que d'autres méthodes de calculs peuvent être utilisées

a) Posons $X = 2x - 4$ ($X = ax + b$ avec $a = 2 > 0$)

Quand $x \underset{>}{\to} 2$; $X \underset{>}{\to} 0$

$$X = 2x - 4 \implies 2x = X + 4$$

$$\implies x = \frac{1}{2}X + 2$$

$$\implies x + 1 = \frac{1}{2}X + 2 + 1$$

$$\implies x + 1 = \frac{1}{2}X + 3$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x+1}{2x-4} = \lim_{\substack{X \to 0 \\ >}} \frac{\frac{1}{2}X + 3}{X}$$
$$= \lim_{\substack{X \to 0 \\ >}} \frac{1}{X}\left(\frac{1}{2}X + 3\right)$$
$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{X} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ >}} \left(\dfrac{1}{2}X + 3\right) = 3 \end{cases}$

b) Posons $X = -x - 3$ ($X = ax + b$ avec $a = -1 < 0$)

Quand $x \underset{<}{\to} -3$; $X \underset{>}{\to} 0$

$$X = -x - 3 \Rightarrow -x = X + 3$$
$$\Rightarrow x = -X - 3$$
$$\Rightarrow 4x = 4(-X - 3)$$
$$\Rightarrow 4x = -4X - 12$$
$$\Rightarrow 4x + 7 = -4X - 12 + 7$$
$$\Rightarrow 4x + 7 = -4X - 5$$

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{4x+7}{-x-3} = \lim_{\substack{X \to 0 \\ <}} \frac{-4X - 5}{X}$$
$$= \lim_{\substack{X \to 0 \\ <}} \frac{1}{X}(-4X - 5)$$
$$= +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{X} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ <}} (-4X - 5) = -5 \end{cases}$

En classe de Terminale D , les élèves débuteront les études de fonctions avec :

- des ***fonctions polynômes***
- des ***fonctions rationnelles***
- des fonctions avec des barres de ***valeurs absolues***
- des fonctions dont l'expression contient des ***racines carrées***

Le constat est le même chez les élèves :
une peur manifeste des fonctions avec des valeurs absolues ou avec des racines carrées ;

Proposition de méthode

- Pour les fonctions avec valeurs absolues, apprendre à donner l'expression de la fonction sans barres de valeurs absolues.

- Pour les fonctions avec des racines carrées, savoir que toute expression qui se trouve sous une racine carrée doit être supérieur ou égale à zéro ; penser aussi à utiliser , pour les calculs de limite , l'expression conjuguée ou/et la factorisation

Continuité d'une fonction en un point a

Une fonction f d'ensemble de définition D_f est continue en un point a si :
$a \in D_f$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Dans le cas où l'ensemble de définition est de la forme $D_f =]b\,; a[\cup [\,a\,; c[$ $\left(a \in D_f\right)$ pour étudier la continuité de la fonction f en , on procède comme suite :

f est continue en a si : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$

Prolongement par continuité

Une fonction f d'ensemble de définition D_f admet un prolongement par continuité en a si : $a \notin D_f$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ (où ℓ est un nombre réel)

Lorsque c'est le cas , le prolongement par continuité de f en a qui est aussi une fonction qu'on peut notée g , est définie par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in D_f \ ; \ \boldsymbol{g(x) = f(x)} \\ \qquad\qquad \boldsymbol{g(a) = \ell} \end{cases}$$

Asymptotes et branches paraboliques

Soit f une fonction de représentation graphique (C_f) dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1- Après avoir déterminé l'ensemble de définition D_f de la fonction f , le calcul des limites aux bornes de D_f « **peut** » conduire aux résultats et interprétations suivants :

$\lim\limits_{x \to Réel} f(x) = Infini \implies$ Asymptote verticale

$\lim\limits_{x \to Infini} f(x) = Réel \implies$ Asymptote horizontale

2- Tableaux récapitulatifs

➢ **Asymptotes**

Notions	***Résultats des calculs***	***Interprétations graphiques***
Asymptote verticale	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \ \ (ou \ -\infty)$	La droite d'équation $\boldsymbol{x = a}$ est une asymptote verticale à (C_f)
Asymptote horizontale	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ b$	La droite d'équation $\boldsymbol{y = b}$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$
	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ b$	La droite d'équation $\boldsymbol{y = b}$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$
Asymptote oblique	$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	La droite d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$ est une asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$
	$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	La droite d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$

Branches paraboliques

Il existe deux types de branches paraboliques :
la branche parabolique de ***direction l'axe des abscisses*** et la branche parabolique de ***direction l'axe des ordonnées***

Par abus, lorsque le repère est (O, I, J) alors l'axe des abscisses est la droite (OI) et l'axe des ordonnées est la droite (OJ) , par conséquent on parle de branche parabolique de direction (OI) ou de direction (OJ)

La notion de branches paraboliques passe par la calcul de deux limites

- Si c'est en $-\infty$, on doit calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$
- Si c'est en $+\infty$, on doit calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

1

Si dans un problème, on demande de calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \left(\text{ou} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \right)$ alors

2

dans les questions précédentes $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \left(\text{ou} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right)$ a déjà été calculée ; de plus le résultat de 2 est obligatoirement $-\infty$ ou $+\infty$

De manière simple le calcul de la limite de $\boldsymbol{\frac{f(x)}{x}}$ **en** $-\infty$ et en $+\infty$ fait allusion ***aux branches paraboliques***

(Par contre le calcul de la limite de $\boldsymbol{\frac{f(x)}{x}}$ **en 0** , lorsque $f(0) = 0$, fait allusion ***à la dérivabilité en* 0**)

Attention : Le calcul de $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ne suffit pas pour affirmer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique.

Il faut d'abord vérifier que : (1) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

ensuite (2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ ou $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$

Exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$$

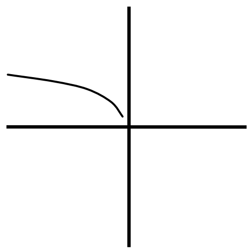
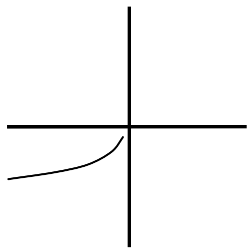
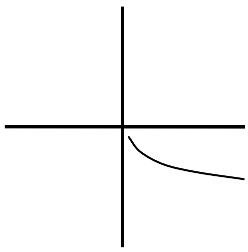
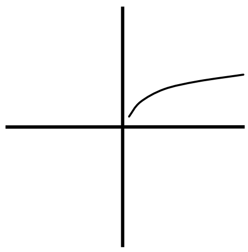
$$= 0$$

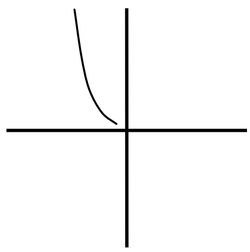
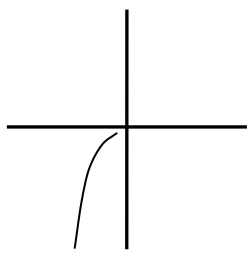
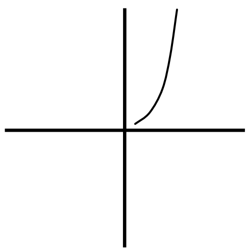
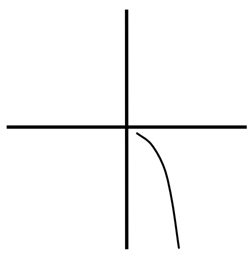
On serait « **tenter** » d'affirmer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de Direction l'axe des abscisses (OI) alors qu'en réalité :

la courbe (C_f) ***admet une asymptote horizontale*** d'équation $y = 0$ en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (0 \neq \infty)$$

Remarque : ∞ signifie que le résultat de la limite peut être $+\infty$ ou $-\infty$

Notions	**Branches paraboliques de direction l'axe des abscisses $(\boldsymbol{OI})$**			
Résultats des calculs	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$		$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$	
Interprétations graphiques	(C_f) admet une branche parabolique de **direction l'axe des abscisses** $(\boldsymbol{OI})$ en $-\infty$		(C_f) admet une branche parabolique de **direction l'axe des abscisses** $(\boldsymbol{OI})$ en $+\infty$	
Allure de la courbe				

Notions	**Branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées $(\boldsymbol{OJ})$**			
Résultats des calculs	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$		$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$	
Interprétations graphiques	(C_f) admet une branche parabolique de **direction l'axe des ordonnées** $(\boldsymbol{OJ})$ en $-\infty$		(C_f) admet une branche parabolique de **direction l'axe des ordonnées** $(\boldsymbol{OJ})$ en $+\infty$	
Allure de la courbe				

(3) Dérivées et primitives

Tableaux récapitulatifs des dérivées

Soit k un nombre réel ,
$\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux fonctions dérivables

fonctions	*fonctions derivées*
$u+v$	$u'+v'$
ku	ku'
$u\times v$	$u'\times v+v'\times u$
u^n	$n\times u'\times u^{n-1}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{n\times u'}{u^{n+1}}$
$u\circ v$	$u'(v)\times v'$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
e^x	e^x
e^{ax+b}	$a\times e^{ax+b}$
e^u	$u'e^u$

Tableaux récapitulatifs des primitives

fonctions	*Primitives*
$u'\times u^n \quad (n\neq -1)$	$\left(\frac{1}{n+1}\right)u^{n+1}+c$
$\frac{u'}{u^n} \quad (n\neq 1)$	$\frac{-1}{(n-1)\times u^{n-1}}+c$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$
$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3}u\sqrt{u}+c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|+c$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|+c$
e^x	e^x+c
$e^{ax+b} \quad (a\in\mathbb{R}^*)$	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$
$u'\,e^u$	e^u+c

❖ Il faut savoir que les deux tableaux précédents ne contiennent pas toutes les formules de dérivées et de primitives mais plutôt celles qui « ***interviennent généralement*** » dans une étude de fonctions

On dispose de trois (3) méthodes pour déterminer les primitives d'une fonction continue sur un intervalle :

- La méthode de changement de variable
- La méthode directe
- La méthode des dérivées

Il est bien de maîtriser ces méthodes mais la ***méthode directe*** facilite le calcul intégral qui intervient dans les calculs d'aires dans les études de fonctions

Ces méthodes sont exposées dans le ***Tome 1*** des annales de mathématiques **Marathon de Butterfly** de la Terminale D

On rappelle que la détermination des primitives d'une fonction continue sur un intervalle est liée au ***calcul d'aire*** (intégrales) dans les études de fonctions .

$\lim_{\text{Elève} \to \text{Travail}}$ **Terminale** $= \boldsymbol{BAC}$

(4) Fonctions logarithme népérien

Dans une étude de fonction contenant le logarithme népérien, l'élève doit être capable de :

- Connaitre et savoir utiliser les propriétés algébriques
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction
- Calculer des limites à l'aide des limites de référence de la fonction logarithme népérien en utilisant la méthode de changement de variable
- Dériver les fonctions

1- Propriétés algébriques

(1) *Propriété fondamentale*

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs ($a > 0$ et $b > 0$) , on a :

$\mathbf{ln}(\boldsymbol{ab}) = \mathbf{ln}\,\boldsymbol{a} + \mathbf{ln}\,\boldsymbol{b}$ (Logarithme d'un produit)

(2) *Conséquences de la propriété fondamentale*

⋆ $\mathbf{ln}\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}\right) = -\,\mathbf{ln}\,\boldsymbol{a}$ (Logarithme de l'inverse)

⋆ $\mathbf{ln}\left(\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right) = \mathbf{ln}\,\boldsymbol{a} - \mathbf{ln}\,\boldsymbol{b}$ (Logarithme d'un quotient)

⋆ $\mathbf{ln}\,\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n} \times \mathbf{ln}\,\boldsymbol{a}$ $(n \in \mathbb{Q})$ (Logarithme d'une puissance)

En particulier , avec le logarithme d'une puissance , on déduit le logarithme d'une racine carrée

$$\mathbf{ln}\sqrt{\boldsymbol{a}} = \mathbf{ln}\left(\boldsymbol{a}^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln}\,\boldsymbol{a} \quad \text{(Logarithme d'une racine carrée)}$$

2- Ensemble de définition de fonctions composées avec le logarithme népérien

(1) Ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \ln x$

L'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \ln x$ est $]\,0\,;+\infty[$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

(2) Ensemble de définition des fonctions de types $x \longmapsto \ln(u(x))$

Soit u une fonction d'ensemble de définition D_u ; si une fonction f est de la forme :

($\star$) $\boldsymbol{f(x) = \ln(u(x))}$ alors $x \in D_f \iff \boldsymbol{x \in D_u}$ et $\boldsymbol{u(x)} > 0$

($\star$) $\boldsymbol{f(x) = \ln|\,u(x)|}$ alors $x \in D_f \iff \boldsymbol{x \in D_u}$ et $\boldsymbol{u(x)} \neq 0$

Remarque

- Si la fonction f est de la forme $\boldsymbol{f(x) = \ln(u(x))^2}$ alors on pose les même conditions que pour $\boldsymbol{f(x) = \ln|\,u(x)|}$ c'est-à-dire $x \in D_f \iff \boldsymbol{x \in D_u}$ et $\boldsymbol{u(x)} \neq 0$

Attention

Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction avec « ln » , il ne faut pas transformer la fonction avant de poser la (les) condition(s) .

3- ***Limites de référence***

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$ (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ (3) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ (6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Croissance comparée

(7) $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$ (8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ (pour tout $n \in \mathbb{Q}$)

Remarque

Les calculs de limites avec la fonction Logarithme Népérien utilise " beaucoup " la méthode de changement de variable afin de ***mettre en évidence les limites de référence*** ci-dessus , par conséquent il est important de :

1- Connaître par cœur les limites de référence

2- Maîtriser la technique de ***changement de variable*** pour le calcul de limites

4- Dérivée de fonctions composées avec le logarithme népérien

La dérivée de la fonction $x \longmapsto \ln x$ est $\dfrac{1}{x}$

De manière générale, lorsque la fonction est de la forme $\mathbf{\ln(u(x))}$ **,** où $u(x)$ est une fonction dérivable telle que $u(x) \neq 0$, alors sa dérivée est $\dfrac{\boldsymbol{u'(x)}}{\boldsymbol{u(x)}}$

Attention
N'oubliez pas que dans certains cas on peut utiliser les autres formules de dérivées vues dans le chapitre « Dérivée et primitives »

5- Quelques éléments pouvant être utiles

- ***Le nombre réel e***

Le nombre réel $\boldsymbol{e}$ est compris entre 2 et 3 ; de plus $\boldsymbol{e} \cong \mathbf{2,71828182846}$ … …
De plus $\mathbf{\ln} \boldsymbol{e} = \mathbf{1}$

Pour tout nombre réel x , on a : $\mathbf{\ln} \boldsymbol{e^x} = \boldsymbol{x}$ (égalité utile pour les équations et inéquations)

- ***Le signe de $\ln x$ sur l'intervalle*** $]\,\mathbf{0}\,;+\infty[$

Généralement, certains élèves pensent que : pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty[$, $\ln x > 0$

Faux (erreur très grave)

En réalité $\begin{cases} \forall\, \boldsymbol{x} \in\,]\,\mathbf{0}\,;\mathbf{1}\,[\quad ; \quad \mathbf{\ln} \boldsymbol{x} < 0 \\ \forall\, \boldsymbol{x} \in\,]\,\mathbf{1}\,;+\infty\,[\quad ; \quad \mathbf{\ln} \boldsymbol{x} > 0 \end{cases}$

(5) Fonction exponentielle népérienne

Dans une étude de fonction contenant une exponentielle népérienne, l'élève doit être capable de :

- Connaitre et savoir utiliser les propriétés algébriques
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction
- Calculer des limites à l'aide des limites de référence de la fonction exponentielle népérienne en utilisant la méthode de changement de variable
- Dériver les fonctions

Définition

On appelle ***fonction exponentielle népérienne*** la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien ($\ln x$). On la note e^x

Conséquences de la définition

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

b) $e^0 = 1$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln e^x = x$

d) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $e^{\ln x} = x$

e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in]0;+\infty[$; $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$

1- Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels a et b , on a :

1) $e^{a+b} = e^a \times e^b$

2) $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

3) $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

4) $(e^a)^n = e^{n\times a}$ $(n \in \mathbb{Q})$

2- Ensemble de définition de fonctions composées avec une exponentielle népérienne

(1) Ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto e^x$

L'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto e^x$ est $\mathbb{R}$

(2) Ensemble de définition des fonctions de types $x \longmapsto e^{u(x)}$

Soit u une fonction d'ensemble de définition D_u ; si une fonction f est de la forme :
$\boldsymbol{f(x) = e^{u(x)}}$ alors $\boldsymbol{D_f = D_u}$

De manière générale, on n'oubliera pas de tenir compte des cas de quotient, de racine carrée , …

3- Limites de référence

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ (3) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

<u>Attention</u>

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ n'est pas une limite de référence

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (limite de référence (4))

Croissance comparée

(6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ (7) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ (pour tout $n \in \mathbb{Q}$)

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

4- *Dérivée de fonctions composées avec le logarithme népérien*

La dérivée de la fonction $x \longmapsto e^x$ est e^x

De manière générale, lorsque la fonction est de la forme $\boldsymbol{e^{u(x)}}$ **,** où $u(x)$ est une fonction dérivable, alors sa dérivée est $\boldsymbol{u'(x) \times e^{u(x)}}$

Attention

N'oubliez pas que dans certains cas on peut utiliser les autres formules de dérivées vues dans le chapitre « Dérivée et primitives »

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

(6) Calcul intégral

Dans les études de fonctions, l'utilisation du calcul intégral se fait de deux manières :

- Calcul d'une intégrale à l'aide des formules de primitives
- Calcul d'une intégrale à l'aide d'une intégration par parties

L'un des objectifs de l'utilisation du calcul intégral est de calculer l'aire d'une partie du plan délimitée par deux courbes (ou une courbe et une droite) et deux droites verticales.

1- Calcul intégral et formules de primitives

$\boldsymbol{fonctions}$	$\boldsymbol{Primitives}$
$u' \times u^n \quad (n \neq -1)$	$\left(\frac{1}{n+1}\right) u^{n+1} + c$
$\frac{u'}{u^n} \quad (n \neq 1)$	$\frac{-1}{(n-1) \times u^{n-1}} + c$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$
$\boldsymbol{\frac{1}{x}}$	$\mathbf{ln}\boldsymbol{\lvert x \rvert + c}$
$\boldsymbol{\frac{u'}{u}}$	$\mathbf{ln}\boldsymbol{\lvert u \rvert + c}$
$\boldsymbol{e^x}$	$\boldsymbol{e^x + c}$
$\boldsymbol{e^{ax+b}} \ (a \in \mathbb{R}^*)$	$\boldsymbol{\frac{1}{a} e^{ax+b} + c}$
$\boldsymbol{u' e^u}$	$\boldsymbol{e^u + c}$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

2- *Calcul intégral et intégration par parties*

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$ telles que u' et v' sont continues sur $[a; b]$ alors :

$$\int_a^b u'(x) \times v(x)dx = [\ u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)dx$$

Remarque

Ce qui doit être retenu dans cette méthode, c'est de trouver une technique pour savoir la ***fonction à dériver*** et la ***fonction dont on doit déterminer une primitive***.

Selon les notations ci-dessus :

- La ***fonction à primitiver*** sera noter $\boldsymbol{u'(x)}$
- La ***fonction à dériver*** sera noter $\boldsymbol{v(x)}$

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{u'(x)} & \Longrightarrow & \boldsymbol{u(x)} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \boldsymbol{v(x)} & \Longrightarrow & \boldsymbol{v'(x)} \end{array}$$

$u'(x)$, on en détermine une primitive et on obtient $u(x)$

$v(x)$, on la dérive et on obtient $v'(x)$

<u>**Astuce**</u> : Lors du calcul d'une intégrale à l'aide d'une intégration par parties, on peut s'aider du tableau ci-dessous

Soit $P(x)$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 1

	Fonction dont on doit déterminer une ***primitive***	Fonction à ***dériver***
	$\boldsymbol{u'(x)}$	$\boldsymbol{v(x)}$
$P(x) \times \ln(\alpha(x))$	$P(x)$	$\ln(\alpha(x))$
$P(x) \times e^{\alpha(x)}$	$e^{\alpha(x)}$	$P(x)$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

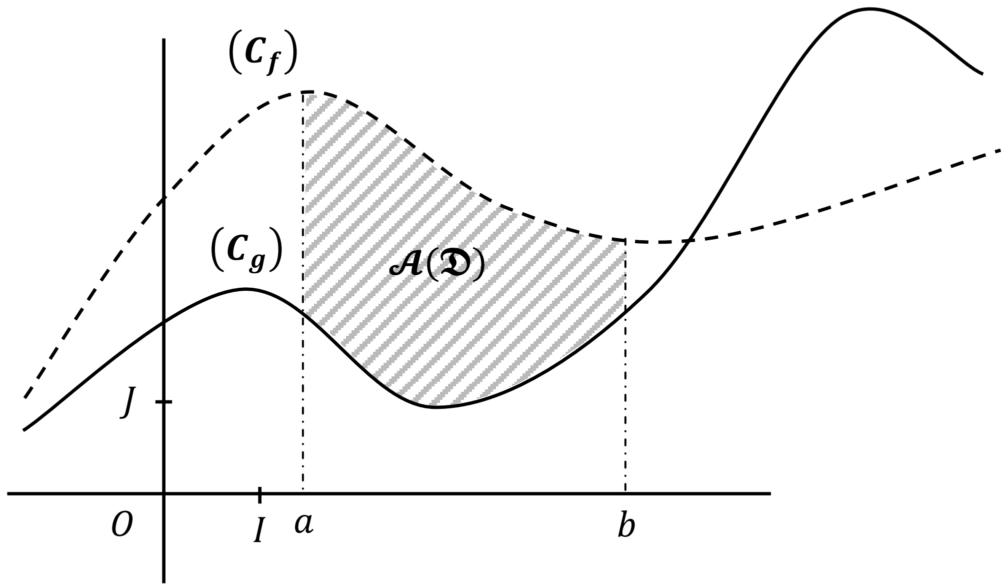
Exemples

Intégrales	$\boldsymbol{u'(x)}$	$\boldsymbol{v(x)}$	**Résultats**
$I = \int_e^{e^2} \ln x \, dx$	1	$\ln x$	e^2
$J = \int_1^e (3x-2)\ln x \, dx$	$3x-2$	$\ln x$	$\frac{1}{4}(3e^2-5)$
$L = \int_0^2 (1-4x)e^{2x}dx$	e^{2x}	$1-4x$	$-\frac{1}{2}(5e^4+3)$
$M = \int_0^2 x\sqrt{2x+1}\, dx$	$\sqrt{2x+1}$	x	$\frac{5\sqrt{5}}{3}+\frac{1}{15}$

3- Calcul intégral et calcul d'aires

Remarque
Les calculs d'aires se font de manière générale après la construction de la courbe (ou des courbes) et cela permet à l'élève de "visualiser " la partie du plan concernée par ce calcul

De manière générale , la partie du plan dont on doit calculer l'aire , est délimitée par deux courbes et deux droites verticales

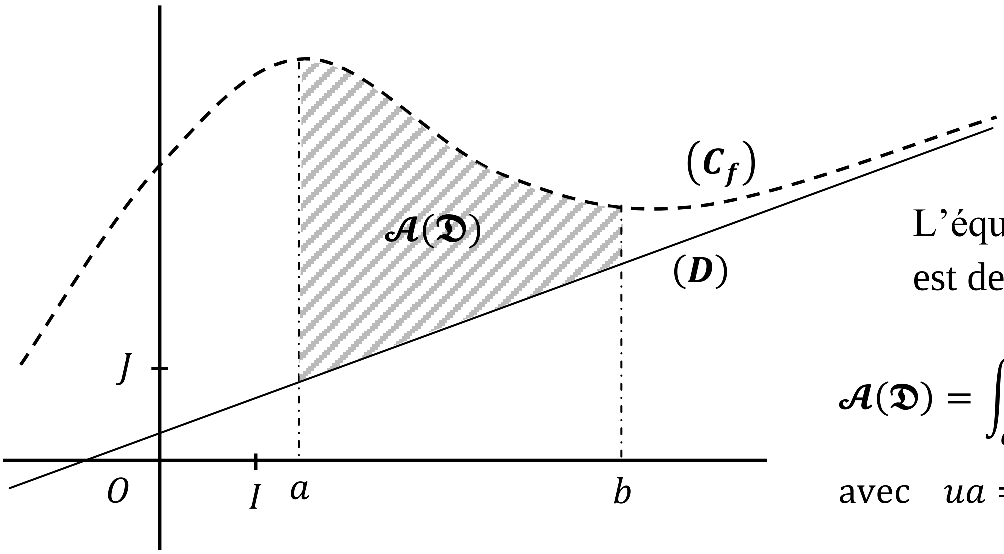


$$\boldsymbol{\mathcal{A}(\mathfrak{D}) = \int_a^b |\, f(x) - g(x)\,|\, dx \times ua} \quad ; \quad \text{avec} \quad ua = OI \times OJ \ \ cm^2$$

Attention

Un tel calcul est facilité par l'étude de la position relative des deux courbes.
Si pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $f(x) \geq g(x)$ alors $|\,f(x) - g(x)\,| = f(x) - g(x)$
Si pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $|\,f(x) - g(x)\,| = g(x) - f(x)$
Par contre dans la pratique (les études de fonctions) , on peut rencontrer deux (2) cas

1^er^ cas : L'aire de la partie du plan limitée par une courbe, une asymptote oblique et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$

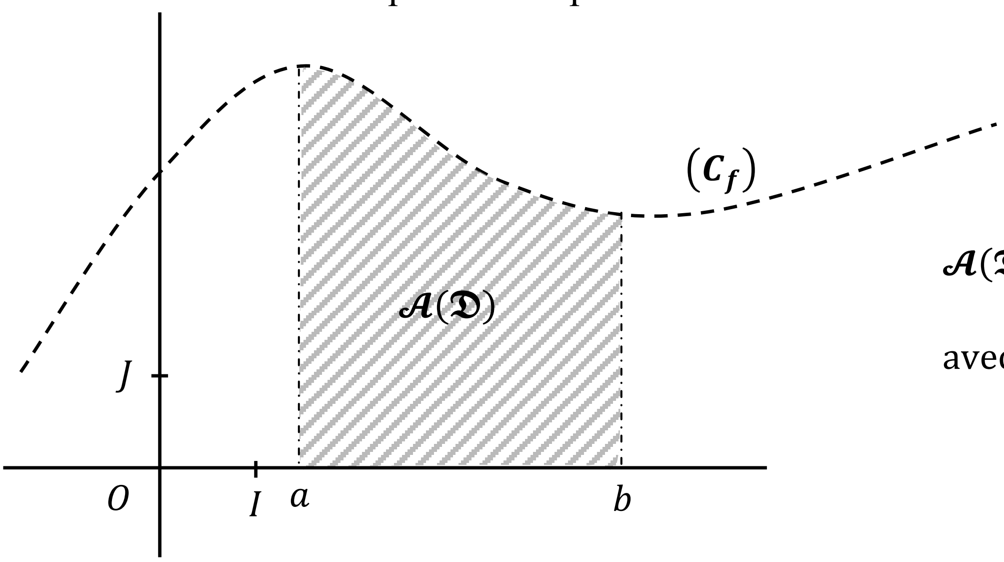


L'équation de l'asymptote (D) est de la forme $y = ax + b$

$$\mathcal{A}(\mathfrak{D}) = \int_a^b (f(x) - y)\,dx \times ua$$

avec $ua = OI \times OJ\ cm^2$

2^ème^ cas : L'aire de la partie du plan limitée par une courbe , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$



$$\mathcal{A}(\mathfrak{D}) = \int_a^b f(x)\,dx \times ua$$

avec $ua = OI \times OJ\ cm^2$

Quel que soit le cas de figure rencontrée , pour calculer l'intégrale obtenue on utilise généralement la ***méthode des intégrations par parties***

(7) Equations différentielles

Ce chapitre regroupe plusieurs autres chapitres :

- Dérivée et primitives
- Fonction logarithme népérien
- Fonction exponentielle népérienne
- Calcul intégral

Il est donc judicieux de réviser ces chapitres afin de mieux aborder les équations différentielles

1- *Equations du type* $\boldsymbol{af' + bf = 0}$ $(\boldsymbol{a \neq 0})$

Méthode de résolution

- On determine l'équation caractéristique de l'équation différentielle en remplaçant : f' par r et f par 1 $(ar + b = 0)$
- On résout l'équation caractéristique : $ar + b = 0$.

Soit $\boldsymbol{r} = -\dfrac{b}{a}$ la solution

- La solution de l'équation différentielle est de la forme : $\boldsymbol{f(x) = ke^{-\frac{b}{a}x}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

2- *Equations du type* $\boldsymbol{af'' + bf' + cf = 0}$ $(\boldsymbol{a \neq 0})$

Méthode de résolution

La résolution de ce type d'équation se fait par étapes

1er étape : Détermination de l'équation caractéristique de l'équation différentielle

On remplace dans l'équation $af'' + bf' + cf = 0$ **:**

f'' par r^2 , f' par r et f par 1

L'équation caractéristique de l'équation différentielle du second ordre $af'' + bf' + cf = 0$ est l'équation du second degré définie par : $\boldsymbol{a}r^2 + \boldsymbol{b}r + \boldsymbol{c} = 0$

2ème étape : Calcul du discriminant de l'équation caractéristique $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$

3ème étape : Détermination des solutions de l'équation caractéristique

$\Delta > 0 \implies$ deux (2) solutions réelles distinctes

$\Delta = 0 \implies$ une (1) solution réelle

$\Delta < 0 \implies$ deux (2) solutions complexes conjuguées

4**[ème]* ***étape : Détermination des solutions de l'équation différentielle

Schéma récapitulatif

(1) Détermination de l'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$

(2) Signe du discriminant de l'équation caractéristique	**(3)** Nombre de solutions de l'équation caractéristique	**(4)** Solutions de l'équation différentielle
$\Delta > 0 \longrightarrow$	Deux (2) solutions $\boldsymbol{r_1}$ et $\boldsymbol{r_2}$ $\longrightarrow$	$\boldsymbol{f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}}$
$\Delta = 0 \longrightarrow$	Une (1) solution $\boldsymbol{r_0}$ $\longrightarrow$	$\boldsymbol{f(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}}$
$\Delta < 0 \longrightarrow$	Deux (2) solutions complexes conjuguées $\boldsymbol{\alpha + i\beta}$ et $\boldsymbol{\alpha - i\beta}$ $\longrightarrow$	$\boldsymbol{f(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}}$

Résolution d'une équation différentielle dans une étude de fonction

1- Montrer que la fonction f est une solution de l'équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = 2xe^x$

Proposition de solution

Il suffit de déterminer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de f , puis de remplacer dans l'équation différentielle (E) : y'' par f'' , y' par f' et y par f
Ensuite , on effectue les calculs : le résultat obtenu doit être égale à $2xe^x$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Exemple

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y = 4xe^x$

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - x)e^x$ est une solution de (E)

Proposition de solution

Calculons la dérivée f' de f

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = [\ (x^2 - x)e^x\ ]'$

$$= (x^2 - x)' \times e^x \ + \ (e^x)' \times (x^2 - x)$$

$$= (2x - 1)e^x \ + \ e^x \times (x^2 - x)$$

$$= (2x - 1 + x^2 - x)e^x$$

$$= (x^2 + x - 1)e^x$$

Calculons la dérivée seconde f'' de f

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = [\ f'(x)\ ]'$

$$= [\ (x^2 + x - 1)e^x\ ]'$$

$$= (x^2 + x - 1)' \times e^x \ + \ (e^x)' \times (x^2 + x - 1)$$

$$= (2x + 1)e^x \ + \ e^x \times (x^2 + x - 1)$$

$$= (2x + 1 + x^2 + x - 1)e^x$$

$$= (x^2 + 3x)e^x$$

Déterminons l'expression de $f''(x) - f(x)$

$$f''(x) - f(x) = (x^2 + 3x)e^x - (x^2 - x)e^x$$

$$= [(x^2 + 3x) - (x^2 - x)]e^x$$

$$= (x^2 + 3x - x^2 + x)e^x$$

$$= 4xe^x$$

Comme $f''(x) - f(x) = 4xe^x$ alors f est une solution de (E)

ℓim **Terminale** $= \boldsymbol{BAC}$

Elève → Travail

(8) Quelques questions dont les élèves doivent maitriser les méthodes de révolution

Une étude de fonction passe nécessairement par la maitrise des méthodes de résolution des questions ci-dessous :

Attention : cette liste ne contient pas toutes les questions, mais plutôt des propositions

(1) Déterminer l'***ensemble de définition*** de la fonction

Voir les conditions sur :

- les fonctions ***quotients*** (fonctions rationnelles)
- les fonctions ***racines carrées***
- les fonctions comportant " ***ln*** "
- les fonctions comportant " ***expo*** "

(2) Calculer les ***limites aux bornes*** de l'ensemble de définition et ***interprétation des résultats*** (les asymptotes)

(3) Etudier la ***continuité en un point***

(4) Etudier le ***prolongement par continuité*** d'une fonction en un point

(5) Etudier la ***dérivabilité*** et ***interprétation du résultat***

Pour la ***dérivabilité*** penser au calcul de la limite du taux de variation et non le calcul de la fonction dérivée en un point

Pour les ***interprétations des résultats :*** tangente horizontale , tangente verticale , tangente oblique

(6) Calcul de la ***dérivée d'une fonction***

Penser à mettre la fonction dérivée sous forme factorisée pour faciliter l'étude de son signe

(7) Etude du ***signe de la fonction dérivée***

On peut utiliser un tableau de signe ; mais dans certains cas , en tenant compte de l'intervalle d'étude (ou des intervalles d'étude) on détermine aisément le signe de la fonction dérivée

(8) ***Sens de variation*** d'une fonction

Il s'agit de dire sur quel(s) intervalle(s) la fonction est croissante ou décroissante ;
Le sens de variation d'une fonction dépend du signe de sa dérivée
Attention : il ne s'agit pas du tableau de variation

(9) ***Tableau de variation*** d'une fonction

Pour le remplir on tient compte de :

- L'ensemble de définition et des valeurs qui annulent la fonction dérivée (1ère partie)
- Le signe de la fonction dérivée (2ème partie)
- Les variations de la fonction (3ème partie)

x	***1ère partie***
$f'(x)$	***2ème partie***
$f(x)$	***3ème partie***

(10) Etude du ***signe d'une fonction***

Le signe $-$ signifie que le ***nombre est négatif***

Le signe $+$ signifie que le ***nombre est positif***

On peut utiliser :

1^er^ cas : Un extremum

plus précisément un ***minimum positif*** ou un ***maximum négatif***

x	a				b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+$

Dans le cas d'un ***minimum positif*** , on dira tout simplement que la fonction f admet un minimum positif sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$, donc pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $f(x) > 0$

x	a				b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-$

Dans le cas d'un ***maximum négatif*** , on dira tout simplement que la fonction f admet un maximum négatif sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$, donc pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $f(x) < 0$

2^ème^ cas : fonction continue et strictement monotone avec $f(\alpha) = 0$

x	a		α		b
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$-$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+$

La fonction f est ***continue et strictement croissante*** sur $[\,a\,;b\,]$,de plus $\alpha \in [\,a\,;b\,]$ et $\boldsymbol{f(\alpha) = 0}$

Donc pour tout $x \in [\,a\,;\alpha\,[$, $f(x) < 0$

pour tout $x \in \,]\,\alpha\,;b\,]$, $f(x) > 0$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Autre méthode

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[\,a\,;b\,]$ et $f(\alpha)=0$

$\forall\, x \in [\,a\,;\alpha\,[\ ,\ x<\alpha \ \Longrightarrow\ f(x)<f(\alpha)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Longrightarrow\ f(x)<0$

$\forall\, x \in \,]\,\alpha\,;b\,]\ ,\ x>\alpha \ \Longrightarrow\ f(x)>f(\alpha)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Longrightarrow\ f(x)>0$

Donc pour tout $x \in [\,a\,;\alpha\,[\,,\ f(x)<0$

pour tout $x \in \,]\,\alpha\,;b\,]\,,\ f(x)>0$

x	a		α		b
$f'(x)$			$-$		
$f(x)$	$+$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-$

La fonction f est ***continue et strictement décroissante*** sur $[\,a\,;b\,]$,de plus $\alpha \in [\,a\,;b\,]$ et $\boldsymbol{f(\alpha)=0}$

Donc pour tout $x \in [\,a\,;\alpha\,[\,,\ f(x)>0$

pour tout $x \in \,]\,\alpha\,;b\,]\,,\ f(x)<0$

Autre méthode

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[\,a\,;b\,]$ et $f(\alpha)=0$

$\forall\, x \in [\,a\,;\alpha\,[\ ,\ x<\alpha \ \Longrightarrow\ f(x)>f(\alpha)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Longrightarrow\ f(x)>0$

$\forall\, x \in \,]\,\alpha\,;b\,]\ ,\ x>\alpha \ \Longrightarrow\ f(x)<f(\alpha)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Longrightarrow\ f(x)<0$

Donc pour tout $x \in [\,a\,;\alpha\,[\,,\ f(x)>0$

pour tout $x \in \,]\,\alpha\,;b\,]\,,\ f(x)<0$

***3ème* cas** : utilisation d'un extrémum et d'une fonction continue et strictement monotone

Remarque : L'intervalle $[\, a\,; b\,]$ est partagé en deux intervalles

- Sur l'un , on utilisera un extremum pour déterminer le signe de la fonction
- Sur l'autre , on utilisera la continuité et la monotonie stricte de la fonction et le fait que $f(\alpha) = 0$

x	a		c		α		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$f(x)$	m	$\nearrow$	$\oplus$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\ominus$

⁕ ***m*** est un ***nombre réel positif***

Sur l'intervalle $[\, a\,; c\,]$, la fonction f admet pour minimum relatif le nombre positif m ; donc pour tout $x \in [\, a\,; c\,]$, $f(x) > 0$

Sur l'intervalle $[\, c\,; b]$, la fonction f est continue et strictement décroissante ; $\alpha \in [\, c\,; b\,]$ tel que $f(\alpha) = 0$

$$\forall\, x \in [\, c\,; \alpha\,[\ ,\ x < \alpha \implies f(x) > f(\alpha) \implies f(x) > 0$$

$$\forall\, x \in]\, \alpha\,; b\,]\ ,\ x > \alpha \implies f(x) < f(\alpha) \implies f(x) < 0$$

Donc pour tout $x \in [\, c\,; \alpha\,[$, $f(x) > 0$
pour tout $x \in]\, \alpha\,; b\,]$, $f(x) < 0$

On conclut donc que : $\begin{cases} \forall\, x \in\ ]\, a; \alpha[\, , f(x) > 0 \\ \forall\, x \in\ ]\alpha; b\,[\, , f(x) < 0 \end{cases}$

x	a		c		α		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	M	$\searrow$	$\ominus$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\oplus$

⁕ ***M*** est un ***nombre réel négatif***

Sur l'intervalle $[\, a\,; c\,]$, la fonction f admet pour maximum relatif le nombre négatif M ; donc pour tout $x \in [\, a\,; c\,]\,,\ f(x) < 0$

Sur l'intervalle $[\, c\,; b]$, la fonction f est continue et strictement croissante ; $\alpha \in [\, c\,; b\,]$ tel que $f(\alpha) = 0$

$\forall\, x \in [\, c\,; \alpha\, [\ \ ,\ \ x < \alpha \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(\alpha)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \quad f(x) < 0$

$\forall\, x \in]\, \alpha\,; b\,]\ ,\ \ x > \alpha \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(\alpha)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \quad f(x) > 0$

Donc pour tout $x \in [\, c\,; \alpha\, [\,,\ f(x) < 0$
pour tout $x \in]\, \alpha\,; b\,]\,,\ f(x) > 0$

On conclut donc que : $\begin{cases} \forall\, x \in\ ]\, a; \alpha [\,, f(x) < 0 \\ \forall\, x \in\ ]\alpha; b\, [\,, f(x) > 0 \end{cases}$

Cette question, c'est-à-dire le signe de $f(x)$, est souvent posée à la fin de la partie A du problème

De manière générale lorsque cette question est posée, c'est que la ***dérivée de la fonction de la partie B*** est liée à la ***fonction de la partie A***

(11) Déterminer l'***équation de la tangente*** $(\boldsymbol{T})$ à la courbe (C) au point d'abscisse a
(T) : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

(12) Montrer qu'une ***fonction f réalise une bijection*** d'un intervalle $[\ a\ ;b\ ]$ vers un intervalle K à préciser
Il suffit de montrer que la fonction est continue et strictement monotone
De plus l'intervalle K à déterminer est l'image directe de $[\ a\ ;b\ ]$ par la fonction f ; c'est-à-dire $K = f(\ [\ a\ ;b\ ]\ )$

(13) Montrer que ***l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α*** sur un intervalle donné

(14) ***Encadrement de α (solution de l'équation $f(x) = 0$) par deux nombres décimaux*** consécutifs
On peut utiliser :

- La méthode de balayage
- La méthode de dichotomie
- La méthode de dichotomie et de la méthode de balayage
- Une conséquence du ***théorème des valeurs intermédiaires***
  Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle $]\ a\ ;b\ [$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$ alors α la solution unique de l'équation $f(x) = 0$ est comprise entre a et b ($\boldsymbol{a < \alpha < b}$)

(15) Montrer qu'***une fonction f admet une bijection réciproque f^{-1}***

(16) Montrer que la ***bijection réciproque f^{-1} est dérivable en un point***

(17) Calculer la ***dérivée de la bijection réciproque f^{-1} en un point***

(18) Donner les ***variations de la bijection réciproque f^{-1} de f***

(19) Dresser le ***tableau de variation de la bijection réciproque f^{-1} de f***

(20) ***Construction de la courbe*** (C_f) de f , de la courbe $(C_{f^{-1}})$ de f^{-1} et des Tangentes

	Quelques éléments à considérer avant la construction d'une courbe
1	Ensemble de définition
2	Extremums (relatifs et/ou absolus)
3	Tangentes , asymptotes et branches paraboliques
4	Continuité et dérivabilité en des points particuliers
5	Tableau de variation

(21) ***Calculer l'aire $\mathcal{A}$*** , *en* cm^2 , de la partie du plan comprise entre la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.

$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx \times ua$, où $ua = OI \times OJ\ cm^2$

Pour de plus amples explications suivies d'exemples
voir les annales de mathématiques *Marathon de Butterfly* de la Terminale D

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Quelques propositions de réponses aux questions rencontrées dans les études de fonctions

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J)

n°	*Questions*	*Proposition de méthodes*
1	Etudier **la continuité** de f en x_0	Il suffit de vérifier que $x_0 \in D_f$, puis calculer $\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x)}$ • Si $\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x) = f(x_0)}$ alors f est continue en x_0 • Si $\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x) \neq f(x_0)}$ alors f n'est pas continue en x_0
2	Montrer que f admet un **prolongement par continuité** en x_0	Il suffit de vérifier que $x_0 \notin D_f$, puis calculer $\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x)}$ • Si $\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x) = infini}$ alors f n'est pas prolongeable par continuité en x_0 • Si $\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x) = \ell}$ $(\boldsymbol{réel})$ alors f est prolongeable par continuité en x_0. Dans ce cas le prolongement est une fonction g définie par : $\begin{cases} \forall\, x \in D_f \;;\; \boldsymbol{g(x) = f(x)} \\ \boldsymbol{g(x_0) = \ell} \end{cases}$
3	Montrer que ***la fonction f est le prolongement*** par continuité en x_0 ***de la fonction h***	Il suffit de montrer que : - la fonction h admet un prolongement par continuité en x_0 - et que ce prolongement est la fonction f

4	Etudier **la dérivabilité** de f en x_0	Il suffit de calculer $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (taux de variation) ***<u>1^er^ cas</u>*** : Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$ $(\boldsymbol{réel})$ alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$ ***<u>Interprétation graphique</u>*** $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0 ***<u>2^ème^ cas</u>*** : Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ $(\boldsymbol{ou}\ -\infty)$ alors f n'est pas dérivable en x_0 ***<u>Interprétation graphique</u>*** la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale au point de coordonnées $M\binom{x_0}{f(x_0)}$
5	Cas particulier de la dérivabilité au point d'abscisse 0 Interpréter graphiquement le résultat suivant $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$	***Attention*** : Vérifier que $f(0) = 0$ Par conséquent $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ***<u>1^er^ cas</u>*** : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = a$ $(a \in \mathbb{R})$ La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = a$ De plus la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur a ***<u>2^ème^ cas</u>*** : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ $(\boldsymbol{ou}\ +\infty)$ La fonction f n'est pas dérivable en 0 De plus la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0

6	Interpréter graphiquement les limites suivantes (1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = Infini$ (2) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ (3) $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (4) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \\ et \\ \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \\ et \\ \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty \end{cases}$	**Asymptotes verticales , horizontales , obliques** (1) La droite d'équation $x = x_0$ est une ***asymptote verticale*** à la courbe (C_f) (2) La droite d'équation $y = b$ est une ***asymptote horizontale*** à la courbe (C_f) en $+\infty$ (ou $-\infty$) (3) La droite d'équation $y = ax + b$ est une ***asymptote oblique*** à la courbe (C_f) en $+\infty$ (ou $-\infty$) **Branches paraboliques** (4) La courbe (C_f) admet une ***branche parabolique de direction*** $(\boldsymbol{OI})$ (5) La courbe (C_f) admet une ***branche parabolique de direction*** $(\boldsymbol{OJ})$ **Remarque** : Préciser en $+\infty$ ou en $-\infty$ selon le cas
7	Montrer que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote à la courbe** (C_f) en $+\infty$	Il suffit de montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y) = 0$ (Il faut aussi préciser que c'est une ***asymptote oblique***) ***Attention*** : Si c'est en $-\infty$, on montre que : $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - y) = 0$

8	Montrer que la droite d'équation $\boldsymbol{x = a}$ est une asymptote à la courbe (C_f)	Il suffit de montrer que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ($ou\ -\infty$) (Il faut aussi préciser que c'est une ***asymptote verticale***) ***Attention*** Dans certains cas , on doit calculer la limite à gauche et/ou à droite de $\boldsymbol{a}$
9	Montrer que la droite d'équation $\boldsymbol{y = b}$ est une asymptote à la courbe (C_f)	Il suffit de montrer que $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ (Il faut aussi préciser que c'est une ***asymptote horizontale***) ***Attention*** Selon la question , on peut calculer la limite en $-\infty$; en $+\infty$ ou en $-\infty$ et en $+\infty$
10	Déterminer une équation de la **tangente à la courbe** (C_f) au point **d'abscisse** $\boldsymbol{a}$	une équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0 est donnée par : (T) : $\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$ ***Remarque*** : n'oublier pas de calculer $f'(a)$ et $f(a)$, puis les remplacer par leurs valeurs dans l'équation ci-dessus
11	Etudier la **position relative** de la courbe (C_f) par rapport à la droite (D) d'équation $y = ax + b$	Etudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (D) revient à déterminer quel est l'élément qui est au-dessus ou en dessous de l'autre ; pour le savoir, la méthode consiste à : (1) déterminer le signe de $[\, f(x) - y]$ (2) Interpréter le signe de $[\, f(x) - y]$ • Si $\boldsymbol{f(x) - y > 0}$ alors la courbe $(\boldsymbol{C_f})$ ***est au dessus*** de la droite (D) • Si $\boldsymbol{f(x) - y < 0}$ alors la courbe $(\boldsymbol{C_f})$ ***est en dessous*** de la droite (D)

<table>
<tr>
<td>12</td>
<td>Etudier
les variations d'une fonction $\boldsymbol{f}$</td>
<td>Etudier les variations d'une fonction consiste à montrer que cette fonction est croissante ou décroissante sur un intervalle donné , et cela dépend du signe de la dérivée

(1) On calcule d'abord la dérivée f' de la fonction f (si cela n'est pas déjà fait)
(2) On étudie le signe de la dérivée $f'(x)$ suivant les valeurs de x
• Si $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ alors $\boldsymbol{f}$ est strictement croissante
• Si $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ alors $\boldsymbol{f}$ est strictement décroissante

Attention
On ne donne pas le sens de variation d'une fonction sur une réunion d'intervalles mais plutôt sur un intervalle.

Exemple : On ne dit pas
f est strictement croissante sur $]-\infty; 2[\cup]4\,;6]$
mais on dit plutôt que f est strictement croissante sur $]-\infty; 2[$ et sur $]4\,;6]$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>13</td>
<td>Dresser
le tableau de variation
d'une fonction f</td>
<td>Le tableau de variation est composé de " trois (3) parties "

1^{ère} partie : y figure les nombres réels qui apparaissent dans l'ensemble de définition de f (y compris $-\infty$ et/ou $+\infty$) et les nombres réels qui annulent la fonction dérivée

2^{ème} partie : les signes de la fonction dérivée f' suivant les valeurs de x

3^{ème} partie : les variations de la fonction f

<table>
<tr><td>x</td><td>1^{ère} partie</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>2^{ème} partie</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>3^{ème} partie</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>14</td>
<td>Démontrer que
l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$ admet une solution unique α dans $]a; b[$</td>
<td>1^{ère} méthode
Pour répondre à cette question, on peut montrer que :
- f réalise une bijection de $]a; b[$ sur $f(\,]a; b[\,)$
- puis vérifier que $0 \in f(\,]a; b[\,)$
Par la suite comme $0 \in f(\,]a; b[\,)$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]a; b[$

2^{ème} méthode (théorème des valeurs intermédiaires)
en d'autres termes il suffit de montrer que :
- f est continue et strictement monotone sur $]a; b[$
- $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires
alors l'équation $f(x) = 0$ admet un solution unique α dans $]a; b[$</td>
</tr>
</table>

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

15	Démontrer que f **réalise une bijection** de $]a\,;b[$ sur un intervalle K à préciser	Pour démontrer que f réalise une bijection sur $]a\,;b[$, il suffit de montrer que f est ***continue et strictement monotone*** sur $]a\,;b[$. De plus l'intervalle K à préciser est l'image par f de l'intervalle $]a\,;b[$, c'est-à-dire $K = f(\,]a;b[\,)$
16	Montrer que la fonction f **admet une bijection réciproque** f^{-1} sur l'intervalle I	Il suffit de monter que f réalise une bijection sur I car toute fonction bijective admet une bijection réciproque. De plus l'ensemble de définition de f^{-1} est $f(I)$
17	**la restriction** d'une fonction f sur un intervalle I	Dire que g est la restriction de f sur I signifie que la courbe (C_g) de g correspond à la courbe (C_f) de f sur l'intervalle I En d'autres termes ; ***pour tout*** $\boldsymbol{x \in I}$; $\boldsymbol{g(x) = f(x)}$
18	Déterminer **l'expression explicite de** $f^{-1}(x)$	Déterminer l'expression explicite de $f^{-1}(x)$ revient à résoudre l'équation $f(x) = y$; en d'autres termes exprimer x en fonction de y Si f est définie de I vers $f(I)$ alors il faut vérifier que $x \in I$ et $y \in f(I)$
19	Construire **la courbe** $\left(C_{f^{-1}}\right)$ de f^{-1}	f^{-1} est la bijection réciproque de f ; la courbe $\left(C_{f^{-1}}\right)$ est le symétrique de la courbe (C_f) par rapport à la première bissectrice. (la première bissectrice est droite d'équation $\boldsymbol{y = x}$)

20	Montrer que **la bijection réciproque** $\boldsymbol{f^{-1}}$ de f est **dérivable en** $\boldsymbol{b}$	La réponse à cette question se fait par étapes : ***1ère étape*** : déterminer l'antécédent de b par f (c'est-à-dire le nombre réel a tel que $f(a) = b$) ***2ème étape*** : vérifier que ***f soit dérivable en a*** et que $\boldsymbol{f'(a) \neq 0}$ Dans ces conditions f^{-1} soit dérivable en b et on a : $\boldsymbol{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} = \frac{1}{f'(a)}}$; car $\boldsymbol{f^{-1}(b) = a}$
21	Montrer que la fonction f est **une primitive de la fonction** $\boldsymbol{g}$ sur l'intervalle $[\, a\,; b\,]$	Il suffit de montrer que la dérivée de la fonction f est égale à la fonction g : $\forall\, x \in [\, a\,; b\,]\,,\ \boldsymbol{f'(x) = g(x)}$
22	Interpréter graphiquement l'intégrale $\boldsymbol{I = \int_a^b f(x)dx}$	I est égale à l'***aire de la partie du plan délimitée*** par la ***courbe*** $\boldsymbol{(C_f)}$ de f , ***la droite*** $\boldsymbol{(OI)}$ (l'axe des abscisses) et les droites d'équations respectives $\boldsymbol{x = a}$ et $\boldsymbol{x = b}$
23	Calculer **l'aire de la partie du plan** délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ $(a < b)$	Cela revient à calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx \times ua$ où ua est l'unité d'aire exprimée généralement en cm^2. $ua = OI \times OJ$

24	Calculer **l'aire** du domaine défini par l'ensemble des points $M\binom{x}{y}$ du plan tels que : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$	

Quelques exemples de problèmes

Problème 01
Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 2x - 2$

1- Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

2- a) Calculer la dérivée g' de la fonction g ; en déduire que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) Dresser le tableau de variation de g

3- a) Démontrer que l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une solution unique α

b) Justifier que $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$

c) Donner un encadrement de α d'amplitude $0{,}01$

4- Démontrer que $\begin{cases} \forall\, x \in \ ]-\infty; \alpha[\ ;\ g(x) < 0 \\ \forall\, x \in \ ]\alpha; +\infty[\ ;\ g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0\,[\cup]\,0\,; +\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) .Unité graphique : 2 cm

1- Calculer les limites de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$

2- a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Etudier les positions relatives de (D) par rapport à (C_f)

3- On admet que f est dérivable sur $]-\infty; 0\,[\cup]\,0\,; +\infty[$

a) Démontrer que pour tout $x \in \ ]-\infty; 0\,[\cup]\,0\,; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x ; puis en déduire les variations de f

c) Dresser le tableau de variation de f

4- Déterminer les coordonnées du point A où la tangente à (C_f) est parallèle à (D)

5- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1

6- Construire les droites (D) et (T) , puis la courbe (C_f)

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Problème 02

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{|x-2| - 2}$$

1- a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

b) Montrer que : $\begin{cases} \forall\, x \in \ ]-\infty; 0[\cup]0; 2] \ ; f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{-x} \\ \forall\, x \in \ ]2; 4[\cup]4; +\infty] \ ; f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 4} \end{cases}$

c) Calculer les limites de f aux bornes de D_f

2- a) Etudier la continuité de f en 2

b) Montrer que f n'est pas dérivable en 2

Trouver éventuellement la tangente à gauche et la tangente à droite à la représentation graphique C_f de f au point d'abscisse 2.

3- Calculer $f'(x)$ pour $x \in \ ]-\infty; 0[\cup]0; 2]$; puis pour $x \in [2; 4[\cup]4; +\infty]$

En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4- a) Montrer que la restriction h de f, à $]5; +\infty[$, est une bijection de $]5; +\infty[$ vers un intervalle K à préciser.

b) Calculer $f(6)$. Sans expliciter la réciproque h^{-1} de h , démontrer que h^{-1} est dérivable en $\frac{15}{2}$, puis calculer $(h^{-1})'\left(\frac{15}{2}\right)$

5- a) Montrer que les droites $(D_1) : y = -x + 2$ et $(D_2) : y = x + 2$ sont des asymptotes obliques à C_f en $-\infty$ et $+\infty$

b) Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Unité graphique : 1 cm

Construire la courbe (C_f) , les asymptotes à C_f et les tangentes au point d'abscisse 2,

Problème 03

1- On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$

a) Etudier les variations de g

b) Calculer la limite de g en $+\infty$

c) En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$; $g(x) < 0$

2- On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$$

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation

3- Montrer que les droites (D) : $y = 1$ et (Δ) : $y = -x + 1$ sont des asymptotes à (C) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$

4- Construire les droites (D) , (Δ) et la courbe (C)

5- a) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K à préciser.

b) Donner le sens de variation de la bijection réciproque f^{-1} de f , puis dresser son tableau de variation

c) Calculer $f(0)$ et démontrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$

d) En déduire $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right)$

6- a) Construire la courbe (C') de f^{-1}

b) Donner une expression explicite de f^{-1}

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Problème 04

Partie A

Vérifier que l'ensemble des solutions de l'inéquation $x \in \mathbb{R}$,$\sqrt{x^2+2x-3} < x+1$ est $S_{\mathbb{R}} = [1;+\infty[$

Partie B

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x - \sqrt{x^2+2x-3}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .Unité graphique : 1 cm

1- Donner l'ensemble de définition D_f de f et calculer les limites de f en $+\infty$ et en$-\infty$

Interpréter graphiquement le résultat de la limite de f en $+\infty$

2- Etudier la dérivabilité de$f$ en -3 et en 1 ; puis interpréter graphiquement chaque résultat.

3- On admet que $f$est dérivable pour $x < -3$ et pour $x > 1$ .Etudier le sens de variation de f à l'aide de la partie A ; puis dresser son tableau de variation.

4- Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x+1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

5- Etudier la position de (Δ) par rapport à (C) sur $]-\infty;-3]$

6- a) Donner les coordonnées de Ω point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses

b) Donner une équation de la droite (T) tangente à (C) au point Ω

7- Tracer (C) et (Δ)

8- Soit g la restriction de f à $[1;+\infty[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $[1;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

b) Soit g^{-1} la bijection réciproque de g . Sans expliciter g^{-1}, dresser son tableau de variation

c) Déterminer g^{-1}

Email : oualefidele@gmail.com Cel : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Problème 05

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 + x + \ln x$

1- Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$

2- Pour tout $x \in\ ]0;+\infty[$, calculer $g'(x)$

3- Etudier le sens de variation de g

4- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0{,}2 < \alpha < 0{,}3$

5- Démontrer que $\begin{cases} \forall\, x \in\ ]0;\alpha[\,,\ \ g(x) < 0 \\ \forall\, x \in\ ]\alpha;+\infty[\,,\ \ g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x \ln x}{1 + x} \quad si \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique : 2 cm

1- a) Démontrer que f est continue en 0

b) Démontrer que (C_f) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0

2- a) Calculer les limites de $f(x)$ et $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$

b) Interpréter graphiquement ces résultats.

3- a) Démontrer que pour tout $x > 0$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I

4- a) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

b) Justifier que $\alpha + 1 = -\ln \alpha$ et en déduire que $f(\alpha) = -\alpha$

5- a) Démontrer que la restriction h de f à l'intervalle $[1;+\infty[$ admet une bijection réciproque h^{-1}

b) Démontrer que h^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(h^{-1})'(0)$

6- Tracer (T) , (C_f) et $(C_{h^{-1}})$

7- a) Montrer que pour tout $x \in [\,1\,; e\,]$; $\dfrac{\ln x}{e+1} \leq f(x) \leq \dfrac{e}{2}\ln x$

b) En déduire , à l'aide d'une intégration par parties , un encadrement de l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par l'axe (OI) , la courbe (C_f) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Problème 06

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $g(x) = 1 + x\ln x$

1- a) Justifier que pour tout $x \in]0;+\infty[$; $g'(x) = 1 + \ln x$

b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation (*On ne calculera pas les limites de* g)

2- En déduire que pour tout $x \in]0;+\infty[$; $g(x) > 0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} \forall x \in]0;+\infty[\;, f(x) = \dfrac{x}{1+x\ln x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) . Unité graphique : 4 cm

1- a) Justifier que l'ensemble de définition de f est $[0 ; +\infty[$

b) Etudier la continuité de f en 0

c) Etudier la dérivabilité de f en 0

d) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est : $y = x$

e) Démontrer que :

- (C) est au-dessus de (T) sur $]0;1[$
- (C) est au-dessous de (T) sur $]1;+\infty[$

2- Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $+\infty$

3- a) On suppose que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$

b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation

4- Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O,I,J)

Partie C

1- a) Justifier que pour tout $x \in \ ]0;+\infty[\ , f(x) \leq 1$

b) Démontrer que pour tout $x \in\ [1;e]\ , 1-\dfrac{1}{1+x} \leq f(x)$

2- Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

Démontrer que : $16(e-1)+16\ln\left(\dfrac{2}{1+e}\right) \leq \mathcal{A} \leq 16(e-1)$

Problème 07

Partie A

Soit g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto 2xe^x - 1$

1- Déterminer l'ensemble de définition D_g de g , puis calculer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$

2- Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2(x+1)e^x$

3- Déterminer le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation

4- a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

b) Vérifier que : $0{,}35 < \alpha < 0{,}36$

5- Justifier que : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in \,]-\infty;\alpha[\,, & g(x) < 0 \\ \text{pour tout } x \in \,]\alpha;+\infty[\,, & g(x) > 0 \end{cases}$

Parie B

On considère la fonction numérique f définie comme suit : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto xe^x(xe^x - 1)$

(C_f) désignera la courbe représentative de f et le plan sera rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 6 cm

1- Justifier que la droite des abscisses est une asymptote à (C_f) en $-\infty$

2- Calculer la limite de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$. Donner une interprétation graphique des résultats obtenus.

3- Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)e^x g(x)$

4- a) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x, puis donner les variations de f sur $\mathbb{R}$

b) Justifier que $f(\alpha) = -\dfrac{1}{4}$

5- Dresser le tableau de variation de f

6- a) Calculer $f(0)$

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in \,]0;+\infty[$

c) Vérifier que $0{,}56 < \beta < 0{,}57$

7- Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x. Interpréter les résultats obtenus.

8- Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0

9- Construire dans le repère (O, I, J) la tangente (T) et la courbe (C_f)

Partie C

Soit λ un nombre réel tel que $\lambda < -1$ et la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$$

1- Justifier que h est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto x^2e^{2x}$

Calculer, à l'aide d'une intégration par partie, l'intégrale $\int_{\lambda}^{-1} xe^x dx$

2- a) Soit $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \lambda$. Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$

Problème 08

Partie A

Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x + x + 1$

1- Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$

2- Etudier les variations de φ

3- Dresser le tableau de variation de φ

4- Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$

5- Montrer que : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in \;]-\infty; \alpha[\;, \quad \varphi(x) < 0 \\ \text{pour tout } x \in \;]\alpha; +\infty[\;, \quad \varphi(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, I, J) .

Unité graphique : 4 cm

1- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x\varphi(x)}{(e^x + 1)^2}$

b) En déduire la sens de variation de f

2- Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$

3- a) Soit (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0 . Donner une équation de (T)

b) Etudier la position relative de (C) par rapport à (T)

4- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

5- a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$

b) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D)

6- Dresser le tableau de variation de f

7- Construire les droites (T) , (D) et la courbe (C)

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Problème 09

Partie A

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) . On considère ci-dessous son tableau de variation

x	$-\infty$		-4		-2		-1		0		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	‖	$+$	$\frac{1}{3}$ ‖ -2	$-$	‖	$+$	2	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

1- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

2- a) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 3} f(x)$$

b) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe (C_f) de f

3- Déterminer les images des intervalles suivants : $]-4\,;-1[$; $[-2\,;-1]$ et $]\,3;+\infty[$

4- a) Déterminer les solutions de l'équation (E) : $x \in D_f$, $f(x) = 0$

b) Déterminer les solutions des inéquations :

(I_1) : $x \in D_f$, $f(x) < 0$

(I_2) : $x \in D_f$, $f(x) > 0$

c) Déduire le signe de f sur D_f

5- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 5

6- a) f est-elle dérivable en 1 ? Justifier votre réponse

b) Donner une interprétation géométrique de la dérivabilité en 1

7- On considère la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$ telle que $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y) = 0$
En déduire la nature de la droite (D) par rapport à la courbe (C_f)

8- Construire (D) , (T) , les asymptotes et la courbe (C_f) . *On prendra un soin particulier au point d'abscisse* 1 .
Unité graphique : $1\ cm$

Partie B

Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle $]\,3; +\infty[$

1- Montrer que h réalise une bijection de l'intervalle $]\,3; +\infty[$ vers un intervalle K à préciser .

2- Soit h^{-1} , la bijection réciproque de h

a) Déterminer le sens de variation de h^{-1}

b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}

3- Construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ de h^{-1} dans le même repère que la courbe (C_f) de f

Problème 10

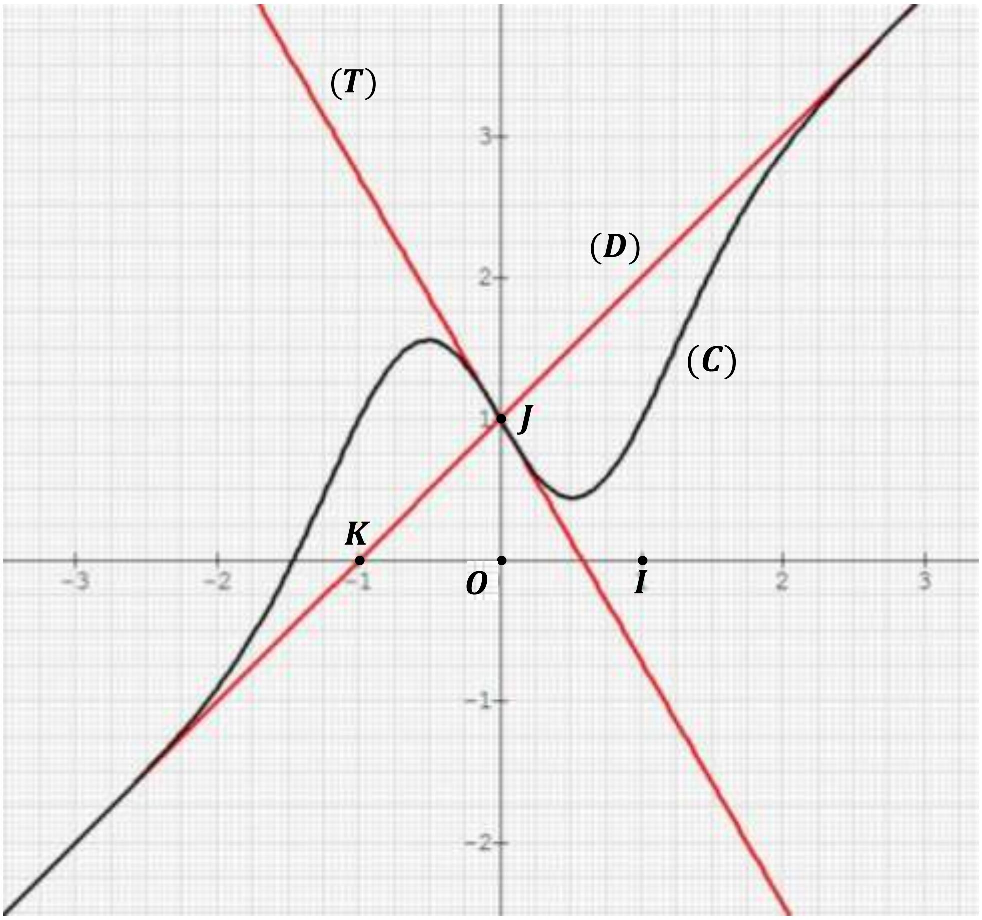
Partie A

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique : 4 cm

On considère ci-dessous la courbe (C) d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, son asymptote (D) et sa tangente (T) au point d'abscisse 0 .

On sait que :

- Le point $\boldsymbol{J(0\,;1)}$ est le centre de symétrie de la courbe (C)
- L'asymptote (D) passe par les points $\boldsymbol{K(-1\,;0)}$ et $\boldsymbol{J}$
- La tangente (T) a pour équation $\boldsymbol{y = (1-e)x + 1}$



1) Déterminer une équation de la droite (D)
2) On suppose qu'il existe deux nombres réels α et β et une fonction g definie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \alpha x + \beta + g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

a- Déterminer les réels α et β

b- Démontrer que, pour tout réel x , on a : $f(x) + f(-x) = 2$

c- En déduire que la fonction g est impaire, puis que la dérivée f' de la fonction f est paire

3) On suppose maintenant que :
$\forall x \in \mathbb{R}$; $g(x) = (ax + b)e^{-x^2}$ où a et b sont des nombres réels.

a- En utilisant la relation $g(-x) = -g(x)$, déterminer le réel b

b- Justifier que $g'(0) = -e$ et en déduire la valeur du réel a

Partie B

On considère la fonction f définie sur par $f(x) = 1 + x - xe^{-x^2+1}$

1) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2) a- Démontrer que pour tout réel x : $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}$

b- Calculer $f'(0)$ et en déduire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0

3) Le graphique de la courbe (C) suggère l'existence d'un minimum relatif de f sur l'intervalle [0 ; 1]

a- Calculer la dérivée f'' de f' , étudier son signe sur [0 ; 1] et dresser le tableau de variation de f' sur [0 ; 1]

b- Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur [0 ; 1]

c- Justifier que $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$

d- Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

Problème 11

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y = 4xe^{x}$

1- Déterminer les réels a et b pour que la fonction g definie par :
$g(x) = (ax^2 + bx)e^{x}$ soit solution de (E)

2- Soit une f fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que f est solution de (E) si et seulement $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' - y = 0$

3- Résoudre (E') puis en déduire la solution générale de (E)

4- Déterminer la fonction f solution de (E) telle que : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$

Partie B

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique : 2 cm

1- Déterminer la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat

2- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

3- a) Calculer la fonction dérivée de f

b) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

4- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1

5- Construire (T) et (C)

6- En utilisant deux intégrations par parties successives, déterminer l'aire de la partie $\mathcal{A}$ du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Partie C

Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$

1- Démontrer que g realise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle K à déterminer

2- On note g^{-1} la bijection réciproque de g et (C') sa courbe représentative dans le même repère orthonormé (O, I, J)
Démontrer que g^{-1} est derivable en e et calculer $(g^{-1})'(e)$

3- Déterminer une équation de la tangente (D) à (C') au point d'abscisse e

4- Construire (D) et (C')

5- Soit $\mathcal{B}$ la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C') et la droite d'équation $x = e$. Déterminer l'aire de $\mathcal{B}$
(On pourra utiliser la symétrie par rapport à la première bissectrice et le résultat de la question B-6)

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Problème 12

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x + (x-2)\ln x$

1- a) Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = 2\frac{x-1}{x} + \ln x$

b) Calculer $g'(1)$

c) Démontrer que $\begin{cases} \forall x \in]0;1[\ ; \ g'(x) > 0 \\ \forall x \in]1;+\infty[\ ; \ g'(x) < 0 \end{cases}$

2- a) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation (*on ne calculera pas les limites aux bornes*)

b) En déduire que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g(x) \geq 1$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) . Unité graphique $2\ cm$.

1- a) Calculer la limite de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$, puis interpréter graphiquement les résultats

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat

2- On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$

a) Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

b) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

3- Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur un intervalle que l'on précisera

4- a) Calculer $f(1)$

b) Démontrer que f^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $(f^{-1})'(1)$

5- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0;1[$

6- Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0{,}1$

7- Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 1

Partie C

On pose $\varphi(x) = f(x) - x$ et $u(x) = x - 1 - \ln x$

1- a) Déterminer le tableau de variation de u sur $]\,0\,;+\infty[$. *On ne calculera pas les limites aux bornes*

b) Justifier que pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty[$, $u(x) \geq 0$

2- a) Démontrer que pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty[$, $\varphi(x) = (\ln x - 1)u(x)$

b) Déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x

c) Déterminer la position de la courbe (C_f) par rapport à la tangente (T)

3- (C') est la courbe représentative de f^{-1} . Tracer (T) , (C_f) et la courbe (C') dans le même repère.

Problème 13

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]-\infty;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x+2}{1-x} - \ln|1-x|$

1- Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

2- a) Justifier clairement que : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} g(x) = -\infty$

b) Interpréter graphiquement les résultats

3- a) Démontrer que pour tout $x \in\,]-\infty;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{4-x}{(1-x)^2}$

b) En déduire les variations de g

c) Dresser le tableau de variation de g

4- a) Démontrer que g s'annule sur $]-\infty;1\,[$ pour une seule valeur α telle que $-1 < \alpha < 0$

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1

5- Justifier que : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in\,]-\infty;\ \alpha[\,\cup\,]1;+\infty[\ ;\ g(x) < 0 \\ \text{pour tout } x \in\,]\,\alpha;1\,[\ ;\ g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty[$ par $f(x) = (x+2)\ln|1-x|$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O,I,J) .

Unité graphique $1\ cm$.

1- Calculer les limites de f aux bornes de $]-\infty;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty[$ et préciser l'asymptote à la courbe (C)

2- Démontrer que pour tout $x \in\,]-\infty;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty[$, $f'(x) = -g(x)$

3- a) Etudier les variations de f

b) Dresser son tableau de variation

4- Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{(\alpha+2)^2}{1-\alpha}$

5- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses.

6- Tracer la courbe (C) . Prendre $\alpha = -0{,}8$

Partie C

Soit h la restriction de f à $[\,\alpha\,;1\,[$

1- Démontrer que h réalise une bijection de $[\,\alpha\,;1\,[$ vers un intervalle K à préciser.

2- Justifier que la bijection réciproque h^{-1}de h n'est pas dérivable en $h(\alpha)$

3- Déterminer le sens de variation de h^{-1} et dresser son tableau de variation.

4- Construire la courbe (C^{-1}) de h^{-1} dans le même repère

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Problème 14

Partie A

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$

1- a) Démontrer que la limite de g en $+\infty$ est egale à -1

b) Déterminer la limite de g en $-\infty$

2- a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = (x-2)e^{1-x}$

b) Déduire le sens de variation de g

c) Dresser le tableau de variation de g

3- a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

b) Justifier que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

c) Démontrer que : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in]-\infty; \alpha[\;;\; g(x) > 0 \\ \text{pour tout } x \in]\alpha; +\infty[\;;\; g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$

On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 2 cm

1- a) Démontrer que la limite de f en $+\infty$ est egale à $-\infty$

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$

2- a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = g(x)$

b) Déduire le sens de variation de f

c) Dresser le tableau de variation de f

3- a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D)

4- Démontrer que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$

5- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1

6- Démontrer que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \dfrac{1}{1-\alpha}$

7- On admet que l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ admet deux solutions. Soit β l'une des solutions.

a) Démontrer que $f(-\beta + 2) = e^{\beta - 1} f(\beta)$

b) En déduire l'autre solution de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

8- Construire (D) , (T) et (C) dans le repère (O, I, J) .On prendra $\alpha = 0{,}4$ et $\beta = 2{,}5$

Partie C

Soit λ un nombre réel strictement positif et $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C) , la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$

1- Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties

2- Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

Problème 15

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln x^2 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}$

1) Etudier les limites de g en 0 et en $+\infty$
2) a- Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

   b- Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation
3) Démontrer que l'équation : $x \in\ ]0;+\infty[\ , g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0{,}55 < \alpha < 0{,}60$.

   Donner une valeur approchée à 10^{-2} près par excès de α
4) Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

Partie B

Soit la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = e^x\left(\ln x^2 + \frac{2}{x}\right)$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) avec $OI = 4cm$ et $OJ = 0{,}5\ cm$

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en donner une interprétation graphique

   b- Justifier que pour tout $x \in\ ]0;+\infty[\ ,\ f(x) = 2e^x\left(\frac{x\ln x + 1}{x}\right)$

   c- Calculer alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire ?
2) a- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in\ ]0;+\infty[$ et donner le sens de variation de f

   b- A l'aide de la question A -3 démontrer que $f(\alpha) = -\left(\frac{2\alpha - 2}{\alpha^2}\right)e^\alpha$

   c- Dresser le tableau de variation de f
3) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1
4) Tracer avec soin (T) et (C)

Partie C

Soit la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $h(x) = e^x \ln x^2$

1) a- Démontrer que h est une primitive sur $]0;+\infty[$ de f

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

b- Déterminer la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 2

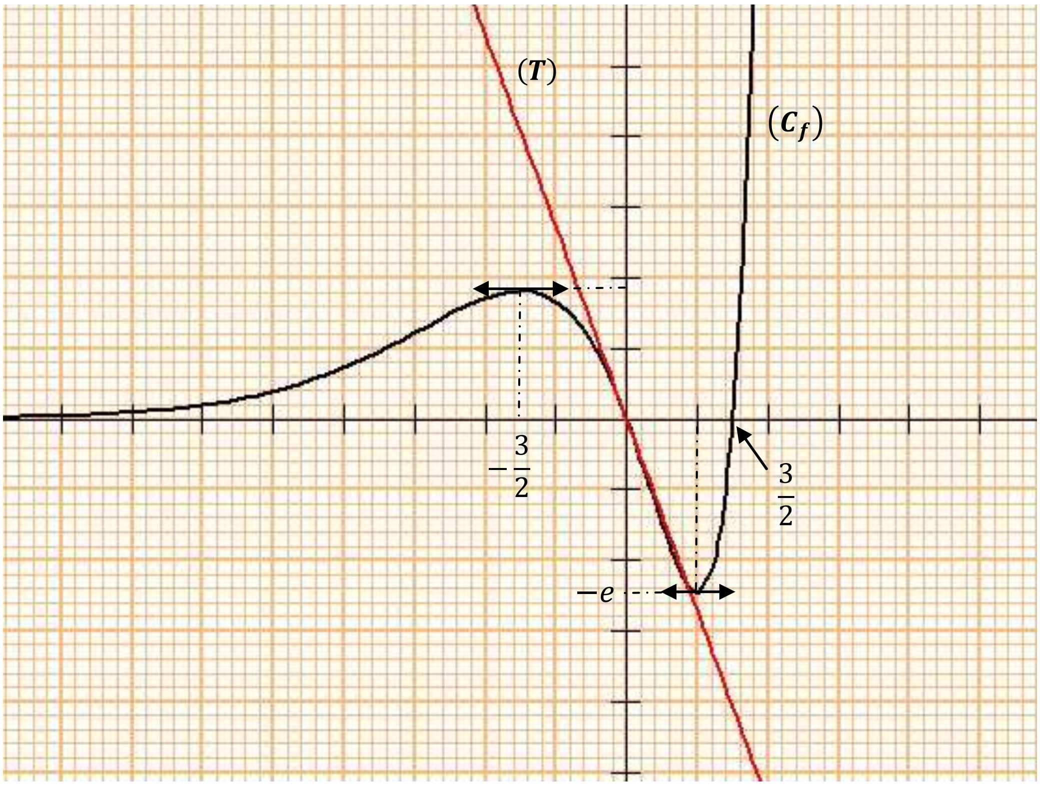
2) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de h avec celle de la fonction exponentielle népérienne .

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Problème 16

Partie A

La courbe (C_f) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite (T) est la tangente à (C_f) au point O origine du repère



1- a) Donner les solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

b) Donner les valeurs numériques respectives de $f(1)$; $f\left(-\frac{3}{2}\right)$; $f'(1)$

c) Déterminer une équation de (T) . En déduire $f'(0)$

2- On suppose que f est la fonction dérivée d'une fonction F sur $\mathbb{R}$

a) Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x

b) Donner le sens de variation de F

3- On précise que $f(x)$ est de la forme $f(x) = (ax^2 + bx)e^x$ où a et b sont deux nombres réels.

a) Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b

b) En déduire la valeur de b en utilisant les résultats de 1-c)

c) En utilisant les valeurs respectives de b et $f'(1)$, calculer a et donner l'expression de $f(x)$

Partie B

Soit g la fonction définie sur ℝ par : $g(x) = (2x^2 - 7x + 7)e^x$.

1- a) Calculer la limite de $g(x)$ en $+\infty$

b) Vérifier que pour tout réel $x \neq 0$, $g(x) = x^2e^x\left(2 - \frac{7}{x} + \frac{7}{x^2}\right)$

En déduire la limite de $g(x)$ en $-\infty$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

2- Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g

3- Tracer (C_g) la courbe de g , dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)
Unité graphique : $1\ cm$

4- a) A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_{-5}^{0} xe^x\,dx$ puis $\int_{-5}^{0} x^2e^x\,dx$

b) Soit $(\mathcal{A})$ le domaine du plan compris entre (C_g) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = -5$ et $x = 0$.

Hachurer ce domaine sur la figure et calculer son aire .

Problème 17

Ce problème comporte 3 parties A , B et C liées

Partie A

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par , $h(x) = \dfrac{x}{|x-2|}$

Démontrer que : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in [\,0\,;1\,] \ , \ h(x) \leq 1 \\ \text{pour tout } x \in [\,1\,;2\,[\cup]\,2\,;+\infty\,[\ , \ h(x) \geq 1 \end{cases}$

Partie B

Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = x\ln x - (x-2)\ln|x-2|$

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de g

   b) Démontrer que g admet un prolongement par continuité en 2 puis définir ce prolongement

2. a) Pour tout x élément de D_g , calculer $g'(x)$ puis montrer que $g'(x) = \ln(h(x))$

   b) Etudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x

   c) Donner les variations de g puis dresser son tableau de variation

3. Déterminer les signes de $g(x)$ suivant les valeurs de x

Partie C

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln|x-2|}{\ln x} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

2. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2-x)}{x-1} = -1$ et en déduire que f est continue en 1

   b) Montrer que f est dérivable en 1

3. a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

   b) En déduire les asymptotes éventuelles à (C_f) la courbe représentative de f

4. a) Pour tout x élément de D_f ; Calculer $f'(x)$ puis montrer que

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-2)(\ln x)^2}$$

   b) En utilisant la question B-3, montrer que le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $(x-2)$

   c) Dresser le tableau de variation de f

5. a) Montrer que f réalise une bijection de] 0 ; 2 [vers un intervalle K à préciser

   b) La bijection réciproque f^{-1} de f est –elle dérivable en -1 ?

6. Construire $\left(C_f\right)$ ainsi que les éventuelles asymptotes dans un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 2 cm

Problème 18

Partie A

Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ definie par $g(x) = \dfrac{x+1}{2x+1} - \ln x$

1- a)Déterminer l'ensemble de définition D_g de g

b) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$

2- a) Pour tout $x \in D_g$, calculer $g'(x)$

b)Déterminer le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x

c) Etudier les variations de g ; puis dresser son tableau de variation

3- a) Calculer $g(1)$ et $g(2)$. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[1; 2]$

b) Déduire un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2

c) Justifier que : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in \,]0;\alpha[\; ; \; g(x) > 0 \\ \text{pour tout } x \in \,]\alpha;+\infty[\; ; \; g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2 + x}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthogonal (O,I,J). (Unité graphique : OI $= 2\,cm$ et OJ $= 4\,cm$)

1- a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$

b) Interpréter graphiquement les résultats ci-dessus

2- a) Démontrer que pour tout $x \in \,]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}g(x)$

b) Déduire les variations de f

c) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

d) Dresser le tableau de variation de f . On prendra $\alpha = 1{,}8$

e) Construire (C_f)

Partie C

1- Démontrer que pour tout $x \geq 1$; $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

2- On pose $E_1 = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$ et $E_2 = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$

a) Calculer E_1 ; puis en utilisant une intégration par parties calculer E_2

b) Déduire un encadrement de $K = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$

3- Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C_f) , la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$

a) Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de K

b) En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$ en cm^2

Problème 19

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{-x} + 2$, où a et b sont des nombres réels

Le tableau de variation de g se présente comme suit :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$			$e^{-2}+2$		
	$-\infty$	↗		↘	2

1- a) Calculer la dérivée $g'(x)$ de la fonction g en fonction des réels a et b

b) En utilisant les données du tableau de variation de g , déterminer les réels a et b

2- On admet que $g(x) = (x - 1)e^{-x} + 2$

a) Démontrer que l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une solution unique noté α

b) Vérifier que $-0{,}4 < \alpha < -0{,}3$

c) Démontrer que $\begin{cases} \text{pour tout } x \in \,]-\infty; \alpha[\ ;\ g(x) < 0 \\ \text{pour tout } x \in \,]\alpha; +\infty[\ ;\ g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1 - xe^{-x}$

On désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique : $2\ cm$

1- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

2- On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$

3- Etudier les variations de f , puis dresser son tableau de variation

4- Calculer $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

5- a) Démontrer que la droite (D): $y = 2x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$

b) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à (D)

6- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0

7- a) Démontrer que $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 1}$

b) En utilisant la question A-2-b , montrer que : $-1{,}40 < f(\alpha) < -1{,}02$

8- Construire avec précision la courbe (C) et les droites (D) et (T) dans le repère (O, I, J) . On prendra $f(\alpha) \approx -1{,}2$

Partie C

1- Montrer que la fonction $H(x) = -(x+1)e^{-x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = 2x - 1 - f(x)$

2- Soit λ un nombre réel strictement positif

a) Calculer en fonction de λ , l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2 , de la partie du plan délimitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

b) Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda)$

Email : oualefidele@gmail.com Cel : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Problème 20

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O,I,J) ; unité graphique : 5 cm

Partie A

On considère la fonction g definie sur $]\,0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$

1- a) Montrer que pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty[$, $g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$

b) Etudier le signe de $g'(x)$ sur $]\,0\,;+\infty[$

c) Etudier le sens de variation de g sur $]\,0\,;+\infty[$

2- a) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$

b) Dresser la tableau de variation de g

3- Montrer qu'il existe un réel unique $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$ et que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$

4- En déduire que $\begin{cases} \text{pour tout } x \in\,]0;\alpha[\ ;\ g(x) > 0 \\ \text{pour tout } x \in\,]\alpha;+\infty[\ ;\ g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

1- a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = g(x)$

b) En déduire le sens de variation de f sur $]\,0\,;+\infty[$

2- a) Calculer la limite de f en $+\infty$ $\left(\text{on pourra poser } X = \frac{1}{x^2}\right)$

b) Interpréter graphiquement ce résultat

3- a) Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2x\ln x$

(*On justifiera clairement cette nouvelle écriture de* $f(x)$)

b) En déduire que f est continue en 0

c) Etudier la dérivabilité de f en 0

d) En déduire que (C) admet une demi tangente au point d'abscisse 0 dont on précisera une équation

4- a) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$

b) Donner un encadrement de $f(\alpha)$ à partir de l'encadrement de α en utilisant la question A.3

5- Dresser le tableau de variation de f

6- On considère la fonction h définie sur $]\alpha\,;2[$ par $h(x) = f(x)$

a) Justifier que h réalise une bijection de $]\alpha\,;2[$ vers un intervalle K à préciser

b) Calculer $h(1)$ et justifier que la bijection réciproque h^{-1} de h est dérivable en $\ln 2$

c) Calculer $(h^{-1})'(\ln 2)$

7- Construire la courbe (C) , ses asymptotes et ses tangentes éventuelles.

Problème 21

Partie A

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2e^{2(x-1)}}{e^{2(x-1)} - 1}$

On désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1- a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

b) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$

Interpréter les résultats graphiquement si possible.

c) On suppose que f est dérivable sur D_f , calculer la fonction dérivée $f'(x)$

d) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

e) En déduire que : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in \ ]-\infty; 1[\ , \ f(x) < 0 \\ \text{pour tout } x \in \ ]1; +\infty[\ , \ f(x) > 0 \end{cases}$

2- a) Démontrer que le point $\Omega\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un centre de symétrie de (C)

b) Préciser la tangente à (C) au point A de (C) d'ordonnée 4

3- a) Démontrer que la restriction g de f à l'intervalle $]1; +\infty[$ est une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle K que l'on précisera.

b) Trouver une expression explicite de sa bijection réciproque g^{-1}

c) On désigne par (C') la représentation graphique de g^{-1} dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Calculer de deux manières différentes $(g^{-1})'(4)$
On donnera une équation de la tangente à (C') au point B d'abscisse 4

4- Construire (C) puis (C') dans le repère

Partie B

On considère la fonction h définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \ln\left|e^{2(x-1)} - 1\right|$

On désigne par (Γ) la représentation graphique de h dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1- a) Justifier que l'ensemble de définition D_h de h est : $D_h = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

b) Calculer les limites de h aux bornes de D_h et interpréter si possible les résultats obtenus

c) Montrer que pour tout $x \in D_h$, $h'(x) = f(x)$

En déduire le sens de variation de h et dresser son tableau de variation

2- a) Démontrer que pour tout $x \in D_h$, $h(x) = 2x - 2 + \ln|1 - e^{-2x+2}|$

b) En déduire que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote à (Γ) en $+\infty$

c) Etudier les positions relatives de (Γ) et (D)

3- a) Préciser le point d'intersection de (Γ) avec la droite (OI)

b) Construire (Γ)

Problème 22

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique : 5 cm

Partie A

On considère la fonction h définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par $h(x) = 1 + e^x + \ln x$

1- Calculer les limites de h en 0 et en $+\infty$

2- Démontrer que h est croissante sur $]\,0\,;+\infty[$

3- Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]\,0\,;+\infty[$ et que $0{,}11 < \alpha < 0{,}12$

4- En déduire que $\begin{cases} \text{pour tout } x \in]\,0;\,\alpha\,[\ ,\ h(x) < 0 \\ \text{pour tout } x \in]\,\alpha\,;+\infty[\ ,\ h(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

On considère la fonction g définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par $g(x) = x\ln x + e^x - 1$

1- Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$

2- a) Justifier que $g(\alpha) = -2 - (1-\alpha)\ln\alpha$

b) Déterminer à l'aide de la question A-3 un encadrement de $g(\alpha)$ d'amplitude 10^{-1} puis en déduire que $g(\alpha) < 0$

3- a) Démontrer que pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[\ ,\ g'(x) = h(x)$

b) Dresser le tableau de variation de g

4- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $]\,\alpha\,;+\infty[$ une solution unique β tel que $0{,}3 < \beta < 0{,}4$

5- En déduire que : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in]\,0;\,\beta\,[\ ,\ g(x) < 0 \\ \text{pour tout } x \in]\,\beta\,;+\infty[\ ,\ g(x) > 0 \end{cases}$

Partie C

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = (1 - e^{-x}) \ln x \quad , \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et (C) sa courbe représentative

1- a) Justifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{(e^{-x} - 1)}{-x} x \ln x$

b) En déduire que f est continue en 0

c) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat

2- a) Calculer la limite de $f(x)$ et celle de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$

b) Interpréter graphiquement le résultat précédent

3- a) Démontrer que pour tout $x \in]\,0; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} g(x)$

b) En déduire les variations de f

c) Dresser le tableau de variation de f

4- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1

5- Tracer (T) et construire (C) . On prendra $\beta = 0{,}35$

Problème 23

L'objectif de ce problème est l'étude complète de la fonction numérique f définie pour tout nombre réel x différent de -1 par : $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln\left|1 + \dfrac{1}{x}\right| & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On notera (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) avec $OI = 1\ cm$ et $OJ = 4\ cm$

Partie A

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \dfrac{2x+1}{x(x+1)} - 2\ln\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$

1- Déterminer l'ensemble de définition D_g de g et déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$

2- a) Montrer que : $\forall\, x \in\ ]-\infty; -1[\ \cup\ ]-1; 0[\ \cup\ ]0; +\infty[\ ;\ g'(x) = \dfrac{-1}{x^2(x+1)^2}$

b) Etudier les variation de g

(*on ne demande pas de calculer les limites de* g *en* -1 *et en* 0)

3- Calculer $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$; puis démontrer que : $\begin{cases} \forall\, x \in\ ]-\infty; -1[\ \cup \left]-\dfrac{1}{2}; 0\right[\ ;\ g(x) < 0 \\ \forall\, x \in \left]-1; -\dfrac{1}{2}\right[\ \cup\ ]0; +\infty[\ ;\ g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

1- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et déterminer la limite de f en -1

2- Etudier la continuité de f en 0

3- Démontrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$

4- Calculer la dérivée de f et démontrer que $f'(x) = x.g(x)$

5- a) Sachant que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, calculer la limite de f en $+\infty$

On admettra que la limite de f en $-\infty$ est $\dfrac{1}{2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

6- a) Déterminera les asymptotes à (C_f)

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0,8 < \beta < -0,7$

7- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0

Tracer (T), les asymptotes et la courbe (C_f)

Problème 24

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{-2x+1}{e^x} - 1$

1- a) Calculer $g(0)$

b) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

2- Montrer que pour tout nombre réel x ; $g'(x) = \dfrac{2x-3}{e^x}$

3- Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation

4- a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur une solution unique α dont on précisera la valeur exacte

b) Montrer que $\begin{cases} \text{pour tout } x \in]-\infty\,; 0\,[\,,\ g(x) > 0 \\ \text{pour tout } x \in]\,0\,; +\infty[\,,\ g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{e^x} - x + 2$

1- a) Calculer la limite de f en $+\infty$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement les résultats

2- a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$

b) Etudier les positions relatives de (C_f) et de (Δ)

3- Montrer que pour tout nombre réel x : $f'(x) = g(x)$

4- Déduire de la question A. 4-b) les variations de f puis dresser son tableau de variation

5- a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions β et λ telles que $\beta < \lambda$

b) Prouver que $-2 < \beta < -1$ et $2 < \lambda < 3$, puis donner un encadrement respectif de β et de λ à 10^{-1} près par deux nombres décimaux consécutifs

6- Construire (C_f) ainsi que (Δ) dans un repère orthonormé direct (O, I, J).

Unité graphique : $1\ cm$

Partie C

Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par (C_f), la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 3$

1- Représenter graphiquement $\mathcal{A}$

2- a) Justifier que $\mathcal{A} = \left(\int_0^3 \frac{2x+1}{e^x} dx\right) cm^2$

b) A l'aide d'une intégration par parties calculer $\mathcal{A}$

Problème 25

Partie A

On considère la fonction h définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par $h(x) = x - 3 + \ln x$

1- Etudier les variations de h

2- a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[\,2\,;3\,]$

b) Montrer à l'aide de la méthode de dichotomie que $2{,}20 < \alpha < 2{,}21$

3- Justifier que $\begin{cases} \text{pour tout } x \in]0\,;\alpha\,[\,,\ h(x) < 0 \\ \text{pour tout } x \in]\,\alpha\,;+\infty[\,,\ h(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$

On désigne par (C) sa courbe représentative

1- a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement les résultats

2- Montrer que pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$

3- Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

4- Montrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$ et en déduire un encadrement de α d'amplitude 2.10^{-2}

5- Résoudre dans l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$ puis en déduire le signe de $f(x)$

6- Construire la courbe (C)

Partie C

Soit F la primitive de f sur $]\,0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1 . On appelle (Γ) sa courbe représentative dans le même repère.

1- a) Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]\,0\,;+\infty[$

b) Préciser la nature des tangentes à (Γ) en ses points d'abscisses 1 et e^2

2- a) Vérifier que la fonction $x \longmapsto x\ln x - x$ est une primitive sur $]\,0\,;+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \ln x$

b) Montrer que pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty[$, $f(x) = \ln x - \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{2}{x} - 2$

c) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x

3- a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$

b) Montrer que pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty[$, $F(x) = x\ln x\left(1 - \dfrac{\ln x}{2x} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{\ln x}\right) + 3$

En déduire la limite de F en $+\infty$

4- Dresser le tableau de variation de F

5- Construire la courbe (Γ) dans le même repère que (C)

Problème 26

Partie A

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

1- a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g

b) Calculer les limites de g aux bornes de D_g

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $g(x) = 0$

3- Etablir le tableau de variation de g

4- En déduire le signe de g selon les valeurs du nombre réel x

Partie B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + \ln(4|1 - e^x|)$
On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 3 cm

1- a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

b) Déterminer les limites aux bornes de D_f

2- a) Justifier que $\begin{cases} \text{pour tout } x \in]-\infty ; 0[, \ f(x) = x + \ln 4 + \ln(1 - e^x) \\ \text{pour tout } x \in]0 ; +\infty[, \ f(x) = 2x + \ln 4 + \ln(1 - e^{-x}) \end{cases}$

b) Justifier que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = x + \ln 4$ et $y = 2x + \ln 4$ sont des asymptotes obliques à (C_f) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$

c) Calculer les coordonnées du point d'intersection A de (C_f) et (D_1)

d) Etudier la position de (C_f) par rapport à (D_2) sur $]0 ; +\infty[$

3- a) f étant dérivable sur D_f, vérifier que : pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = g(x)$

b) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

4- Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0\,;+\infty[$

a) Justifier que l'équation $h(x)=0$ admet dans $]0\,;+\infty[$ une solution unique α et que $0{,}18<\alpha<0{,}19$

b) Calculer les valeurs exactes de $h(\ln 2)$ et $(h^{-1})'(\ln 8)$ où h^{-1} est la bijection réciproque de h

5- Prouver que la courbe (C_f) coupe l'axe (OI) en deux points P et Q dont on donnera les coordonnées. On prendra $x_P<x_Q$

6- Tracer avec soin dans le repère (O,I,J)

a) La courbe (C_f) et toutes ses asymptotes. On marquera les points A , P et Q

b) La courbe (Γ) de h^{-1} et ses asymptotes

Problème 27

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{(2x-1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$

et (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) .
Unité graphique : $2\ cm$

1- a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f

b) Pour tout $\in D_f$, trouver les trois réels a , b et c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{e^x - 1}$$

2- Déterminer les limites de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$

3- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$

b) Justifier que la dérivée de la fonction f est liée à l'équation (E)

c) En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f

4- a) Démontrer que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = 2x - 1$ et $y = 2x - 2$ sont des asymptotes de la courbe (C) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$

b) La courbe (C) admet-elle une autre asymptote ? si oui ; préciser la .

5- Pour tout $x \in D_f$, on considère les points M et M' de (C) d'abscisses respectives x et $-x$.

a) Déterminer les coordonnées du milieu A du segment $[MM']$.

b) Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

6- Construire la courbe (C) et ses différentes asymptotes

7- a) Déterminer les réels α et β tels que pour tout $x \in D_f$, on ait :

$$f(x) = 2x + \alpha + \frac{\beta e^x}{e^x - 1}$$

b) Soit k un nombre réel supérieur ou égal à 2. Déterminer l'aire $\mathcal{A}(k)$ en cm^2 de la partie du plan contenant les points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifiant :

$\ln 2 \le x \le \ln k$ et $2x - 1 \le y \le f(x)$

c) Calculer la limite de $\mathcal{A}(k)$ lorsque k tend vers $+\infty$

Problème 28

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique : 1 cm
On désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x)$$

1- a) Calculer la limite de f à gauche en 1

b) Interpréter graphiquement le résultat

2- Justifier la courbe (C_f) admet une branche parabolique dont on précisera la direction

3- a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$

b) Justifier que f est dérivable en 0

c) Interpréter graphiquement le résultat précédent

4- On admet que f est dérivable sur $]-\infty; 1[$

a) Démontrer que pour tout $x \in]-\infty; 1[$, $f'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$

b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation

5- Justifier que pour tout $x \in]-\infty; 1[$, $f(x) \geq 0$

6- Construire la courbe (C_f) dans le repère (O, I, J)

Partie B

Soit F la primitive sur $]-\infty; 1[$ de la fonction f qui s'annule en 0

1- Sans déterminer $F(x)$

a) Donner la valeur de $F(0)$ et de $F'(0)$

b) Justifier que F est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$

2- Démontrer que la fonction $H : x \to (x-1)\ln(1-x) - x$ est une primitive sur $]-\infty; 1[$ de la fonction $h : x \to \ln(1-x)$

3- a) Déterminer les réels a et b tels que , pour tout $x \in]-\infty; 1 [$, $\frac{x}{1-x} = a + \frac{b}{1-x}$

b) En déduire une primitive sur $]-\infty; 1 [$ de la fonction $k : x \mapsto \frac{x}{1-x}$

4- Déterminer l'expression de $F(x)$

Partie C

Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0 ; 1 [$

1- Démontrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition

2- Donner le sens de variation de g^{-1} et dresser son tableau de variation

3- Construire la courbe (C^{-1}) de g^{-1} dans le même repère (O, I, J)

4- a) Démontrer que $(g^{-1})(1 - \ln 2) = \frac{1}{2}$

b) Justifier que g^{-1} est dérivable en $(1 - \ln 2)$ et calculer $(g^{-1})'(1 - \ln 2)$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Problème 29

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]-\infty\,;0]$ par : $g(x) = \frac{1}{2} + (x-1)e^{x}$

1- a) Calculer la limite de g en $-\infty$

b) Justifier que pour tout $x \in]-\infty\,;0]$, $g'(x) = xe^{x}$

c) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation

2- a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty\,;0]$

b) Justifier que $\begin{cases} \text{pour tout } x \in]-\infty\,;\alpha\,[\text{ , } g(x) > 0 \\ \text{pour tout } x \in]\,\alpha\,;0] \text{ , } g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). Unité graphique : 2 cm

f est la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x + 2 + (x-2)e^{x} & ; \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = x\ln x & ; \text{ si } x > 0 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative.

1- a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

c) Etudier la continuité de f en 0

d) Etudier la dérivabilité de f en 0 . Donner une équation des demi-tangentes au point d'abscisse 0

2- On suppose que f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]\,0\,;+\infty[$

a) Montrer que : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in]-\infty\,;0\,[\text{ , } f'(x) = g(x) \\ \text{pour tout } x \in]\,0\,;+\infty[\text{ , } f'(x) = 1 + \ln x \end{cases}$

b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

c) Justifier que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$

d) Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ) sur $]-\infty\,;0]$

e) Justifier que l'axe des ordonnées est une branche parabolique à la courbe (C) en $+\infty$

3- a) Justifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\alpha + 3 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)$

b) Construire la courbe (C) et la droite (Δ) . On prendra $\alpha = -2$

Partie C

On désigne par $(\mathcal{D}_\lambda)$ la partie du plan délimitée par la courbe (C) , la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x = \lambda$ et $x = -2$

1- En utilisant une intégration par parties , justifier que l'aire $\mathcal{A}_\lambda$ de $(\mathcal{D}_\lambda)$ est égale à : $\left(20e^{-2} + 4(\lambda - 3)e^{\lambda}\right) cm^2$

2- Calculer la limite de $\mathcal{A}_\lambda$ lorsque x tend vers $-\infty$

Correction des problèmes

Problème 1

Partie A

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$

1- ***Calculons les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$***

Limite de g en $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 + 2x - 2)$$
$$= \lim_{x \to -\infty} x^3$$
$$= -\infty$$

donc $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

Limite de g en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 + 2x - 2)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x^3$$
$$= +\infty$$

donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2- ***a) Calculons la dérivée de g***

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = 3x^2 + 2$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$; donc la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) Dressons le tableau de variation de g

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3- ***a) Démontrons que l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une solution unique α***

g esrt continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une solution unique α

b) Justifions que $\boldsymbol{0,7 < \alpha < 0,8}$

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en particulier sur]0,7 ; 0,8 [

De plus $g(0,7) \approx -0,257$

$g(0,8) \approx 0,112$

Comme $g(0,7) \times g(0,8) < 0$ alors $0,7 < \alpha < 0,8$

c) Donnons un encadrement de α d'amplitude $\boldsymbol{0,01}$ ***par la méthode de balayage***

x	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,77	0,78	0,79	0,80
Signe de $f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

On déduit du tableau ci-dessus que : $0,77 < \alpha < 0,78$

4- Démontrons que $\begin{cases} \forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]-\infty; \boldsymbol{\alpha}[\ ;\ \ \boldsymbol{g(x) < 0} \\ \forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]\boldsymbol{\alpha}; +\infty[\ ;\ \ \boldsymbol{g(x) > 0} \end{cases}$

La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(\alpha) = 0$

$\forall\, x \in\ ]-\infty; \alpha[\ ,\ x < \alpha \quad \Rightarrow \quad g(x) < g(\alpha)$

$\Rightarrow \quad g(x) < 0$

$\forall\, x \in\ ]\alpha; +\infty[\ ,\ x > \alpha \quad \Rightarrow \quad g(x) > g(\alpha)$

$\Rightarrow \quad g(x) > 0$

On déduit de ce qui précède que $\begin{cases} \forall\, x \in\ ]-\infty; \alpha[\ ;\ \ g(x) < 0 \\ \forall\, x \in\ ]\alpha; +\infty[\ ;\ \ g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

1- Calculons la limite de f en $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$
$$= -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$

Calculons la limite de f à gauche de 0

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{1}{x^2}(x^3 - 2x + 1)$$

$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} (x^3 - 2x + 1) = 1 \end{cases}$

Calculons la limite de f à droite de 0

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1}{x^2}(x^3 - 2x + 1)$$

$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} (x^3 - 2x + 1) = 1 \end{cases}$

Calculons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$

2- a) Démontrons que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$

calculons $\lim\limits_{x\to -\infty} (f(x) - y)$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= 0$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$

calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y)$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= 0$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$

b) Etudions les positions relatives de (D) par rapport à (C_f)

Etudions le signe de $(f(x)-y)$ suivant les valeurs de x

$$f(x)-y = \left(x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-x$$
$$= -\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{1}{x^2}(-2x+1)$$

Pour tout $x \in]-\infty;0\,[\,\cup\,]\,0\,;+\infty[$, $\frac{1}{x^2} > 0$

Donc le signe de $(f(x)-y)$ dépend du signe de $-2x+1$

Tableau de signe de $-2x+1$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x+1$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)-y$	$+$	$\Vert$ $+$	0	$-$

On conclut donc que :

La courbe (C_f) est au-dessus de (D) sur $]-\infty;0[$ et sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$

La courbe (C_f) est en-dessous de (D) sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

3- On admet que f est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

a) Démontrer que pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, $f'(x)=\left(x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)'$

$$= 1-2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$= 1+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}$$

$$= \frac{x^3+2x-2}{x^3}$$

$$= \frac{g(x)}{x^3}$$

b) Etudions le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x ; puis en déduire les variations de f

Le signe de $f'(x)$ dépend simultanément des signes de $g(x)$ et de x^3

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
x^3	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$\Vert$ $-$	0	$+$

On déduit du tableau ci-dessus que :
Pour tout $x \in]-\infty\,; 0\,[\cup]\,\alpha\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$
Pour tout $x \in]\,0\,;\,\alpha\,[$, $f'(x) < 0$
Par conséquent :
f est strictement croissante sur $]-\infty\,; 0\,[$ et sur $]\,\alpha\,;\,+\infty[$
f est strictement décroissante sur $]\,0\,;\,\alpha\,[$

c) *Dressons le tableau de variation de f*

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4- *Déterminons les coordonnées du point A où la tangente à (C_f) est parallèle à (D)*

Si la tangente (T) au point A est parallèle à (D) alors les deux droites ont le même coefficient directeur ; or le coefficient directeur de (T) est $f'(x_A)$ et celui de (D) est 1 résolvons donc l'équation $f'(x_A) = 1$

$$f'(x_A) = 1 \implies \frac{g(x_A)}{(x_A)^3} = 1$$

$$\implies \frac{(x_A)^3 + 2x_A - 2}{(x_A)^3} = 1$$

$$\implies (x_A)^3 + 2x_A - 2 = (x_A)^3$$

$$\implies 2x_A - 2 = 0$$

$$\implies x_A = 1$$

$y_A = f(x_A) = f(1) = 0$

les coordonnées du point A où la tangente à (C_f) est parallèle à (D) sont $A(1\,; 0)$

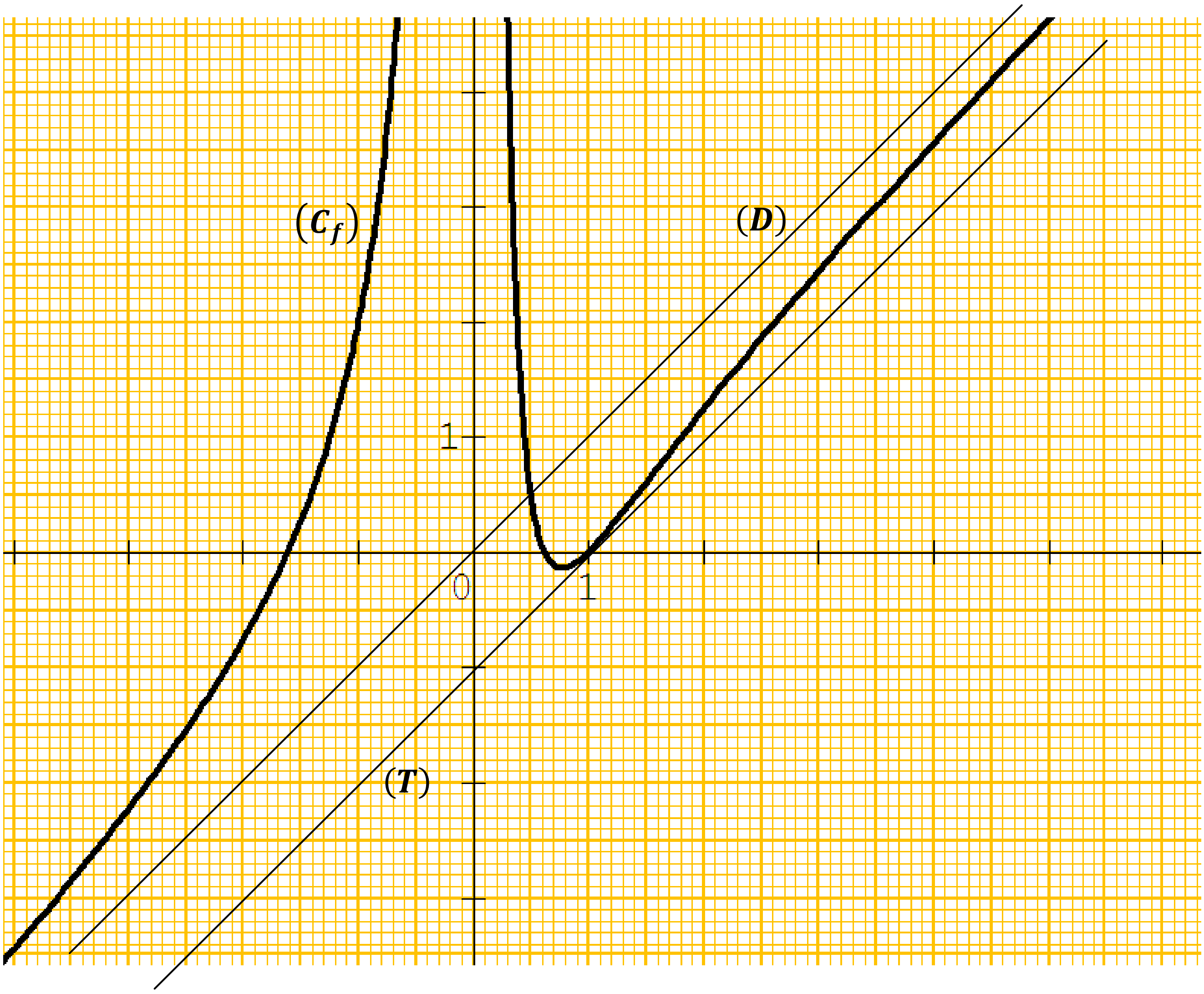
5- *Déterminons une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse* 1

$(T) : y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$

or $f'(1) = 1$ et $f(1) = 0$

donc $(T) : y = x - 1$

6- Construisons les droites (D) et (T), puis la courbe (C_f)



Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Problème 02

1- a) Déterminons l'ensemble de définition D_f de f

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff |x-2|-2 \neq 0 \\ &\iff |x-2| \neq 2 \\ &\iff x-2 \neq 2 \quad \text{et} \quad x-2 \neq -2 \\ &\iff x \neq 4 \quad \text{et} \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ 0 ; 4 \}$ (ou $D_f =]-\infty; 0 [\cup] 0 ; 4 [\cup] 4 ; +\infty[$)

b) Montrons que : $\begin{cases} \forall\, x \in \ ]-\infty; 0[\cup]0; 2] \ ; f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{-x} \\ \forall\, x \in \ ]2; 4[\cup]4; +\infty] \ ; f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x-4} \end{cases}$

Déterminons l'expression de $f(x)$ sans les barres de valeur absolue

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	0 $x-2$	$x-2$	
$f(x)$	$\dfrac{x^2-2x-3}{-x}$	‖ $\dfrac{x^2-2x-3}{-x}$	$\dfrac{x^2-2x-3}{x-4}$	‖ $\dfrac{x^2-2x-3}{x-4}$	

On déduit du tableau ci-dessus que :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \ ]-\infty; 0[\cup]0; 2] \ ; f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{-x} \\ \forall\, x \in \ ]2; 4[\cup]4; +\infty] \ ; f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x-4} \end{cases}$$

c) Calculons les limites de f aux bornes de D_f

Calculons la limite de f en $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x-3}{|x-2|-2} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x-3}{-x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} (-x) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Calculons la limite de f à gauche de 0

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x^2 - 2x - 3}{|x - 2| - 2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x^2 - 2x - 3}{-x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x}[-(x^2 - 2x - 3)]$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x}(-x^2 + 2x + 3)$$

$$= -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-x^2 + 2x + 3) = 3 \end{cases}$

Calculons la limite de f à droite de 0

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2 - 2x - 3}{|x - 2| - 2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2 - 2x - 3}{-x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}[-(x^2 - 2x - 3)]$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}(-x^2 + 2x + 3)$$

$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (-x^2 + 2x + 3) = 3 \end{cases}$

Calculons la limite de f à gauche de 4

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 4\\ <}} \frac{x^2-2x-3}{|x-2|-2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 4\\ <}} \frac{x^2-2x-3}{x-4}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 4\\ <}} \frac{1}{x-4} \times (x^2-2x-3)$$

$$= -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ <}} \dfrac{1}{x-4} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ <}} (x^2-2x-3) = 5 \end{cases}$

Calculons la limite de f à droite de 4

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 4\\ >}} \frac{x^2-2x-3}{|x-2|-2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 4\\ >}} \frac{x^2-2x-3}{x-4}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 4\\ >}} \frac{1}{x-4} \times (x^2-2x-3)$$

$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}} \dfrac{1}{x-4} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}} (x^2-2x-3) = 5 \end{cases}$

Calculons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x-3}{|x-2|-2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x-3}{-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (-x)$$

$$= -\infty$$

2- a) Etudions la continuité de f en 2

$2 \in D_f$ et $f(2) = \dfrac{3}{2}$

Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ <}} \frac{x^2-2x-3}{-x}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} \frac{x^2-2x-3}{x-4}$$

$$= \frac{3}{2}$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x) = f(2)$ alors f est continue en 2

b) Montrons que f n'est pas dérivable en 2

Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{\frac{x^2-2x-3}{-x}-\frac{3}{2}}{x-2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{\frac{2(x^2-2x-3)-3(-x)}{-x\times 2}}{x-2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{2x^2-4x-6+3x}{-2x(x-2)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{2x^2-x-6}{-2x(x-2)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{(2x+3)(x-2)}{-2x(x-2)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{2x+3}{-2x}$$

$$= -\frac{7}{4}$$

f est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2) = -\frac{7}{4}$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{\frac{x^2-2x-3}{x-4}-\frac{3}{2}}{x-2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{\frac{2(x^2-2x-3)-3(x-4)}{(x-4)\times 2}}{x-2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{2x^2-4x-6-3x+12}{2(x-4)(x-2)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{2x^2-7x+6}{2(x-4)(x-2)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{(2x-3)(x-2)}{2(x-4)(x-2)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{2x-3}{2(x-4)}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

f est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2) = -\dfrac{1}{4}$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ alors f n'est pas dérivable en 2

Déterminons la tangente à gauche à la représentation graphique C_f de f au point d'abscisse 2.

$$(T_g) : \ y = f'_g(2)(x-2) + f(2)$$
$$y = -\frac{7}{4}(x-2) + \frac{3}{2}$$
$$y = -\frac{7}{4}x + 5$$

Déterminons la tangente à droite à la représentation graphique C_f de f au point d'abscisse 2.

$$(T_g) : \ y = f'_d(2)(x-2) + f(2)$$
$$y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{3}{2}$$
$$y = -\frac{1}{4}x + 2$$

3- Calculons $f'(x)$ pour $x \in \ ]-\infty; 0[\cup]0; 2]$; puis pour $x \in [2; 4[\cup]4; +\infty]$

En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

Pour tout $x \in \ ]-\infty; 0[\cup]0; 2]$, $f'(x) = \left(\dfrac{x^2 - 2x - 3}{-x}\right)'$

$$= \frac{(x^2-2x-3)' \times (-x) - (-x)' \times (x^2-2x-3)}{(-x)^2}$$
$$= \frac{(2x-2) \times (-x) - (-1) \times (x^2-2x-3)}{x^2}$$
$$= \frac{-2x^2 + 2x + x^2 - 2x - 3}{x^2}$$
$$= \frac{-x^2 - 3}{x^2}$$
$$= -\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)$$

Pour tout $x \in [2;4[\cup]4;+\infty]$, $f'(x) = \left(\dfrac{x^2-2x-3}{x-4}\right)'$

$$= \frac{(x^2-2x-3)' \times (x-4) - (x-4)' \times (x^2-2x-3)}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{(2x-2) \times (x-4) - 1 \times (x^2-2x-3)}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{2x^2-8x-2x+8-x^2+2x+3}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{x^2-8x+11}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{(x-4)^2-16+11}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{(x-4)^2-5}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{\left(x-4-\sqrt{5}\right)\left(x-4+\sqrt{5}\right)}{(x-4)^2}$$

Remarque

$4+\sqrt{5} \approx 6{,}24$ et $4-\sqrt{5} \approx 1{,}76$

Déterminons le sens de variation de f

Pour tout $x \in\ ]-\infty;0[\cup]0;2]$, $f'(x) = -\left(\dfrac{x^2+3}{x^2}\right) < 0$

Donc f est tristement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;2]$

Pour tout $x \in [2;4[\cup]4;+\infty]$, $f'(x) = \dfrac{\left(x-4-\sqrt{5}\right)\left(x-4+\sqrt{5}\right)}{(x-4)^2}$

$$= \frac{\left[x-\left(4+\sqrt{5}\right)\right]\left[x-\left(4-\sqrt{5}\right)\right]}{(x-4)^2}$$

Pour tout $x \in [2;4[\cup]4;+\infty]$, $\dfrac{x-\left(4-\sqrt{5}\right)}{(x-4)^2} > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ sur $[2;4[\cup]4;+\infty]$ dépend du signe de $x-(4+\sqrt{5})$

Tableau de signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x sur $[2;4[\cup]4;+\infty]$

x	2	4		$4+\sqrt{5}$	$+\infty$
$x-(4+\sqrt{5})$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$

On en déduit que

f est strictement décroissante sur $]2;4[$ et sur $]4;4+\sqrt{5}]$

et f est strictement croissante sur $]4+\sqrt{5};+\infty[$

Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	0		2		4		$4+\sqrt{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|$	$-$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	$\|$	$+\infty \searrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow -\infty$	$\|$	$+\infty \searrow$	$10{,}47$	$\nearrow +\infty$

4- a) *Montrons que la restriction h de f, à $[7;+\infty[$, est une bijection de $[7;+\infty[$ vers un intervalle K à préciser.*

f est continue et strictement croissante sur $[7;+\infty[$; comme h est la restriction de f à $]7;+\infty[$ alors h est continue et strictement croissante sur $]7;+\infty[$ par conséquent h réalise une bijection de $[7;+\infty[$ vers $h([7;+\infty[)=f([7;+\infty[)$

Or $f([7;+\infty[)=\left[\frac{32}{3}\ ;\ +\infty\right[$

On conclut que h réalise une bijection de $[7;+\infty[$ vers $\left[\frac{32}{3}\ ;\ +\infty\right[$

b) Calculons $f(7)$

$$f(7)=\frac{32}{3}$$

Sans expliciter la réciproque h^{-1} de h, démontrons que h^{-1}est dérivable en $\frac{32}{3}$, puis calculons $(h^{-1})'\left(\frac{32}{3}\right)$

f est dérivable en 7 et $f'(7)=\frac{4}{9}$

Or h est la restriction de f à $[7;+\infty[$ donc h est dérivable en 7 et

$h'(7) = f'(7) = \frac{4}{9} \neq 0$ donc h^{-1}est dérivable en $\frac{32}{3}$

Calculons $(h^{-1})'\left(\frac{32}{3}\right)$

$$(h^{-1})'\left(\frac{32}{3}\right) = \frac{1}{h'(7)} = \frac{9}{4}$$

5- a) Montrons que la droite $(D_1) : y = -x + 2$ est une asymptote oblique à C_f en $-\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - y)$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2 - 2x - 3}{-x} - (-x + 2)\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 2x - 3 - (-x)(-x + 2)}{-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 2x - 3 - x^2 + 2x}{-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x}$$

$$= 0$$

On en déduit que la droite $(D_1) : y = -x + 2$ est une asymptote oblique à C_f en $-\infty$

Montrons que la droite $(D_2) : y = x + 2$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y)$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 4} - (x + 2)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 2x - 3 - (x - 4)(x + 2)}{x - 4}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 2x - 3 - x^2 + 2x + 8}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x-4}$$

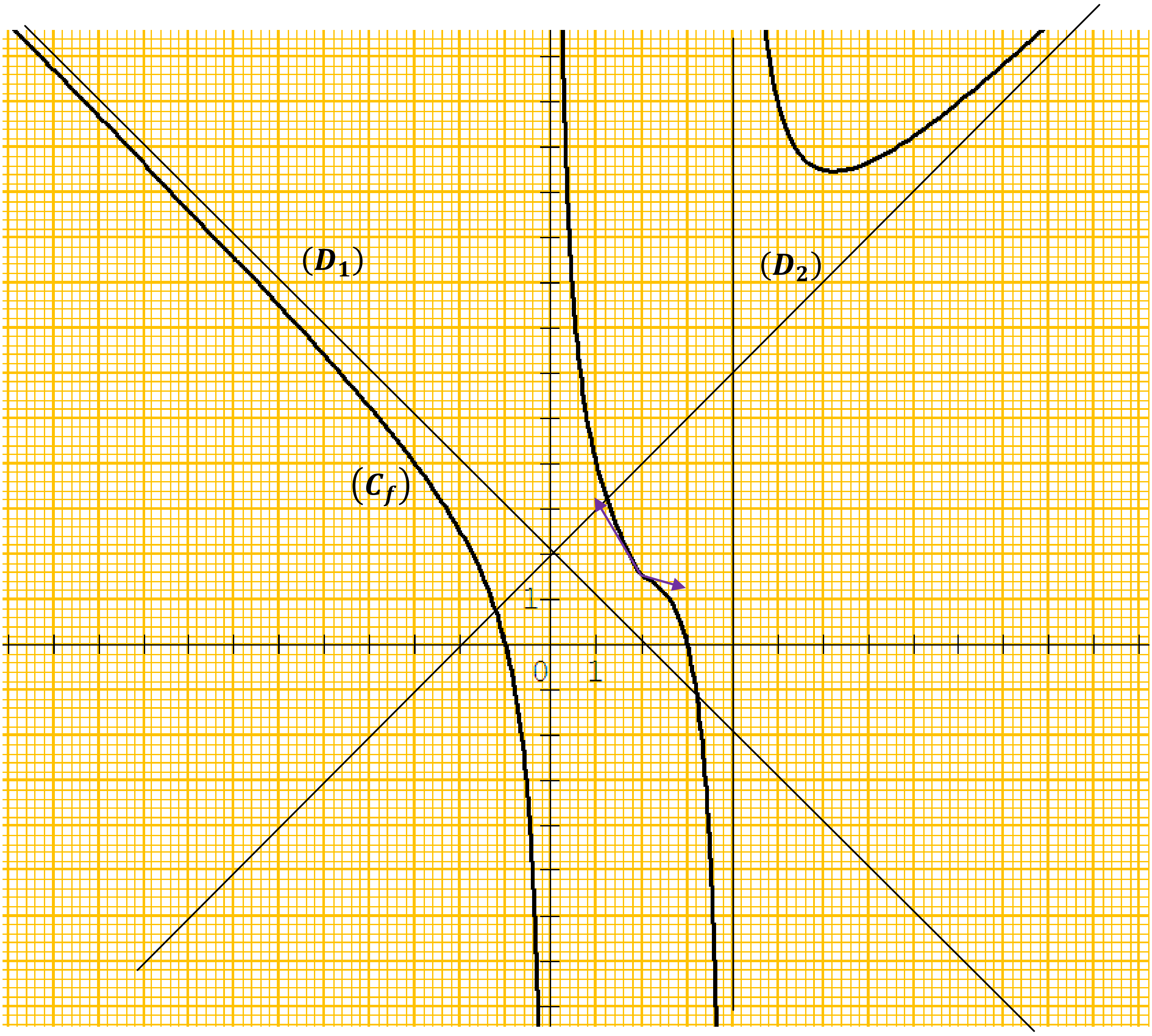
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x}$$

$$= 0$$

On en déduit que la droite $(D_2): y = x + 2$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$

b) Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Unité graphique : 1 cm

Construire la courbe (C_f) , les asymptotes à C_f et les tangentes au point d'abscisse 2,



Problème 03

1- a) Etudions les variations de g

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)\right]'$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' - (1)'\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(x)' \times \sqrt{x^2+1} \ - \left(\sqrt{x^2+1}\,\right)' \times x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{x^2+1} \ - \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times x}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{x^2+1} \ - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 \ - x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{x^2+1 \ - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$

Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) Calculons la limite de g en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1\right)$$

Comme $x > 0$, alors $|x| = x$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1\right)$$

$$= 0$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1 \end{cases}$

c) En déduire que : $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\,; \boldsymbol{g(x) < 0}$

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

on en déduit que g admet 0 pour maximum ; donc $\forall\, x \in \mathbb{R}\,; g(x) < 0$

2- a) Calculons la limite de f en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{2}x\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1} = +\infty \end{cases}$

Calculons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right)\left(-\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right)}{-\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}x+1\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right)^2}{-\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}x^2-x+1\right)-\left(\frac{1}{4}(x^2+1)\right)}{-\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{2}|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

Pour $x>0$, $|x|=x$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{4}x^2-x+1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{2}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+\frac{3}{4}}{x\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1+\frac{3}{4x}\right)}{x\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{3}{4x}}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= 1$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{4x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right) = -1 \end{cases}$

b) Etudions le sens de variation de f

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right)'$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= g(x)$$

Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) < 0$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$; par conséquent f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 1

3- Montrons que la droite (D) : $y = 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y)$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 1)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} f(x) - \lim_{x\to+\infty} 1 \qquad ; \quad \text{or} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0$$

On en déduit que la droite (D) : $y = 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$

Montrons que la droite (Δ) : $y = -x + 1$ est une asymptote à (C) en $-\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y)$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to-\infty} \left[\left(-\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right) - (-x+1)\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + x - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right)}{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}(x^2+1)}{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}}$$

$$= 0$$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right) = -\infty$

On en déduit que la droite (Δ) : $y = -x + 1$ est une asymptote à (C) en $-\infty$

4- *Construisons les droites (D) , (Δ) et la courbe (C) (Voir à la fin)*

5- *a) Démontrons que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K à préciser.*

f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) =]\,0;+\infty[$

b) Donnons le sens de variation de la bijection réciproque f^{-1} de f

Toute fonction qui réalise une bijection sur un intervalle donné , a le même sens de variation que sa bijection réciproque

Par conséquent la bijection réciproque f^{-1} de f est strictement décroissante sur $]\,0;+\infty[$

Dressons le tableau de variation de la bijection réciproque f^{-1} de f

x	0	$+\infty$
$f^{-1}(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

c) Calculons $f(0)$

$f(0)=\frac{3}{2}$

démontrons que f^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en 0 et $f'(0)=g(0)=-\frac{1}{2}\neq 0$

On en déduit que f^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$

d) Déduisons de ce qui précède $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right)$

$$
\begin{aligned}
(f^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{f'(0)} \\
&= \frac{1}{-\frac{1}{2}} \\
&= -2
\end{aligned}
$$

6- a) Construisons la courbe (C') de f^{-1} (voir à la fin)

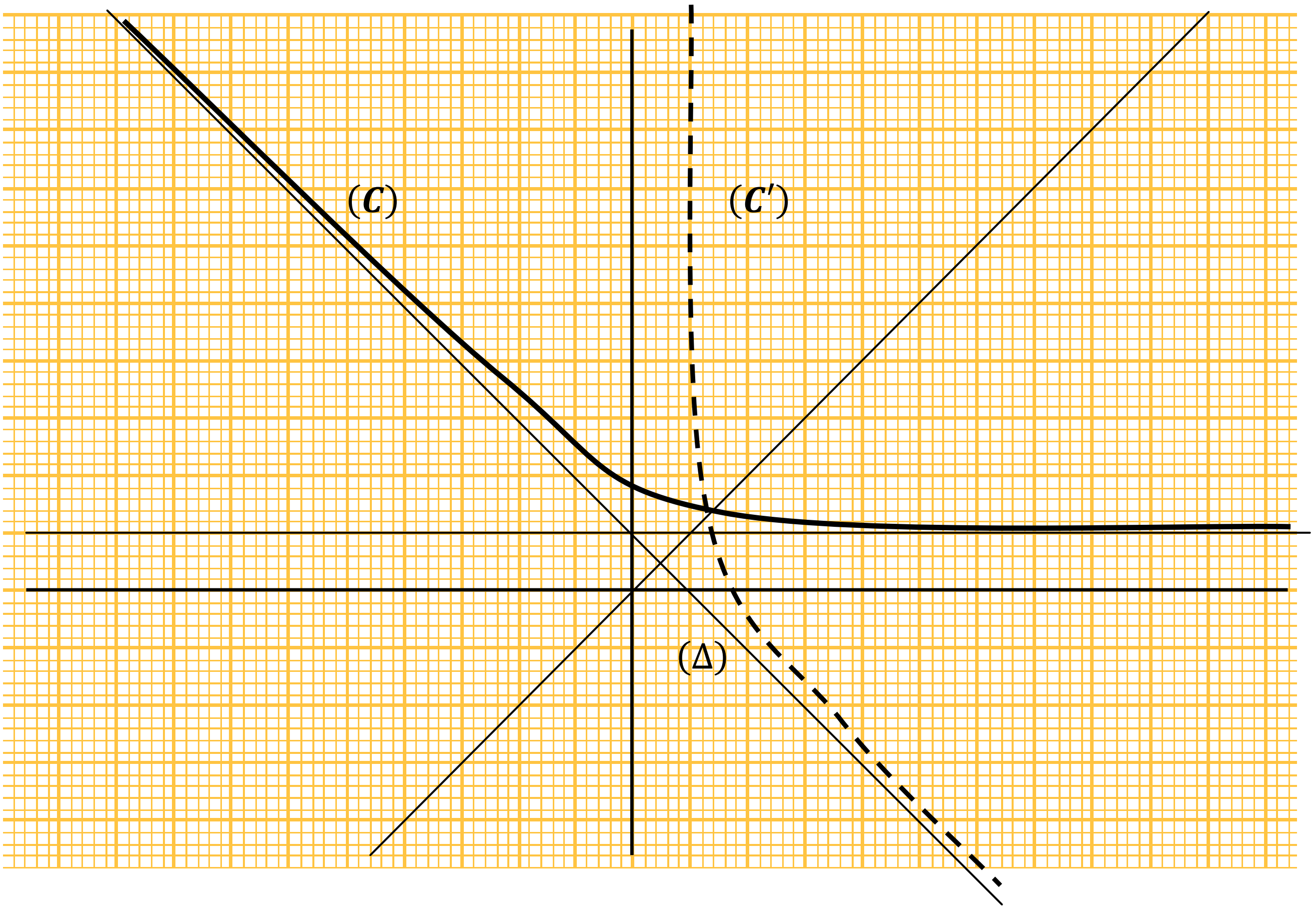
b) Donnons une expression explicite de f^{-1}

$$
\begin{aligned}
y=f(x) &\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} \\
&\Leftrightarrow y-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} \\
&\Leftrightarrow \left[y-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)\right]^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow y^2-2y\left(-\frac{1}{2}x+1\right)+\left(-\frac{1}{2}x+1\right)^2=\frac{1}{4}(x^2+1) \\
&\Leftrightarrow y^2-2y\left(-\frac{1}{2}x+1\right)+\frac{1}{4}x^2-x+1=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow y^2-2y\left(-\frac{1}{2}x+1\right)-x+1=\frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow y^2+xy-2y-x+1=\frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow xy-x=-y^2+2y-1+\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \ x(y-1) = -y^2 + 2y - \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \ x = \frac{-y^2 + 2y - \frac{3}{4}}{y-1}$$

Il en résulte qu'une expression explicite de f^{-1} est : $f^{-1}(x) = \dfrac{-x^2 + 2x - \frac{3}{4}}{x-1}$



Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Problème 5

Partie A

La fonction g est définie sur $]0;+\infty[$

1- ***Calculons les limites de g en 0 et en $+\infty$***

Limite de g en 0

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} (1+x+\ln x)$$
$$= -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}(1+x) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \ln x = -\infty \end{cases}$

Limite de g en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (1+x+\ln x)$$
$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

2- ***Calculons la dérivée de la fonction g***

pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[\,$; $g'(x) = (1+x+\ln x)'$

$$= 1 + \frac{1}{x}$$
$$= \frac{x+1}{x}$$

3- ***Etudions le sens de variation de g***

(Le sens de variation d'une fonction dépend du signe de sa dérivée)

Pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, $x > 0$ et $x+1 > 0$

Donc pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, $g'(x) > 0$

Par conséquent la fonction g est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty[$

4- ***Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]\,0\,;+\infty[$ telle que $0,2 < \alpha < 0,3$***

(On peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires)

La fonction g est continue et strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]\,0\,;+\infty[$ vers $g(\ ]\,0\,;+\infty[\ ) =]-\infty\,;\,+\infty\,[$

Remarque

$$g(\ ]\,0\,;+\infty[\ ) = \left]\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[=]-\infty\,;\,+\infty\,[$$

Comme $0 \in]-\infty\,;\,+\infty\,[$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]\,0\,;+\infty[$

g est continue et strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty[$ en particulier sur $[0,2\,;0,3\,]$
De plus $g(0,2) \approx -0,409$
$g(0,3) \approx 0,096$

Comme $g(0,2) \times g(0,3) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]\,0\,;+\infty[$ telle que
$0,2 < \alpha < 0,3$

5- *Démontrons que* $\begin{cases} \forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]\mathbf{0};\boldsymbol{\alpha}[\,,\ \ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) < \mathbf{0} \\ \forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]\boldsymbol{\alpha};+\infty[\,,\ \ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0} \end{cases}$

- La fonction g est strictement croissante sur $]0;\alpha[$
  donc pour tout $x \in \left]0\,;\alpha\right[$, $x < \alpha \implies g(x) < g(\alpha)$
  $\implies g(x) < 0$

- La fonction g est strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$
  donc pour tout $x \in\ ]\alpha;+\infty[$, $x > \alpha \implies g(x) > g(\alpha)$
  $\implies g(x) > 0$

On conclut que $\begin{cases} \forall\, x \in\ ]0;\alpha[\,,\ \ g(x) < 0 \\ \forall\, x \in\ ]\alpha;+\infty[\,,\ \ g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

1- a) ***Démontrons que f est continue en 0***

On sait que $f(0)=0$; calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x\ln x}{1+x}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{1+x} \times x\ln x$$
$$= 0$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{1+x} = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0 \end{cases}$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = 0 = f(0)$ alors la fonction f est continue en 0

b) ***Démontrons que (C_f) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse* 0**

(cela revient à montrer que la fonction f n'est pas dérivable en 0)

Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)}{x}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\frac{x\ln x}{1+x}}{x}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x\ln x}{x(1+x)}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln x}{1+x}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{1+x} \times \ln x$$
$$= -\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{1+x} = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty \end{cases}$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$ alors f n'est pas dérivable en 0

La courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale d'équation $x = 0$ au point d'abscisse 0

2- a) ***Calculons les limites de*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***et*** $\boldsymbol{\dfrac{f(x)}{x}}$ ***quand*** $\boldsymbol{x}$ ***tend vers*** $+\infty$

Limite de $\boldsymbol{f(x)}$ ***quand*** $\boldsymbol{x}$ ***tend vers*** $+\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{1 + x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + x} \times \ln x \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1 + x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

Limite de $\boldsymbol{\dfrac{f(x)}{x}}$ ***quand*** $\boldsymbol{x}$ ***tend vers*** $+\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x \ln x}{1 + x}}{x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x(1 + x)} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + x} \times \frac{\ln x}{x} \\ &= 0\end{aligned}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1 + x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

b) ***Interprétons graphiquement les résultats des calculs de limites de*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***et*** $\boldsymbol{\dfrac{f(x)}{x}}$ ***quand*** $\boldsymbol{x}$ ***tend vers*** $+\infty$

comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$

3- a) ***Démontrons que pour tout*** $\boldsymbol{x > 0}$, $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}}$

pour tout $x > 0$, $f'(x) = \left(\dfrac{x\ln x}{1+x}\right)'$

$$= \frac{(x\ln x)' \times (1+x) - (1+x)' \times x\ln x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{[(x)' \times \ln x + (\ln x)' \times x] \times (1+x) - x\ln x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{\left(\ln x + \frac{1}{x} \times x\right) \times (1+x) - x\ln x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(\ln x + 1) \times (1+x) - x\ln x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{\ln x + x\ln x + 1 + x - x\ln x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{\ln x + 1 + x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1 + x + \ln x}{(1+x)^2} \quad ; \quad \text{or} \quad g(x) = 1 + x + \ln x$$

$$= \frac{g(x)}{(1+x)^2}$$

b) ***Déterminons une équation de la tangente*** $(\boldsymbol{T})$ ***à la courbe*** $(\boldsymbol{C_f})$ ***au point I d'abscisse*** $\boldsymbol{x_I = 1}$

$(T) : y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$

Calculons $f'(1)$ et $f(1)$

$f'(1) = \dfrac{g(1)}{(1+1)^2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = \dfrac{1 \times \ln 1}{1+1} = \dfrac{0}{2} = 0$

$y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$

$y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 0$

$= \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point I est : (T): $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

4- a) ***Etudions les variations de f***

Pour tout $x > 0$; $(x+1)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$
Or d'après la question A-5 on a :

$$\begin{cases} \forall\, x \in\ ]0;\alpha[\,,\ \ g(x) < 0 \\ \forall\, x \in\ ]\alpha;+\infty[\,,\ \ g(x) > 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\begin{cases} \forall\, x \in\ ]0;\alpha[\,,\ \ f'(x) < 0 \\ \forall\, x \in\ ]\alpha;+\infty[\,,\ \ f'(x) > 0 \end{cases}$

Par conséquent f est strictement décroissante sur $]0;\alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$

Tableau de variation de f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

b) ***Justifions que*** $\boldsymbol{\alpha + 1 = -\ln\alpha}$

$$g(\alpha) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 + \alpha + \ln\alpha = 0$$
$$\Longrightarrow \quad 1 + \alpha = -\ln\alpha$$

Déduisons que $\boldsymbol{f(\alpha) = -\alpha}$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha\ln\alpha}{1+\alpha} \quad ; \qquad \text{or} \quad 1 + \alpha = -\ln\alpha \ \Longrightarrow\ \ln\alpha = -(1+\alpha)$$
$$= \frac{\alpha[-(1+\alpha)]}{1+\alpha}$$

$$= \frac{-\alpha(1+\alpha)}{1+\alpha}$$
$$= -\alpha$$

5- a) ***Démontrons que la restriction h de f à l'intervalle*** $[\mathbf{1};+\infty[$ ***admet une bijection réciproque*** $\boldsymbol{h^{-1}}$

(Pour montrer qu'une fonction admet une bijection réciproque il suffit de montrer que cette fonction est bijective ; car toute fonction bijective admet une bijection réciproque)

f est continue et strictement croissant sur $[1;+\infty[$, comme h est la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$ alors h est aussi continue et strictement croissant sur $[1;+\infty[$
Par conséquent h réalise une bijection de $[1;+\infty[$ vers $h([1;+\infty[\,) = f([1;+\infty[\,)$
donc h admet une bijection réciproque h^{-1}

b) ***Démontrons que*** $\boldsymbol{h^{-1}}$ ***est dérivable en*** $\mathbf{0}$ ***et calculer*** $(\boldsymbol{h^{-1}})'(\mathbf{0})$

On a montré à la question B-3-b que $f(1) = 0$ donc $h(1) = 0$

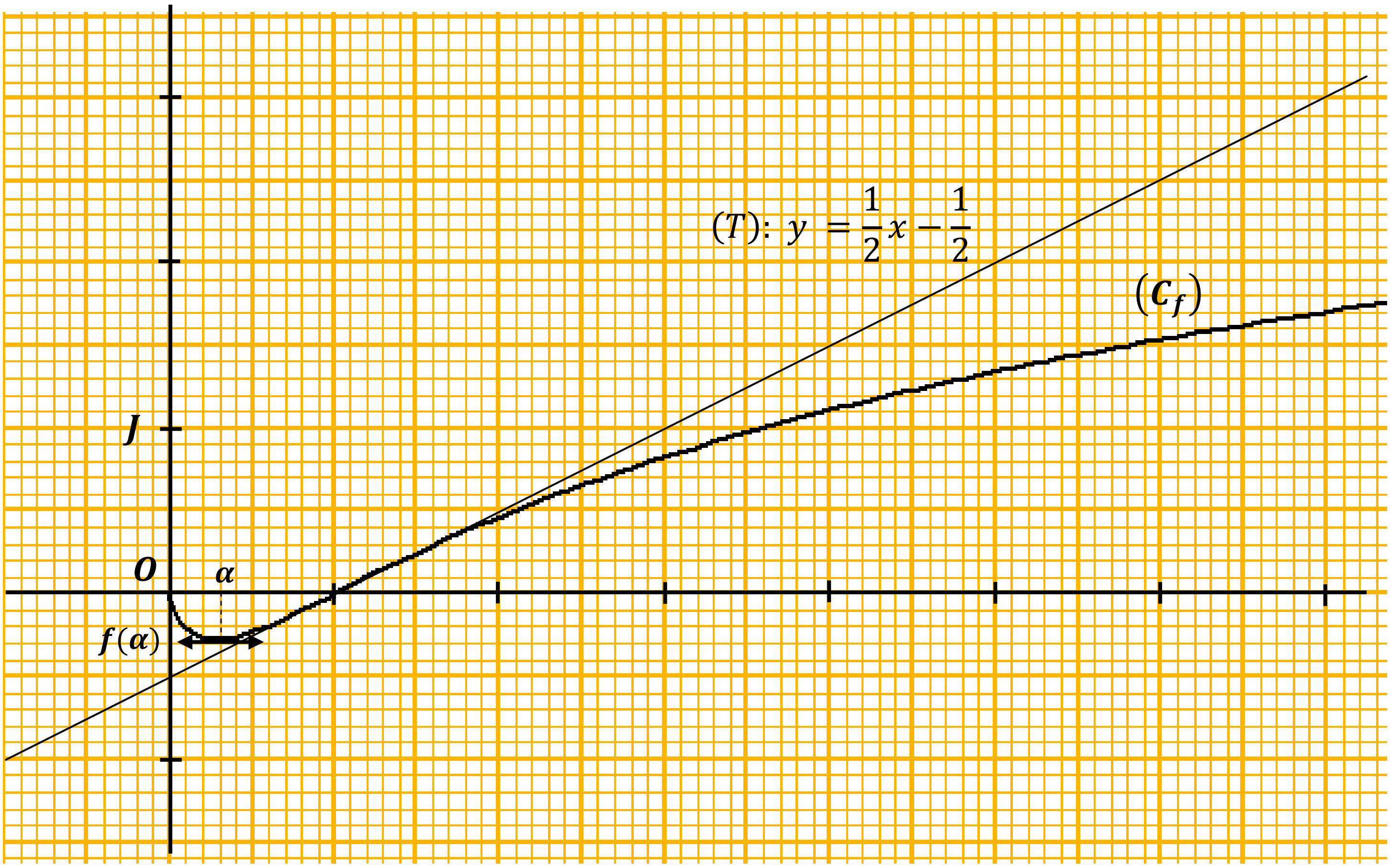
Montrons que h^{-1} est dérivable en 0
(Pour montrer que h^{-1} est dérivable en 0 il suffit de montrer que h est dérivable en 1 et que $h'(1) \neq 0$)
f est dérivable sur] 0 ; $+\infty$[donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$
Or h est la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$ donc h est dérivable en 1 et
$$h'(1) = f'(1) = \frac{1}{2}$$
On conclut que h^{-1} est dérivable en 0

Calculons $(h^{-1})'(0)$

$$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(1)} \Rightarrow (h^{-1})'(0) = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow (h^{-1})'(0) = 2$$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

6- Traçons la tangente (T) et les courbes (C_f) et $(C_{h^{-1}})$



7- Montrons que $\forall\, x \in [\,1\,;e\,]\ ;\ \dfrac{\ln x}{e+1} \leq f(x) \leq \dfrac{e}{2}\ln x$

Pour tout $x \in [\,1\,;e\,]$ $\Rightarrow$ $1 \leq x \leq e$

$\Rightarrow$ $1+1 \leq x+1 \leq e+1$

$\Rightarrow$ $2 \leq x+1 \leq e+1$

$\Rightarrow$ $\dfrac{1}{e+1} \leq \dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{\ln x}{e+1} \leq \dfrac{\ln x}{x+1} \leq \dfrac{\ln x}{2}$; car $\forall\, x \in [\,1\,;e\,]$, $\ln x > 0$

$\Rightarrow$ $\mathbf{1} \times \dfrac{\ln x}{e+1} \leq \boldsymbol{x} \times \dfrac{\ln x}{x+1} \leq \boldsymbol{e} \times \dfrac{1}{2}\ln x$; car $1 \leq x \leq e$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ln x}{e+1} \leq \frac{x\ln x}{x+1} \leq \frac{e}{2}\ln x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ln x}{e+1} \leq f(x) \leq \frac{e}{2}\ln x$$

b) ***L'aire en $\mathbf{cm^2}$ de la partie du plan délimitée par l'axe $(\boldsymbol{OI})$, la courbe $(\boldsymbol{C_f})$ et les droites d'équations respectives $\boldsymbol{x = 1}$ et $\boldsymbol{x = e}$ est définie par :*** $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx \times ua$

, où $ua = OI \times OJ\ cm^2$

$$\forall\, x \in [\,1\,;e\,]\ ;\ \frac{\ln x}{e+1} \leq f(x) \leq \frac{e}{2}\ln x \ \Rightarrow \int_1^e \frac{\ln x}{e+1}dx \leq \int_1^e f(x)\,dx \leq \int_1^e \frac{e}{2}\ln x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e+1}\int_1^e \ln x\,dx \leq \int_1^e f(x)\,dx \leq \frac{e}{2}\int_1^e \ln x\,dx$$

Calculons à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$

Posons $u'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad u(x) = x$

$v(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\int_1^e \ln x\,dx = [\,x\ln x\,]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x}dx$$

$$= (e\ln e - 1\times\ln 1) - \int_1^e dx$$

$$= e - [x]_1^e$$

$$= e - (e-1)$$

$$= e - e + 1$$

$$= 1$$

On sait que $ua = OI \times OJ = 2 \times 2 = 4\ cm^2$, on a :

$$\frac{1}{+1}\int_1^e \ln x\,dx \;\times ua \leq \int_1^e f(x)\,dx \times ua \leq \frac{e}{2}\int_1^e \ln x\,dx \times ua$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{e+1} \times 1 \times 4\ cm^2 \leq \int_1^e f(x)\,dx \times ua \leq \frac{e}{2} \times 1 \times 4\ cm^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{e+1}\ cm^2 \leq \int_1^e f(x)\,dx \times ua \leq 2e\ cm^2$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}0757\ cm^2 \leq \int_1^e f(x)\,dx \times ua \leq 5{,}4365\ cm^2$$

Problème 6

Partie A

La fonction g est définie sur $]0;+\infty[$

1- a) ***Justifions que pour tout*** $\boldsymbol{x \in]0;+\infty[\; ; g'(x) = 1 + \ln x}$

Pour tout $x \in]0;+\infty[$; $g'(x) = (1 + x\ln x)'$

$$= (x)'\ln x + (\ln x)' \times x$$

$$= \ln x + \frac{1}{x} \times x$$

$$= \ln x + 1$$

b) ***Etudions les variations de*** $\boldsymbol{g}$

Etudions d'abord le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$1+\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Pour tout $x \in]0;e^{-1}[$, $g'(x) < 0$
donc g est strictement décroissante sur $]0;e^{-1}[$

Pour tout $x \in]e^{-1};+\infty[$, $g'(x) > 0$
donc g est strictement croissante sur $]e^{-1};+\infty[$

Dressons le tableau de variation de $\boldsymbol{g}$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$\searrow$	$1-e^{-1}$	$\nearrow$	

2- Justifions que $\boldsymbol{\forall x \in]0;+\infty[\; ; g(x) > 0}$

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la fonction g admet pour minimum absolu $1 - e^{-1} > 0$

Donc pour tout $x \in]0;+\infty[$; $g(x) > 0$

Partie B

1- a) ***Etudions la continuité de f en 0***

On sait que $f(0)=0$; calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x}{1+x\ln x}$$
$$= 0$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x = 0 \end{cases}$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = 0 = f(0)$ alors la fonction f est continue en 0

b) ***Etudions la dérivabilité de f en 0***

Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)}{x}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\frac{x}{1+x\ln x}}{x}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x}{x(1+x\ln x)}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{1+x\ln x}$$
$$= 1$$

car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ alors f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$

c) ***Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est : $y = x$***

(la tangente à la courbe (C) au point O signifie tout simplement la tangente à la courbe (C) au point O d'abscisse $x_O = 0$)

Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O d'abscisse $x_O = 0$

$(T) : y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$

or $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$

$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$
$y = 1 \times x + 0$
$y = x$

une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point O est : (T): $y = x$

d) ***Démontrons que :***

- ***(C) est au-dessus de (T) sur*** $]\mathbf{0}; \mathbf{1}[$
- ***(C) est au-dessous de (T) sur*** $]\mathbf{1}; +\infty[$

(Il s'agit de la position relative de la tangente (T) par rapport à la courbe (C_f))

Etudions le signe de ($f(x) - y$) suivant les valeurs de x

$$f(x) - y = \frac{x}{1 + x\ln x} - x$$
$$= \frac{x - x(1 + x\ln x)}{1 + x\ln x}$$
$$= \frac{x - x - x^2\ln x}{1 + x\ln x}$$
$$= \frac{-x^2\ln x}{g(x)}$$
$$= \frac{x^2}{g(x)}(-\ln x)$$

Pour tout $x \in]\,0\,; +\infty[$, $x^2 > 0$ et $g(x) > 0$

Donc le signe de $(f(x) - y)$ dépend du signe de $(-\ln x)$

Tableau de signe de ($f(x) - y$) suivant les valeurs de x

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	||	$+$	0	$-$	
$f(x) - y$	||	$+$	0	$-$	

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Pour $x \in]\,0\,;1\,[$, $f(x) - y > 0$
donc (C) est au-dessus de (T) sur $]0;1[$

Pour $x \in]1;+\infty\,[$, $f(x) - y < 0$
donc (C) est au-dessous de (T) sur $]1;+\infty[$

On conclut que :

- (C) est au-dessus de (T) sur $]0;1[$
- (C) est au-dessous de (T) sur $]1;+\infty[$

2- ***Démontrons que la droite (OI) est une asymptote à (C) en*** $+\infty$
(on demande de montrer que la droite (OI) est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$; en d'autres termes il suffit de montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$)

Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1 + x\ln x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln x}$$

$$= 0$$

Car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

3- a) ***Démontrons que :*** $\forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]\mathbf{0};+\infty[$, $\boldsymbol{f'(x)} = \dfrac{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}}{(\mathbf{1} + \boldsymbol{x}\ln \boldsymbol{x})^{\mathbf{2}}}$

$$\forall\, x \in\ ]0;+\infty[\ ,\ f'(x) = \left(\frac{x}{1 + x\ln x}\right)'$$

$$= \left(\frac{x}{g(x)}\right)'$$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

$$= \frac{(x)' \times g(x) - g'(x) \times x}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$= \frac{g(x) - (1 + \ln x) \times x}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$= \frac{1 + x \ln x - (x + x \ln x)}{(1 + x \ln x)^2}$$

$$= \frac{1 + x \ln x - x - x \ln x}{(1 + x \ln x)^2}$$

$$= \frac{1 - x}{(1 + x \ln x)^2}$$

b) ***Déduisons les variations de f***

Pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, $(1 + x\ln x)^2 > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $1 - x$

Tableau de signe de $1 - x$ suivant les valeurs de x

x	0		1		$+\infty$
$1 - x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

Pour $x \in]\,0\,;1\,[$, $f'(x) > 0$

Donc f est strictement croissante sur $]\,0\,;1\,[$

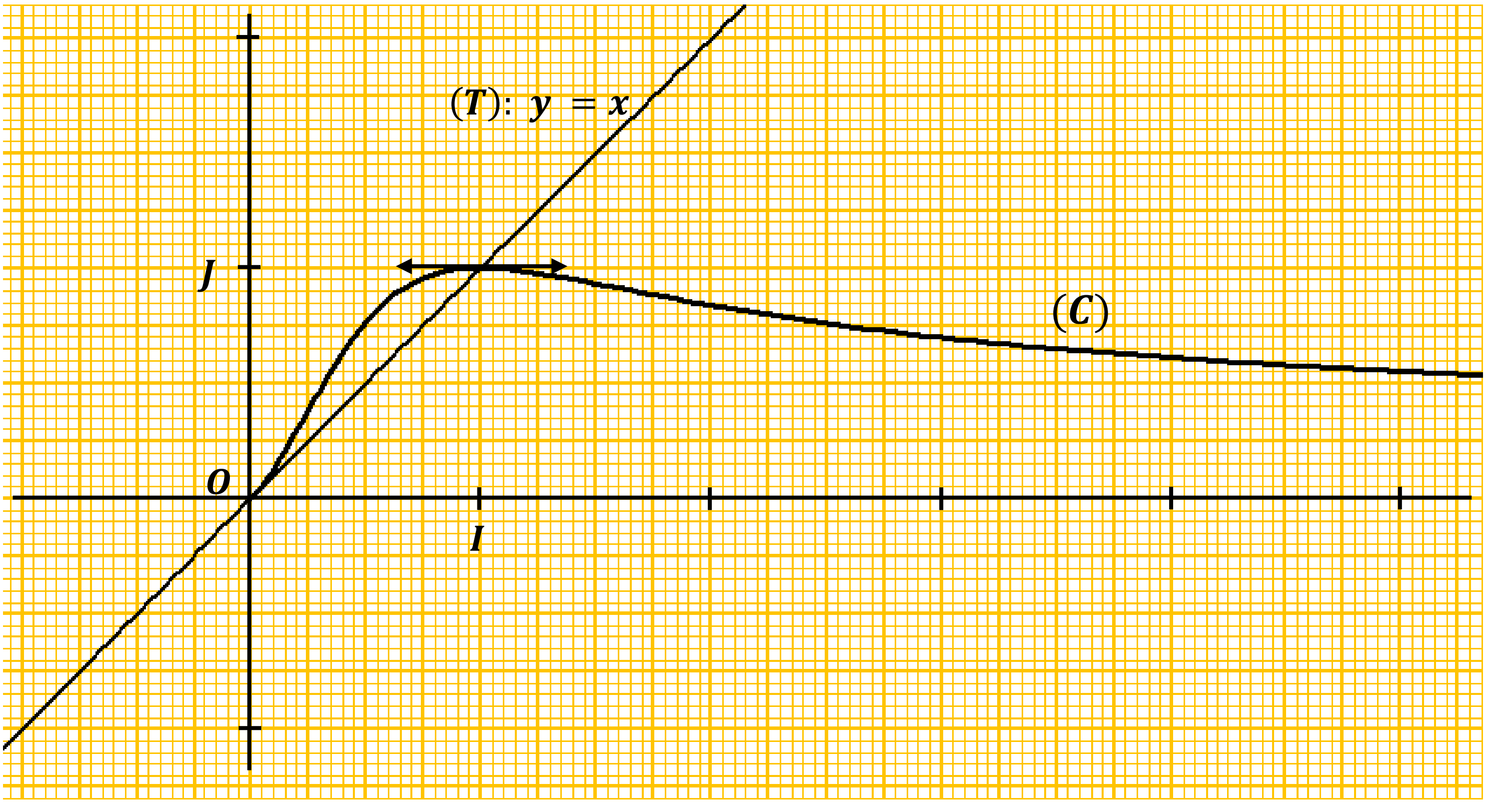
Pour $x \in]1;+\infty\,[$, $f'(x) < 0$

Donc f est strictement décroissante sur $]1;+\infty\,[$

Dressons son tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

4- Construisons la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J)



Partie C

1- a) ***Justifions que :*** $\forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]\mathbf{0}; +\infty[\ , \boldsymbol{f(x)} \leq \mathbf{1}$

Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la fonction f admet pour maximum 1
Donc pour tout $x \in\ ]0; +\infty[\ ;\ f(x) \leq 1$

b) ***Démontrons que*** $\forall\, \boldsymbol{x} \in\ [\mathbf{1}; \boldsymbol{e}]\ , \mathbf{1} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{f(x)}$

$\forall\, x \in\ [1; e]\ ,\ \ 1 \leq x \leq e \quad \Longrightarrow \ \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e$

$$\Longrightarrow\ 0 \leq\ \ln x \leq 1$$

$$\Longrightarrow\ 0 \leq x \times \ln x \leq x \times 1 \quad ; \quad car\ \ x > 0$$

$$\Longrightarrow\ 0 \leq\ x \ln x \leq x$$

$$\Longrightarrow\ 0 \leq\ 1 + x \ln x \leq 1 + x$$

$$\Longrightarrow\ 0 \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1 + x \ln x}$$

$$\Longrightarrow\ 0 \leq x \times \frac{1}{1+x} \leq x \times \frac{1}{1 + x \ln x}$$

$$\Longrightarrow\ 0 \leq \frac{x}{1+x} \leq \frac{x}{1 + x \ln x}$$

$$\Longrightarrow\ 0 \leq \frac{x}{1+x} \leq f(x)$$

$$\Longrightarrow\ \frac{x + \mathbf{1} - \mathbf{1}}{1+x} \leq f(x)$$

$$\Longrightarrow\ \frac{x+1}{1+x} - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$$

$$\Longrightarrow\ 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$$

2- Démontrons que $\mathbf{16(e-1)+16\ln\left(\frac{2}{1+e}\right)\leq \mathcal{A}\leq 16(e-1)}$

On déduit des questions C-1-a et C-1-b que pour tout $x \in [1; e]$, on a :

$$1-\frac{1}{1+x}\leq f(x)\leq 1$$

l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$ est défini par : $\mathcal{A}=\int_1^e f(x)\,dx\times ua$, où $ua=OI\times OJ\;cm^2$

pour tout $x\in[1;e]$

$$1-\frac{1}{1+x}\leq f(x)\leq 1 \;\Rightarrow\; \int_1^e\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx\times ua\leq\int_1^e f(x)\,dx\times ua\leq\int_1^e dx\times ua$$

$$\Rightarrow [x-\ln|1+x|\,]_1^e\times 16 \;\leq\; \mathcal{A}\;\leq\;[x]_1^e\times 16$$

$$\Rightarrow [e-\ln(1+e)-(1-\ln 2)]\times 16\;\leq\;\mathcal{A}\;\leq(e-1)\times 16$$

$$\Rightarrow [e-\ln(1+e)-1+\ln 2]\times 16\;\leq\;\mathcal{A}\;\leq\;16(e-1)$$

$$\Rightarrow [e-1+\ln 2-\ln(1+e)]\times 16\;\leq\;\mathcal{A}\;\leq\;16(e-1)$$

$$\Rightarrow \left[e-1+\ln\left(\frac{2}{1+e}\right)\right]\times 16\;\leq\;\mathcal{A}\;\leq 16(e-1)$$

$$\Rightarrow 16(e-1)+16\ln\left(\frac{2}{1+e}\right)\;\leq\;\mathcal{A}\;\leq 16(e-1)$$

Problème 7

Partie A

1- ***Déterminons l'ensemble de définition D_g de g***

$D_g = \mathbb{R}$ L'ensemble de

Calculons les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$

Limite de g en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (2xe^x - 1)$$

$$= -1$$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

Limite de g en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (2xe^x - 1)$$

$$= +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$

2- ***Démontrons que pour tout $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$, $\boldsymbol{g'(x) = 2(x+1)e^x}$***

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (2xe^x - 1)'$

$$= (2x)' \times e^x + (e^x)' \times 2x$$

$$= 2 \times e^x + e^x \times 2x$$

$$= 2e^x + 2x\, e^x$$

$$= (2 + 2x)e^x$$

$$= 2(1 + x)e^x$$

3- ***Déterminons le sens de variation de g***

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^x > 0$

donc le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $(x+1)$

Tableau de signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

Pour tout $x \in]-\infty\,; -1\,[$, $g'(x) < 0$
Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty\,; -1\,[$

Pour tout $x \in]-1\,; +\infty\,[$, $g'(x) > 0$
Donc g est strictement croissante sur $]-1\,; +\infty\,[$

0

Dressons le tableau de variation de g

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-2e^{-1}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

4- a) ***Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.***

- g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,; -1\,[$, donc elle réalise une bijection de $]-\infty\,; -1\,[$ vers $g(\,]-\infty\,; -1\,[\,) =]-2e^{-1} - 1\ ; -1\,[$
  Comme $0 \notin]-2e^{-1} - 1\ ; -1\,[$ alors l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]-\infty\,; -1\,[$

- g est continue et strictement croissante sur $]-1\,; +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]-1\,; +\infty[$ vers $g(\,]-1; +\infty\,[\,) =]-2e^{-1} - 1\ ; +\infty\,[$
  Comme $0 \in]-2e^{-1} - 1\ ; +\infty\,[$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-1; +\infty\,[$

On conclut que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

b) ***Vérifions que*** $\mathbf{0,35 < \alpha < 0,36}$

g est continue et strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$, en particulier sur $]\,0,35\ ;\ 0,36\,[$

de plus $g(0,35) \approx -0,0066$ et $g(0,36) \approx 0,0319$

Comme $g(0,35) \times g(0,36) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a :

$0,35 < \alpha < 0,36$

5- Justifions que $\begin{cases} \forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]-\infty; \boldsymbol{\alpha}[\,, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) < \mathbf{0} \\ \forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]\boldsymbol{\alpha}; +\infty[\,, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0} \end{cases}$

- Sur $]-\infty; -1[$, g admet pour maximum -1 ; donc pour tout $x \in\,]-\infty; -1[$, $g(x) < -1$
  C'est-à-dire pour tout $x \in\,]-\infty; -1[$, $g(x) < 0$
- La fonction g est strictement croissante sur $]-1; \alpha[$
  donc pour tout $x \in\ ]-1\,; \alpha[$, $x < \alpha \implies g(x) < g(\alpha)$
  $\implies g(x) < 0$
- La fonction g est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$
  donc pour tout $x \in\ ]\alpha; +\infty[$, $x > \alpha \implies g(x) > g(\alpha)$
  $\implies g(x) > 0$

On en déduit que $\begin{cases} \forall\, x \in\ ]-\infty; \alpha[\,, g(x) < 0 \\ \forall\, x \in\ ]\alpha; +\infty[\,, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

1- Justifions que la droite des abscisses est une asymptote à $(\boldsymbol{C_f})$ ***en*** $-\infty$

(Il suffit de montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$)

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{x}(xe^{x} - 1)$$
$$= 0$$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ (la droite des abscisses) est une asymptote à (C_f) en $-\infty$

2- Calculons la limite de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$

Limite de $f(x)$ en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^x(xe^x - 1)$$
$$= +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$

Limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x(xe^x-1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} e^x(xe^x - 1)$$
$$= +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty \end{cases}$

Donnons une interprétation graphique des résultats obtenus.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \implies$ La courbe admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$

3- Démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)e^x g(x)$

$pour\ tout\ x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left(xe^x(xe^x - 1)\right)'$

$$= (xe^x)' \times (xe^x - 1) + (xe^x - 1)' \times xe^x$$
$$= [(x)'e^x + (e^x)'x] \times (xe^x - 1) + [(x)'e^x + (e^x)'x] \times xe^x$$
$$= (e^x + xe^x) \times (xe^x - 1) + (e^x + xe^x) \times xe^x$$
$$= (e^x + xe^x) \times (xe^x - 1 + xe^x)$$
$$= (e^x + xe^x) \times (2xe^x - 1) \quad ; \quad \text{or} \quad g(x) = 2xe^x - 1$$
$$= e^x(1 + x) \times g(x)$$
$$= (x+1)e^x \times g(x)$$

4- a) ***Etudions le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x***

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(x+1)g(x)$; or d'après la question A-5 ,

on a : $\begin{cases} \forall\, x \in\ ]-\infty;\alpha[\,, g(x) < 0 \\ \forall\, x \in\ ]\alpha;+\infty[\,, g(x) > 0 \end{cases}$

Tableau de signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$	-1		α		$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour tout $x \in\ ]-\infty\,;-1\,[\,\cup\,]\,\alpha\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$

Pour tout $x \in\ ]-1\,;\,\alpha\,[$, $f'(x) < 0$

Donnons les variations de f sur $\mathbb{R}$

f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1\,[$ et sur $]\,\alpha\,;\,+\infty[$

f est strictement décroissante sur $]-1\,;\,\alpha\,[$

b) ***Justifions que*** $\boldsymbol{f(\alpha) = -\frac{1}{4}}$

Remarque

La résolution de ce type de question se fait en deux (2) étapes :

1ère étape : On utilise dans la partie A , le fait que $g(\alpha) = 0$
comme dans la partie B , la fonction f contient e^x et que $f(\alpha)$ ne
contient pas e^α alors on exprime e^α en fonction de α

2ème étape : on remplace dans $f(\alpha)$, e^α par son expression

De manière particulière dans ce problème, on détermine l'expression αe^α à partir de $g(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 \ &\Longrightarrow\ 2\alpha e^\alpha - 1 = 0 \\ &\Longrightarrow\ 2\alpha e^\alpha = 1 \\ &\Longrightarrow\ \alpha e^\alpha = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f(\alpha) = \alpha e^{\alpha}(\alpha e^{\alpha} - 1) \implies f(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) \quad ; \quad \text{car } \alpha e^{\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\implies f(\alpha) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\implies f(\alpha) = -\frac{1}{4}$$

5- Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{-2} + e^{-1}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

6- a) ***Calculons*** $\boldsymbol{f(0)}$

$f(0) = 0 \times e^{0}(0 \times e^{0} - 1) = 0$

b) ***Démontrons que l'équation*** $\boldsymbol{f(x) = 0}$ ***admet une solution unique*** $\boldsymbol{\beta} \in \left]\mathbf{0}; +\infty\right[$

Dressons le tableau de variation de f en faisant apparaitre le point d'abscisse 0

x	$-\infty$		-1		$\mathbf{0}$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{-2} + e^{-1}$	$\searrow$	$\mathbf{0}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

- f est continue et strictement décroissante sur $]0\,;\alpha[$, donc elle réalise une bijection de $]0\,;\alpha[$ vers $f(\,]0\,;\alpha[\,) = \left]-\frac{1}{4}\,;0\right[$
  Comme $0 \notin \left]-\frac{1}{4}\,;0\right[$ alors l'équation $f(x) = 0$ n' admet pas de solution dans $]0\,;\alpha[$

- f est continue et strictement croissante sur $]\alpha\,;+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]\alpha\,;+\infty[$ vers $f(\,]\alpha\,;+\infty[\,) = \left]-\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$
  Comme $0 \in \left]-\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans $]\alpha\,;+\infty[$

On conclut que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in\ ]0;+\infty[$

c) ***Vérifions que $\boldsymbol{0,56 < \beta < 0,57}$***

f est continue et strictement croissante sur $]\alpha\,;+\infty[$, en particulier sur $]\,0{,}56\ ;\ 0{,}57\,[$

de plus $f(0{,}56) \approx -0{,}019$ et $f(0{,}57) \approx 0{,}0079$

Comme $f(0{,}56) \times f(0{,}57) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires ,

on a $0{,}56 < \beta < 0{,}57$

7- *Déterminons le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.*

Dressons le tableau de variation de f en faisant apparaitre β

x	$-\infty$		-1		0		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{-2}+e^{-1}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

8- *Déterminons l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse* 0

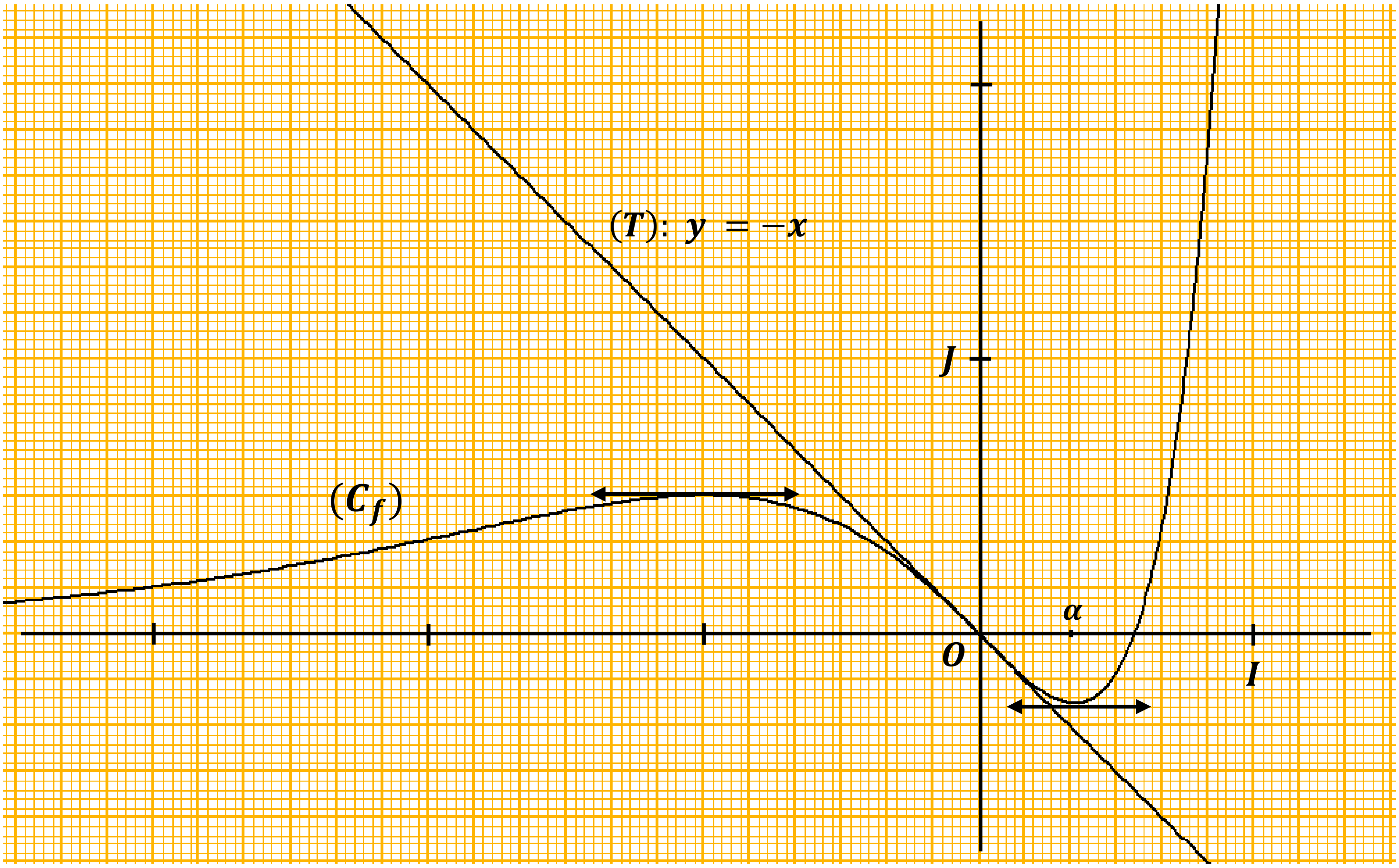
$(T) : y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$

or $f'(0) = -1$ et $f(0) = 0$

$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$
$y = -1 \times x\ +\ 0$
$y = -x$

une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point O est : (T): $y = -x$

9- Construisons dans le repère (O, I, J) la tangente (T) et la courbe (C_f)



Partie C

1- Justifions que h est une primitive sur ℝ de la fonction $x \longmapsto x^2e^{2x}$

(Il suffit de montrer que la dérivée de $h(x)$ est égale à x^2e^{2x})

pour tout $x \in \mathbb{R}$; $h'(x) = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)\right]'$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' \times \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)' \times \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2e^{2x} \times \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + (2x - 1) \times \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$= e^{2x} \times \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + \left[\frac{1}{2}(2x - 1)\right]e^{2x}$$

$$= e^{2x} \times \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x}$$

$$= e^{x2} \times \left(x^2 - x + \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= e^{2x} \times x^2$$

$$= x^2 e^{2x}$$

Calculons , à l'aide d'une intégration par partie, l'intégrale $\displaystyle\int_{\lambda}^{-1} \boldsymbol{xe^x dx}$

Posons $u'(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad u(x) = e^x$

$v(x) = x \quad \Longrightarrow \quad v'(x) = 1$

$$\int_{\lambda}^{-1} xe^x dx = [xe^x]_{\lambda}^{-1} - \int_{\lambda}^{-1} e^x dx$$

$$= \left(-e^{-1} - \lambda e^{\lambda}\right) - [e^x]_{\lambda}^{-1}$$

$$= \left(-e^{-1} - \lambda e^{\lambda}\right) - \left(e^{-1} - e^{\lambda}\right)$$

$$= -e^{-1} - \lambda e^{\lambda} - e^{-1} + e^{\lambda}$$

$$= -\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda} - 2e^{-1}$$

2- a) L'aire de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \lambda$, notée $\mathcal{A}(\lambda)$, correspond à $\displaystyle\int_{\lambda}^{-1} f(x)dx \times ua$ où $ua = OI \times OJ\ cm^2$

Calculons $\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda)}$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{-1} f(x)dx \times ua$$

$$= \int_{\lambda}^{-1} [\, xe^x(xe^x - 1)\,]dx \times ua$$

$$= \int_{\lambda}^{-1} (\, x^2e^{2x} - xe^x\,)dx \times ua$$

$$= \left(\int_{\lambda}^{-1} x^2e^{2x}dx - \int_{\lambda}^{-1} xe^x dx\right) \times ua$$; or $h(x)$ est une primitive de x^2e^{2x}

$$= \left([h(x)]_{\lambda}^{-1} - \int_{\lambda}^{-1} xe^{x}dx \right) \times ua \quad ; \quad or \int_{\lambda}^{-1} xe^{x}dx = -\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda} - 2e^{-1}$$

$$= \left(h(-1) - h(\lambda) - (-\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda} - 2e^{-1}) \right) \times ua$$

$$= \left[\frac{5}{4}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{2\lambda}\left(\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2}\right) - (-\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda} - 2e^{-1}) \right] \times ua$$

$$= \left[\frac{5}{4}e^{-2} - \frac{1}{2}\left(\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2}\right)e^{2\lambda} + (\lambda - 1)e^{\lambda} + 2e^{-1} \right] \times ua$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\left(\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2}\right)e^{2\lambda} + (\lambda - 1)e^{\lambda} + 2e^{-1} + \frac{5}{4}e^{-2} \right] \times 36\ cm^2$$

b) ***Calculons*** $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda)}$

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \left[-\frac{1}{2}\left(\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2}\right)e^{2\lambda} + (\lambda - 1)e^{\lambda} + 2e^{-1} + \frac{5}{4}e^{-2} \right] \times 36\ cm^2$$

$$= \lim_{\lambda \to -\infty} \left(-\frac{1}{2}\lambda^2 e^{2\lambda} + \frac{1}{2}\lambda e^{2\lambda} - \frac{1}{4}e^{2\lambda} + \lambda e^{\lambda} - e^{\lambda} + 2e^{-1} + \frac{5}{4}e^{-2} \right) \times 36\ cm^2$$

$$= \lim_{\lambda \to -\infty} \left(-\frac{1}{2}\left(\lambda e^{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda} \times e^{\lambda} - \frac{1}{4}e^{2\lambda} + \lambda e^{\lambda} - e^{\lambda} + 2e^{-1} + \frac{5}{4}e^{-2} \right) \times 36\ cm^2$$

$$= \left(2e^{-1} + \frac{5}{4}e^{-2} \right) \times 36\ cm^2$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to -\infty} \lambda e^{\lambda} = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \to -\infty} e^{\lambda} = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \to -\infty} e^{2\lambda} = 0 \end{cases}$$

Problème 8

Partie A

La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$

1- ***Déterminons les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$***

limite de φ en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^x + x + 1)$$
$$= -\infty$$

Car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty\end{cases}$

limite de φ en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to+\infty}(e^x + x + 1)$$
$$= +\infty$$

Car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty\end{cases}$

2- ***Etudions les variations de φ***

Calculons d'abord la dérivée de φ sur $\mathbb{R}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (e^x + x + 1)'$

$$= e^x + 1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + 1 > 0$ $\Longrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) > 0$

donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3- ***Dressons le tableau de variation de φ***

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$
$\varphi(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

4- Montrons que l'équation $\boldsymbol{\varphi(x) = 0}$ admet une solution unique $\boldsymbol{\alpha}$ telle que :
$\boldsymbol{-1,28 < \alpha < -1,27}$

φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-1,28\,; -1,27\,[$
De plus $\varphi(-1,28) \approx -0,0019$ et $\varphi(-1,27) \approx 0,0108$
Comme $\varphi(-1,28) \times \varphi(-1,27) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $-1,28 < \alpha < -1,27$

5- Montrons que $\begin{cases} \forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]-\infty; \boldsymbol{\alpha}[\ ,\ \boldsymbol{\varphi(x) < 0} \\ \forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]\boldsymbol{\alpha}; +\infty[\ ,\ \boldsymbol{\varphi(x) > 0} \end{cases}$

- La fonction φ est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha[$
  donc pour tout $x \in\ ]-\infty\,; \alpha[$, $x < \alpha \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(\alpha)$
  $\Rightarrow \varphi(x) < 0$

- La fonction φ est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$
  donc pour tout $x \in\ ]\alpha; +\infty[$, $x > \alpha \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(\alpha)$
  $\Rightarrow \varphi(x) > 0$

On conclut que $\begin{cases} \forall\, x \in\ ]-\infty; \alpha[,\ \varphi(x) < 0 \\ \forall\, x \in\ ]\alpha; +\infty[,\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$

1- a) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x\varphi(x)}{(e^x+1)^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \left(\dfrac{xe^x}{e^x+1}\right)'$

$$= \frac{(xe^x)' \times (e^x+1) - (e^x+1)' \times xe^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{[(x)'e^x + (e^x)'x] \times (e^x + 1) - e^x \times xe^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{(e^x + e^x x) \times (e^x + 1) - xe^{2x}}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x + xe^{2x} + e^x x - xe^{2x}}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x + e^x x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x(e^x + 1 + x)}{(e^x + 1)^2} \quad ; \quad or \quad \varphi(x) = e^x + x + 1$$

$$= \frac{e^x \varphi(x)}{(e^x + 1)^2}$$

b) ***Déterminons le sens de variation de f***

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $\varphi(x)$; or d'après la question A-5 :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \ ]-\infty; \alpha[\,, \ \ \varphi(x) < 0 \\ \forall\, x \in \ ]\alpha; +\infty[\,, \ \ \varphi(x) > 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \ ]-\infty; \alpha[\,, \ \ f'(x) < 0 \\ \forall\, x \in \ ]\alpha; +\infty[\,, \ \ f'(x) > 0 \end{cases}$$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$

2- Montrons que $f(\alpha) = \alpha + 1$

Remarque

La résolution de ce type de question se fait en deux (2) étapes :

1ère étape : On utilise dans la partie A , le fait que $\varphi(\alpha) = 0$
comme dans la partie B , la fonction f contient e^x et que $f(\alpha)$ ne contient pas e^α alors on exprime e^α en fonction de α

2ème étape : on remplace dans $f(\alpha)$, e^α par son expression

$$\varphi(\alpha) = 0 \Rightarrow e^\alpha + \alpha + 1 = 0$$
$$\Rightarrow e^\alpha = -\alpha - 1$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{\alpha(-\alpha - 1)}{(-\alpha - 1) + 1}$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \frac{\alpha(-\alpha - 1)}{-\alpha - 1 + 1}$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \frac{\alpha(-\alpha - 1)}{-\alpha}$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = -(-\alpha - 1)$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \alpha + 1$$

3- a) ***Donnons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse*** **0**

$(T) : y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$

or $f'(0) = \frac{1}{2}$ et $f(0) = 0$

$$y = \frac{1}{2} \times (x - 0) + 0$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est : (T): $y = \frac{1}{2}x$

b) ***Etudions la position relative de (C) par rapport à (T)***

Etudions le signe de $f(x) - y$ suivant les valeurs de x

$$f(x) - y = \frac{xe^x}{e^x + 1} - \frac{1}{2}x$$

$$= x\left(\frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= x \times \frac{2e^x - e^x - 1}{2(e^x + 1)}$$

$$= x \times \frac{e^x - 1}{2(e^x + 1)}$$

$$= \frac{x(e^x - 1)}{2(e^x + 1)}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,$2(e^x + 1) > 0$

Donc le signe de $f(x) - y$ dépend du signe de $x(e^x - 1)$

Tableau de signe de $x(e^x - 1)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$f(x) - y$		$+$	0	$+$	

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - y \geq 0$

Par conséquent la courbe (C) est au-dessus de la tangente (T) sur $\mathbb{R}$

4- calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

limite de f en $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{e^x + 1}$$

$$= 0$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{e^x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$$

$$= +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0 \end{cases}$

5- a) ***Démontrons que la droite*** $(\boldsymbol{D})$ ***d'équation*** $\boldsymbol{y = x}$ ***est une asymptote à la courbe*** $(\boldsymbol{C})$ ***en*** $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{xe^x}{e^x+1} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{e^x+1} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x - e^x - 1}{e^x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{-1}{e^x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{e^x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\frac{e^x+1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}$$

$$= 0$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (\,f(x) - x\,) = 0$ alors la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$

b) ***Etudions la position relative de*** $(\boldsymbol{C})$ ***par rapport à*** $(\boldsymbol{D})$

Etudions le signe de $(f(x) - x)$ suivant les valeurs de x

$$f(x) - x = \frac{-x}{e^x + 1}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + 1 > 0$

Par conséquent le signe de $f(x) - x$ dépend du signe de $(-x)$

Pour tout $x \in]-\infty\,; 0\,[$, $-x > 0$

Donc (C) est au dessus de la droite (D) sur $]-\infty\,; 0\,[$

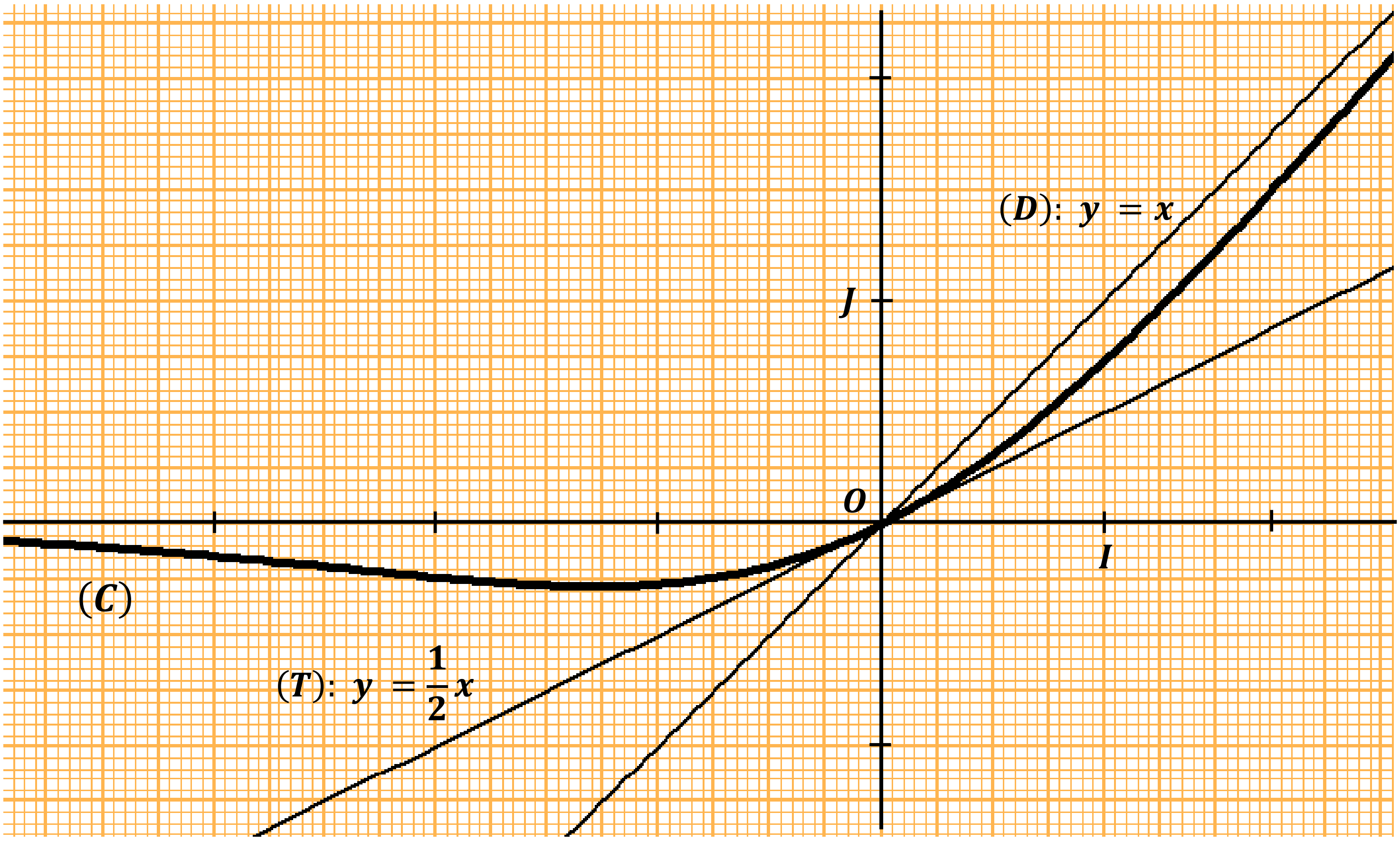
Pour tout $x \in]\,0\,; +\infty\,[$, $-x < 0$

Donc (C) est en dessous de la droite (D) sur $]\,0\,; +\infty\,[$

6- Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\alpha + 1$	$\nearrow$	$+\infty$

7- Construisons les droites (T) , (D) et la courbe (C)



Problème 9

Partie A

1- Déterminons l'ensemble de définition D_f de f

Lorsqu'on donne le tableau de variation d'une fonction , pour déterminer son ensemble de définition , on vérifie dans la partie de " $f(x)$ " s'il y a des doubles barres .

Si c'est le cas alors l'ensemble de définition est l'intervalle de la partie de " x " privé des nombres sous lesquels se trouvent les doubles barres

x	$-\infty$	-4	-2	-1	0	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	‖	$+\frac{1}{3}$ ‖ -2 $-$	‖	$+$ 2	$+$
$f(x)$	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-2 ↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

partie de " $f(x)$ "

partie de " x "

les doubles barres

On en déduit que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ 0 ; 3\}$

2- a) ***Déterminons les limites suivantes***

La détermination des limites en utilisant un tableau de variation se fait par " simple lecture " , semblable à la détermination de l'image d'un nombre

x	$-\infty$	-4	-2	-1	0	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	‖	$+\frac{1}{3}$ ‖ -2 $-$	‖	$+$ 2	$+$
$f(x)$	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-2 ↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ <}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to3} f(x) = -\infty$

Remarque

Dans le tableau de variation de f , on a : $\lim\limits_{\substack{x\to3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to3 \\ >}} f(x) = -\infty$ raison pour laquelle $\lim\limits_{x\to3} f(x) = -\infty$

b) ***Déduisons de la question précédente les asymptotes éventuelles à la courbe (C_f) de f***

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \implies$ La courbe (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ <}} f(x) = +\infty \implies$ La courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

$\lim\limits_{x\to3} f(x) = -\infty \implies$ La courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 3$

3- *Déterminons les images des intervalles suivants :* $]-4\,;-1[$ ***;*** $[-2\,;-1]$ ***et*** $]3;+\infty[$

De manière générale, pour déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue, on considère les ordonnées du ***point de plus grande ordonnée*** et du *point de plus petite ordonnée*

x	$-\infty$		-4		-2		-1		0		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	‖	$+\frac{1}{3}$	‖	-2 $-$	‖	$+$	2	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

- L’ordonnée du point de plus grande ordonnée est : 0
  L’ordonnée du point de plus petite ordonnée est : -1

On en déduit que l’image par f de l’intervalle $]-4\,;-1[$ est l’intervalle $[-1\,;0\,[$
(l’intervalle $[-1\,;0\,[$ est fermé en -1 car le nombre (-2) qui a pour image -1 n’est pas l’une des bornes de l’intervalle ouvert $]-4\,;-1[$)

- L’image par f de l’intervalle $[-2\,;-1]$ est l’intervalle $[-1\,;0\,]$
- L’image par f de l’intervalle $]\,3;+\infty[$ est l’intervalle $]-\infty\,;+\infty\,[$ (aussi égale à $\mathbb{R}$)

4- a) ***Déterminons les solutions de l’équation*** $(\boldsymbol{E}) : \boldsymbol{x \in D_f\ ,\ f(x) = 0}$

x	$-\infty$		-4		-2		-1		0		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$-$	|	$+$	|	$+$	‖	$+\frac{1}{3}$	‖	-2 $-$	‖	$+$	2	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Les solutions de l’équation $(E) : x \in D_f\ ,\ f(x) = 0$ sont : -4 ; -1 et 5

b) ***Déterminons les solutions de l’inéquation*** $(\boldsymbol{I_1}) : \boldsymbol{x \in D_f\ ,\ f(x) < 0}$
(Cela revient à déterminer les parties de D_f où les ordonnées des points sont inférieures à 0)

x	$-\infty$		-4		-2		-1		0		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$-$	|	$+$	|	$+$	‖	$+\frac{1}{3}$	‖	-2 $-$	‖	$+$	2	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Les solutions de l’inéquation $(I_1) : x \in D_f\ ,\ f(x) < 0$ sont les nombres de l’ensemble :
$]-4\,;\ -1\,[\,\cup\,]\,0\,;3\,[\,\cup\,]\,3\,;5\,[$

Déterminons les solutions de l'inéquation (I_2) : $x \in D_f$, $f(x) > 0$

(Cela revient à déterminer les parties de D_f où les ordonnées des points sont supérieures à 0)

x	$-\infty$		-4		-2		-1		0		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	||	$+\frac{1}{3}$	||	-2 $-$	||	$+$	2	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Les solutions de l'inéquation (I_2) : $x \in D_f$, $f(x) > 0$ sont les nombres de l'ensemble :
$]-\infty\,;\,-4\,[\,\cup\,]-1\,;0\,[\,\cup\,]\,5\,;+\infty\,[$

c) ***Déduisons de ce qui précède le signe de f sur D_f***

On rappelle que donner le signe d'une fonction sur son ensemble de définition revient donner les parties de l'ensemble de définition où la fonction est positive ou négative.
Or c'est à cette question que répond les solutions des inéquations ci-dessus .

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in\,]-\infty\,;\,-4\,[\,\cup\,]-1\,;0\,[\,\cup\,]\,5\,;+\infty\,[\ ;\ f(x) > 0 \\ \text{pour tout } x \in\,]-4\,;\,-1\,[\,\cup\,]\,0\,;3\,[\,\cup\,]\,3\,;5\,[\ ;\ f(x) < 0 \end{cases}$$

5- *Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse* 5

$(T) : y = f'(5) \times (x-5) + f(5)$; or $f'(5) = 2$ et $f(5) = 0$

$y = 2 \times (x-5) + 0$

$y = 2x - 10$

une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 5 est : $y = 2x - 10$

6- a) ***Dérivabilité de f en* 1**

f n'est pas dérivable en 1 car la dérivée à gauche en 1 $\left(f'_g(1) = \frac{1}{3}\right)$ est différente de la dérivée à droite en 1 $\left(f'_d(1) = -2\right)$

b) ***Donnons une interprétation géométrique de la dérivabilité en*** **1**

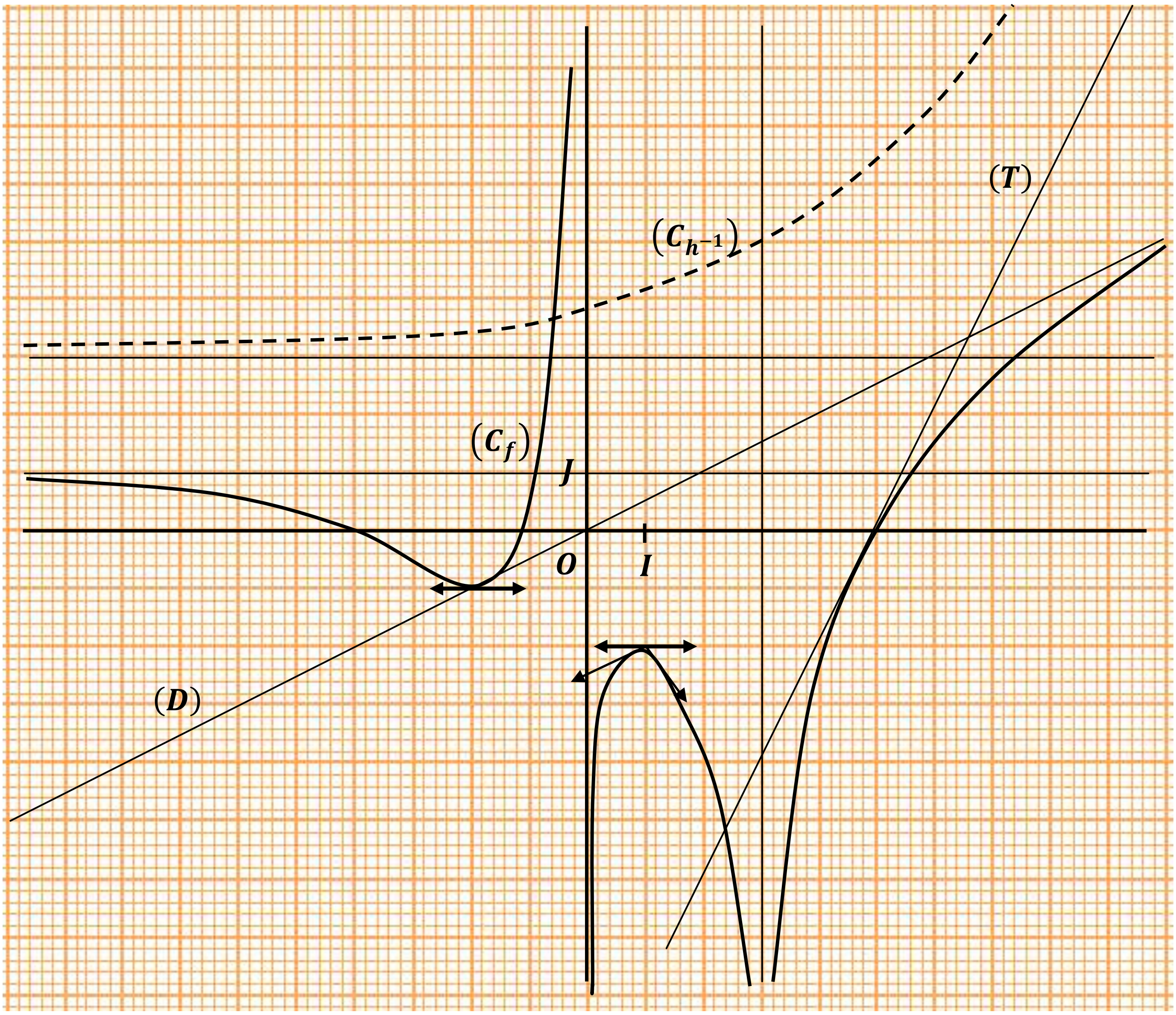
La fonction f admet une dérivée à gauche en 1 et une dérivée à droite en 1 mais les deux dérivées sont différentes $\left(f'_g(1) \neq f'_d(1) \right)$

Graphiquement la courbe (C_f) admet un point anguleux au point d'abscisse 1

7- Déterminons la nature de la droite (D) ***par rapport à la courbe*** (C_f)

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y) = 0$ alors la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) en $+\infty$

8- Construisons (D) ***,*** (T) ***, les asymptotes et la courbe*** (C_f) ***.***



Partie B

1- ***Montrons que h réalise une bijection de l'intervalle*** $]3;+\infty[$ ***vers un intervalle K à préciser .***

(Lorsqu'on parle de restriction h de la fonction f à l' intervalle $]3\,;+\infty[$, il faut comprendre que c'est la même fonction f seulement que son ensemble d'étude se réduit à l'intervalle $]3\,;+\infty[$)

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]3\,;+\infty[$ donc h , la restriction de la fonction f à l'intervalle $]3\,;+\infty[$, est continue et strictement croissante sur $]3\,;+\infty[$; par conséquent h réalise une bijection de $]3\,;+\infty[$ vers $h(]3\,;+\infty[)$

Or $h(]3\,;+\infty[) = f(]3\,;+\infty[) = \mathbb{R}$

On conclut que h réalise une bijection de l'intervalle $]3;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$

2- a) ***Déterminons le sens de variation de*** h^{-1} ***, la bijection réciproque de h***

(Une fonction bijective f et sa bijection reciproque f^{-1} ont le même sens de variation)

Comme h est strictement croissante sur $]3\,;+\infty[$ alors h^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) ***Dressons le tableau de variation de*** h^{-1}

x	$-\infty$	$+\infty$
$(h^{-1})'(x)$	$+$	
$h^{-1}(x)$	3 ↗	$+\infty$

3- ***Construisons la courbe*** $(C_{h^{-1}})$ ***de*** h^{-1} ***dans le même repère que la courbe*** (C_f) ***de f***

Problème 10

Partie A

1- ***Déterminons une équation de la droite*** $(\boldsymbol{D})$

La droite (D) passe par les points $K(-1\,;0)$ et $J(0\,;1)$

Une équation de la droite (D) est de la forme $y = ax + b$ où a et b sont des nombres réels à déterminer.

$$K \in (D) \implies y_K = ax_K + b$$
$$\implies 0 = a \times (-1\,) + b$$
$$\implies 0 = -a + b \quad (\mathbf{1})$$

$$J \in (D) \implies y_J = ax_J + b$$
$$\implies 1 = a \times 0 + b$$
$$\implies 1 = b \quad (\mathbf{2})$$

$$(\mathbf{1}) \text{ et } (\mathbf{2}) \implies \begin{cases} -a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} -a = -b \\ b = 1 \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} a = b \\ b = 1 \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

une équation de la droite (D) est $y = x + 1$

2- a) ***Déterminons les réels*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***et*** $\boldsymbol{\beta}$

Sur la figure donnée, on constate que la droite (D) est une asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$ c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = 0 \implies \lim_{x\to+\infty}[\,\alpha x + \beta + g(x) - (x+1)\,] = 0$$
$$\implies \lim_{x\to+\infty}[\,\alpha x + \beta + g(x) - x - 1\,] = 0$$
$$\implies \lim_{x\to+\infty}[\,\alpha x - x + \beta - 1 + g(x)\,] = 0$$
$$\implies \lim_{x\to+\infty}[\,(\alpha - 1)x + \beta - 1 + g(x)\,] = 0$$

Or $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, par conséquent pour que $\lim_{x\to+\infty} [\,(\alpha-1)x+\beta-1\,+g(x)\,]=0$

Il faut que $(\alpha-1)x+\beta-1=0$ c'est-à-dire $\alpha-1=0$ et $\beta-1=0$

On conclut donc que $\alpha=1$, $\beta=1$ et $f(x)=x+1+g(x)$

b) ***Démontrons que, pour tout réel x , on a : $f(x)+f(-x)=2$***

Le point $J(\,0\,;1\,)$ est le centre de symétrie de la courbe (C)

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_J+x)+f(x_J-x)}{2}=y_J$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(0+x)+f(0-x)}{2}=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)+f(-x)}{2}=1$$

$$\Rightarrow \quad f(x)+f(-x)=2$$

c) ***Déduisons de ce qui précède que la fonction g est impaire, puis que la dérivée f' de la fonction f est paire***

$$\begin{aligned} f(x)+f(-x)=2 \quad &\Rightarrow \quad x+1+g(x)+\big(-x+1+g(-x)\big)=2 \\ &\Rightarrow \quad x+1+g(x)-x+1+g(-x)=2 \\ &\Rightarrow \quad g(x)+g(-x)+2=2 \\ &\Rightarrow \quad g(x)+g(-x)=0 \\ &\Rightarrow \quad g(-x)=-\,g(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction g est impaire

Montrons que la dérivée f' de la fonction f est paire

Pour montrer que la dérivée f' de la fonction f est paire il suffit de vérifier que :

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(-x)=f'(x)$

Rappel : dérivée de la composée de deux fonctions $u\circ v$

$(u\circ v)'=u'(v)\times v'$

Application

$u = f$ et $v = -x \quad \Longrightarrow \quad u' = f'$ et $v' = -1$

$$(u \circ v)' = u'(v) \times v' \quad \Longrightarrow \quad \big(f(-x)\big)' = f'(-x) \times (-x)'$$
$$\Longrightarrow \quad \big(f(-x)\big)' = f'(-x) \times (-1)$$
$$\Longrightarrow \quad \big(f(-x)\big)' = -f'(-x)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \big(f(x)\big)' + \big(f(-x)\big)' = (2)'$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) + (-f'(-x)) = 0$$
$$\Longrightarrow \quad f'(x) - f'(-x) = 0$$
$$\Longrightarrow \quad f'(x) = f'(-x)$$

On en déduit que la dérivée f' de la fonction f est paire

3- a) ***Déterminons le réel b en utilisant la relation*** $\boldsymbol{g(-x) = -g(x)}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$; $g(x) = (ax + b)e^{-x^2}$

$$g(-x) = -g(x) \quad \Longrightarrow \quad (a(-x) + b)e^{-(-x)^2} = -(ax + b)e^{-x^2}$$
$$\Longrightarrow \quad (-ax + b)e^{-x^2} = -(ax + b)e^{-x^2}$$
$$\Longrightarrow \quad (-ax + b)e^{-x^2} + (ax + b)e^{-x^2} = 0$$
$$\Longrightarrow \quad (-ax + b + ax + b)e^{-x^2} = 0$$
$$\Longrightarrow \quad 2be^{-x^2} = 0$$
$$\Longrightarrow \quad b = 0 \quad ; \quad \text{car pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ , } 2e^{-x^2} > 0$$

b) ***Justifions que*** $\boldsymbol{g'(0) = -e}$

Dans l'équation de la tangente (T) à une courbe : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, après l'avoir développé et réduit , cette équation est de la forme $y = ax + b$ où le réel a est égal à $f'(x_0)$

Une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est $y = (1 - e)x + 1$, on en deduit que $f'(0) = 1 - e$

Or $f'(x) = \big(x + 1 + g(x)\big)' = 1 + g'(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 1 + g'(0)$; avec $f'(0) = 1 - e$

$$\Longrightarrow \quad 1 + g'(0) = 1 - e$$
$$\Longrightarrow \quad g'(0) = 1 - e + 1$$
$$\Longrightarrow \quad g'(0) = -e$$

Déduisons de ce qui précède la valeur du réel $\boldsymbol{a}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ;\ \ g(x) = axe^{-x^2}$; car $b = 0$

$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ;\ \ g'(x) = \left(axe^{-x^2}\right)' \implies g'(x) = (ax)' \times e^{-x^2} + \left(e^{-x^2}\right)' \times ax$

$\implies g'(x) = ae^{-x^2} + \left(-2xe^{-x^2}\right) \times ax$

$\implies g'(x) = ae^{-x^2} - 2ax^2e^{-x^2}$

$\implies g'(x) = (a - 2ax^2)e^{-x^2}$

$\implies g'(0) = (a - 2a \times 0^2)e^{-0^2}$

$\implies g'(0) = a$; car $e^{-0^2} = e^0 = 1$

Or $g'(0) = -e$ donc $a = -e$

Partie B

La fonction $f(x) = 1 + x - xe^{-x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$

1) ***Calculons*** $\lim\limits_{x \to -\infty} \boldsymbol{f(x)}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + x - xe^{-x^2+1}\right)$$
$$= \lim_{x \to -\infty} x\left(\frac{1}{x} + 1 - e^{-x^2+1}\right)$$
$$= +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x^2+1} = +\infty \end{cases}$

Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x)}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + x - xe^{-x^2+1}\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{x} + 1 - e^{-x^2+1}\right)$$
$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2+1} = 0 \end{cases}$

2) a) ***Démontrons que pour tout réel x : $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}$***

pour tout réel x : $f'(x) = \left(1 + x - xe^{-x^2+1}\right)'$

$$= 1 - \left((x)' \times e^{-x^2+1} + \left(e^{-x^2+1}\right)' \times x\right)$$
$$= 1 - \left(1 \times e^{-x^2+1} + \left(-2xe^{-x^2+1}\right) \times x\right)$$
$$= 1 - \left(e^{-x^2+1} - 2x^2e^{-x^2+1}\right)$$
$$= 1 - (1 - 2x^2)e^{-x^2+1}$$
$$= 1 + (-1 + 2x^2)e^{-x^2+1}$$
$$= 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}$$

b) ***Calculons $f'(0)$***

pour tout réel x : $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}$

donc $f'(0) = 1 + (2 \times 0^2 - 1)e^{-0^2+1}$

$= 1 + (-e)$; car $e^{-0^2+1} = e^1 = e$

$= 1 - e$

Déduisons de l'égalité ci-dessus une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0

$(T) : y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$; or $f'(0) = 1 - e$ et $f(0) = 1$

$y = (1 - e) \times (x - 0) + 1$

$y = (1 - e)x + 1$

une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est : (T): $y = (1 - e)x + 1$

3- a) ***Calculons la dérivée f'' de f'***

pour tout réel x : $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$

$$= \left(1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}\right)'$$

$$= (2x^2 - 1)' \times e^{-x^2+1} + \left(e^{-x^2+1}\right)' \times (2x^2 - 1)$$

$$= 4x \times e^{-x^2+1} + \left(-2xe^{-x^2+1}\right) \times (2x^2 - 1)$$

$$= 4xe^{-x^2+1} + \left[-2x(2x^2 - 1)e^{-x^2+1}\right]$$

$$= 4xe^{-x^2+1} + (-4x^3 + 2x)e^{-x^2+1}$$

$$= (4x - 4x^3 + 2x)e^{-x^2+1}$$

$$= (-4x^3 + 6x)e^{-x^2+1}$$

$$= 2x(-2x^2 + 3)e^{-x^2+1}$$

Etudions le signe de $f''(x)$ sur $[\,0\,;1\,]$ suivant les valeurs de x

Pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$; $2xe^{-x^2+1} \geq 0$

Donc le signe de $f''(x)$ dépend du signe de $(-2x^2 + 3)$

$x \in [\,0\,;1\,] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow 0^2 \leq x^2 \leq 1^2$

$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$

$\Rightarrow -2 \times 1 \leq -2 \times x^2 \leq -2 \times 0$

$\Rightarrow -2 \leq -2x^2 \leq 0$

$\Rightarrow -2 + 3 \leq -2x^2 + 3 \leq 0 + 3$

$\Rightarrow 1 \leq -2x^2 + 3 \leq 3$

en multipliant la double inégalité par un nombre négatif , l'ordre de grandeur change

Ce qui signifie que pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $-2x^2 + 3 \geq 1$

Donc pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $-2x^2 + 3 > 0$

On conclut donc que pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $f''(x) \geq 0$

Remarque

On pouvait aussi utiliser un tableau de signe

Dressons le tableau de variation de $\boldsymbol{f'}$

f'' est la dérivée de f' donc le signe de f'' donne le sens de variation de f'

Comme pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $f''(x) \geq 0$ alors f' est croissante sur [0 ; 1]

x	0		1
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	$1-e$	$\nearrow$	2

b) ***Démontrons que l'équation*** $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ ***admet une solution unique*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***sur*** $[\,\mathbf{0}\,;\mathbf{1}\,]$

f' est continue et strictement croissante sur $[\,0\,;1\,]$ donc elle réalise une bijection de $[\,0\,;1\,]$ vers $f'(\,[\,0\,;1\,]\,) = [1-e\ ;\ 2\,]$.

Comme $0 \in [1-e\ ;\ 2\,]$ alors l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[\,0\,;1\,]$

c) ***justifions que*** $\mathbf{0,51} < \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{0,52}$

f' est continue et strictement croissante sur $[\,0\,;1\,]$ en particulier sur $]\,0{,}51\ ;\ 0{,}52\,[$

De plus $f'(0{,}51) \approx -0{,}0055$ et $f'(0{,}52) \approx 0{,}0475$

Comme $f'(0{,}51) \times f'(0{,}52) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a : $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$

d) ***Dressons le tableau de variation de f sur*** $\mathbb{R}$

D'après la question A-2-c la fonction f' est paire ; on en déduit le tableau de variation de f' sur $[-1\,;1\,]$

x	-1		$-\alpha$		0		α		1
$f''(x)$			$-$		0		$+$		
$f'(x)$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$1-e$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2

Par conséquent : pour tout $x \in [-1\,;-\alpha\,[\,\cup\,]\,\alpha\,;1\,]$; $f'(x) > 0$

pour tout $x \in\,]-\alpha\,;\alpha\,[$; $f'(x) < 0$

Par prolongement sur $\mathbb{R}$, on a : pour tout $x \in]-\infty\,; -\alpha\,[\cup]\,\alpha\,; +\infty\,[$; $f'(x) > 0$
pour tout $x \in]-\alpha\,; \alpha\,[$; $f'(x) < 0$

ce qui implique que :

- f est strictement croissante sur $]-\infty\,; -\alpha\,[$ et sur $]\,\alpha\,; +\infty\,[$
- f est strictement décroissante sur $]-\alpha\,; \alpha\,[$

Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$-\alpha$	0	α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\alpha)$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Problème 11

Partie A

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - y = 4xe^x$

1- ***Déterminons les réels a et b pour que la fonction g definie par $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$ soit solution de (E)***

Pour que la fonction g definie par $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$ soit solution de (E) il faut que : $g''(x) - g(x) = 4xe^x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \left((ax^2 + bx)e^x\right)'$

$$\begin{aligned} &= (ax^2 + bx)' \times e^x + (e^x)' \times (ax^2 + bx) \\ &= (2ax + b)e^x + e^x(ax^2 + bx) \\ &= (2ax + b + ax^2 + bx)e^x \\ &= [ax^2 + (2a + b)x + b]e^x \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = \left(g'(x)\right)'$

$$\begin{aligned} &= [\,[ax^2 + (2a + b)x + b]e^x\,]' \\ &= [ax^2 + (2a + b)x + b]' \times e^x + (e^x)' \times [ax^2 + (2a + b)x + b] \\ &= (2ax + 2a + b)e^x + e^x[ax^2 + (2a + b)x + b] \\ &= [2ax + 2a + b + ax^2 + (2a + b)x + b]e^x \\ &= [ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b]e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(x) - g(x) = 4xe^x &\Longrightarrow [ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b]e^x - (ax^2 + bx)e^x = 4xe^x \\ &\Longrightarrow [ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b - ax^2 - bx]e^x = 4xe^x \\ &\Longrightarrow [4ax + 2a + 2b]e^x = 4xe^x \end{aligned}$$

Par identification des termes de même degré des polynômes $4ax + 2a + 2b$ et $4x$ on a :

$$\begin{cases} 4a = 4 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2b = -2a \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -a \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

On en déduit que $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$ est solution de (E) si $a = 1$ et $b = -1$

Donc $g(x) = (x^2 - x)e^x$

2- Démontrons que f est solution de (E) si et seulement $f-g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y''-y=0$

f est solution de (E) $\Leftrightarrow f''(x)-f(x)=4xe^x$; or $g''(x)-g(x)=4xe^x$

$\Leftrightarrow f''(x)-f(x)=g''(x)-g(x)$

$\Leftrightarrow f''(x)-f(x)-g''(x)+g(x)=0$

$\Leftrightarrow f''(x)-g''(x)-f(x)+g(x)=0$

$\Leftrightarrow \left(f''(x)-g''(x)\right)-\left(f(x)-g(x)\right)=0$

$\Leftrightarrow (f-g)''(x)-(f-g)(x)=0$

$\Leftrightarrow f-g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y''-y=0$

3- Résolvons l'équation différentielle (E')

L'équation différentielle (E') est de la forme $ay''+by'+c=0$ avec $a=1$; $b=0$ et $c=-1$

Equation caractéristique de l'équation différentielle : $r^2-1=0$

$r^2-1=0 \Rightarrow (r-1)(r+1)=0$

$\Rightarrow r-1=0$ ou $r+1=0$

$\Rightarrow r=1$ ou $r=-1$

Une solution de l'équation différentielle (E') est : $f(x)=Ae^x+Be^{-x}$ avec $A\in\mathbb{R}$ et $B\in\mathbb{R}$

déduisons de ce qui précède la solution générale de (E)

D'après la question 2 , on sait que :

f est solution de (E) si et seulement $f-g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y''-y=0$

Donc la solution générale de (E) est : $(f-g)(x)$

$$(f-g)(x)=Ae^x+Be^{-x}-(x^2-x)e^x$$
$$=Ae^x+Be^{-x}+(-x^2+x)e^x$$
$$=(-x^2+x+A)e^x+Be^{-x} \quad ; \quad \text{avec } A\in\mathbb{R} \text{ et } B\in\mathbb{R}$$

4- Déterminons la fonction f solution de (E) telle que : $f(0)=1$ et $f'(0)=1$

$f(x)=Ae^x+Be^{-x} \Rightarrow f'(x)=(Ae^x+Be^{-x})'$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = A(e^x)' + B(e^{-x})'$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = Ae^x + B(-e^{-x})$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = Ae^x - Be^{-x}$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ae^0 + Be^{-0} = 1 \\ Ae^0 - Be^{-0} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 & (1) \\ A - B = 1 & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \quad \Rightarrow \quad 2A = 2$

$\Rightarrow \quad A = \frac{2}{2}$

$\Rightarrow \quad A = 1$

$(1) - (2) \quad \Rightarrow \quad 2B = 0$

$\Rightarrow \quad B = 0$

la fonction f solution de (E) telle que : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$ est définie par : $f(x) = e^x$

Partie B

1- Déterminons la limite de f en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2 - x + 1)e^x$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (x^2e^x - xe^x + e^x)$$
$$= 0$$

$$\text{Car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

Interprétons graphiquement le résultat

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow$ La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) en $-\infty$

2- *Calculons* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ***et*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$**.**

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - x + 1)e^x$$

$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - x + 1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2 - x + 1)e^x}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2 - x + 1)}{x} e^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) e^x$$

$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$

Interprétons graphiquement les résultats ci-dessus

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ alors la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$

3- a) ***Calculons la fonction dérivée de f***

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = [(x^2 - x + 1)e^x]'$

$$\begin{aligned} &= (x^2 - x + 1)' \times e^x + (e^x)' \times (x^2 - x + 1) \\ &= (2x - 1)e^x + e^x(x^2 - x + 1) \\ &= (2x - 1 + x^2 - x + 1)e^x \\ &= (x^2 + x)e^x \\ &= x(x + 1)e^x \end{aligned}$$

b) ***Etudions le sens de variation de f***

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x(x + 1)e^x$
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$
Donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $x(x + 1)$

Tableau de signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour tout $x \in]-\infty\,; -1\,[\cup]\,0\,; +\infty[$, $f'(x) > 0$
Donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,; -1\,[$ et sur $]\,0\,; +\infty[$

Pour tout $x \in]-1; 0\,[$, $f'(x) < 0$
Donc f est strictement décroissante sur $]-1; 0\,[$

Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$3e^{-1}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

4- Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1

$(T) : y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$; or $f'(1) = 2e$ et $f(1) = e$

$$y = 2e \times (x-1) + e$$
$$y = 2ex - 2e + e$$
$$y = 2ex - e$$

une équation de la tangente (T) à la courbe (C) point d'abscisse 1 est : $y = 2ex - e$

5- Construisons (T) et (C)

6- L'aire de la partie $\mathcal{A}$ du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est définie par :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \times ua \quad ; \quad \text{où} \quad ua = OI \times OJ\ cm^2$$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Calculons $\mathcal{A}$ à l'aide de deux intégrations par parties successives

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 f(x)\,dx \times ua \\ &= \int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x\,dx \times ua\end{aligned}$$

Posons $u_1'(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad u_1(x) = e^x$

$v_1(x) = x^2 - x + 1 \quad \Longrightarrow \quad v_1'(x) = 2x - 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \left([(x^2 - x + 1)e^x]_0^1 - \int_0^1 (2x-1)e^x\,dx\right) \times ua \\ &= \left((1^2 - 1 + 1)e^1 - (0^2 - 0 + 1)e^0 - \int_0^1 (2x-1)e^x\,dx\right) \times ua \\ &= \left(e - 1 - \int_0^1 (2x-1)e^x\,dx\right) \times ua\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale $\int_0^1 (2x-1)e^x\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties

Posons $u_2'(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad u_2(x) = e^x$

$v_2(x) = 2x - 1 \quad \Longrightarrow \quad v_2'(x) = 2$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x-1)e^x\,dx &= [(2x-1)e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x\,dx \\ &= (2\times 1 - 1)e^1 - (2 \times 0 - 1)e^0 - [2e^x]_0^1 \\ &= e + 1 - (2e^1 - 2e^0) \\ &= e + 1 - (2e - 2) \\ &= e + 1 - 2e + 2 \\ &= -e + 3\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A} = \big(e - 1 - (-e + 3)\big) \times ua \quad ; \quad ua = 2 \times 2\ cm^2 = 4\ cm^2$

$$\begin{aligned} &= (e - 1 + e - 3) \times 4\ cm^2 \\ &= (2e - 4) \times 4\ cm^2 \\ &= (8e - 16)\ cm^2\end{aligned}$$

Partie C

Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0;+\infty[$

1- ***Démontrons que g realise une bijection de*** $[\mathbf{0};+\infty[$ ***sur un intervalle K à déterminer***

(Lorsqu'on parle de restriction g de la fonction f à un intervalle $[0;+\infty[$, il faut comprendre que c'est la même fonction f seulement que son ensemble d'étude se réduit à l'intervalle $[0;+\infty[$)

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc g , la restriction de la fonction f à l'intervalle $[0;+\infty[$, est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$; par conséquent g réalise une bijection de$[0;+\infty[$ vers $g([0;+\infty[\ )$

Or $g(\ [0;+\infty[\ ) = f(\ [0;+\infty[\ ) = [1\ ;+\infty[$

On conclut que g réalise une bijection de l'intervalle $[0;+\infty[$ vers $[1\ ;+\infty[$

2- ***Démontrons que*** g^{-1} ***est derivable en e***

(On sait que $g(1) = f(1) = e$ donc pour montrer que g^{-1} est dérivable en e il suffit de montrer que g est dérivable en 1 et $g'(1) \neq 0$)

f est dérivable sur $[0;+\infty[$ $\Longrightarrow$ g est dérivable sur $[0;+\infty[$

Comme $1 \in [0;+\infty[$ alors g est dérivable en 1

De plus , pour tout $x \in [0;+\infty[$, $g'(x) = f'(x) = x(x+1)e^x$

Donc $g'(1) = 2e$

On conclut que g est dérivable en 1 et $g'(1) \neq 0$ donc g^{-1} est derivable en e

Calculons $(g^{-1})'(e)$

$$(g^{-1})'(e) = \frac{1}{g'(1)}$$
$$= \frac{1}{2e}$$

3- ***Déterminons une équation de la tangente*** $(\boldsymbol{D})$ ***à*** $(\boldsymbol{C'})$ ***au point d'abscisse e***

$(D) : y = (g^{-1})'(e) \times (x-e) + g^{-1}(e)$; or $(g^{-1})'(e) = \dfrac{1}{2e}$ et $g^{-1}(e) = 1$

$$y = \frac{1}{2e} \times (x-e) + 1$$
$$y = \frac{1}{2e}x - \frac{1}{2} + 1$$
$$y = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2}$$

une équation de la tangente (D) à (C') au point d'abscisse e est : $y = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2}$

4- Construisons $(\boldsymbol{D})$ et $(\boldsymbol{C}')$

Voir figure

5- L'aire de la partie $\mathcal{B}$ du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C') et la droite d'équation $x = e$ est définie par $\int_1^e g^{-1}(x)\,dx \times ua$

On considère l'aire de la partie $\mathcal{F}$ du plan délimitée par les points O , I , $A(1;e)$ et $B(0;e)$

Aire de $\mathcal{F} = 1 \times e\ cm^2 = e\ cm^2$

En considérant le symétrique par rapport à la première bissectrice de la partie $\mathcal{F}$, on remarque :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{B} = \mathcal{F} - \mathcal{A} \\ &\Longrightarrow \quad \mathcal{B} = e\ cm^2 - (8e - 16)\ cm^2 \\ &\Longrightarrow \quad \mathcal{B} = (16 - 7e)\ cm^2 \end{aligned}$$

Problème 12

Partie A

1- a) Démontrons que pour tout $x \in]\, 0\,; +\infty[$, $g'(x) = 2\dfrac{x-1}{x} + \ln x$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x + (x-2)\ln x)' \\ &= 1 + (x-2)'\ln x + (\ln x)'(x-2) \\ &= 1 + 1 \times \ln x + \frac{1}{x}(x-2) \\ &= 1 + \ln x + \frac{x-2}{x} \\ &= 1 + \frac{x-2}{x} + \ln x \\ &= \frac{x+x-2}{x} + \ln x \\ &= \frac{2x-2}{x} + \ln x \\ &= \frac{2(x-1)}{x} + \ln x \\ &= 2\frac{x-1}{x} + \ln x \end{aligned}$$

b) Calculons $g'(1)$

$$g'(1) = 2\frac{1-1}{1} + \ln 1 = 0$$

c) Démontrons que $\begin{cases} \forall\, x \in\ ]\,0;\ 1[\ ;\ \ g'(x) > 0 \\ \forall\, x \in\ ]1\,; +\infty\,[\ ;\ \ g'(x) < 0 \end{cases}$

x	0	1	$+\infty$
x	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$+$
$\ln x$	$-$		$+$
$g'(x)$	$-$		$+$

Attention
Pour obtenir $g'(x)$, on fait une somme et non un produit

On en déduit que $\begin{cases} \forall\, x \in \,]0;\ 1[\ ;\ \ g'(x) > 0 \\ \forall\, x \in \,]1\,;+\infty\,[\ ;\ \ g'(x) < 0 \end{cases}$

2- *a) Etudions les variations de g*

On déduit de la question précédente que :

g est strictement croissante sur $]\,0;\ 1[$ et strictement décroissante sur $]1\,;+\infty\,[$

Dressons son tableau de variation de g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$-$
$g(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

b) Justifions que pour tout $\boldsymbol{x} \in \,]\,\mathbf{0}\,;+\infty[\ ,\ \boldsymbol{g(x) \geq 1}$

On déduit du tableau de variation de g que 1 est le maximum absolu de g sur $]\,0\,;+\infty[$; donc pour tout $x \in \,]\,0\,;+\infty[\ ,\ g(x) \geq 1$

Partie B

1- *a) Calculons la limite de $\boldsymbol{f(x)}$ en $+\infty$*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1 + x\ln x - (\ln x)^2)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\ln x\left(\frac{1}{x\ln x} + 1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= +\infty$$

Calculons la limite de $\boldsymbol{\frac{f(x)}{x}}$ en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + x\ln x - (\ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x\left(\frac{1}{x\ln x} + 1 - \frac{\ln x}{x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln x \left(\frac{1}{x \ln x} + 1 - \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= +\infty$$

Interprétation graphique des résultats précédents

Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (OJ)

b) Calculer $\boldsymbol{\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)}$ **.**

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(1 + x \ln x - (\ln x)^2\right)$$

$$= -\infty$$

Interprétation graphique du résultat

La courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

2- ***a) Démontrer que pour tout*** $\boldsymbol{x \in]\,0\,;+\infty[}$ **,** $\boldsymbol{f'(x) = \frac{g(x)}{x}}$

pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, $f'(x) = \left(1 + x \ln x - (\ln x)^2\right)'$

$$= (1)' + (x \ln x)' - ((\ln x)^2)'$$

$$= (x)' \ln x + (\ln x)' \times x - 2 \ln x \times (\ln x)'$$

$$= \ln x + \frac{1}{x} \times x - 2 \ln x \times \frac{1}{x}$$

$$= \ln x + 1 - 2 \frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{x \ln x + x - 2 \ln x}{x}$$

$$= \frac{x + x \ln x - 2 \ln x}{x}$$

$$= \frac{x + (x - 2) \ln x}{x}$$

$$= \frac{g(x)}{x}$$

b) Etudions le sens de variation de f

Pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, $x > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

D'après la question A-2b) on a $g(x) \leq 1$ pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$

On en déduit que pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$

Par conséquent f est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty[$

Dressons le tableau de variation de f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3- *Démontrons que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur un intervalle que l'on précisera*

f est continue et strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]\,0\,;+\infty[$ vers $f(\,]\,0\,;+\infty[\,) = \mathbb{R}$.

Or toute fonction qui réalise une bijection admet une bijection réciproque , par conséquent f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

4- *a) Calculer $f(1)$*

$f(1) = 1$; car $\ln 1 = 0$

b) Démontrons que f^{-1} est dérivable en 1

f est dérivable sur $]\,0\,;+\infty[$ en particulier en 1 et $f'(1) = 1$ ($f'(1) \neq 0$)

On en déduit que f^{-1} est dérivable en 1

Calculons $(f^{-1})'(1)$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(1)}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

5- *Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans*] 0 ; 1 [

f est continue et strictement croissante sur] 0 ; +∞[, en particulier sur] 0 ; 1 [

De plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ et $f(1) = 1$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) \times f(1) < 0$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans] 0 ; 1 [

6- *Déterminons un encadrement de α d'amplitude $0,1$ par la méthode de balayage*

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Signe de $f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

On en déduit que : $0,4 < \alpha < 0,5$

7- *Déterminons une équation de la tangente au point d'abscisse* 1

$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

Or $f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$

Donc une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $(T) : y = x$

Partie C

On pose $\varphi(x) = f(x) - x$ et $u(x) = x - 1 - \ln x$

1- *a) Déterminons le tableau de variation de* u *sur*] 0 ; +∞[.

Pour tout $x \in$] 0 ; +∞[, $u'(x) = (x - 1 - \ln x)'$

$$= 1 - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x-1}{x}$$

Or pour tout $x \in$] 0 ; +∞[, $x > 0$

donc le signe de $u'(x)$ dépend du signe de $x - 1$

par conséquent

pour tout $x \in$] 0 ; 1 [, $u'(x) < 0$

pour tout $x \in$] 1 ; +∞[, $u'(x) > 0$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

On en déduit que u est strictement décroissante sur $]\,0\,;1\,[$ et strictement croissante sur $]\,1\,;+\infty[$

Tableau de variation de u

x	0			$+\infty$
$u'(x)$	$-$	0	$+$	
$u(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

b) Justifions que pour tout $\boldsymbol{x \in\,]\,0\,;+\infty[\,,\ u(x) \geq 0}$

On déduit du tableau de variation que 0 est le minimum de u sur $]\,0\,;+\infty[$; donc pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty[\,,\ u(x) \geq 0$

2- ***a) Démontrons que pour tout $\boldsymbol{x \in\,]\,0\,;+\infty[\,, \varphi(x) = (\ln x - 1)u(x)}$***

pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty[$, $(\ln x - 1)u(x) = \ln x \times u(x) - u(x)$

$$= \ln x \times (x - 1 - \ln x) - (x - 1 - \ln x)$$

$$= x\ln x - \ln x - (\ln x)^2 - x + 1 + \ln x$$

$$= 1 + x\ln x - (\ln x)^2 - x$$

$$= f(x) - x$$

$$= \varphi(x)$$

On en déduit que pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty[\,, \varphi(x) = (\ln x - 1)u(x)$

b) Déduisons de ce qui précède le signe de $\boldsymbol{\varphi(x)}$ suivant les valeurs de $\boldsymbol{x}$

pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty[$, $u(x) \geq 0$

donc le signe de $\varphi(x)$ dépend du signe de $(\ln x - 1)$

Tableau de signe de $\varphi(x)$

x	0 e $+\infty$	
$\ln x - 1$	$-$	$+$
$\varphi(x)$	$-$	$+$

On en déduit que :
pour tout $x \in]\,0\,; e[\,$, $\varphi(x) < 0$
pour tout $x \in]\,e\,; +\infty[\,$, $\varphi(x) < 0$

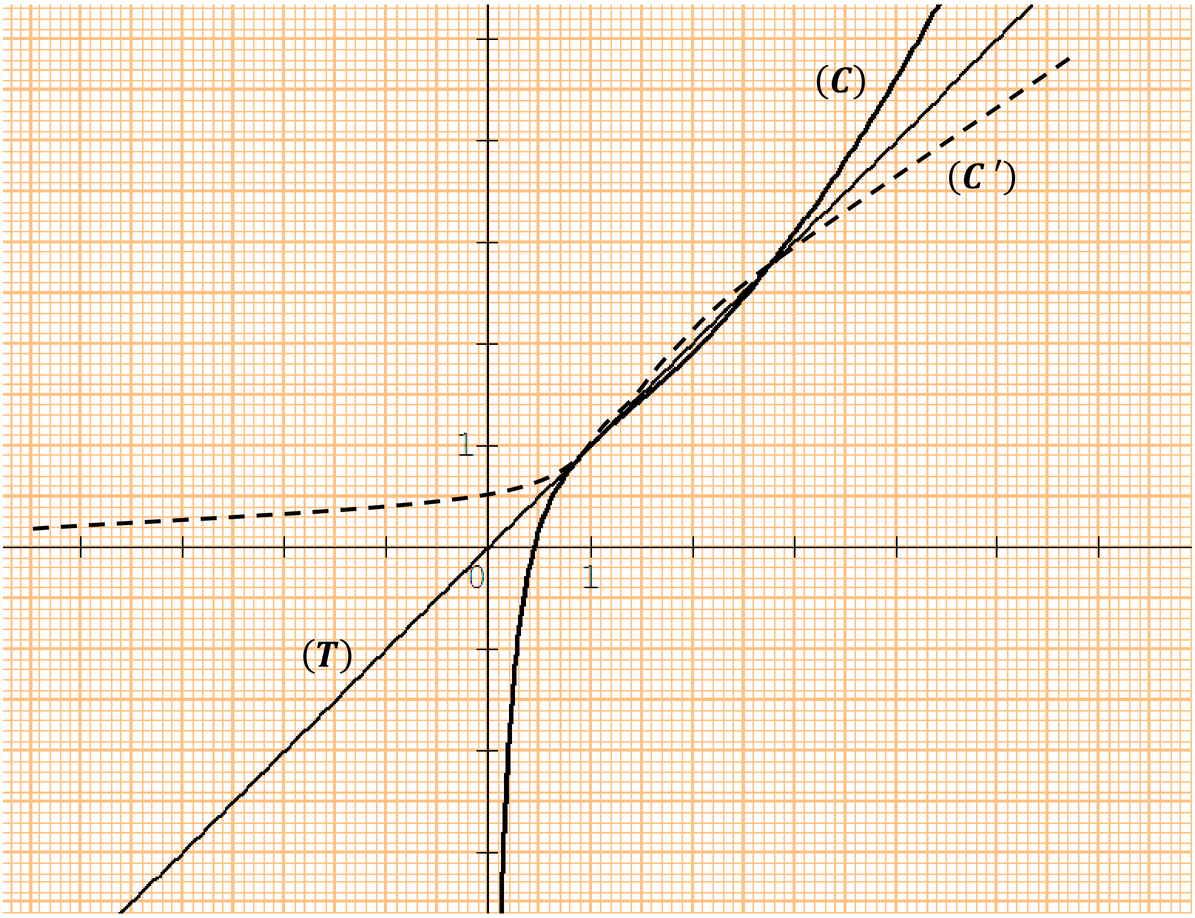
c) Déterminons la position de la courbe (C_f) par rapport à la tangente (T)

Etudions le signe de $(f(x) - y)$ suivant les valeurs de x

$$f(x) - y = f(x) - x$$
$$= \varphi(x)$$

Il résulte de la question précédente que :
- la courbe (C_f) est en-dessous de la tangente (T) sur $]\,0\,; e[$
- la courbe (C_f) est au-dessus de la tangente (T) sur $]\,e\,; +\infty[$

3- (C') ***est la courbe représentative de f^{-1} . Tracer (T) , (C_f) et la courbe (C') dans le même repère.***



Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Problème 13

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty[$

Expression de $g(x)$ sans valeur absolue

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$
$\lvert 1-x\rvert$	$1-x$	0	$-1+x$
$g(x)$	$\dfrac{x+2}{1-x}-\ln(1-x)$	$\Vert$	$\dfrac{x+2}{1-x}-\ln(x-1)$

1- Calculons les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

Limite de g en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+2}{1-x}-\ln(1-x)\right)$$

Posons $X = 1-x$

Quand $x \to -\infty$; $X \to +\infty$

$X = 1-x \quad \Longrightarrow \quad x = 1-X$

$\Longrightarrow \quad x+2 = 1-X+2$

$\Longrightarrow \quad x+2 = -X+3$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{-X+3}{X}-\ln X\right)$$

$$= -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{-X+3}{X} = -1 \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$

Limite de g en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{1-x}-\ln(x-1)\right)$$

Posons $X = x - 1$

Quand $x \to +\infty$; $X \to +\infty$

$X = x - 1 \implies x = X + 1$

$\implies x + 2 = X + 1 + 2$

$\implies x + 2 = X + 3$

$X = x - 1 \implies x = X + 1$

$\implies -x = -X - 1$

$\implies 1 - x = 1 - X - 1$

$\implies 1 - x = -X$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{X+3}{-X} - \ln X\right)$$

$$= -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X+3}{-X} = -1 \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$

2- a) ***Justifions clairement que :*** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} g(x) = +\infty$ ***et*** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} g(x) = -\infty$

(Voir la méthode de c*hangement de variable affine* en posant $X = ax + b$)

Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} g(x) = +\infty$

Posons $X = 1 - x$

Lorsque $x \underset{<}{\to} 1$, $X \underset{>}{\to} 0$

$X = 1 - x \implies x = 1 - X$

$\implies x + 2 = 1 - X + 2$

$\implies x + 2 = -X + 3$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\frac{x+2}{1-x} - \ln(1-x) \right)$$

$$= \lim_{\substack{X \to 0 \\ >}} \left(\frac{-X+3}{X} - \ln X \right)$$

$$= \lim_{\substack{X \to 0 \\ >}} \frac{1}{X} (-X + 3 - X \ln X)$$

$$= +\infty$$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} g(x) = +\infty$

Montrons que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \boldsymbol{g(x)} = -\infty$

Posons $X = x - 1$

Lorsque $x \underset{>}{\to} 1$, $X \underset{>}{\to} 0$

$$\begin{aligned} X = x - 1 \quad &\Longrightarrow \quad x = X + 1 \\ &\Longrightarrow \quad -x = -X - 1 \\ &\Longrightarrow \quad -x + 1 = -X - 1 + 1 \\ &\Longrightarrow \quad 1 - x = -X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X = x - 1 \quad &\Longrightarrow \quad x = X + 1 \\ &\Longrightarrow \quad x + 2 = X + 1 + 2 \\ &\Longrightarrow \quad x + 2 = X + 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{x+2}{1-x} - \ln(x-1) \right)$$

$$= \lim_{\substack{X \to 0 \\ >}} \left(\frac{X+3}{-X} - \ln X \right)$$

$$= \lim_{\substack{X \to 0 \\ >}} \frac{1}{-X} (X + 3 + X \ln X)$$

$$= \lim_{\substack{X \to 0 \\ >}} \left[-\frac{1}{X} (X + 3 + X \ln X) \right]$$

$$= -\infty$$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} g(x) = -\infty$

b) ***Interprétons graphiquement les résultats***

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} g(x) = +\infty \implies$ la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe (C)

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} g(x) = -\infty \implies$ la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe (C)

3-a) ***Démontrons que pour tout*** $\boldsymbol{x} \in]-\infty; \mathbf{1}\,[\cup]\,\mathbf{1}\,; +\infty[$, $\boldsymbol{g'(x) = \dfrac{4-x}{(1-x)^2}}$

pour tout $x \in]-\infty; 1\,[\cup]\,1\,; +\infty[$,:

$$g'(x) = \left(\frac{x+2}{1-x} - \ln|1-x|\right)'$$

$$= \left(\frac{x+2}{1-x}\right)' - (\ln|1-x|)'$$

$$= \frac{(x+2)'(1-x) - (1-x)'(x+2)}{(1-x)^2} - \frac{(1-x)'}{1-x}$$

$$= \frac{1\times(1-x) - (-1)(x+2)}{(1-x)^2} - \frac{-1}{1-x}$$

$$= \frac{1-x+x+2}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1\times(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1-x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{4-x}{(1-x)^2}$$

b) ***Déduisons de ce qui précède les variations de g***

pour tout $x \in]-\infty; 1\,[\cup]\,1\,; +\infty[$, $(1-x)^2 > 0$
donc le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $4-x$

tableau de signe de $g'(x)$

x	$-\infty$	1		4		$+\infty$
$4-x$	$+$	|	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	$+$	||	$+$	0	$-$	

Pour tout $x \in]-\infty; 1\,[\cup]\,1\,; 4[$, $g'(x) > 0$
Donc g est strictement croissante sur $]-\infty; 1\,[$ et sur $]\,1\,; 4[$

Pour tout $x \in]\,4\,; +\infty[$, $g'(x) < 0$
Donc g est strictement décroissante sur $]\,4\,; +\infty[$

c) ***Dressons le tableau de variation de g***

x	$-\infty$	1		4		$+\infty$
$4-x$	$+$	|	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	$+$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$-2-\ln 3$	↘	$-\infty$

4-a) ***Démontrons que g s'annule sur*** $]-\infty; \mathbf{1}\,[$ ***pour une seule valeur α telle que*** $\boldsymbol{-1 < \alpha < 0}$

(On demande de montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $-1 < \alpha < 0$)

g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 1\,[$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty; 1\,[$ vers $g(\,]-\infty; 1\,[\,) = \mathbb{R}$
Comme $0 \in \mathbb{R}$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty; 1\,[$

g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 1[$ en particulier sur $]-1 ; 0[$
De plus $g(-1) \approx -0,193$ et $g(0) = 2$
Comme $g(-1) \times g(0) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires , on a :
$-1 < \alpha < 0$

b) ***Donnons un encadrement de α d'amplitude $\mathbf{0,1}$ par la méthode de balayage***
(un encadrement de α d'amplitude 0,1 revient à encadrer α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1)

Encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1

x	-1	$-0,9$	$-0,8$	$-0,7$	$-0,6$	$-0,5$	$-0,4$	$-0,3$	$-0,2$	$-0,1$	0
Signe de $g(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

On déduit du tableau ci-dessus que : $-0,9 < \alpha < -0,8$

5- ***Justifions que*** $\begin{cases} \forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]-\infty;\ \boldsymbol{\alpha}[\,\cup\,]\mathbf{1};+\infty[\ ;\ \boldsymbol{g(x)} < \mathbf{0} \\ \forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]\,\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}\,[\ ;\ \boldsymbol{g(x)} < \mathbf{0} \end{cases}$

g est strictement croissante sur $]-\infty;\ 1[$ et $\alpha \in]-\infty;\ 1[$

Pour tout $x \in]-\infty\,;\,\alpha\,[$, $x < \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha)$
$\Rightarrow g(x) < 0$

Pour tout $x \in]\,\alpha\,;1\,[$, $x > \alpha \Rightarrow g(x) > g(\alpha)$
$\Rightarrow g(x) > 0$

Pour tout $x \in]1;+\infty[$, g admet pour maximum absolu $-2 - \ln 3 < 0$
Donc pour tout $x \in]1;+\infty[$, $g(x) < 0$

On déduit de ce qui précède que : $\begin{cases} \forall\, x \in\ ]-\infty;\ \alpha[\,\cup\,]1;+\infty[\ ;\ g(x) < 0 \\ \forall\, x \in\ ]\,\alpha;1\,[\ ;\ g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

1- Calculons les limites de f aux bornes de $]-\infty; \mathbf{1}[\cup]\mathbf{1}; +\infty[$

Expression de $f(x)$ sans valeur absolue

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$
$\lvert 1-x \rvert$	$1-x$	0	$-1+x$
$f(x)$	$(x+2)\ln(1-x)$	$\Vert$	$(x+2)\ln(x-1)$

Limite de f en $-\infty$

Posons $X = 1-x$

Quand $x \to -\infty$; $X \to +\infty$

$$X = 1-x \implies x = 1-X$$
$$\implies x+2 = 1-X+2$$
$$\implies x+2 = -X+3$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x+2)\ln(1-x)$$
$$= \lim_{X\to+\infty}(-X+3)\ln X$$
$$= -\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{X\to+\infty}(-X+3) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty}\ln X = +\infty \end{cases}$

Limite de f à gauche en 1

Posons $X = 1-x$

Lorsque $x \underset{<}{\to} 1$, $X \underset{>}{\to} 0$

$$X = 1-x \implies x = 1-X$$
$$\implies x+2 = 1-X+2$$
$$\implies x+2 = -X+3$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x+2)\ln(1-x)$$
$$= \lim_{\substack{X \to 0 \\ >}} (-X+3)\ln X$$
$$= -\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ >}} (-X+3) = 3 \\ \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ >}} \ln X = -\infty \end{cases}$

Limite de f à droite en 1

Posons $X = x - 1$

Lorsque $x \underset{>}{\to} 1$, $X \underset{>}{\to} 0$

$X = x - 1 \quad \Longrightarrow \quad x = X + 1$
$\Longrightarrow \quad x + 2 = X + 1 + 2$
$\Longrightarrow \quad x + 2 = X + 3$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x+2)\ln(x-1)$$
$$= \lim_{\substack{X \to 0 \\ >}} (X+3)\ln X$$
$$= -\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ >}} (X+3) = 3 \\ \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ >}} \ln X = -\infty \end{cases}$

Limite de f en $+\infty$

Posons $X = x - 1$

Quand $x \to +\infty$; $X \to +\infty$

$X = x - 1 \quad \Longrightarrow \quad x = X + 1$
$\Longrightarrow \quad x + 2 = X + 1 + 2$
$\Longrightarrow \quad x + 2 = X + 3$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+2)\ln(x-1)$$

$$= \lim_{X\to+\infty} (X+3)\ln X$$

$$= +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{X\to+\infty} (X+3) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$

2- Démontrons que pour tout $x \in \left]-\infty; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$, $f'(x) = -g(x)$

pour tout $x \in \left]-\infty; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$, $f'(x) = [\ (x+2)\ln|1-x|\ ]'$

$$= (x+2)'\ln|1-x| + (\ln|1-x|)' \times (x+2)$$

$$= 1 \times \ln|1-x| + \frac{(1-x)'}{1-x} \times (x+2)$$

$$= \ln|1-x| + \frac{-(x+2)}{1-x}$$

$$= \ln|1-x| - \frac{x+2}{1-x}$$

$$= -\left(-\ln|1-x| + \frac{x+2}{1-x}\right)$$

$$= -\left(\frac{x+2}{1-x} - \ln|1-x|\right)$$

$$= -g(x)$$

3- a) ***Etudions les variations de f***

pour tout $x \in \left]-\infty; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$, $f'(x) = -g(x)$

donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $-g(x)$; or d'après la question A-5 , on a :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \left]-\infty; \alpha\right[\cup \left]1; +\infty\right[\ ;\ g(x) < 0 \\ \forall\, x \in \left]\alpha; 1\right[\ ;\ g(x) > 0 \end{cases}$$

on en déduit que $\begin{cases} \forall\, x \in \ ]-\infty;\ \alpha[\, \cup\,]1;+\infty[\ ;\ \ f'(x) > 0 \\ \forall\, x \in \ ]\,\alpha;1\,[\ ;\ \ f'(x) < 0 \end{cases}$

par conséquent , f est strictement croissante sur $]-\infty;\ \alpha[$ et sur $]1;+\infty[$

f est strictement décroissante sur $]\,\alpha;1\,[$

b) ***Dressons son tableau de variation***

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4- ***Démontrons que*** $\boldsymbol{f(\alpha) = \dfrac{(\alpha+2)^2}{1-\alpha}}$

Remarque

La résolution de ce type de question se fait en deux (2) étapes :

1ère étape : On utilise dans la partie A , le fait que $g(\alpha) = 0$ comme dans la partie B , la fonction f contient $\ln|1-x|$ et que $f(\alpha)$ ne contient pas $\ln|1-\alpha|$ alors on exprime $\ln|1-\alpha|$ en fonction de α

2ème étape : on remplace dans $f(\alpha)$, $\ln|1-\alpha|$ par son expression

$$g(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha+2}{1-\alpha} - \ln|1-\alpha| = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\ln|1-\alpha| = -\frac{\alpha+2}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \ln|1-\alpha| = \frac{\alpha+2}{1-\alpha}$$

$$\boldsymbol{f(\alpha) = (\alpha+2)\,\ln|1-\alpha| \quad \Rightarrow \quad f(\alpha) = (\alpha+2) \times \frac{\alpha+2}{1-\alpha}}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \quad f(\alpha) = \frac{(\alpha+2)^2}{1-\alpha}}$$

5- *Déterminons les coordonnées des points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses.*

(Cela revient à déterminer les points de la courbe (C) dont les abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$)

$f(x) = 0 \Rightarrow (x+2)\ln|1-x| = 0$

$\Rightarrow x + 2 = 0$ ou $\ln|1-x| = 0$

$\Rightarrow x = -2$ ou $\ln|1-x| = \ln 1$

$\Rightarrow x = -2$ ou $|1-x| = 1$

$\Rightarrow x = -2$ ou $1 - x = 1$ ou $1 - x = -1$

$\Rightarrow x = -2$ ou $-x = 1 - 1$ ou $-x = -1 - 1$

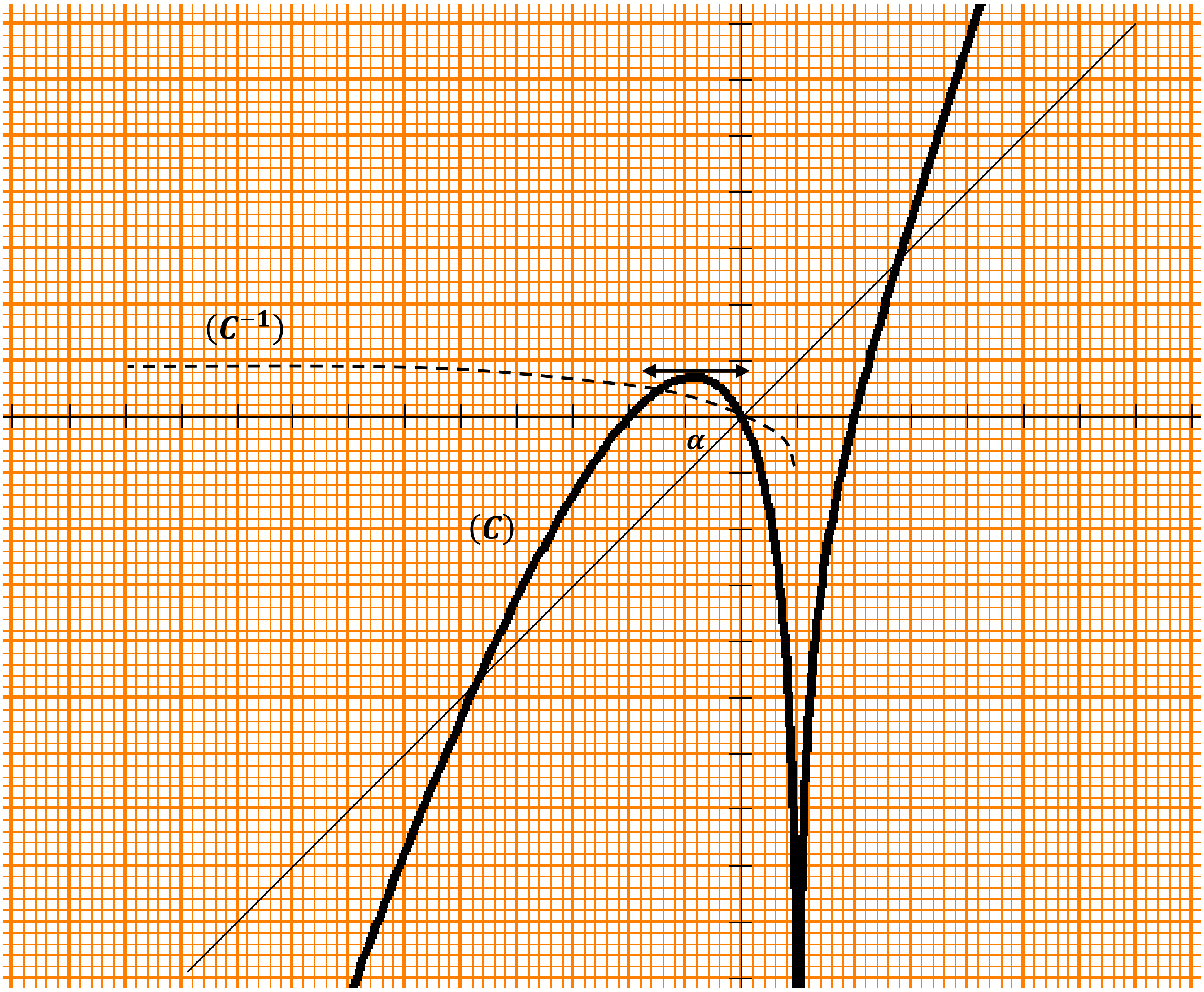
$\Rightarrow x = -2$ ou $-x = 0$ ou $-x = -2$

$\Rightarrow x = -2$ ou $x = 0$ ou $x = 2$

les coordonnées des points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses sont :
$A(-2\,;0)$; $B(0\,;0)$ et $E(2\,;\,0)$

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

6- Traçons la courbe (C) . Prendre $\alpha = -0,8$



Partie C

(Lorsqu'on parle de restriction h de la fonction f à un intervalle $[\,\alpha\,;1\,[$, il faut comprendre que c'est la même fonction f seulement que son ensemble d'étude se réduit à l'intervalle $[\,\alpha\,;1\,[$)

1- Démontrons que h réalise une bijection de $[\,\alpha\,;1\,[$ vers un intervalle K à préciser.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[\,\alpha\,;1\,[$ donc h , la restriction de la fonction f à l'intervalle $[\,\alpha\,;1\,[$, est continue et strictement décroissante sur $[\,\alpha\,;1\,[$; par conséquent h réalise une bijection de $[\,\alpha\,;1\,[$ vers $h([\,\alpha\,;1\,[\,)$

Or $h([\,\alpha\,;1\,[\,) = f([\,\alpha\,;1\,[\,) =]-\infty\,;f(\alpha)]$

On conclut que h réalise une bijection de l'intervalle $[\,\alpha\,;1\,[$ vers $]-\infty\,;f(\alpha)]$

Email : oualefidele@gmail.com Cel : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

2- Justifions que la bijection réciproque h^{-1} de h n'est pas dérivable en $h(\alpha)$

(On sait que $\boldsymbol{h(\alpha) = f(\alpha) = \dfrac{(\alpha+2)^2}{1-\alpha}}$ donc pour montrer que h^{-1} est dérivable en $\mathbf{h(\alpha)}$ il suffit de montrer que h est dérivable en α et $h'(\alpha) \neq 0$)

f est dérivable sur $[\,\alpha\,;1\,[$ $\Longrightarrow$ h est dérivable sur $[\,\alpha\,;1\,[$
Comme $\alpha \in [\,\alpha\,;1\,[$ alors h est dérivable en α
De plus , pour tout $x \in [\,\alpha\,;1\,[$, $h'(x) = f'(x) = -g(x)$
Donc $h'(\alpha) = -g(\alpha) = 0$
On conclut que h est dérivable en α et $h'(\alpha) = 0$ donc h^{-1} n'est dérivable pas en $h(\alpha)$

3- Déterminons le sens de variation de h^{-1}

(Une fonction bijective f et sa bijection reciproque f^{-1} ont le même sens de variation)

Comme h est strictement décroissante sur $[\,\alpha\,;1\,[$ alors h^{-1} est strictement décroissante sur $]-\infty\,; f(\alpha)]$

dressons son tableau de variation.

x	$-\infty$		$f(\alpha)$
$(h^{-1})'(x)$		$-$	
$h^{-1}(x)$	1	$\searrow$	α

4- Construisons la courbe (C^{-1}) de h^{-1} dans le même repère

Problème 14

Partie A

La fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$

1- a) ***Démontrons que la limite de g en $+\infty$ est égale à -1***

Posons $X = 1 - x$

Lorsque $x \to +\infty$; $X \to -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (1-x)e^{1-x} - 1$$

$$= \lim_{X\to-\infty} Xe^X - 1$$

$$= -1$$

Car $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$

b) ***Déterminons la limite de g en $-\infty$***

Posons $X = 1 - x$

Lorsque $x \to -\infty$; $X \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (1-x)e^{1-x} - 1$$

$$= \lim_{X\to+\infty} Xe^X - 1$$

$$= +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{X\to+\infty} X = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty \end{cases}$

2- a) ***Démontrons que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = (x-2)e^{1-x}$***

$\forall\, x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = \left((1-x)e^{1-x} - 1\right)'$

$$= (1-x)' \times e^{1-x} + (e^{1-x})' \times (1-x)$$

$$= -1 \times e^{1-x} + (-e^{1-x}) \times (1-x)$$

$$= -e^{1-x} - e^{1-x} + xe^{1-x}$$

$$= -2e^{1-x} + xe^{1-x}$$

$= (-2 + x)e^{1-x}$

$= (x - 2)e^{1-x}$

b) ***Déduisons de ce qui précède le sens de variation de g***

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{1-x} > 0$

Donc le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $x - 2$

Tableau de signe de $g'(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

Pour tout $x \in]-\infty\,;2\,[$, $g'(x) < 0$
Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;2\,[$

Pour tout $x \in]\,2\,;+\infty\,[$, $g'(x) > 0$
Donc g est strictement croissante sur $]\,2\,;+\infty\,[$

c) ***Dressons le tableau de variation de g***

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$-e^{-1}-1$	$\nearrow$ -1

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

3- a) ***Démontrons que l'équation*** $\boldsymbol{g(x) = 0}$ ***admet une solution unique*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***dans*** $\mathbb{R}$

g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;2\,[$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty\,;2\,[$ vers $g(\,]-\infty\,;2\,[\,) =]-e^{-1}-1\ ;\ +\infty[$
Comme $0 \in]-e^{-1}-1\ ;\ +\infty[$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty\,;2\,[$

Sur $]\,2\,;+\infty\,[$, g admet pour maximum absolu $-1 < 0$
Donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]\,2\,;+\infty\,[$

Autre méthode
g est continue et strictement croissante sur $]\,2\,;+\infty\,[$ donc elle réalise une bijection de $]\,2\,;+\infty\,[$ vers $g(\,]\,2\,;+\infty\,[\,) =]-e^{-1}-1\ ;\ -1\,[$
Comme $0 \notin]-e^{-1}-1\ ;\ -1\,[$ alors l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]\,2\,;+\infty\,[$

On déduit donc que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

b) ***Justifions que*** $\boldsymbol{0,4 < \alpha < 0,5}$

$]\,0,4\,;0,5\,[\, \subset]-\infty\,;2\,[$

De plus $g(0,4) \approx 0,093$ et $g(0,5) \approx -0,1756$

Comme $g(0,4) \times g(0,5) < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires , on a :

$0,4 < \alpha < 0,5$

c) Démontrons que : $\begin{cases} \forall\, x \in]-\infty;\alpha[\ ;\ \ g(x) > 0 \\ \forall\, x \in]\alpha;+\infty[\ ;\ \ g(x) < 0 \end{cases}$

g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;2\,[$ et $\alpha \in]-\infty\,;2\,[$

Pour tout $x \in \left]-\infty\,;\,\alpha\right[$, $x < \alpha \Rightarrow g(x) > g(\alpha)$
$\Rightarrow g(x) > 0$

Pour tout $x \in]\,\alpha\,;2\,[$, $x > \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha)$
$\Rightarrow g(x) < 0$

Pour tout $x \in]2\,;+\infty[$, g admet pour maximum absolu -1 ; or $-1 < 0$

Donc pour tout $x \in]2;+\infty[$, $g(x) < 0$

On déduit de ce qui précède que : $\begin{cases} \forall\, x \in]-\infty;\alpha[\ ;\ g(x) > 0 \\ \forall\, x \in]\alpha;+\infty[\ ;\ g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

1- a) ***Démontrons que la limite de f en $+\infty$ est égale à $-\infty$***

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(xe^{1-x} - x + 2)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(xe^1 \times e^{-x} - x + 2)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(xe \times \frac{1}{e^x} - x + 2\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(e \times \frac{x}{e^x} - x + 2\right) \qquad ;\quad or \quad \frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(e \times \frac{1}{\frac{e^x}{x}} - x + 2\right)$$

$$= -\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0 \end{cases}$

b) ***Déterminons la limite de f en $-\infty$***

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(xe^{1-x} - x + 2)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(x(e^{1-x} - 1) + 2)$$

$$= -\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty \end{cases}$

2- a) ***Démontrons que :*** $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ ***;*** $\boldsymbol{f'(x) = g(x)}$

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R} ;\ f'(x) &= (\,xe^{1-x} - x + 2\,)' \\ &= (\,x\,)' \times e^{1-x} + (e^{1-x})' \times x \ -(\,x\,)' \\ &= 1 \times e^{1-x} + (-e^{1-x}) \times x \ - 1 \\ &= e^{1-x} - xe^{1-x} \ - 1 \\ &= (1-x)e^{1-x} - 1 \\ &= g(x)\end{aligned}$$

b) ***Déduisons de ce qui précède le sens de variation de f***

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = g(x)$

Donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$; d'après la question A-3-c , on a :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \left]-\infty;\alpha\right[\ ; \ g(x) > 0 \\ \forall\, x \in \left]\alpha;+\infty\right[\ ; \ g(x) < 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \left]-\infty;\alpha\right[\ ; \ f'(x) > 0 \\ \forall\, x \in \left]\alpha;+\infty\right[\ ; \ f'(x) < 0 \end{cases}$$

Par conséquent f est strictement croissante sur $\left]-\infty;\alpha\right[$ et strictement décroissante sur $\left]\alpha;+\infty\right[$

c) ***Dressons le tableau de variation de f***

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3- a) ***Démontrons que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en*** $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(\,f(x) - y\,) = \lim_{x\to+\infty}[\,(xe^{1-x} - x + 2) - (-x + 2)\,]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(\,xe^{1-x} - x + 2 + x - 2\,)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} xe^{1-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} xe^{1} \times e^{-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} xe \times \frac{1}{e^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e \times \frac{x}{e^x} \qquad ; \quad or \quad \frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e \times \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$$

$$= 0$$

Car $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

On en déduit que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$

b) ***Etudier la position de (C) par rapport à (D)***

Etudions le signe de $(f(x) - y)$ suivant les valeurs de x

$$f(x) - y = (xe^{1-x} - x + 2) - (-x + 2)$$
$$= xe^{1-x} - x + 2 + x - 2$$
$$= xe^{1-x}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{1-x} > 0$

Donc le signe de $(f(x) - y)$ dépend du signe de x

Par conséquent :

Pour tout $x \in]-\infty\,;0[$, $f(x) - y < 0$
Donc la courbe (C) est en dessous de la droite (D) sur $]-\infty\,;0[$

Pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$, $f(x) - y > 0$
Donc la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur $]\,0\,;+\infty\,[$

4- *Démontrer que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$*

(comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, il suffit d montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ est égale à $-\infty$ ou à $+\infty$)

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{1-x} - x + 2}{x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left(e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}\right)$$

Posons $X = 1 - x$
Lorsque $x \to -\infty$; $X \to +\infty$

$X = 1 - x \implies x = 1 - X$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{X\to+\infty}\left(e^X-1+\frac{2}{1-X}\right)$$

$$=+\infty$$

Car $\begin{cases}\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{2}{1-X} = 0\end{cases}$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ alors la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$

5- ***Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1***

$(T) : y = f'(1)\times(x-1)+f(1)$; or $f'(1)=-1$ et $f(1)=2$

$y=-1\times(x-1)+2$
$y=-x+1+2$
$y=-x+3$

une équation de la tangente (T) à la courbe (C) point d'abscisse 1 est : $y=-x+3$

6- ***Démontrons que*** $\boldsymbol{f(\alpha)=1-\alpha+\dfrac{1}{1-\alpha}}$

Remarque

La résolution de ce type de question se fait en deux (2) étapes :

1ère étape : On utilise dans la partie A , le fait que $g(\alpha)=0$
comme dans la partie B , la fonction f contient e^{1-x} et que $f(\alpha)$ ne contient pas $\mathrm{e}^{1-\alpha}$ alors on exprime $\mathrm{e}^{1-\alpha}$ en fonction de α

2ème étape : on remplace dans $f(\alpha)$, $\mathrm{e}^{1-\alpha}$ par son expression

$$g(\alpha)=0 \implies (1-\alpha)e^{1-\alpha}-1=0$$

$$\implies (1-\alpha)e^{1-\alpha}=1$$

$$\implies e^{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$$

$$f(\alpha) = \alpha e^{1-\alpha} - \alpha + 2 \quad \Rightarrow \quad f(\alpha) = \alpha \times \frac{1}{1-\alpha} - \alpha + 2$$

$$\Rightarrow \quad f(\alpha) = \frac{\alpha}{1-\alpha} - \alpha + 2$$

$$\Rightarrow \quad f(\alpha) = 2 - \alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad f(\alpha) = 1 + 1 - \alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad f(\alpha) = 1 - \alpha + 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1-\alpha+\alpha}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$$

7- a) ***Démontrons que*** $\boldsymbol{f(-\beta+2) = e^{\beta-1} f(\beta)}$

$$f(-\beta+2) = (-\beta+2)e^{1-(-\beta+2)} - (-\beta+2) + 2$$

$$= (-\beta+2)e^{1+\beta-2} + \beta - 2 + 2$$

$$= (-\beta+2)e^{\beta-1} + \beta$$

$$= e^{\beta-1}\left[(-\beta+2) + \frac{\beta}{e^{\beta-1}}\right]$$

$$= e^{\beta-1}\left(-\beta + 2 + \beta \times e^{-(\beta-1)}\right)$$

$$= e^{\beta-1}\left(-\beta + 2 + \beta e^{-\beta+1}\right)$$

$$= e^{\beta-1}\left(\beta e^{-\beta+1} - \beta + 2\right)$$

$$= e^{\beta-1} f(\beta)$$

b) ***En déduire l'autre solution de l'équation :*** $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = 0}$

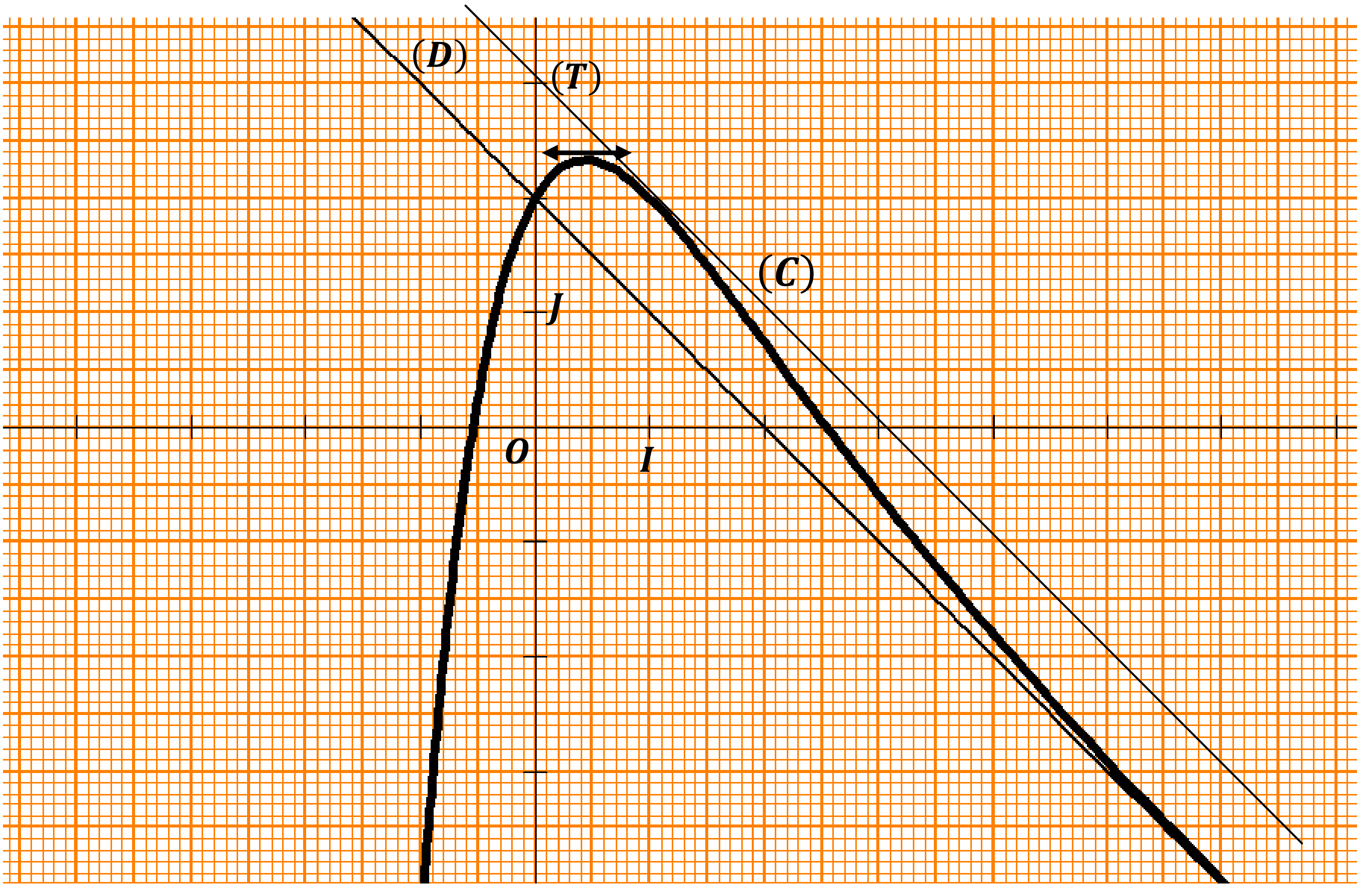
(s'il existe un nombre réel a tel que $f(a) = 0$ alors a est une solution de l'équation : $f(x) = 0$)

On sait que $f(\beta) = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{\beta-1} f(\beta) = 0$

$\Longrightarrow \quad f(-\beta + 2) = 0$

$\Longrightarrow \quad -\beta + 2$ est aussi une solution de l'équation $f(x) = 0$)

8- Construire (D) , (T) et (C) dans le repère (O, I, J) .On prendra $\boldsymbol{\alpha = 0,4}$ ***et*** $\boldsymbol{\beta = 2,5}$



Partie C

Soit λ un nombre réel strictement positif et $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C) , la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$

1- ***Calculons $\mathcal{A}(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties***

L'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C) , la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$ est définie par :

$$\int_0^{\lambda}(f(x) - y)dx \times ua \quad ; \text{ où } \quad ua = OI \times OJ\ cm^2$$

Or $f(x) - y = xe^{1-x}$

Posons $u'(x) = e^{1-x} \quad \Longrightarrow \quad u(x) = -e^{1-x}$

$v(x) = x \quad \Longrightarrow \quad v'(x) = 1$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^{\lambda} xe^{1-x}\, dx \times ua$$

$$= \left([-xe^{1-x}]_0^{\lambda} - \int_0^{\lambda} -e^{1-x}\, dx\right) \times ua$$

$$= \left(-\lambda e^{1-\lambda} - (-0 \times e^{1-0}) + \int_0^{\lambda} e^{1-x}\, dx\right) \times ua$$

$$= \left(-\lambda e^{1-\lambda} + [-e^{1-x}]_0^{\lambda}\right) \times ua$$

$$= \left(-\lambda e^{1-\lambda} - e^{1-\lambda} - (-e^{1-0})\right) \times ua$$

$$= \left(-\lambda e^{1-\lambda} - e^{1-\lambda} + e\right) \times ua \quad ; \quad or \quad ua = 2 \times 2\ cm^2 = 4\ cm^2$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left((-\lambda - 1)e^{1-\lambda} + e\right) 4\ cm^2$$

2- ***Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$***

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} \left((-\lambda - 1)e^{1-\lambda} + e\right) 4\ cm^2$$

Posons

$X = 1 - \lambda$

Quand $\lambda \to +\infty$; $X \to -\infty$

$$X = 1 - \lambda \quad \Longrightarrow \quad -\lambda = X - 1$$
$$\Longrightarrow \quad -\lambda - 1 = X - 1 - 1$$
$$\Longrightarrow \quad -\lambda - 1 = X - 2$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{X \to -\infty} \big((X-2)e^{X} + e\,\big)4\ cm^2$$
$$= \lim_{X \to -\infty} (Xe^{X} - 2e^{X} + e\,)4\ cm^2$$
$$= 4e\ cm^2$$
$$\approx 10{,}87\ cm^2$$

Problème 15

Partie A

La fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$

1) ***Etudions les limites de g en 0 et en*** $+\infty$

Limite de g en **0**

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\ln x^2 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^2}\left(x^2 \ln x^2 + 4x - 2\right)$$

Posons $X = x^2$

Quand $x \to 0$, $X \to 0$

$X = x^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{X}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{X}\left(X \ln X + 4\sqrt{X} - 2\right)$$

$$= -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{X} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} X \ln X = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{X} = 0 \end{cases}$

Limite de g en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln x^2 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(2\ln x + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$$

$$= +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

2) a- ***Calculons*** $\boldsymbol{g'(x)}$ ***pour tout*** $\boldsymbol{x}$ ***de*** $]\mathbf{0};+\infty[$

pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = \left(\ln x^2 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}\right)'$

$$= (\ln x^2)' + \left(\frac{4}{x}\right)' - \left(\frac{2}{x^2}\right)'$$

$$= \frac{(x^2)'}{x^2} + 4\left(\frac{1}{x}\right)' - 2\left(\frac{1}{x^2}\right)'$$

$$= \frac{2x}{x^2} + 4\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2\left(\frac{-2}{x^3}\right)$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3}$$

$$= \frac{2x^2}{x^3} - \frac{4x}{x^3} + \frac{4}{x^3}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x + 4}{x^3}$$

b- ***Etudions le sens de variation de*** $\boldsymbol{g}$

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x^3 > 0$

donc le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $2x^2 - 4x + 4$

Déterminons le signe du polynôme $2x^2 - 4x + 4$ suivant les valeurs de x

$\Delta = b^2 - 4ac$; avec $a = 2$, $b = -4$ et $c = 4$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 4$

$= 16 - 32$

$= -16$

Comme $\Delta < 0$ alors le signe du polynôme $2x^2 - 4x + 4$ est celui de $a = 2$

donc pour tout $x \in]0;+\infty[$, $2x^2 - 4x + 4 > 0$

Par conséquent pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) > 0$

On conclut alors que g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Dressons le tableau de variation de g

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3) ***Démontrons que l'équation : $x \in \ ]0;+\infty[$, $g(x) = 0$ admet une solution unique α***

g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ vers $g(\,]0;+\infty[\,) =]-\infty;+\infty[$
Comme $0 \in]-\infty;+\infty[$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0;+\infty[$

Justifions que $0,55 < \alpha < 0,60$.
g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, en particulier sur] 0,55 ; 0,56 [
De plus $g(0{,}55) \approx$ et $g(0{,}56) \approx$
Comme $g(0{,}55) \times g(0{,}56) < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a : $0{,}55 < \alpha < 0{,}60$

Donnons une valeur approchée à 10^{-2} près par excès de α
Une valeur approchée à 10^{-2} près par excès de α est 0,60

4) ***Déduisons de ce qui précède le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x***
g est strictement croissante sur] 0 ; +∞ [

Pour tout $x \in \,]\,0\,;\,\alpha\,[$, $\quad x < \alpha \ \Rightarrow g(x) < g(\alpha)$
$$\Rightarrow g(x) < 0$$

Pour tout $x \in \,]\,\alpha\,;+\infty\,[$, $\quad x > \alpha \ \Rightarrow g(x) > g(\alpha)$
$$\Rightarrow g(x) > 0$$

On déduit de ce qui précède que : $\begin{cases} \forall\, x \in \,]\,0\,;\,\alpha\,[\ ;\ g(x) < 0 \\ \forall\, x \in \,]\alpha;+\infty[\ ;\ g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$

1) a- ***Calculer*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ***et*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ***et en donner une interprétation graphique***

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\ln x^2 + \frac{2}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} e^x\left(2\ln x + \frac{2}{x}\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0\end{cases}$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(\ln x^2 + \frac{2}{x}\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}\left(\ln x^2 + \frac{2}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}\left(2\ln x + \frac{2}{x}\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0\end{cases}$

Donnons une interprétation graphique des résultats ci-dessus

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ alors la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OJ)

b- ***Justifions que pour tout*** $\boldsymbol{x \in]0;+\infty[}$ **,** $\boldsymbol{f(x) = 2e^x\left(\dfrac{x\ln x + 1}{x}\right)}$

pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = e^x\left(\ln x^2 + \dfrac{2}{x}\right)$

$$= e^x\left(2\ln x + \frac{2}{x}\right)$$

$$= 2e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 2e^x\left(\frac{x\ln x + 1}{x}\right)$$

c- ***Calculons*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2e^x\left(\frac{x\ln x + 1}{x}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2e^x \times \frac{1}{x}(x\ln x + 1)$$

$$= +\infty$$

Interprétons graphiquement le résultat ci-dessus

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty \implies$ La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C)

2) a- ***Calculons*** $\boldsymbol{f'(x)}$ ***pour tout*** $\boldsymbol{x \in]0;+\infty[}$

pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \left[e^x\left(\ln x^2 + \dfrac{2}{x}\right)\right]'$

$$= (e^x)' \times \left(\ln x^2 + \frac{2}{x}\right) + \left(\ln x^2 + \frac{2}{x}\right)' \times e^x$$

$$= e^x \times \left(\ln x^2 + \frac{2}{x}\right) + \left((\ln x^2)' + \left(\frac{2}{x}\right)'\right) \times e^x$$

$$= e^x \left(\ln x^2 + \frac{2}{x}\right) + \left(\frac{(x^2)'}{x^2} + 2\left(\frac{1}{x}\right)'\right) e^x$$

$$= e^x \left(\ln x^2 + \frac{2}{x}\right) + \left(\frac{2x}{x^2} + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) e^x$$

$$= e^x \left(\ln x^2 + \frac{2}{x}\right) + \left(\frac{2}{x} + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) e^x$$

$$= e^x \left(\ln x^2 + \frac{2}{x}\right) + \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right) e^x$$

$$= e^x \left(\ln x^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$$

$$= e^x \left(\ln x^2 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$$

$$= g(x)$$

Donnons le sens de variation de f

pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = g(x)$

donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$; or d'après la question A-4 , on a :

$$\begin{cases} \forall\, x \in]\,0\,;\ \alpha\,[\ ;\ \ g(x) < 0 \\ \forall\, x \in]\alpha; +\infty[\ ;\ \ g(x) > 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\begin{cases} \forall\, x \in]\,0\,;\ \alpha\,[\ ;\ \ f'(x) < 0 \\ \forall\, x \in]\alpha; +\infty[\ ;\ \ f'(x) > 0 \end{cases}$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]\,0\,;\ \alpha\,[$ et strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$

b- ***Démontrer que*** $\boldsymbol{f(\alpha) = -\left(\frac{2\alpha - 2}{\alpha^2}\right) e^{\alpha}}$

Remarque

La résolution de ce type de question se fait en deux (2) étapes :

1ère étape : On utilise dans la partie A , le fait que $g(\alpha) = 0$
comme dans la partie B , la fonction f contient $\ln x^2$ et que $f(\alpha)$ ne contient pas $\ln \alpha^2$ alors on exprime $\ln \alpha^2$ en fonction de α

2ème étape : on remplace dans $f(\alpha)$, $\ln \alpha^2$ par son expression

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow e^{\alpha}\left(\ln \alpha^2 + \frac{4}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ln \alpha^2 + \frac{4}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} = 0 \quad ; \quad e^{\alpha} \neq 0$$

$$\Rightarrow \ln \alpha^2 = -\frac{4}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = e^{\alpha}\left(\ln \alpha^2 + \frac{2}{\alpha}\right) \Rightarrow f(\alpha) = e^{\alpha}\left[\left(-\frac{4}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}\right) + \frac{2}{\alpha}\right]$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = e^{\alpha}\left(-\frac{4}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = e^{\alpha}\left(-\frac{4}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}\right)$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = e^{\alpha}\left(-\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}\right)$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = e^{\alpha}\left(-\frac{2\alpha}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^2}\right)$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = e^{\alpha}\left(-\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = -e^{\alpha}\left(\frac{2\alpha - 2}{\alpha^2}\right)$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = -\left(\frac{2\alpha - 2}{\alpha^2}\right)e^{\alpha}$$

c- ***Dressons le tableau de variation de f***

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

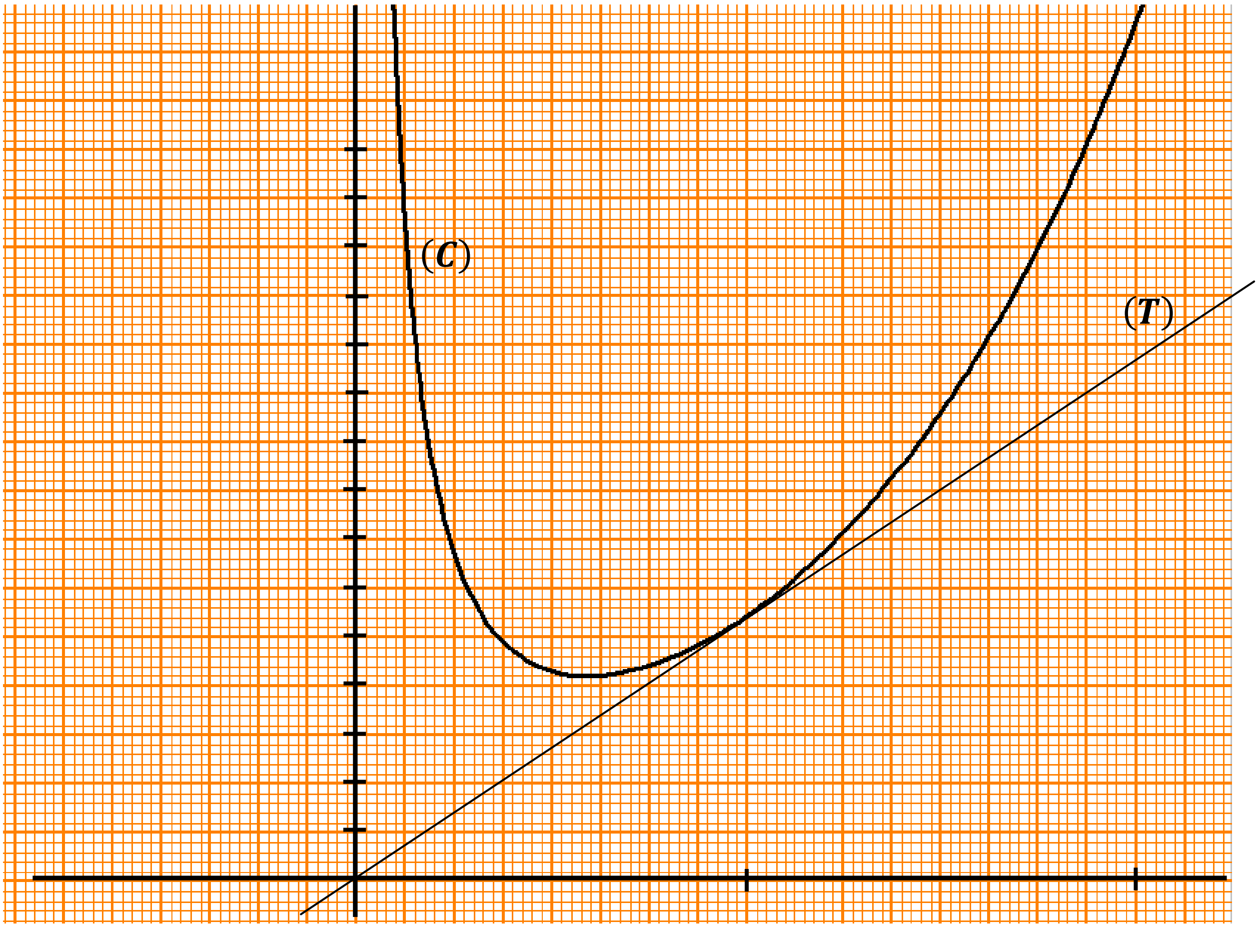
3) Donnons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1

$(T) : y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$; or $f'(1) = 2e$ et $f(1) = 2e$

$y = 2e \times (x-1) + 2e$
$y = 2ex - 2e + 2e$
$y = 2ex$

une équation de la tangente (T) à la courbe (C) point d'abscisse 1 est : $y = 2ex$

4) Traçons avec soin (T) et (C)



Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

Partie C

1) a- ***Démontrons que h est une primitive sur*** $]\mathbf{0};+\infty[$ ***de f***

(il suffit de montrer que la dérivée de h est égale à f : $h'(x) = f(x)$)

pour tout $x \in]0;+\infty[$, $h'(x) = (e^x \ln x^2)'$

$$= (e^x)' \times \ln x^2 + (\ln x^2)' \times e^x$$

$$= e^x \times \ln x^2 + \left(\frac{(x^2)'}{x^2}\right) \times e^x$$

$$= e^x \ln x^2 + \frac{2x}{x^2} \times e^x$$

$$= e^x \ln x^2 + \frac{2}{x} \times e^x$$

$$= e^x \left(\ln x^2 + \frac{2}{x}\right)$$

$$= f(x)$$

On en déduit que h est une primitive de f sur $]0;+\infty[$

b- Dé***terminons la primitive de f sur*** $]\mathbf{0};+\infty[$ ***qui s'annule en 2***

Sachant que la fonction h est une primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$, on en déduit que les primitives de f sur $]0;+\infty[$ sont de la forme $h(x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$

Soit F la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 2 alors $F(2) = 0$

$F(2) = 0 \quad \Longrightarrow \; e^2 \ln 2^2 + c = 0$

$\Longrightarrow e^2 \ln 4 + c = 0$

$\Longrightarrow +c = -e^2 \ln 4$

Donc $F(x) = e^x \ln x^2 - e^2 \ln 4$

2) ***Déterminons les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de h avec celle de la fonction exponentielle népérienne***

(Il suffit de résoudre l'équation $h(x) = e^x$; les solutions de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de h avec celle de la fonction exponentielle népérienne)

Email : oualefidele@gmail.com **Cel** : 58 22 07 09 02-58-82-72 05-65-91-86

$h(x) = e^x \implies e^x \ln x^2 = e^x$

$\implies e^x \ln x^2 - e^x = 0$

$\implies e^x(\ln x^2 - 1) = 0$

$\implies \ln x^2 - 1 = 0$; car $e^x \neq 0$

$\implies \ln x^2 = 1$

$\implies \ln x^2 = \ln e$

$\implies x^2 = e$

$\implies x = -\sqrt{e}$ ou $x = \sqrt{e}$

Pour $x = -\sqrt{e}$, $y = e^{-\sqrt{e}}$; pour calculer y on peut prendre $y = h(x)$ ou $y = e^x$

Pour $x = \sqrt{e}$, $y = e^{\sqrt{e}}$

On en déduit que les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de h avec celle de la fonction exponentielle népérienne sont : $\left(-\sqrt{e}\,;\, e^{-\sqrt{e}}\right)$ et $\left(\sqrt{e}\,;\, e^{\sqrt{e}}\right)$

Bonne Chance