OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

12 G 18 Bis A01
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

**Epreuve du $1^{er}$ groupe**

# M A T H E M A T I Q U E S

**Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n$^0$ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)**

**Exercice 1** (5 **points**).

Dans le plan affine euclidien on donne une droite $(D)$ et deux points distincts $F$ et $A$, symétriques par rapport à $(D)$.

On désigne par $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'excentricité 2 qui admet $F$ pour foyer et $(D)$ pour directrice associée à $F$.

**1.** Montrer que $A$ est un sommet de $(\mathcal{H})$. Déterminer l'autre sommet $A'$ en exprimant $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AF}$.

Construire géométriquement les directrices de $(\mathcal{H})$, ses foyers, ses sommets et son centre et donner l'allure de $(\mathcal{H})$. $1,5$ **pts** $=$ $0,5$ **pt** $+0,5$ **pt** $+0,5$ **pt**

**2.** Soit $(\mathcal{C})$ un cercle passant par $F$ et centré en un point $O$ de $(D)$ non situé sur l'axe focal. Construire $(\mathcal{C})$ sur la figure.

On se propose de montrer que $(\mathcal{H}) \cap (\mathcal{C}) = \{A, M_1, M_2, M_3\}$ où $M_1, M_2$ et $M_3$ sont les sommets d'un triangle équilatéral.

On rapporte le plan à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, choisi de façon que $(O, \vec{i})$ soit un repère de $(D)$.

A chaque point $M$ du plan correspond ainsi son affixe $z = x + iy$ ; on désigne par $a$ l'affixe de $F$.

**a.** Montrer que $M(z)$ appartient à $(\mathcal{C})$ si et seulement si : $z\overline{z} - a\overline{a} = 0$ (On pourra interpréter géométriquement $z\overline{z} - a\overline{a}$).

Montrer de même que $M(z)$ appartient à $(\mathcal{H})$ si et seulement si : $(z - a)(\overline{z} - \overline{a}) + (z - \overline{z})^2 = 0$.

1 **pts** $=$ $0,5$ **pt** $+0,5$ **pt**

**b.** En déduire que $(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{H})$ est l'ensemble des points du plan dont les affixes $z$ vérifient une équation de la forme : $(z - \overline{a})(z^3 - k) = 0$, où $k$ est un nombre complexe qu'on exprimera en fonction de $a$.

$0,5$ **pt**

**c.** Montrer que $k = r^3 e^{i\theta}$ où $r$ est le module de $a$ et $\theta$ un argument de $a$.

Résoudre alors l'équation $(z - \overline{a})(z^3 - k) = 0$ et conclure par rapport au problème posé.

2 **pts** $=$ $0,5$ **pt** $+0,5$ **pt** $+1$ **pt**

**Exercice 2** (4 **points**).

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ non nul par :

$$u_n = 2^n + 3 \times 7^n + 14^n - 1.$$

**1. a.** Calculer $u_3$

$0,5$ **pt**

**b.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n$ est pair.

$0,5$ **pt**

**c.** On note $(\mathcal{E})$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite $(u_n)$.

Les entiers $2, 3, 5$ et $7$ appartiennent-ils à l'ensemble $(\mathcal{E})$.

0, 5 **pt**

**2.** On rappelle le petit théorème de Fermat : « Si $p$ est un nombre premier et $q$ un entier naturel premier avec $p$, alors $q^{p-1} \equiv 1[p]$.) »

Soit $p$ un nombre premier strictement supérieur à 7.

Soient $m$ et $n$ deux entiers naturels tels que $14 = mn$.

**a.** Quelles sont les valeurs possibles de $m$ ? 0, 5 **pt**

**b.** Montrer que $14 \times m^{p-2} \equiv n$ (modulo $p$). 0, 5 **pt**

**c.** En déduire que $14u_{p-2} \equiv 0$ (modulo $p$). 0, 5 **pt**

**d.** L'entier $p$ appartient-il à l'ensemble $\mathcal{E}$ ? 0, 5 **pt**

**e.** Déterminer $\mathcal{E}$. 0, 5 **pt**

**PROBLEME** (11 **points** ).

On considère la fonction $f$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

$\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**Partie A**

**1.** Etudier la continuité de $f$. 0, 25 **pt**

**2. a.** Démontrer que pour tout réel $x$ non nul de l'intervalle $]-1, +\infty[$ on a :

$$0 \leq \frac{1}{x}\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,du \leq x\int_0^x \frac{1}{1+u}\,du.$$

(On pourra montrer ce résultat pour $x$ appartenant à $]0, +\infty]$ et pour $x$ appartenant à $]-1, 0[$).

0, 5 **pt**

**b.** Vérifier que : $\forall u \in ]-1, +\infty[,\ \dfrac{1}{1+u} = 1 - u + \dfrac{u^2}{1+u}$

En déduire que :$\forall x \in ]-1, +\infty[,\ x \neq 0 \Rightarrow f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,du$

0, 75 **pt**= 0, 25 **pt**+0, 5 **pt**

**c.** En exploitant les résultats des questions précédentes, montrer que $f$ est dérivable au point 0.

Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 et étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette tangente.

1, 5 **pts**= 0, 5 **pt**+0, 5 **pt**+0, 5 **pt**

**d.** Etudier la dérivabilité de $f$.

0, 5 **pt**

**3. a.** Soit $g$ l'application définie sur $]-1, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$

Etudier les variations de $g$ et déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$.

0, 75 **pts**= 0, 5 **pt**+0, 25 **pt**

**b.** En déduire le sens de variation de $f$.

0, 5 **pt**

**4.** Etudier les limites de $f$ aux bornes de l'intervalle $]-1, +\infty[$.

0, 25 **pt**

**5.** Déterminer les droites asymptotes à $\mathcal{C}$ et préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

1 **pts**= 0, 5 **pt**+0, 5 **pt**

**6.** Construire la courbe $\mathcal{C}$.

$0,5$ **pt**

**Partie B**

**1.** Justifier que pour tous réels $a$ et $b$ de $]-1,+\infty[$ tels que $a<b$ on a :

$$(b-a)f(b) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq (b-a)f(a)$$

En déduire un encadrement de l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$ ; on utilisera les nombres $0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ et $1$.

$0,75$ **pts**$=0,25$ **pt**$+0,5$ **pt**

**2. a.** En utilisant la fonction $g$, montrer que pour tout $x>0$, $f(x)-\frac{1}{x+1} \geq 0$.

$0,5$ **pt**

**b.** En déduire la limite lorsque $t$ tend vers $+\infty$ de la fonction : $t \mapsto \int_0^t f(x)\ dx$.

$0,25$ **pt**

**3. a.** Soit $h$ l'application définie sur $]-1,0]$ par $h(x)=x+1-(x+1)\ln(x+1)$.

Calculer $h'(x)$ pour $x$ appartenant à $]-1,0]$ et montrer que pour tout réel $x$ de cet intervalle on a $h(x) \in ]0,1]$.

$1$ **pt** $=0,5$ **pt**$+0,5$ **pt**

**b.** Montrer que : $\forall x \in \left]-1,-\frac{1}{2}\right]$, $0 \leq f(x) \leq -2\ln(x+1)$.

En déduire que la fonction $F:\ t \mapsto \int_t^{-1/2} f(x)\ dx$ est majorée dans $\left]-1,-\frac{1}{2}\right]$.

$1$ **pt** $=0,5$ **pt**$+0,5$ **pt**

**c.** On considère la suite $(v_n)_{n>0}$ de terme général $v_n=\int_{-1+1/n}^{0} f(x)\ dx$.

Etudier le sens de variation de la suite $(v_n)_{n>0}$. En déduire que cette suite est convergente.

$1$ **pt** $=0,5$ **pt**$+0,5$ **pt**