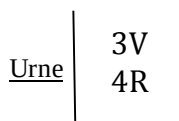
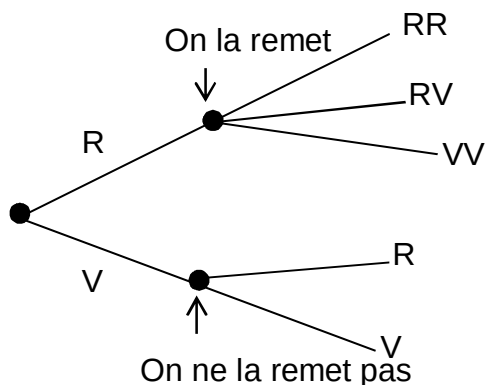


CORRIGE

EXERCICE 1



On tire au hasard une boule.



- Ω : La boule tirée au premier tirage est rouge
- Ω : Les boules tirées au deuxième tirage sont rouges
- Ω : Les boules tirées au deuxième tirage sont vertes
- Ω : La boule tirée au deuxième tirage est rouge

$$1) \mathbb{P}(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega)}{\mathbb{P}(\Omega)} = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} \quad (0,25 \text{ point})$$

$$\mathbb{P}(\Omega/\Omega) = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} \quad (0,25 \text{ point})$$

$$\mathbb{P}(\Omega/\Omega) = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} \quad (0,25 \text{ point})$$

$$\mathbb{P}(\Omega/\Omega) = \frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad (0,5 \text{ point})$$

- 2) a) Ne pas avoir de boule rouge au deuxième tirage signifie avoir exactement une boule verte ou exactement deux boules vertes.
Soit Ω cet événement.

$$\mathbb{P}(\Omega) = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} \times \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} + \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} \times \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} \times \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} + \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} \times \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} + \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} \quad (0,5 \text{ point})$$

- b) Soit Ω l'événement avoir deux boules rouges au deuxième tirage

$$\mathbb{P}(\Omega) = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} \times \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} \times \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}} \quad (0,5 \text{ point})$$

3) Soit X correspondant au nombre de boules rouges tirées au deuxième tirage.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

Loi de probabilité de X :

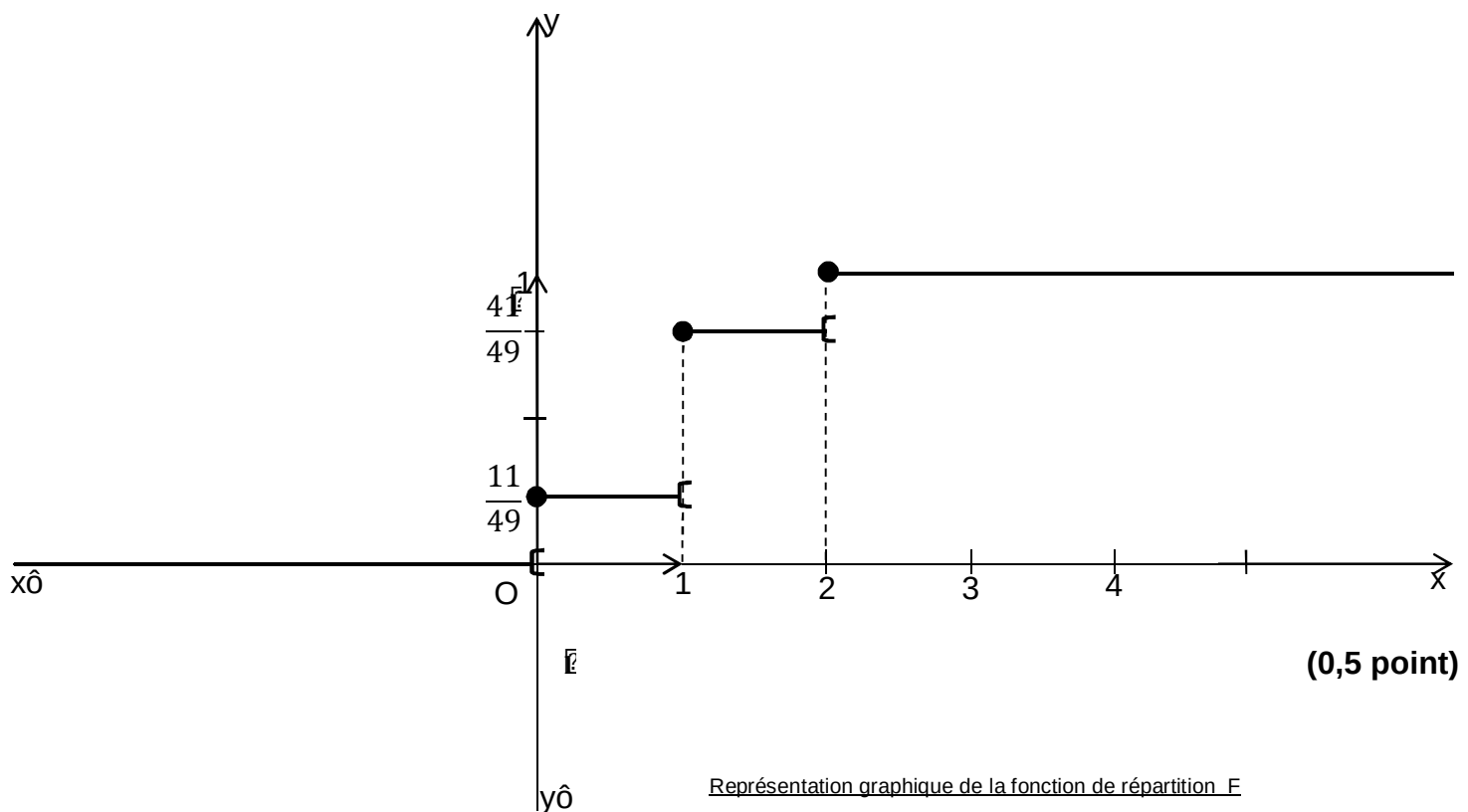
$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{11}{49}$	$\frac{30}{49}$	$\frac{8}{49}$

(0,5 point)

4) Soit F la fonction de répartition de X .

- Si $x < 0$ alors $F(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$
- Si $x \in [0; 1[$ alors $F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = \frac{11}{49} \approx 0,22$
- Si $x \in [1; 2[$ alors $F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{41}{49} \approx 0,81$
- Si $x \geq 2$ alors $F(x) = P(X \leq x) = 1$.

(0,5 point)



(0,5 point)

EXERCICE 2

A) $F(x) = 1 - P(X \leq x)$

- 1) $F(1) = 0$
- 2) $F(x) =]0; +\infty[$

(0,25 point)

Limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

(0,25 point + 0,25 point)

Continuité et dérivabilité de g

$x \mapsto 1 - x^2$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0, +\infty[$

$x \mapsto -\frac{1}{x}$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$

$x \mapsto 1 - x^2 - \frac{1}{x}$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$

(0,5 point)

Dérivée de g

$$g'(x) = -2x - \frac{1}{x^2} = \frac{-2x^3 - 1}{x^2}$$

Signe de $g'(x)$ et sera de variation de g.

$g'(x)$ a le même signe que $-2x^3 - 1$ sur $]0, +\infty[$

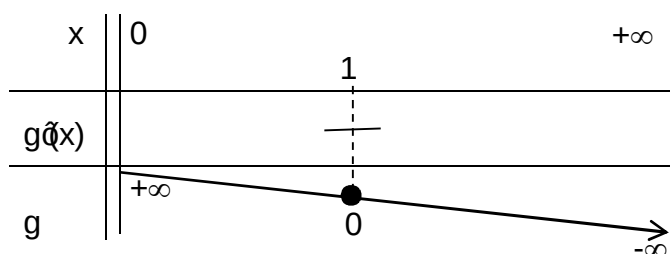
Or $-2x^3 - 1 < 0$ pour tout réel x

D'où $g'(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$

$\Rightarrow g$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

(0,5 point)

Tableau de variation de g



(0,5 point)

3) D'après le tableau de variations de g et la question 1)

Sur $]0, +\infty[$ $g(x) > 0$

et sur $]1, +\infty[$ $g(x) < 0$

(0,5 point)

B) $g(x) = 2 - x + \frac{\ln x}{x}$

1) g est définie si et seulement si $x > 0$

$$D_g =]0, +\infty[$$

(0,25 point)

Limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

(0,25 point + 0,25 point)

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (C_f) .

Continuité et dérivabilité de f

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; $+\infty$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}$; $+\infty$

$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; $+\infty$ (1)

De même $f(x) = 2 - \frac{x^2}{x^2+1}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. (0,5 point)

Dérivée de f :

$f'(x) = -1 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x - x^2 - 1}{x^2+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. (0,5 point)

Signe de $f'(x)$ et sens de variations de f :

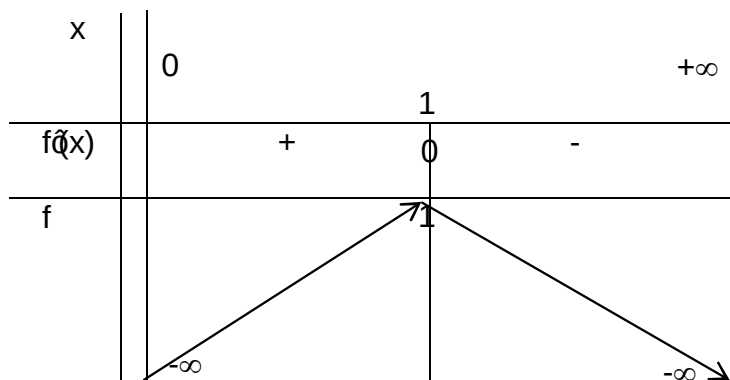
Pour tout $x \in]0; +\infty[$ $f'(x) = \frac{2x - x^2 - 1}{x^2+1} = \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{x^2+1} = \frac{-(x-1)^2}{x^2+1}$ a le même signe que $-(x-1)^2$.

Sur $]0; 1[$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $]0; 1[$ (0,25 point)

Sur $]1; +\infty[$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$. (0,25 point)

$f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow f$ s'annule en 1.

Tableau de variation de f :



$$f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(0,5 point)

3) a) Démontrons que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote à la courbe de f.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 - x + \frac{\ln x}{x} + x - 2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$\Rightarrow (\Delta) : y = -x + 2$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$. (0,25 point)

b) Position de (C_f) par rapport à (Δ) .

- $f(x) - (-x + 2) = \frac{x^2}{x^2+1} + x - 2 > 0$ si et seulement si $x > 1$ donc sur $]1; +\infty[$ (C_f) est au dessus de (Δ) .
- $f(x) - (-x + 2) = \frac{x^2}{x^2+1} + x - 2 < 0$ si et seulement si $x \in]0; 1[$ donc sur $]0; 1[$ (C_f) est en dessous de (Δ) .
- $f(x) - (-x + 2) = 0$ si et seulement si $x = 1$ donc (C_f) et (Δ) se coupent au point d'abscisse 1.

(0,25 point)

4) Soit $A_{\frac{2}{2-\alpha}}$ le point où la tangente est parallèle à (α) .

Alors on a $f'(\frac{2}{2-\alpha}) = -1 \Rightarrow \frac{2(2-\alpha)^2}{2-\alpha} = -1$ avec $\alpha > 0$

D'où $2(2-\alpha) = -1$, $\alpha > 0$

$\Rightarrow 1 - \alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha > 0$

$\Rightarrow 2\alpha = 1$, $\alpha > 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha > 0$

D'où $\alpha = \frac{1}{2}$ et $f(\frac{2}{2-\alpha}) = 2 - \alpha + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A_{\frac{2}{2-\frac{1}{2}}}$

(0,5 point)

5) Courbe $(\mathcal{C})$ voir papier millimétré.

EXERCICE 3

P complexe muni (O; $\vec{i}, \vec{j}$)

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2 - 2(1 + i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4 = 0 \quad (*)$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. z est solution imaginaire pure si et seulement si :

$$\begin{aligned} -z^2 + 2z^2 + 2z^2 + 2z - 4 - 4i &= 0 \\ (-z^2 + 2z^2 + 2z - 4) + 2z^2 - 4i &= 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire
$$\begin{aligned} 2z^2 - 4i &= 0 \\ -z^2 + 2z^2 + 2z - 4 &= 0 \\ z &= 0 \quad z = 2 \end{aligned}$$

C'est-à-dire
$$-z^2 + 2z^2 + 2z - 4 = 0 \quad (*)$$

Si $z = 0$ alors $(*)$ devient $-4 = 0$ ce qui est impossible.

Si $z = 2$ alors $(*)$ devient $-8 + 8 + 4 - 4 = 0$ ce qui est vrai

Donc $z = 2i$ est la solution imaginaire pure.

Ainsi on a
$$\begin{array}{r|l} z^2 - 2(1 + i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4 & z^2 - 2z + 2 \\ \hline i(z^2 - 2z^2) & \\ \hline i(2z^2 + 4z) & \\ \hline 2z - 4i & \\ \hline -(2z - 4i) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

D'où l'équation devient $(*)$ devient :

$$\begin{aligned} z^2 - 2z^2 - 2z + 2 &= 0 \\ (z - 2z) = 0 \quad z^2 - 2z + 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$z - 2z = 0 \Rightarrow \boxed{z = 2z}$$

$$\begin{aligned} z^2 - 2z + 2 &= 0 \\ z^2 &= 1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

$$\boxed{z = 1 - i} \quad \text{ou} \quad \boxed{z = 1 + i}$$

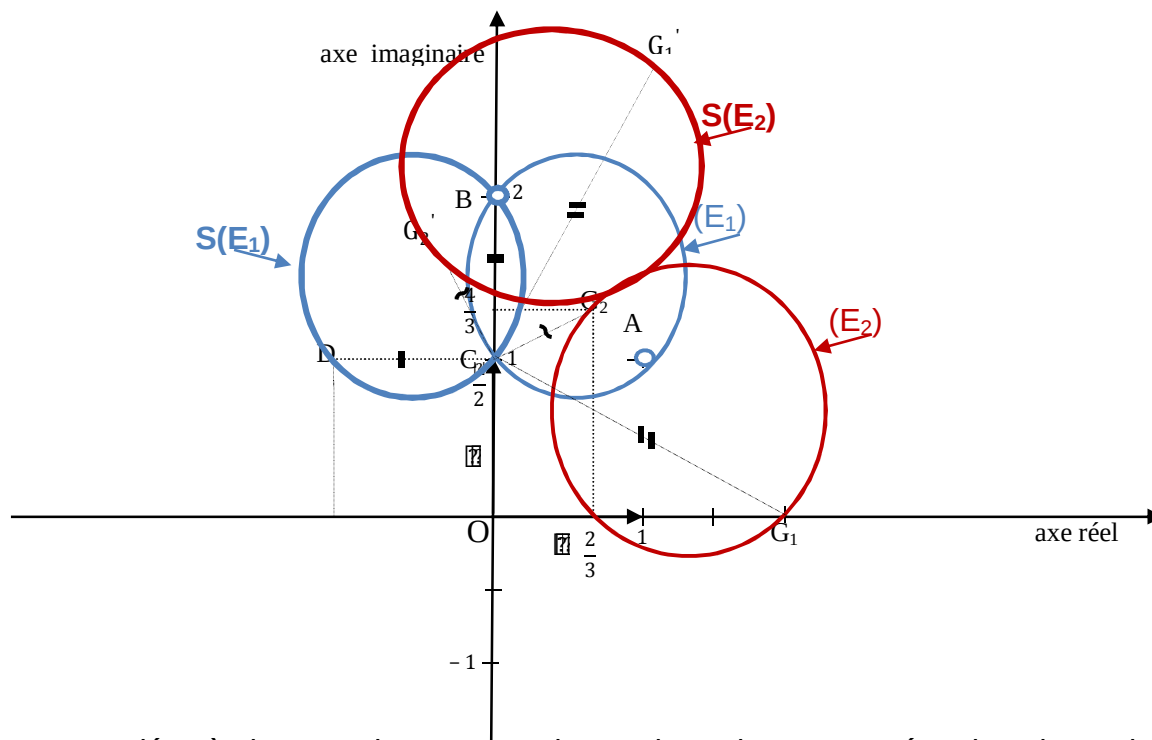
$$\boxed{z = 2z; 1 - i; 1 + i}$$

(0,75 point)

2) Soient $\alpha(1 + \beta)$, $\alpha(2\beta)$ et $\alpha\beta\beta\beta$

Plaçons les points A, B et C dans le repère suivant :

(0,25 point)



(Notes accordées à chacune des constructions voir parties concernées dans le corrigé).

3) Soit $a \neq 1 + a$

$$Z \mapsto [Z] = \frac{[Z_1][Z_2]}{[Z_3][Z_4][Z_5]}$$

a) ● Interprétation graphique $|z|^2$

Soit z le point d'affixe z avec $z \neq 1 + i$ ($z \neq z$)

$$|z|^2 = \frac{\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}}{\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}} = \frac{\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}}{\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}} = \frac{\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}}{\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}} = \frac{\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}}{\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}} = \frac{\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}}{\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}}, M \neq A$$

$$|z|^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}, \quad M \neq A$$

(0,5 point)

● Interprétation graphique de $\arg(z)$

$$\arg(z\hat{q}) = \arg\left[\frac{\begin{smallmatrix} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} \\ \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} \end{smallmatrix}}{\boxed{2}}\right] = \arg\left[\frac{\begin{smallmatrix} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} \\ \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} \end{smallmatrix}}{\boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2}}\right] = \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2} \quad M \neq A$$

$$\arg(z\phi) = \arg(\phi), \arg(\phi^2) = 2\arg(\phi)$$

$$M \neq A$$

(0,5 point)

b) $E_1 = \mathbb{Z}_2$, $\varphi(\varphi) \in \mathbb{Z} / 2^{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ $\varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi$

M d'affixe z tel que z imaginaire pur

z imaginaire pur $\Rightarrow \arg z = -\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{M_A}{M_A + M_B} = -\frac{1}{2} [\pi] \quad M \neq A$$

$\Rightarrow$ M décrit le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A

(E_1) est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A

(0,5 point)

(Construction voir page 7)

(0,25 point)

.../... 8

c) $E_2 = \{M, M(z) \in P \mid |z| = 2\}$

$|z| = 2$ si et seulement si $\frac{BM^2}{AM^2} = 2$ avec $M \neq A$

C'est-à-dire $BM^2 - 4AM^2 = 0$, $M \neq A$

Or $BM^2 - 4AM^2 = 0$, $M \neq A$

Est équivalent à $BM^2 - 2AM^2 - 2AM^2 + 2AM^2 = 0$ avec $M \neq A$

Soit G_1 barycentre $(\frac{2}{3}, 1)$; $(\frac{2}{3}, 2)$ G_2 barycentre $(\frac{2}{3}, 1)$; $(\frac{2}{3}, 2)$

$BM^2 - 2AM^2 - 2AM^2 + 2AM^2 = 0$ donc $GM^2 - 2GM^2 = 0$

Donc $GM^2 - 2GM^2 = 0$

Donc M décrit le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

(E_2) est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

(Construction voir page 7)

(0,5 point)

(0,25 point)

4) S : similitude directe de centre C transformant A en B .

a) $\frac{CB}{CA} = \frac{CB}{CA} = 1$ donc $CA = CB$ (1)

$\arg \frac{CB}{CA} = \arg \frac{CB}{CA} = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc $\angle CA, CB = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ (2)

$CA = CB$
(1) et (2) donnent $\angle CA, CB = \frac{\pi}{2}$

Donc ABC est un triangle rectangle isocèle en C .

(0,5 point)

b) $\frac{CB}{CA} = \frac{CB}{CA} = \frac{\pi}{2}$ Donc S est la rotation de centre C d'angle $\frac{\pi}{2}$

(0,5 point)

c) $S(E_1)$?

On sait que $S(A) = B$

Soit $D = S(B)$

Donc $S(E_1)$ est le cercle de diamètre $[BD]$ privé du point B .

(Construction voir page 7)

(0,5 point)

(0,5 point)

$S(E_2)$? $S(G_1) = G_1^{Nj}$ donc $\frac{CG_1^{Nj}}{CG_1} = \frac{\pi}{2}$

$S(G_2) = G_2^{Nj}$ donc $\frac{CG_2^{Nj}}{CG_2} = \frac{\pi}{2}$

Donc $S(E_2)$ est le cercle de diamètre $[G_1^{Nj}G_2^{Nj}]$
(Construction voir page 7).

(0,5 point)

(0,5 point)

EXERCICE 4

Soit l'équation différentielle: $\ddot{f} + 2\dot{f} + f = 0$ (E)

On pose $k(x) = e^{-x} h(x)$, pour tout réel x .

1) Démontrons que k est solution de (E) si et seulement si $\ddot{h}(x) = 0$ pour tout réel x

- Supposons que k est solution de (E)

Alors $k''(x) + 2k'(x) + k = 0 \quad (\alpha)$

or $k(x) = e^{-x}(h(x) - h(x))$ et $k''(x) = e^{-x}(-h'(x) + h(x) + h''(x) - h'(x))$
 $= e^{-x}(h''(x) - 2h'(x) + h(x))$

D'où (α) devient $e^{-x}(h''(x) - 2h'(x) + h(x) + 2h'(x) - 2h(x) + h(x)) = 0$

D'où $e^{-x}(h''(x)) = 0$

Donc $h''(x) = 0$

Conclusion : si k est solution de (E) alors $h''(x) = 0$

(0,25 point)

- Inversement supposons que $h''(x) = 0$ démontrons que k est solution de (E)

$$k''(x) + 2k'(x) + k(x) = e^{-x}(h''(x) - 2h'(x) + h(x) + 2h'(x) - 2h(x) + h(x))$$

$$= e^{-x}(h''(x) - 2h'(x) + h(x) + 2h'(x) - 2h(x) + h(x)) = 0$$

Donc $k''(x) + 2k'(x) + k(x) = e^{-x}(h''(x) - 2h'(x) + h(x) + 2h'(x) - 2h(x) + h(x))$
 $= e^{-x}(0h''(x) + 0h'(x)) = 0$

D'où $k''(x) + 2k'(x) + k(x) = 0$ donc k est solution de (E).

Conclusion : si $h''(x) = 0$ alors k est solution de (E)

(0,25 point)

2) Résolvons l'équation $h''(x) = 0$

$h''(x) = 0$ si et seulement si $h'(x) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ d'où $h(x) = \alpha x + \beta, \alpha$ et β appartenant à $\mathbb{R}$.

(0,25 point)

3) D'où la solution générale f de (E) est :

$f(x) = \beta e^{-x}(\alpha x + \beta)$, avec α, β et β des réels.

(01 point)

4) Soit F une primitive de f

On a $F(x) = -\beta(\alpha x + 1) + \alpha x^2 e^{-x} + \alpha$ (en intégrant par parties ou en utilisant la relation (E))

(01 point)