BACCALAUREAT **Coefficient : 4**
SESSION 2007 **Durée : 4 h**

MATHEMATIQUES

SERIE : D

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par $U_0 = 4$ et $V_0 = 9$ et pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \qquad \text{et} \qquad V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n)$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n > 0$ et $V_n > 0$.

2. a) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad V_{n+1} - U_{n+1} = \dfrac{(V_n - U_n)^2}{2(U_n + V_n)}$.

   b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad U_n \leqslant V_n$

   et que : $V_{n+1} - U_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(V_n - U_n)$.

   c) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ V_n - U_n \leqslant \dfrac{5}{2^n}$.

3. a) Démontrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

   b) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) convergent.

   c) Démontrer que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite ℓ.

4. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} V_{n+1} = U_n V_n$.

   b) En déduire la valeur exacte de ℓ.

EXERCICE 2

Une population d'élèves comportant 40% de bacheliers a subi un test de recrutement en première année d'une grande école.

Ce test a donné les résultats suivants :

- 75% des bacheliers sont admis ;
- 52% des non bacheliers sont admis.

Partie A

On choisit au hasard un élève de la population. On note :

B l'événement : «l'élève est bachelier» ;
T l'événement : «l'élève est admis au test» ;
A l'événement : «l'élève est bachelier et est admis au test».

1. Préciser chacune des probabilités suivantes :
   a) la probabilité P(B) de l'événement B ;
   b) la probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B est réalisé ;
   c) la probabilité de $P_{\bar{B}}(T)$ sachant que B n'est pas réalisé.

2. Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,3.

3. Calculer la probabilité de l'événement T.

4. Déduire des questions précédentes que les événements B et T ne sont pas indépendants.

5. Démontrer que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est égal à $\frac{25}{51}$.

Partie B

On choisit au hasard 5 élèves de la population étudiée.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants bacheliers et admis au test parmi les 5 choisis.

1. Démontrer que la probabilité pour que 3 seulement des 5 élèves choisis soient bacheliers et admis au test est égale à 0,1323.

2. Calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLEME

L'objet de ce problème est l'étude de chacune des fonctions f, g et h définies ci-dessous.

- f est la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :
  $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$
- g est la fonction définie sur l'ensemble $D_g = \left[0, \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$, par :
  $g(x) = f(\ln x)$ et $g(0) = 1$.
- h est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $h(x) = f(e^x)$.

Partie A

1. Démontrer que :
   a) $\forall\, x \in D_g$ et $x \neq 0$, $g(x) = 1 - \dfrac{4}{\ln x + 1}$;
   b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1 - \dfrac{4}{e^x + 1}$.

2. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$

3. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

Partie B

On note (C_g) la représentation graphique de g dans le plan muni du repère orthogonal $\mathcal{R}_1 = (O, I, J)$.
L'unité sur (OI) est 1 cm et sur (OJ) est 2 cm.

1. a) Démontrer que g est continue en 0.
   b) Démontrer que (C_g) admet une demi - tangente verticale au point d'abscisse 0.

2. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

   b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ <}} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ >}} g(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

3. Démontrer que g est strictement croissante puis dresser son tableau de variation.

4. Tracer (C_g) et ses asymptotes dans le repère $\mathcal{R}_1$.

Partie C

On note (C_h) la représentation graphique de h dans le plan muni du repère orthonormé $\mathcal{R}_2 = (O, I, J)$.
L'unité graphique est 1 cm.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats.

2. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $h'(x) = \dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2}$.

3. En déduire les variations de h puis dresser son tableau de variation.

4. On note A et B les points d'intersection respectifs de (C_h) avec les droites (OI) et (OJ).
   a) Déterminer les coordonnées de chacun des points A et B.
   b) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C_h) en B est $y = x - 1$.
   c) Démontrer que B est un centre de symétrie de (C_h).

5. a) Démontrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un l'intervalle que l'on précisera.
   b) Déterminer l'expression explicite de la bijection réciproque h^{-1} de h.

6. a) Tracer (T), (C_h) et ses asymptotes dans le repère $\mathcal{R}_2$.
   b) En déduire la représentation graphique (Γ) de la fonction réciproque h^{-1} dans le repère $\mathcal{R}_2$.