

BACCALAURÉAT
SESSION 2018

Coefficient : 5
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont également autorisées.

EXERCICE 1

L'unité graphique est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un losange OABC tel que :

$$OA = 7 \text{ et } \text{Mes}(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{3}.$$

E est le point du segment [OB] tel que : OE = OA.

F est le point de la demi-droite [OC) tel que : CF = EB et C ∈ [OF].

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [OA], [AB], [BC] et [OC].

On désigne par (Δ) la médiatrice du segment [OA] et par (Δ') celle de [BC].

1. Fais une figure.
2.
 - a) Justifie que les droites (Δ) et (Δ') sont parallèles.
 - b) Justifie que le triangle OAC est équilatéral.
 - c) Justifie que : OB = OF.
3. Soit R₁ la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et R₂ la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
On pose : $f = R_1 \circ R_2$.
 - a) Détermine f(O) et f(A).
 - b) Démontre que f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
 - c) Déduis de ce qui précède que : (EF) ⊥ (OA) et EF = OA.
 - d) Construis le centre Ω de f.
4.
 - a) Justifie qu'il existe une isométrie g et une seule telle que : g(O) = A, g(A) = C et g(C) = B.
 - b) Justifie que g est un antidéplacement.
 - c) Démontre que g est une symétrie glissée.
5. Dans cette partie, on se propose de caractériser la symétrie glissée g.
Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et S la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
 - a) Démontre que : $g = R \circ S$.
 - b) Détermine l'axe de la symétrie orthogonale S₁ telle que : $R = S_{(AB)} \circ S_1$.
 - c) Déduis de ce qui précède que : $g = S_{(AB)} \circ t_{\vec{u}}$ où \vec{u} est un vecteur que l'on caractérisera.
 - d) En utilisant la relation $\vec{CB} = \vec{CJ} + \vec{JB}$, détermine les éléments caractéristiques de g.

EXERCICE 2

Dans tout cet exercice, n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

- Démontre que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
- On pose : $A = n + 3$, $B = 2n + 1$ et $d = \text{PGCD}(A ; B)$.
 - Calcule $2A - B$ et déduis-en les valeurs possibles de d .
 - Démontre que A et B sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.
 - Soient $S = n^3 + 2n^2 - 3n$ et $P = 2n^2 - n - 1$.
Justifie que S et P sont divisibles par $n - 1$.
- On pose : $\delta = \text{PGCD}(n(n + 3) ; 2n + 1)$.
 - Démontre que d divise δ .
 - Démontre que δ et n sont premiers entre eux.
 - Déduis des questions 3-a) et 3-b) que δ est égal à d .
 - Détermine le $\text{PGCD}(S ; P)$ en fonction de n .
- Détermine $\text{PGCD}(S ; P)$ pour $n = 2016$ puis pour $n = 2017$.

PROBLÈME

Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g_n(t) = \left(-\frac{2}{t} + \ln t\right)^n.$$

On note (C_n) la courbe représentative de g_n dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Unités graphiques : $OI = 2$ cm et $OJ = 0,5$ cm.

Partie A

- Calcule la limite de g_1 en 0.
 - Interprète graphiquement ce résultat.
- Calcule la limite de g_1 en $+\infty$.
 - Justifie que (C_1) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $+\infty$.
- On suppose que g_1 est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
 - Démontre que g_1 est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
On admet que l'équation $t \in]0 ; +\infty[$, $g_1(t) = 0$ admet une solution unique α telle que :
 $2,3 < \alpha < 2,4$.
 - Justifie que l'équation $t \in]0 ; +\infty[$, $g_1(t) = 1$ admet une solution unique β telle que : $4,3 < \beta < 4,4$.
- Soit t un nombre réel strictement positif.
Démontre que :
 - $g_1(t) < 0 \Leftrightarrow t \in]0 ; \alpha[$;
 - $g_1(t) > 0 \Leftrightarrow t \in]\alpha ; +\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que n est supérieur ou égal à 2.

- Calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_n(t)$.

b) Démontre que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g_n(t)}{t} = 0$ (On pourra poser : $x = \frac{1}{t^n}$).

c) Interprète graphiquement les résultats précédents.

2. On suppose que n est pair.

a) Calcule $\lim_{t \rightarrow 0} g_n(t)$.

b) Interprète graphiquement ce résultat.

3. On suppose que n est impair.

a) Calcule $\lim_{t \rightarrow 0} g_n(t)$.

b) Soit t un nombre réel strictement positif.

Justifie que :

i) $g_n(t) < 0 \Leftrightarrow t \in]0 ; \alpha[$;

ii) $g_n(t) > 0 \Leftrightarrow t \in]\alpha ; +\infty[$.

(On pourra utiliser la question 4 de la partie A).

4. On suppose que pour tout entier naturel n supérieur ou à 2, g_n est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on désigne par g_n' sa fonction dérivée.

a) Démontre que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout nombre réel strictement positif t , $g_n'(t) = n g_{n-1}'(t) \times g_{n-1}(t)$.

b) Étudie suivant la parité de n , le signe de g_n' sur $]0 ; +\infty[$.

c) Dresse suivant la parité de n , le tableau de variation de g_n .

Partie C

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et t un nombre réel strictement positif.

1. a) Exprime $g_{(n+p)}(t)$ en fonction de $g_n(t)$ et $g_p(t)$.

b) Déduis de ce qui précède que : $g_{(n+p)}(t) - g_n(t) = (g_p(t) - 1) \times g_n(t)$.

Dans toute la suite du problème, on suppose que n est pair.

2. Justifie que :

a) (C_n) est au-dessus de (C_{n+1}) sur $]0 ; \beta[$;

b) (C_n) est au-dessous de (C_{n+1}) sur $]\beta ; +\infty[$.

(On pourra utiliser la question 3 de la partie A).

3. Construis (C_2) et (C_3) dans le même repère (O, I, J) .

On prendra : $\alpha = 2,35$ et $\beta = 4,35$.

4. Soit A_n l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par (C_n) , (C_{n+1}) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

a) Justifie que, pour tout entier naturel n pair et non nul, $A_n = \int_1^2 (1 - g_1(t)) \times g_n(t) dt$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, calcule $\int_1^2 (1 - g_1(t)) dt$.

c) Démontre que pour tout entier naturel n pair et non nul, $2g_n(2) \leq A_n \leq 2g_n(1)$.

d) Déduis de ce qui précède que pour tout entier naturel n pair et non nul, $2(1 - \ln 2)^n \leq A_n \leq 2^{n+1}$.