BACCALAURÉAT **Coefficient : 3**
SESSION 2019 **Durée : 3h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE A1

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra une feuille de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Une coopérative de femmes productrices d'attiéké ambitionne d'installer une unité de production d'un coût de 3 000 000 F CFA financée par le bénéfice d'une année d'exercice. Cette coopérative a réalisé un bénéfice de 2 000 000 F CFA en 2016, $1^{ère}$ année d'exercice.
Une étude prévoit une augmentation de 10% du bénéfice d'année en année.
Pour tout entier naturel non nul n, le bénéfice de l'année $n+1$ est le bénéfice de l'année n augmenté de 10%.
On désigne par b_n le bénéfice de la $n^{ième}$ année d'exercice ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. *a*) Justifie que le bénéfice de la deuxième année d'exercice (2017) est égal à 2 200 000 F CFA.
   b) Calcule b_3, bénéfice en 2018.

2. On admet que pour tout entier naturel non nul n, $b_{n+1} = (1,1) \times b_n$.
   a) Déduis-en que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprime b_n en fonction de n.

3. *a*) Détermine le plus petit entier naturel n pour lequel b_n est supérieur ou égal à 3 000 000 FCFA.
   b) Déduis-en l'année en laquelle le bénéfice permettra à la coopérative d'acquérir son unité de production.

EXERCICE 2

Une urne contient quatre (4) boules blanches et trois (3) boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément quatre (4) boules de l'urne.

1. Justifie que le nombre de tirages possibles est 35.

2. *a*) On considère l'évènement A : « Tirer autant de boules blanches que de boules noires ».
   Justifie que la probabilité de l'évènement A est égale à $\dfrac{18}{35}$.
   b) Calcule la probabilité de l'évènement B : « Tirer au moins deux boules noires ».
   c) Calcule la probabilité de l'évènement C : « Tirer des boules de même couleur ».

3. On associe ce tirage au jeu suivant :
Le joueur mise la somme de 100 francs avant le tirage.
Après le tirage, le joueur :

- perd sa mise s'il a tiré plus de boules noires que de boules blanches ;
- reçoit le double de sa mise s'il a tiré trois boules blanches et une boule noire ;
- reçoit sa mise pour les autres tirages.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage, le gain algébrique issu du tirage (différence entre le gain et la mise).

a) Justifie que les valeurs prises par X sont : - 100 ; 0 et 100.
b) Détermine la loi de probabilité de X.
c) Calcule l'espérance mathématique de X.
d) Donne une interprétation de l'espérance mathématique de X trouvée.

EXERCICE 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est égale à 2 cm.
On donne la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = -2x + 2 + \ln x$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère (O, I, J).

1. *a*) Justifie que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$.

   b) Interprète graphiquement le résultat de la question 1-*a*).

2. On admet que pour tout élément x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x) = x(-2 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x})$.

   Justifie que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

3. On suppose que f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

   a) Démontre que pour tout élément x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-2x+1}{x}$.

   b) Vérifie que : $f'(\frac{1}{2}) = 0$.

   c) Justifie que :

   * si $x \in]0\,;\frac{1}{2}[$ alors $f'(x) > 0$;

   * si $x \in]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ alors $f'(x) < 0$.

   d) Déduis-en les variations de f.
   e) Dresse le tableau de variations de f.

4. *a*) Vérifie que : $f(1) = 0$ et $f(\frac{1}{2}) > 0$.

   b) Justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0{,}2\,;0{,}3[$.

5. Justifie que la droite (T) d'équation $y = -x + 1$ est la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

6. *a*) Recopie et complète le tableau ci-dessous.

x	0,1	0,25	0,5	1	1,5	2	3	4
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$				0			-2,9	-4,6

b) Trace la droite (T) puis la courbe (C) sur l'intervalle]0 ; 4].

7. *a*) Justifie que : $\ln\alpha = 2\alpha - 2$.

b) Justifie que la fonction F, dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par : $F(x) = -x^2 + x + x\ln x$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

c) On note $A(\alpha)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations : $x = \alpha$ et $x = 1$. Exprime $A(\alpha)$ en fonction de α.