

BACCALAURÉAT
SESSION 2019

Coefficient : 5
Durée : 4h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre K tel que $AB = 3$.

On note E le milieu du segment [BC] et G le barycentre des points pondérés (A, 4), (B, -1) et (D, -1).

1. a) Démontre que A est le milieu du segment [KG].
 b) Justifie que : $GB^2 = \frac{45}{2}$.
 c) Justifie que : $GB = GD$.
 d) Détermine et construis l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que :

$$4MA^2 - MB^2 - MD^2 = 9.$$

2. a) Justifie que : $AE = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.
 b) Démontre que pour tout point M du plan :

$$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = -27 + 4\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE}.$$
 c) Détermine et construis l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que :

$$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = 63.$$

EXERCICE 2

On considère un entier naturel m dont l'écriture dans le système décimal est \overline{abc} .

(On rappelle que : $m = 10^2a + 10b + c$)

Partie A

1. Écris l'entier naturel m en base 2 dans le cas où : $a = 1$; $b = 2$ et $c = 1$.

2. On suppose que : $m \equiv 0 [27]$.
 i) Démontre que : $10^3a + 10\overline{bc} \equiv 0 [27]$.
 ii) Déduis-en que : $10\overline{bc} + a \equiv 0 [27]$.
 iii) Justifie alors que l'entier \overline{bca} est divisible par 27.

Partie B

Dans cette partie on suppose que : $a > c$.

On pose : $p = \overline{cba}$; $u = a - c$ et $d = m - p$.

1. Justifie que : $d = 99u$.

2. Dédus de la question précédente que l'entier naturel d ne peut être le carré d'un entier naturel.
3. On suppose que : $b = a + c$.
 - i) Justifie que : $m = 11(10a + c)$.
 - ii) Dédus-en que m et d ne sont pas premiers entre eux.
4. On suppose que : $a = b + c$.
 - i) Justifie que : $d = 3^2 \times 11b$.
 - ii) Justifie que : $m = 110b + 101c$.
 - iii) Démontre que les entiers naturels m qui sont premiers avec d sont ceux qui vérifient à la fois : $b \neq 0$, $c \neq 0$, $b+c$ n'est pas divisible par 3 ; b et c sont premiers entre eux.
 - iv) Dédus des questions précédentes, tous les entiers naturels m premiers avec d .

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est le centimètre.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions f_n et F_n continues sur \mathbb{R} et définies par :

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

On note (\mathcal{C}_n) la courbe représentative de la fonction F_n dans le repère (O, I, J) .

On se propose dans ce problème de donner, pour tout entier naturel n non nul, l'allure de la courbe (\mathcal{C}_n) .

Partie A

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère (O, I, J) .

1. Démontre que f est une fonction impaire.
2. a) Calcule la limite de $f(x)$ puis celle de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
b) Donne une interprétation graphique des résultats de la question précédente.
3. On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} .
 - a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
 - b) Détermine le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
 - c) Dresse le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
4. Détermine une équation de la tangente (Δ) à (\mathcal{C}) au point d'abscisse 0.
5. On note g la fonction dérivable sur \mathbb{R} et définie par :

$$g(x) = -x + \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$
 - a) Détermine le sens de variation de g sur \mathbb{R} .
 - b) Détermine les positions relatives de (\mathcal{C}) et (Δ) . (On pourra calculer $g(0)$).
6. Construis la courbe (\mathcal{C}) et la droite (Δ) dans le plan muni du repère (O, I, J) .
7. On note A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}) , la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Calcule A à l'aide d'une intégration par parties.

Partie B

1. a) Justifie que F_n est définie sur \mathbb{R} .
b) Démontre que F_n est une fonction impaire.
c) Étudie le sens de variation de F_n sur $[0 ; +\infty[$.

2. Soit (I_n) la suite numérique définie par :

$$I_0 = \ln(1 + \sqrt{2}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

- a) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$.
- b) Démontre que la suite (I_n) est décroissante.
- c) Démontre que la suite (I_n) est convergente.
(On ne demande pas de calculer la limite de (I_n) .)
- d) Vérifie que pour tout entier naturel n non nul et pour tout nombre réel t positif, on a :

$$t^{2n} \sqrt{1+t^2} = \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}}$$

e) A l'aide d'une intégration par parties, justifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \frac{2n+1}{2n+2} I_n.$$

On remarquera que pour tout nombre réel t , $\frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}} = t^{2n+1} \times \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

On admettra que : $I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} I_0$.

f) Calcule I_1 et I_2 .

3. a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = I_n + \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

b) Démontre que :

$$\forall t \geq 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall x \geq 1, \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{n} (x^{2n} - 1) \leq \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

- c) Déduis-en la limite de $F_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- d) Démontre que, pour tout entier naturel non nul n , (\mathcal{C}_n) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en $+\infty$.
- e) Construis la courbe (\mathcal{C}_2) dans le plan muni du repère (O, I, J).