

BACCALAURÉAT
SESSION 2015

Coefficient : 4
Durée : 4 h

Fomesoutra.com
ça soutra !

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Le candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.

Toute calculatrice scientifique est autorisée.

Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Partie I

On considère la fonction p définie sur \mathbb{C} par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2 - 2i.$$

- Calculer $p(i)$.
 - Déterminer deux nombres complexes a et b tels que : $p(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$.
- Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation : $z^2 - (3 + i)z + 2 + 2i = 0$.
- En déduire les solutions dans \mathbb{C} , de l'équation (E) : $p(z) = 0$.

Partie II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité : 5 cm.

On pose : $z_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.

On note A_n le point du plan d'affixe z_n .

- Calculer z_1 et z_2 .
 - Placer les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.
- On considère la suite U définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = |z_{n+1} - z_n|$.
 - Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$.
 - Démontrer que U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.
 - Exprimer U_n en fonction de n .
- On désigne par $A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$, la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$.
 - Calculer l_n .
 - En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n$.

EXERCICE 2

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que :

- pour un jour donné, la probabilité qu'il y ait une affluence de clients est 0,6 ;
- lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7 ;
- lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4.

On désigne par A l'évènement « Il y a une affluence de clients » et par B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice ».

1. On choisit un jour au hasard.

a) Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « Il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».

b) Démontrer que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B est égale à 0,58.

c) Mariam a réalisé un bénéfice.

Calculer la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour là.

On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

2. Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours successifs.

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

3. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.

a) Justifier que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $p_n = 1 - (0,42)^n$.

b) Déterminer la valeur minimale de n pour qu'on ait $p_n \geq 0,9999$.

PROBLÈME

Partie A

Soit r la fonction définie sur \mathbb{R} par : $r(x) = xe^{-x}$.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = r$.

Soit g la fonction dérivable et définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}$.

1. Démontrer que g est une solution de l'équation (E).

2. Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$.

a) Démontrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est une solution de (F).

b) Résoudre l'équation différentielle (F).

c) En déduire la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2} e^{-x}$.

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) , d'unités graphiques : $OI = 2$ cm ; $OJ = 4$ cm.

1. a) Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Démontrer que la courbe (\mathcal{C}) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ) .

2. Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3. a) Soit f' la fonction dérivée de f . Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3 + 2x - x^2}{2} e^{-x}$.

b) Étudier les variations de f .

c) Dresser le tableau de variations de f .

4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}) au point d'abscisse 0 est :

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}.$$

5. Étudier les positions relatives de (\mathcal{C}) par rapport à l'axe des abscisses.

6. Représenter graphiquement (T) et (\mathcal{C}) .

Partie C

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_0^1 x e^{-x} dx$.

2. a) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f'(x) + x e^{-x}$.

c) En utilisant la question précédente, calculer en cm^2 l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}) , la droite (OI) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.