

EXERCICE	CORRIGE	BAREME
EXERCICE 1 : (2 points)	①. Vrai -----> ②. Faux -----> ③. Faux -----> ④. Vrai ----->	4×0,5pt
EXERCICE 2 : (2 points)	①. B -----> ②. D -----> ③. A -----> ④. C ----->	4×0,5pt
EXERCICE 3 : (3 points)	①. a) Justifions que : $v_0 = \frac{17}{5}$. On a : $v_0 = u_1 - \frac{2}{5}u_0$ $v_0 = 5 - \frac{2}{5} \times 4 = 5 - \frac{8}{5} = \frac{25-8}{5} = \frac{17}{5} \text{ donc } v_0 = \frac{17}{5}.$ b) Démontrons que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$. On a : $v_n = u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n$. $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{2}{5}u_{n+1} = \frac{4}{5}u_{n+1} - \frac{4}{25}u_n - \frac{2}{5}u_{n+1}$ $v_{n+1} = \frac{4}{5}u_{n+1} - \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{4}{25}u_n = \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}\right)u_{n+1} - \frac{4}{25}u_n$ $v_{n+1} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{4}{25}u_n \text{ d'où } v_{n+1} = \frac{2}{5}\left(u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n\right)$ Or $\left(u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n\right) = v_n$ alors $v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$ Par conséquent : la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $v_0 = \frac{17}{5}$. c) Exprimons v_n en fonction de n. On a : $v_n = q^n v_0$ $v_n = \frac{17}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n.$ ②. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{u_n}{v_n}$. a) Calculons w_0 $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{4}{\frac{17}{5}} = 4 \times \frac{5}{17} \text{ donc } w_0 = \frac{20}{17}$ b) Exprimons w_n est fonction de n. On a : $w_n = \frac{20}{17} + \frac{5}{2}n$ donc $w_n = \frac{40+85n}{34}$ c) Montrons que : $u_n = \frac{2^{n-1}}{5^n}(17n+8)$ on a : $w_n = \frac{u_n}{v_n} \Leftrightarrow u_n = w_n \times v_n$ $u_n = \frac{40+85n}{34} \times \frac{17}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{40+85n}{2 \times 17} \times \frac{17}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{40+85n}{2} \times \frac{1}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ $u_n = \frac{40+85n}{10} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{5(8+17n)}{10} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{8+17n}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{8+17n}{2} \times \frac{2^n}{5^n}$	

	$u_n = \frac{1}{2}(8 + 17n) \times \frac{2^n}{5^n} = \frac{2^n(8+17n)}{2 \times 5^n} = \frac{(17n+8)}{5^n} \times \frac{2^n}{2}$ $u_n = \frac{(17n+8)}{5^n} \times 2^{n-1} = \frac{2^{n-1}}{5^n} (17n + 8) .$ Donc $u_n = \frac{2^{n-1}}{5^n} (17n + 8) .$	
EXERCICE 4 (3 points)	①. a) Déterminons les réels a et b tels que : $P(z) = (z - 3)(z^2 + az + b)$ $P(z) = (z - 3)(z^2 + az + b)$ $P(z) = z^3 + az^2 + bz - 3z^2 - 3az - 3b$ $P(z) = z^3 + (a - 3)z^2 + (b - 3a)z - 3b$ Par identification : $\begin{cases} a - 3 = -13 \\ b - 3a = 59 \\ -3b = -87 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -13 + 3 = -10 \\ b = 59 + 3a \\ -3b = -87 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = 59 - 30 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a = -10 \\ b = 29 \end{cases} \text{ ainsi } a = -10 \text{ et } b = 29$ Donc $P(z) = (z - 3)(z^2 - 10z + 29)$ b) Résolvons l'équation $P(z) = 0$ $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 3)(z^2 - 10z + 29) = 0$ $\Leftrightarrow (z - 3) = 0 \text{ ou } (z^2 - 10z + 29) = 0$ $\Leftrightarrow z - 3 = 0 \text{ ou } z^2 - 10z + 29 = 0$ $\Leftrightarrow z = 3 \text{ ou } \Delta = (-10)^2 - 4 \times 29$ $\Leftrightarrow z = 3 \text{ ou } \Delta = 100 - 116 = -16$ $\Leftrightarrow z = 3 \text{ ou } z_1 = \frac{-(-10) - i\sqrt{-(-16)}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-(-10) + i\sqrt{-(-16)}}{2}$ $z_1 = \frac{10 - i\sqrt{16}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{10 + i\sqrt{16}}{2}$ $z_1 = \frac{10 - i\sqrt{16}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{10 + i\sqrt{16}}{2}$ $z_1 = \frac{10 - 4i}{2} \text{ et } z_2 = \frac{10 + 4i}{2}$ $z_1 = \frac{2(5 - 2i)}{2} \text{ et } z_2 = \frac{2(5 + 2i)}{2}$ d'où $z_1 = 5 - 2i$ et $z_2 = 5 + 2i$ donc $S_{\mathbb{C}} = \{3 ; 5 - 2i ; 5 + 2i\}$ ②. a) Vérifions que : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$ $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{5 - 2i - 3}{5 + 2i - 3} = \frac{2 - 2i}{2 + 2i} = \frac{2(1 - i)}{2(1 + i)} = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - 2i - 1}{1^2 + 1^2} = \frac{-2i}{2} = -i$ Donc $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$. b) Déduisons la nature du triangle ABC. On sait que : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$, alors ABC est un triangle rectangle isocèle en A.	

	③. Déterminons l'écriture complexe de la rotation de centre A qui transforme B en C. L'écriture complexe d'une rotation de centre A d'affixe 3 et d'angle θ s'écrit $z' = e^{i\theta}(z - z_A) + z_A$. Déterminons $e^{i\theta}$ tel que C est l'image de B. On a : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{5+2i-3}{5-2i-3} = \frac{2+2i}{2-2i} = \frac{2(1+i)}{2(1-i)} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{1^2+1^2} = \frac{2i}{2} = i$ $\theta = \arg(i) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$. L'écriture complexe de la rotation est donc $z' = (z - 3)i + 3$ $z' = iz - 3i + 3$ donc $z' = iz + 3 - 3i$.	
EXERCICE 5 (5 points)	①. a) Justifions $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x} \times \frac{\ln x}{x}\right)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{e^x} \times \frac{\ln x}{x}\right) = 1$ Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ b) Calculons limite en $+\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \left(1 - \frac{x^2}{e^x} \times \frac{\ln x}{x}\right)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. c) Donnons une interprétation graphique du résultat précédent. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, alors (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$. ②. a) Justifions que f est continue en 0. On a : $f(0) = 1$ et de plus $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x - x \ln x$ $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ On a alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ donc f est continue en 0. b) Justifions que : $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{e^x-1}{x} - \ln x$ $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{e^x - x \ln x - 1}{x} = \frac{e^x - 1 - x \ln x}{x}$ $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{e^x-1}{x} - \frac{x \ln x}{x} = \frac{e^x-1}{x} - \ln x$ Donc $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{e^x-1}{x} - \ln x$	

c) Étudions la dérivabilité de f en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} - \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en 0.}$$

La courbe (C) admet une tangente verticale en 0.

③. a) Justifions que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = (e^x - x \ln x)' = (e^x)' - ((\ln x)'x + (x)' \ln x)$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = e^x - (1 + \ln x) = e^x - \ln x - 1$$

$$\text{or } e^x - \ln x - 1 = g(x)$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$$

b) Dresse le tableau de variation f

Étudions le signe de $f'(x)$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x), \text{ donc le signe de } f'(x) \text{ dépend de } g(x).$$

$$\text{Or } \forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$$

$$\text{Par conséquent : } \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0.$$

Sens de variation de f

f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	1	$+\infty$

③. a) A l'aide d'une intégration par partie, démontrons que :

$$K = \frac{1}{4} \lambda^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \ln \lambda - \frac{1}{4}$$

$$K = \int_{\lambda}^1 x \ln x dx$$

Posons :

$$u(x) = \ln x \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = x \quad v(x) = \frac{1}{2} x^2$$

$$K = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_{\lambda}^1 - \int_{\lambda}^1 \frac{1}{x} \frac{1}{2} x^2 dx$$

$$K = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_{\lambda}^1 - \frac{1}{2} \int_{\lambda}^1 \frac{1}{x} x^2 dx$$

	$K = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_{\lambda}^1 - \frac{1}{2} \int_{\lambda}^1 x dx$ $K = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_{\lambda}^1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\lambda}^1$ $K = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_{\lambda}^1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} [x^2]_{\lambda}^1$ $K = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_{\lambda}^1 - \frac{1}{4} [x^2]_{\lambda}^1$ $K = \left[\frac{1}{2} (1)^2 \ln 1 - \left(\frac{1}{2} \lambda^2 \ln \lambda \right) \right] - \frac{1}{4} [1^2 - \lambda^2]$ $K = -\frac{1}{2} \lambda^2 \ln \lambda - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \lambda^2$ $K = \frac{1}{4} \lambda^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \ln \lambda - \frac{1}{4}$ b) Calculons en cm^2 l'aire $A(\lambda)$ on a : $ua = OI \times OJ = 2 \times 2 = 4cm^2$ $A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 (e^x - x \ln x) dx$ $A(\lambda) = \left(\int_{\lambda}^1 e^x dx - \int_{\lambda}^1 x \ln x dx \right) ua$ $A(\lambda) = 4 \left([e^x]_{\lambda}^1 - K \right) cm^2.$ $A(\lambda) = 4 \left[(e - e^{\lambda}) - \left(\frac{1}{4} \lambda^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \ln \lambda - \frac{1}{4} \right) \right] cm^2.$ c) Calculons la limite $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} 4 \left[(e - e^{\lambda}) - \left(\frac{1}{4} \lambda^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \ln \lambda - \frac{1}{4} \right) \right]$ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} 4 \left(e - 1 + \frac{1}{4} \right)$ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} 4e - 4 + 1$ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) = 4e - 3$	
EXERCICE 6 (5 points)	①. Justifions que la probabilité pour que le centre soit opérationnel au cours d'une journée est de 0,9298. Soit X le nombre de serveurs en état de marche. X suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 1 - q = 0,9$ $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10).$ $P(X \geq 8) = C_{10}^8 (0,9)^8 (0,1)^2 + C_{10}^9 (0,9)^9 (0,1)^1 + C_{10}^{10} (0,9)^{10} (0,1)^0$ $P(X \geq 8) = 0,1937 + 0,3874 + 0,3487$ $P(X \geq 8) = 0,9298$ ②. A l'aide d'une production argumenté, indiquons si le Directeur peut être rassuré ou non. Pour chercher à savoir si le directeur du centre doit être rassuré ou non, nous allons :	

	- Comparer la probabilité pour que le centre soit opérationnel à 0,90 ; - Comparer la probabilité que le centre fonctionne sans interruption durant les 5 jours à 0,60 ; - Conclure. ❖ Comparons la probabilité pour que le centre soit opérationnel à 0,90. On a : $P(X \geq 8) > 0,90$ c'est-à-dire $0,9298 > 0,90$. Donc la probabilité pour que le centre soit opérationnel au cours d'une journée est supérieure à 0,90 ; condition vérifiée. ❖ Comparons la probabilité que le centre fonctionne sans interruption durant les 5 jours à 0,60. Déterminons la probabilité que le centre fonctionne sans interruption durant les 5 jours (c'est-à-dire $P(X = 5)$) En supposant que les journées sont indépendantes, donc $P(X = 5) = (0,9298)^5$ $P(X = 5) = 0,6949.$ On a : $0,6949 > 0,60$ Donc la probabilité que le centre fonctionne sans interruption durant les 5 jours est supérieure à 0,60 ; donc condition vérifiée. ❖ Conclusion la probabilité pour que le centre soit opérationnel au cours d'une journée est supérieure à 0,90. De plus la probabilité que le centre fonctionne sans interruption durant les 5 jours est supérieure à 0,60. Donc le directeur du centre peut être rassuré, car les deux conditions sont vérifiées.	
--	--	--