TOPCHRONO

Réussir en toute sérénité

annales

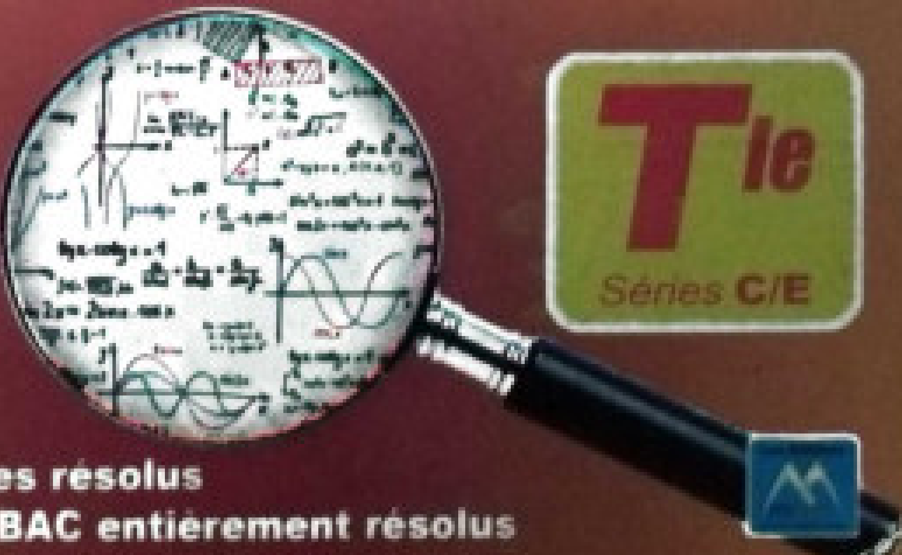
Sujets & **Corrigés**

2017

Yves Arsène SESS • YAO Denis

Maths

BAC 2016 INCLUS



T^le^

Séries **C/E**

- **Rappel de cours**
- **Méthodes pratiques**
- **Exercices et Problèmes résolus**
- **10 derniers sujets du BAC entièrement résolus**

COLLECTION LE TOP CHRONO

Sous la coordination de YAO Denis
Professeur de lycée

MATHEMATIQUES

BACCALAURÉAT SÉRIES C&E

Yves-Arsène **SESS** **YAO** Denis

Avec les collaborations de **YEO** Ladji et **KONE** Hamadou

Les éditions Matrice
(0225) 23 48 54 62/ 58 22 45 08
23 BP 2605 Abidjan 23
Email: matrice.editions@gmail.com
Site web: www.topmatrice.com

SOMMAIRE

PREMIERE PARTIE : LE TRAVAIL AU QUOTIDIEN

DEUXIEME PARTIE : LA PREPARATION DU BAC

AVANT PROPOS

La collection le **TOP CHRONO** a été conçue pour répondre au besoin, maintes fois, exprimé par les élèves de disposer d'un outil pratique et performant à moindre coût, pour préparer efficacement leur examen de fin d'année.

La première partie de **TOP CHRONO Mathématiques Bac C&E édition 2017** est à la fois un aide mémoire, une fiche efficace et synthétique, un résumé de cours simple mais très fourni qui rappelle les principaux résultats de chaque chapitre ainsi que les méthodes à connaître.
Elle vous permet de réviser rapidement vos leçons.
Cette partie comporte également pour chaque chapitre une dizaine d'exercices type bac entièrement corrigés permettant au candidat au bac de s'auto-évaluer.

La deuxième partie de **TOP CHRONO Mathématiques Bac C&E édition 2017** est consacrée aux 10 derniers sujets entièrement corrigés du baccalauréat **(2016; 2015; 2014; 2013 ; 2012 ; 2011 ; 2010 ; 2009 ; 2008 et 2007)**.

Le **TOP CHRONO** est conforme au programme officiel en vigueur en Côte d'Ivoire.

Nous espérons avoir rendu cet ouvrage assez attrayant pour qu'il soit un précieux auxiliaire de votre travail personnel tout au long de l'année.

Nous osons croire que cet ouvrage contribuera à l'amélioration des résultats de fin d'année des candidats au baccalauréat des séries C&E.

Les auteurs remercient d'avance toutes les bonnes volontés pour leurs remarques et suggestions qui permettront d'améliorer à l'avenir le contenu de ce document et en faire un outil incontournable pour le succès au BAC.

Nous adressons un profond remerciement à l'ensemble de nos collègues pour leurs encouragements, leurs conseils, leur soutien et leurs contributions de toutes sortes.

Les auteurs.

CHAPITRE I : ARITHMETIQUE

FICHE DE COURS

I. DIVISEURS ET MULTIPLES DANS $\mathbb{Z}$

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs.
a est un **multiple** de b signifie : $\exists k \in \mathbb{Z}$ / $a = k \times b$
On dit aussi que b est un **diviseur** de a ou b **divise** a. On écrit : **$b \mid a$**.

Propriétés

Soit a, b, et c trois entiers relatifs :
Pour tout a, $a \mid a$
Si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$
Si $a \mid b$ et $b \mid a$ alors $a = b$ ou $a = -b$
Si $a \mid b$ et $a \mid c$ alors $a \mid bc$
Si $a \mid b$ alors $ac \mid bc$
Si $a \mid b$ et $a \mid c$ alors $a \mid u.b + v.c$ pour tous entiers relatifs u et v.
Si $a \mid b$ alors $|a| \leq |b|$ avec $b \neq 0$

II. DIVISION EUCLIDIENNE

Soit a et b deux nombres entiers naturels, avec $b \neq 0$.
$\exists (q, r) \in \mathbb{N}$ / $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$.
q est appelé le **quotient**, **r** le **reste**, **a** le **dividende** et **b** le **diviseur** de la division de a par b.

III. NOMBRES PREMIERS

- Un entier naturel est **premier** si et seulement si il n'admet que deux diviseurs distincts : 1 et lui même.
- Il existe une infinité de nombres premiers
- Tout nombre plus grand que 1 est premier ou produit de nombres premiers

Comment reconnaître un nombre premier ?

Il est premier s'il n'est divisible par aucun nombre premier, inférieur à ce nombre.
On peut se limiter aux nombres premiers dont le carré est inférieur ou égal à ce nombre.

IV. PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR (PGCD)

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
On appelle plus grand commun diviseur de a et b le plus grand élément de D (a ; b)

Algorithme d'Euclide

Pour déterminer le PGCD (a ; b) avec $b \neq 0$, on effectue les divisions euclidiennes successives : $a = bq_1 + r_1$ PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r_1)
$b = r_1q_2 + r_2$ PGCD (b ; r_1) = PGCD (r1 ; r_2)
$r_1 = r_2q_3 + r_3$ PGCD (r_1 ; r_2) = PGCD (r_2 ; r_3)
On continue jusqu'au dernier reste non nul r_n alors PGCD (a ; b) = r_n.
- PGCD (a; b) = PGCD (b; a);
- PGCD (ka; kb) = $|k| \times$PGCD (a; b) avec $k \in \mathbb{Z}$

V. NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

- a et b sont **premiers entre eux** si et seulement si **PGCD (a; b) =1**
- Si PGCD (a ; b)=d alors $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ sont premiers entre eux.
- $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible lorsque a et b sont premiers entre eux.

VI. THEOREMES FONDAMENTAUX

Théorème de Gauss

Si $a \mid bc$ et si a et b sont premiers entre eux alors $a \mid c$.
Si $a \mid n$ et $b \mid n$ avec a et b premiers entre eux alors $ab \mid n$.

Théorème de Bézout

a et b sont **premiers entre eux** si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que : **a.u + b.v = 1**

VII. PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE (PPCM)

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
On appelle **plus petit commun multiple** de a et b, le plus petit élément strictement positif de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$;

- Si $a \mid b$ alors PPCM (a ; b) = b
- PPCM (a; b) = PPCM (b; a)
- PPCM (ka; kb) = $|k| \times$PPCM (a; b)
- Si a et b **sont premiers entre eux**, PPCM (a ; b) = $a \times b$
- PGCD (a; b) $\times$ PPCM (a; b) = $|a| \times |b|$
- Si $d \mid a$ et $d \mid b$ alors $\mathbf{PPCM}\left(\frac{a}{d};\frac{b}{d}\right) = \frac{1}{d} \times \boldsymbol{PPCM(a;b)}$ avec $d \in \mathbb{N}^*$

VIII. SYSTEME DE NUMERATION

Définition

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Tout nombre entier naturel non nul X s'écrit de façon unique sous la forme :
$X = U_{n-1} b^{n-1} + U_{n-2} b^{n-2} + \ldots + U_1 b^1 + U_0$ avec $U_{n-1} \neq 0$ et U_{n-1}, U_{n-2}, ………, U_1 et U_0 sont les entiers naturels compris entre 0 et b
L'écriture de X en base b est $X = \overline{U_n U_{n-1} \ldots U_2 U_1 U_0}^{\,b}$

1- Système de numération binaire ou système binaire

On parle de système binaire lorsque b = 2.
L'ensemble des chiffres utilisés dans le système binaire est : $\{0; 1\}$

2- Système décimal

On parle de système décimal lorsque b = 10.
L'ensemble des chiffres utilisés dans le système décimal est : $\{0; 1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1 : Bac C 2002 Session normale

1. Déterminer suivant les valeurs du nombre entier naturel n, les restes respectifs dans la division euclidienne de 11 des nombres entiers naturels 5^n et 3^n.
2. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $5^n - 3^n$ soit divisible par 11.

EXERCICE 2 : Bac C 1997 Session de remplacement

On considère l'équation (E) : $(p;q) \in \mathbb{Z}^2, 11p - 7q = -4$

1. a. Vérifier que (– 1 ; –1) est solution de (E).
   b. Résoudre (E).
2. a. Résoudre les équations (F) et (G) suivantes :

(F) $x \in \mathbb{Z}, 2x \equiv 3[7]$

(G) $x \in \mathbb{Z}, 9x \equiv 4[11]$

b. Déduire de 1) et de 2) les solutions du système $\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 9x \equiv 4[11] \end{cases}, \quad x \in \mathbb{Z}$

EXERCICE 3 : Bac C 1999 Session de remplacement

1. Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.
2. Justifier que : $1999 \equiv 4[7]$
3. En déduire le reste de la division euclidienne par 7 de 1999^{132}.
4. Soit l'entier A_k tel que :

$$A_k = 123^k + 123^{2k} + 123^{3k} + 123^{4k} + 123^{5k}.$$

Discuter, suivant les valeurs de l'entier naturel k, le reste de la division euclidienne de A_k par 7 .

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation et système d'équation suivants :

$$5x \equiv 1[6] \quad et \quad \begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 1[4] \end{cases}$$

EXERCICE 5

Déterminer dans chacun des cas suivants, l'ensemble des couples (x ; y) éléments de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que: 1°) $\begin{cases} PPCM(x;y) = 84 \\ PGCD(x;y) = 7 \end{cases}$; 2°) $\begin{cases} x + y = 60 \\ PGCD(x;y) = 12 \end{cases}$

EXERCICE 6

1°) Démontrer par recurrence que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

2°) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 4$, $(n+1)^3 \leq 3n^3$.

EXERCICE 7

Pour tout entire naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres : $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.

1°)Montrer que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.

On pose $\alpha = 2n+1$ *et* $\beta = n+3$. On note d le PGCD de α *et* β.

2°) a. Etablir une relation entre α *et* β indépendante de n.

b. Démontrer que d est un diviseur de 5.

c. Démontrer que les nombres α *et* β sont multiples de 5 si et seulement si n – 2 est multiple de 5.

3°) Montrer que 2n + 1 et n sont premiers entre eux.

4°) a. Déterminer suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b.

b. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers n = 11 et n = 12.

EXERCICE 8

Il s'agit de résoudre le système (S) $\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[4] \end{cases}$

Déterminer un couple d'entiers (α, β) solution de : $23\alpha + 7\beta = 1$.

En déduire un couple (u_0, v_0) solution de l'équation ci-dessous, puis résoudre complètement cette équation : $23u - 7v = -6$.

Démontrer que x est solution de (S) si et seulement si il existe (u, v) un couple d'entiers vérifiant : $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$

En déduire l'ensemble des solutions de (S).

EXERCICE 9

Partie A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?

Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

Partie B

1. On note 0, 1, 2, ..., 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12.

Par exemple : $\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta\times 12^2 + \alpha\times 12 + 7 = 11\times 144 + 10\times 12 + 7 = 1711$ en base 10.

a. Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{\beta 1\alpha}^{12}$.

Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b. Soit le nombre N_2 s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1131 = 1\times 10^3 + 1\times 10^2 + 3\times 10 + 1$.

Déterminer l'écriture de N_2 en base 12

Dans toute la suite, N un entier naturel s'écrira de manière générale en base 12: $N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}^{12}$.

2. a. Démontrer que $N \equiv a_0 [3]$.

En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b. A l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3.

Confirmer avec son écriture en base 10.

3. a. Démontrer que $N \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 [11]$.

En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

b. A l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11.

Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $N = \overline{x4y}^{12}$.

Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33

EXERCICE 10

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

Vérifier que le couple (−7 ; −3) est solution de (E).

Résoudre alors l'équation (E).

En déduire le couple d'entiers relatifs (u ; v) solution de (E) tel que : $0 \leq u \leq 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On «code» tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

• On calcule $11x + 8$

• On calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y

x est alors « codé » par y.

Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11;

$11 \times 11 + 8 = 129$ or $129 \equiv 25[26]$;

25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26.

Au nombre 25 correspond la lettre Z. La lettre L est donc codée par la lettre Z.

Coder la lettre W.

Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.

Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et y, on a :

$11x \equiv j[26]$ équivaut à $x \equiv 19j[26]$.

En déduire un procédé de décodage.

Décoder la lettre W.

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1 : Bac C 2002 Session normale

1. Les restes de la division euclidienne de 5^n et 3^n par 11.

$5^0 \equiv 1[11]$	$3^0 \equiv 1[11]$
$5^1 \equiv 5[11]$	$3^1 \equiv 3[11]$
$5^2 \equiv 3[11]$	$3^2 \equiv 9[11]$
$5^3 \equiv 4[11]$	$3^3 \equiv 5[11]$
$5^4 \equiv 9[11]$	$3^4 \equiv 4[11]$
$5^5 \equiv 1[11]$	$3^5 \equiv 1[11]$

• Pour n = 5k, on a :
$5^n \equiv 5^{5k}[11] \equiv 1[11]$
$3^n \equiv 3^{5k}[11] \equiv 1[11]$

• Pour n = 5k + 1, on a :
$5^n \equiv 5^{5k+1}[11] \equiv 1\times5[11] \equiv 5[11]$
$3^n \equiv 3^{5k+1}[11] \equiv 1\times3[11] \equiv 3[11]$

• Pour n = 5k + 2, on a :
$5^n \equiv 5^{5k+2}[11] \equiv 1\times3[11] \equiv 3[11]$
$3^n \equiv 3^{5k+2}[11] \equiv 1\times9[11] \equiv 9[11]$

•Pour n=5k+3, on a :
$5^n \equiv 5^{5k+3}[11] \equiv 1\times4[11] \equiv 4[11]$
$3^n \equiv 3^{5k+3}[11] \equiv 1\times5[11] \equiv 5[11]$

• Pour n = 5k + 4, on a :
$5^n \equiv 5^{5k+4}[11] \equiv 1\times9[11] \equiv 9[11]$
$3^n \equiv 3^{5k+4}[11] \equiv 1\times4[11] \equiv 4[11]$

En conclusion :
Les restes de la division de 5^n par 11 sont : 1 ; 5 ; 3 ; 4 ; 9,
Les restes de la division de 3^n par 11 sont : 1 ; 3 ; 9 ; 5 ; 4.

2. Déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $5^n - 3^n$ soit divisible par 11.

• Pour n = 5k, on a : $5^n - 3^n \equiv 1 - 1[11] \equiv 0[11]$
•Pour n = 5k + 1, on a : $5^n - 3^n \equiv 5 - 3[11] \equiv 2[11]$
•Pour n = 5k + 2, on a : $5^n - 3^n \equiv 3 - 9[11] \equiv -6[11] \equiv 5[11]$
• Pour n = 5k + 3, on a : $5^n - 3^n \equiv 4 - 5[11] \equiv -1[11] \equiv 10[11]$
• Pour n = 5k + 4, on a : $5^n - 3^n \equiv 9 - 4[11] \equiv 5[11]$

En conclusion, pour que $5^n - 3^n$ soit divisible par 11, il faut que n soit un multiple de 5 ($n = 5k$ avec $k \in \mathbb{N}$).

EXERCICE 2 : Bac C 1997 Session de remplacement

1) a- Vérifions que (-1 ;-1) est solution de (E) .

On a : $11p - 7p = 11(-1) - 7(-1) = -11 + 7 = -4$

donc le couple $(-1\,;\,-1)$ *est solution de* (E).

b- Résolvons (E)

On a : $\begin{cases} 11p - 7q = -4 \\ 11(-1) - 7(-1) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow 11(p+1) - 7(q+1) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{11(p+1) = 7(q+1)}$ (1) *donc* 11 *divise* $7(q+1)$.

Comme 11 *et* 7 *sont premiers entre eux,*

alors d'après le théorème de Gauss, 11 *divise* $q+1$.

Par conséquent, il existe $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $q+1 = 11k \Rightarrow \boxed{q = -1+11k}$

En remplaçant q *par* $-1+11k$ *dans la relation* (1),

on obtient $11\,(p+1) = 7\times11k \Leftrightarrow p+1 = 7k \Leftrightarrow \boxed{p = -1+7k}$

Donc $S = \{(-1+7k\,;-1+11k)\}$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

2. a. *Résolvons (F)* : $x\in\mathbb{Z}, 2x\equiv 3[7]$

Considérons le tableau de congruence module 7 suivant

x	0	1	2	3	4	5	6
2x	0	2	4	6	1	3	5

Par conséquent, $2x \equiv 3[7] \Leftrightarrow x \equiv 5[7] \Leftrightarrow$ il existe $s \in \mathbb{Z}$, tel que $x = 5 + 7s$

Donc l'ensemble des solutions est : $S_{(F)} = \{ 5 + 7s,\ s \in \mathbb{Z} \}$

Resolvons (G) : $x \in \mathbb{Z},\ 9x \equiv 4[11]$

Considérons le tableau de congruence modulo 11 suivant

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9x	0	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2

Par conséquent, $9x \equiv 4[11] \Leftrightarrow x \equiv 9[11] \Leftrightarrow$ il existe $t \in \mathbb{Z}$, tel que $x = 9 + 11t$; donc l'ensemble des solutions est : $S_{(G)} = \{ 9 + 11t ; t \in \mathbb{Z} \}$.

b- Les solutions du système sont les nombres qui sont à la fois solutions de (F) et de (G).

d'où $\begin{cases} 2x\equiv 3[7] \\ 9x\equiv 4[11] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+7s \\ x=9+11t \text{ avec } (s,t)\in\mathbb{Z}^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 11t-7s=-4 \\ x=5+7s \end{cases}$

D'après 1.b, on a: $\begin{cases} t=-1+7k \\ x=5+7s \end{cases}$ *et* $s=-1+11k, k\in\mathbb{Z}$.

Donc $x=5+7(-1+11k) \Rightarrow \boxed{x=-2+77k}$

$\boxed{S = \{-2+77k\}}$ *avec* $k\in\mathbb{Z}$

EXERCICE 3 : Bac C 1999 Session de remplacement

1. $4^0\equiv 1[7]; 4^1\equiv 4[7]; 4^2\equiv 2[7]; 4^3\equiv 1[7]$.

Par conséquent,

Si $n\equiv 0[3]$ alors $4^n\equiv 1[7]$.

Si $n\equiv 1[3]$ alors $4^n\equiv 4[7]$.

Si $n\equiv 2[3]$ alors $4^n\equiv 2[7]$.

En conclusion, le reste de la division euclidienne de 4^n par 7 est :

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ si } n \equiv 0[3] \text{ ou si } n = 3k \\ 4 \text{ si } n \equiv 1[3] \text{ ou si } n = 3k+1 \\ 2 \text{ si } n \equiv 2[3] \text{ ou si } n = 3k+2 \end{array}\right| \quad k \in \mathbb{N}$$

2. $1999 = 7 \times 285 + 4$ d' où $1999 \equiv 4[7]$

3. On a : $1999^{132} \equiv 4^{132}[7]$, or $132 \equiv 0[3]$ car $132 = 3 \times 44$

Donc le reste de la division euclidienne de 1999^{132} par 7 est 1 d'après la question 1).

4. $A_k \equiv 123^k + 123^{2k} + 123^{3k} + 123^{4k} + 123^{5k}$

$123 = 7 \times 17 + 4$, donc $123 \equiv 4[7]$

Par conséquent, $A_k = 4^k + (4^k)^2 + (4^k)^3 + (4^k)^4 + (4^k)^5 [7]$

1er cas : si $k \equiv 0[3]$ alors $4^k \equiv 1[7]$ donc $A_k \equiv 1^1 + 1^2 + 1^3 + 1^4 + 1^5[7] \Rightarrow A_k \equiv 5[7]$

2^e cas : si $k \equiv 1[3]$ alors $4^k \equiv 4[7]$ donc $A_k \equiv 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5[7]$

$\Rightarrow A_k \equiv 4 + 2 + 1 + 4 + 2 = 13 = 7 + 6 \Rightarrow A_k \equiv 6[7]$

3^e cas : si $k \equiv 2[3]$ alors $4^k \equiv 2[7]$ donc $A_k \equiv 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5[7] \Rightarrow A_k \equiv 6[7]$

Le reste de la division euclidienne de A_k par 7 est :

- 5 si $k \equiv 0[3]$
- 6 si $k \equiv 1[3]$ ou $k \equiv 2[3]$

EXERCICE 4

Résolvons $5x \equiv 1[6]$

Considerons le tableau de congruence modulo 6 suivant :

x	0	1	2	3	4	5
5x	0	5	4	3	2	1

On obtient : $5x \equiv 1[6] \Leftrightarrow x \equiv 5[6]$;

Donc l'ensemble des solutions est S = { 6k + 5 ; k $\in \mathbb{Z}$}

Résolvons $\begin{cases} x \equiv 2\ [3] \\ x \equiv 1\ [4] \end{cases}$

$x \equiv 2[3]$: il existe un entier relatif U tel que : x = 2 + 3 U (1)
$x \equiv 1[4]$: il existe un entier relatif V tel que : x = 1 + 4 V (2)
Les relations (1) et (2) donnent 2 + 3 U = 1 + 4 V $\Rightarrow$ 4 V - 3 U =1.
On a PGCD (4 ; 3) = 1.
Soit (V; U) un couple d'entier relatif solution de l'équation 4 V – 3U = 0.

On a : $4V = 3U$.
4 divise $3U$ et est premier avec 3 ; d'après le théorème de Gauss, 4 divise U, donc $U = 4k$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
Réciproquement, on en déduit que $V = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
On obtient donc : $(V ; U) = (3k ; 4k)$, $k \in \mathbb{Z}$;
Déterminons une solution particulière de l'équation $4V - 3U = 1$.
On obtient donc le couple $(V_0, U_0) = (1 ; 1)$.
Donc au total on a : $(V ; U) = (3k + 1 ; 4k + 1)$.
L'inconnu x donne : $x = 2 + 3U \Rightarrow x = 2 + 3(4k + 1) \Rightarrow$
$x = 12k + 5$, $k \in \mathbb{Z}$;
L'ensemble des solutions est : $S = \{12k + 5;\ k \in \mathbb{Z}\}$

EXERCICE 5

1°) Déterminons l'ensemble des couples $(x ; y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $\begin{cases} PGCD(x ; y) = 7 \\ PPCM(x ; y) = 84 \end{cases}$

Soit a' et b' deux nombres premiers entre eux tels que : $x = 7a'$ et $y = 7b'$.

On a donc : $PGCD(a' ; b') = 1$ et $PPCM(a' ; b') = a' \times b'$.

Le système devient : $\begin{cases} PGCD(x; y) = 7 \\ PPCM(x; y) = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} PGCD(7a';7b') = 7 \\ PPCM(7a';7b') = 84 \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} PGCD(a'; b') = 1 \\ PPCM(a';b') = 12 \end{cases}$

D'où $a' \times b' = 12$ On peut dire que a' et b' sont deux diviseurs de 12 ;
L'ensemble des diviseurs positifs de 12 est : $D_{12} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}$
1^er^ cas : si $a' = 1$ alors on a : $b' = 12$, donc le couple (1 ; 12) est solution.
2^ème^ cas : si $a' = 2$ alors on a : $b' = 6$ or $PGCD(2 ; 6) = 2$, donc le couple (2 ; 6) n'est pas solution.
3^ème^ cas : si $a' = 3$ alors on a : $b' = 4$, donc le couple (3 ; 4) est solution.
Les autres cas se retrouvent dans les 3 cas précédents.
Au total : les couples (a' ; b') solutions sont (1 ; 12) ; (3 ; 4) ; (4 ; 3) et (12 ; 1).
En conclusion : l'ensemble des couples (x; y) cherchés est :
(7 ; 84) ; (21 ; 28) ; (28 ; 21) et (84 ; 7).

2°) Déterminons l'ensemble des couples $(x ; y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $\begin{cases} PGCD(x; y) = 12 \\ x + y = 60 \end{cases}$

Soit a' et b' deux nombres premiers entre eux tels que : $x = 12a'$ et $y = 12b'$.

On a : $\begin{cases} PGCD(x ; y) = 12 \\ x + y = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} PGCD(a';b') = 1 \\ a' + b' = 5 \end{cases}$

On obtient donc : $a' = 1$ et $b' = 4$ ou bien $a' = 2$ et $b' = 3$ ou bien $a' = 3$ et $b' = 2$ ou bien $a' = 4$ et $b' = 1$.

En conclusion : l'ensemble des solutions du système est :
$S = \{(12 ; 48) ; (24 ; 36) ; (36 ; 24) ; (48 ; 12)\}$

EXERCICE 6

1. Soit $p(n)$ la propriété : $n \geq 1, \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

Verifions que P(1) est vraie.

On a : $\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$; donc P(1) est vraie.

Supposons pour $k, k\geq 1$ $p(k)$ est vraie c'est-à-dire $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

Montrons que $p(k+1)$ est vraie. On a :

$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$; donc

$p(k+1)$ est vraie. On en déduit que : pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on a :

$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

2. Soit la proposition $p(n)$: $n\geq 4, (n+1)^3\leq 3n^3$.

On a : $(4+1)^3=125$ *et* $3\times 4^3=192 \Rightarrow (4+1)^3\leq 3\times 4^3$ donc $p(4)$ est vraie.

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 4. Si $p(k)$ est vraie, alors : $(k+1)^3\leq 3k^3$.

On a : $(k+2)^3=(k+1)^3+3(k+1)^2+3(k+1)+1=(k+1)^3+3k^2+9k+7$ et

$3(k+1)^3=3(k^3+3k^2+3k+1)=3k^3+3k^2+9k+6k^2+3$.

Or $(k+1)^3\leq 3k^3 \Rightarrow (k+1)^3+3k^2+9k\leq 3k^3+3k^2+9k$ (1)
et de plus pour $k\geq 4$, $7\leq 6k^2+3$:(2). Des relations (1) et (2) on tire que
$(k+1)^3+3k^2+9k+7\leq 3k^3+3k^2+9k+6k^2+3$
$\Rightarrow (k+2)^3\leq 3(k+1)^3$; donc P(k + 1) est vraie
On en déduit que pour $n\geq 4, (n+1)^3\leq 3n^3$.

EXERCICE 7

1. $a=n(n-4)(n+3)$ et $b=(n-4)(2n+1)$ donc a et b sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.

2. a Etablissons une relation entre α et β ne dépendant pas de n :
On a : $2\beta-\alpha=2(n+3)-(2n+1)=5$; donc $2\beta-\alpha=5$
b. d/α *et* d/β donc d divise $(2\beta-\alpha)$; or $2\beta-\alpha=5$ donc $d/5$.
c. * α *et* β sont multiples de 5 signifie que 5 divise α *et* β.

5 divise α et β ,donc 5 divise $\alpha-\beta$. Or $\alpha-\beta=2n+1-n-3=n-2$
Donc 5 divise $n-2$

*Si n – 2 est multiple de 5 alors $n-2=5k$ (*avec* $k\in\mathbb{N}$) $\Rightarrow \alpha=5(2k+1)$ et $\beta=5(k+1)$; d'où α et β sont multiple de 5.

3. $(2n+1)-2\times n=1$ donc d'après le théorème de Bézout $PGCD(2n+1;n)=1$ donc 2n + 1 et n sont premiers entre eux

4. a. On a les factorisations suivantes de a et b :
$a=n(n-4)(n+3)$ *et* $b=(n-4)(2n+1)$ on a deux cas :
1er cas : n – 2 n'est pas multiple de 5, et alors le PGCD de a et b est n – 4.
2e cas : n – 2 est multiple de 5, et alors 5 divise a et b d'où le PGCD de a et b est 5(n – 4).
b. Pour n = 11, 11 – 2 = 9 n'est pas multiple de 5 donc le PGCD de a et b est 11 – 4 = 7.

Vérification :

$a=490=2\times 5\times 7^2$ *et* $b=161=7\times 23$ donc on a bien le PGCD de a et b est 7.
Pour n = 12, 12 – 2 = 10 est multiple de 5 donc le PGCD de a et b est 5(12 – 4) = 40.

Vérification :

$a = 1440 = 2^5 \times 3^2 \times 5$ *et* $b = 200 = 2^3 \times 5^2$ donc on a bien PGCD(a;b)= $2^3 \times 5 = 40$.

EXERCICE 8

1. Appliquons l'algorithme d'Euclide : $23 = 7 \times 3 + 2$, $7 = 2 \times 3 + 1$. Alors $2 \times 3 = 7 - 1$.

Multiplions par 3 la première division :

$23 \times 3 = 7 \times 9 + 2 \times 3 = 7 \times 9 + 7 - 1 = 7 \times 10 - 1 \Rightarrow 23 \times 3 - 7 \times 10 = -1 \Rightarrow 23 \times (-3) + 7 \times 10 = 1$.

Autre methode : En utilisant l'algorithme d'Euclide,on a :

$1 = 7 - 2\times3 \Leftrightarrow 1 = 7 - (23 - 7\times3)\times3 \Leftrightarrow 1 = -23\times3 + 7(1+9) \Leftrightarrow 1 = 23\times(-3) + 7\times10$

2. Alors en multipliant par (-6), on a : $23 \times 18 - 7 \times 60 = -6$

Soit un couple d'entiers (u, v) : $23u - 7v = -6 \Leftrightarrow 23(u-18) - 7(v-60) = 0 \Leftrightarrow 23(u-18) = 7(v-60)$

or 23 et 7 sont premiers entre eux,

d'où : $23u - 7v = -6 \Leftrightarrow 23 \mid (v-60)$ et $7 \mid (u-18)$ d'où $\frac{v-60}{23} = \frac{u-18}{7} \Rightarrow$

$v = 60 + 23m$ et $u = 18 + 7m$ avec $m \in \mathbb{Z}$

3. Soit un entier x :

x solution de (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 23u, (u \in \mathbb{Z}) \\ 10 + 23u \equiv 4[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 23u, (u \in \mathbb{Z}) \\ 23u \equiv -6[7] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 23u, (u \in \mathbb{Z}) \\ 23u = -6 + 7v, (v \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 23u \\ 23u = 414 + 161m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 23u, (u \in \mathbb{Z}) \\ u = 18 + 7m, (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 10 + 23(18 + 7m) \Leftrightarrow x = 424 + 161m$, pour $m \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 9

Partie A : Question de cours

Si $a_1 \equiv b_1 [n]$ et $a_2 \equiv b_2 [n]$ alors :

$$\Rightarrow a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 [n]$$

$$\Rightarrow a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 [n]$$

$\Rightarrow$ Pour tout entier naturel p,on a : $a_1^p \equiv b_1^p [n]$

Démonstration de la propriété de compatibilité avec la multiplication :

Si $a_1 \equiv b_1[n]$ et $a_2 \equiv b_2 \equiv [n]$ alors il existe deux entiers q_1 et q_2 tels que $a_1 = q_1 n + b_1$ et $a_2 = q_2 n + b_2$.

Alors $a_2a_1 = (q_1n + b_1)(q_2n + b_2) \Leftrightarrow a_2a_1 = q_1q_2n^2 + q_1b_2n + q_2b_1n + b_1b_2$

$\Leftrightarrow a_2a_1 = (q_1q_2n + q_1b_2 + q_2b_1)n + b_1b_2 \Leftrightarrow a_1a_2 = Q + b_1b_2$

Donc, en conclusion on a : $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 [n]$.

Partie B

1. a. $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12} = \beta \times 12^2 + 1 \times 12 + \alpha = 11 \times 144 + 12 + 10 = 1606$

$N_1 = 1606$ en base 10.

b. $N_2 = 1131 = 1008 + 120 + 3 = 7 \times 144 + 10 \times 12 + 3 = 7 \times 12^2 + 10 \times 12 + 3 = \overline{7\alpha 3}^{12}$

2. a. Pour $N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}^{12}$ en base 10, $N = a_n \times 12^n + a_{n-1} \times 12^{n-1} + \cdots + a_1 \times 12 + a_0 \equiv a_0 [12]$

Donc il existe un entier naturel q tel que $N = 12q + a_0 = 3(4q) + a_0 = 3Q + a_0$, donc $N \equiv a_0 [3]$

N est donc divisible par 3 si le dernier chiffre (a_0) est un multiple de 3.

b. $N_2=\overline{7\alpha 3}^{12}$, donc $a_0=3$ est divisible par 3, donc N_2 est divisible par 3.
On le vérifie en base 10 car un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme des chiffres de son écriture en base 10 est un multiple de 3, et ici 1+1+3+1=6 donc N_2 est divisible par 3. On a aussi : $N_2=1131=3\times 377$.

1. a.12 $\equiv 1[11]$ d'où pour tout entier naturel p, $12^p \equiv 1[11]$, donc $a_p\times 12^p \equiv a_p[11]$

Or $N=a_n\times 12^n+a_{n-1}\times 12^{n-1}+\cdots+a_1\times 12+a_0$ donc $N\equiv a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0[11]$

N est donc divisible par 11 si la somme des chiffres de son écriture en base 12 est divisible par 11.

b. Or N est divisible par 11, donc N_1 divisible par 11.

On le vérifie en base 10 car $N=1606=11\times 146$.

2. Comme 3 et 11 sont premiers entre eux, $N=\overline{x4y}^{12}$ est divisible par 33 = 3 × 11 si et seulement si N est divisible par 3 et N est divisible par 11, si et seulement si y est un multiple de 3 et $x+4+y$ est divisible par 11.

y est un multiple de 3, donc $y\in\{0;3;6;9\}$.

Si $y=0$, $x+4$ est divisible par 11. La seule possibilité est $x=7$.

Si $y=3$, $x+7$ est divisible par 11. La seule possibilité est $x=4$.

Si $y=6$, $x+10$ est divisible par 11. La seule possibilité est $x=1$.

Si $y=9$, $x+13$ est un multiple de 11. La seule possibilité est $x=9$.

Donc les solutions sont : $S=\{(7,0);(4,3);(1,6);(9,9)\}$.

EXERCICE 10

Partie A

1. $11\times(-7)-26\times(-3)=-77+78=1$ donc (-7;-3) est solution de (E).

2. Soit (x, y) une solution de (E), alors $11x-26y=1=11\times(-7)-26\times(-3)$.
Donc $11(x+7)=26(y+3)$ donc $11\mid 26(y+3)$.

Or, 11 et 26 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, $11\mid(y+3)$.

Il existe donc un entier relatif k tel que $y+3=11k$, soit $y=11k-3$.

Alors $11(x+7)=26\times 11k$ donc $x+7=26k$ ou encore $x=26k-7$.

Donc : si (x, y) est solution de (E), alors il existe un entier relatif k tel que $(x,y)=(26k-7,11k-3)$.

Réciproquement, on vérifie que tous les couples $(26k-7,11k-3)$, avec k entier relatif, sont solutions de (E) : $11\times(26k-7)-26\times(11k-3)=1$

Conclusion : Les solutions de (E) sont les couples de la forme : $(26k-7;11k-3)$ avec $k\in Z$

3. La seule valeur de k telle que $0\le 26k-7\le 25$ est $k=1$ d'où $u=26-7=19$ et $v=11-3=8$

Donc le couple d'entiers relatifs (u, v) solution de (E) et tel que $0\le u\le 25$ est (19 ; 8).

Partie B

1. La lettre W est assimilée au nombre 22 ; on calcule $11x+8=11\times 22+8=250$; on calcule le reste de la division euclidienne de 250 par 26 : $250=26\times 9+16$ donc $y=16$; la lettre correspondant au nombre 16 est Q.

Donc **W est codé par la lettre Q.**

2. a. $11x\equiv j[26] \Leftrightarrow 11x=26k+j$

$\Leftrightarrow$ il existe un nombre relatif tel que $11x-26k=j$

$\Leftrightarrow$ il existe un nombre relatif k tel que $11\times 19x-26\times 19k=19j$

$\Leftrightarrow 11\times 19x\equiv j[26]$

Or, $11\times 19=209\equiv 1[26]$, donc $11\times 19x\equiv x[26]$, d'où : $11x\equiv j[26]\Leftrightarrow x\equiv 19j[26]$

b. x est codée par $y \Leftrightarrow y$ est le reste de la division euclidienne de $11x+8$ par 26 $\Leftrightarrow 11x+8\equiv y[26]$ $\Leftrightarrow 11x\equiv y-8[26] \Leftrightarrow x\equiv 19(y-8)[26]$ (D'après le résultat de la question précédente) $\Leftrightarrow$ $x\equiv 19y-152[26]$

Pour décoder y, il suffit donc :

- de calculer $19y-152$
- de calculer le reste de la division euclidienne de $19y-152$ par 26, que l'on appelle x. y est alors "décodée" par x.

c. La lettre W est assimilée au nombre 22 ; on calcule $19y-152=19\times 22-152=266$;

On calcule le reste de la division euclidienne de 266 par 26 : $266=10\times 26+6$;
la lettre correspondant au nombre 6 est G.
Donc W est décodé par la lettre G.

CHAPITRE II : BARYCENTRE

FICHE DE COURS

Barycentre de n points pondérés ($n \geq 2$)

Définition:

Soit $(A_i ; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$, n points pondérés.

Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Ce point G est appelé barycentre des points pondérés $(A_i ; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On note :

$G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1) ; (A_2, \alpha_2) ; ...... ; (A_n, \alpha_n)\}$ ou

G = bar

A_1	......	A_n
α_1	......	α_n

Propriétés

Homogénéité :

Le barycentre de plusieurs points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.

En effet, $\forall k \in \mathbb{R}^*$, on a : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} k\alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

Le barycentre de points pondérés affectés de coefficients égaux est appelé **isobarycentre** de ces points.

Réduction de la somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$

Soit $(A_i ; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$, n points pondérés.

Pour tout point M, on a :

Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA} = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{MG}$ où G est le barycentre des points pondérés $(A_i ; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est indépendant de M.

Coordonnées du barycentre

L'espace est muni du repère $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $(A_i ; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$, n points pondérés et G leur barycentre.

On désigne par (x_i, y_i, z_i) les coordonnées du point A_i et (x_G, y_G, z_G) celle de G alors :

$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$

On obtient donc : $x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$; $y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$; $z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$

EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1 : Bac C 2002 Session normale

1. DEF est un triangle rectangle isocèle en E tel que la distance DE est égale à 4 cm.
K désigne le milieu du segment [EF] et G le point défini par : $\overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$

a. Faire une figure.
b. Démontrer que G est le barycentre des points pondérés (D, 2), (E, - 1) et (F, 1).
c. Démontrer que le quadrilatère GFKD est un parallélogramme.
d. En déduire que $GF = 2\sqrt{5}$.
e. Démontrer que le triangle GEF est isocèle en G.
2. On note (C), l'ensemble des points M du plan tels que : $2MD^2 - ME^2 + MF^2 = 48$.
a. Vérifier que E et F sont des éléments de (C).
b. Déterminer l'ensemble (C).
c. Construire l'ensemble (C).

EXERCICE 2 : Bac E 1995 Session de remplacement

On considère trois points non alignés A, B et C de l'espace.
On désigne par G_1, le barycentre des points pondérés (A, 3), (B, 2) et (C, - 1) et par G_2, le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, 1) et (C, 1).
1. a. Calculer $\overrightarrow{G_1G_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
b. En déduire que $G_1 \neq G_2$.
2. A tout point M de l'espace on fait correspondre le point M_1 tel que :
$\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et le point M_2 tel que : $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$
a. Démontrer que si M décrit une droite (D) de l'espace, M_1 décrit la droite (Δ) image de (D) par une homothétie que l'on précisera.
b. Démontrer que $\overrightarrow{M_1M_2}$ le vecteur reste constant quand M décrit l'espace.
3. Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_2} = 0$

EXERCICE 3 : Bac C 1996 Session de remplacement

ABC est un triangle équilatéral de côté de longueur a.
Soit I le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2) et (C, -2).
1. Déterminer et construire I.
2. Calculer IA^2, IB^2 et IC^2 en fonction de a.
3. Soit k, un nombre réel.
a. Déterminer en fonction de k, l'ensemble (Ω_k) des points M du plan tels que :

$$MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = ka^2$$

b. Existe-t-il une valeur de k pour laquelle B appartient à (Ω_k) ?
4. a. Démontrer que (Ω_{-1}) est un cercle tangent à la droite (AB).
b. Démontrer que le symétrique D et B par rapport à la droite (AI) appartient à la droite (AC).

c. Démontrer que (Ω_{-1}) est tangent à (AC) en D.

d. Quelle est la nature du triangle IBD ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 : Bac C 1998 Session de remplacement

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
On considère dans le plan, un triangle ABC rectangle en A tels que AB = 2a et AC = a , où a est un nombre réel strictement positif.

1. a. Déterminer et construire le point G = bar {(A ; 1) ; (B ; -1) ; (C ; 1)}
   b. Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que :
   $$\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \right\|$$
2. Soit H le point du plan défini par $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

a. Démontrer que le point H = bar {(A; 3) ; (B; 1); (C;-2)}
b. Pour tout réel k, on désigne par (E_k) l'ensemble des points M du plan tels que :
$3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = k\,a^2$.
Pour quelle valeur de k, l'ensemble (E_k) contient – il le point C ?
3. Déterminer, puis construire l'ensemble (Γ) des points M tels que :
$3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 8\,a^2$

EXERCICE 5 : Bac C 2000 Session normale

ABCD est un trapèze non rectangle tel que la droite (AB) est parallèle à la droite (CD).
On désigne par I, J, O les milieux respectifs de $[AB]$, $[CD]$ et $[IJ]$.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$$
2. Les médiatrices des côtés $[AD]$ et $[BC]$ se coupent en G.

Démontrer que : $GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$

3. Soit (E_2) l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$

a. Justifier que (E_2) est non vide.

b. Démontrer que : $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OM} = k$ (où k est une constante réelle).

c. En déduire que : $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{GM} = 0$

d. Déterminer et construire (E_2) .

EXERCICE 6

Soit ABC un triangle rectangle en A.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

EXERCICE 7

Dans le plan P, soit ABC un triangle rectangle en C, tel que : CA = 6 et CB = 3 ; calculer la distance AB.

1. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan P vérifiant : $MA^2 - MB^2 = 60$.

2. a. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M du plan P vérifiant : $MA^2 + 2MB^2 = 45$.

b. Quelle est la valeur minimale de la somme $MA^2 + 2MB^2$ quand le point M décrit le plan P ?

Justifier que la somme $MA^2 + 2MB^2$ est minimale si, et seulement si M est en G.

3. Déterminer l'ensemble Γ_3 des points M du plan P vérifiant : $\frac{MA}{MB} = 2$.

EXERCICE 8

ABC désigne un triangle, A' le milieu de [BC] et I le milieu de [AA'].

On pose : $f(\mathrm{M}) = \mathrm{MB}^2 + \mathrm{M}C^2 - 2\mathrm{MA}^2$ et $g(\mathrm{M}) = 2\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 + \mathrm{M}C^2$.

1. Montrer que $f(\mathrm{M}) = \mathrm{AB}^2 + AC^2 + 4\overline{\mathrm{MA}} \cdot \overline{\mathrm{AA'}}$.

2. Montrer que $g(\mathrm{M}) = g(\mathrm{I}) + 4\mathrm{MI}^2$.

3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $f(\mathrm{M}) = \mathrm{AB}^2 + AC^2$.

4. Déterminer l'ensemble des points M tels que $g(\mathrm{M}) = 2g(\mathrm{I})$.

EXERCICE 9 : Bac C 2004 Session normale

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A, B et C d'affixes respectives **– i, 8 + 5i et 8 – 5i**.

1. Placer les points A, B et C.
2. Démontrer que le triangle ABC est isocèle en B.
3. Déterminer l'affixe du barycentre G des points pondérés **(A, - 1), (B, 1) et (C,- 1).**
4. Démontrer que : **GA = GC**.
5. On considère l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :

   $\mathbf{MA^2 - MB^2 + MC^2 = -20}$.

a. Démontrer que A et C appartiennent à (Γ).

b. Démontrer que (Γ) est le cercle de centre G et de rayon GA.

c. On appelle (Γ') le symétrique de (Γ) par rapport à (AC). Construire (Γ').

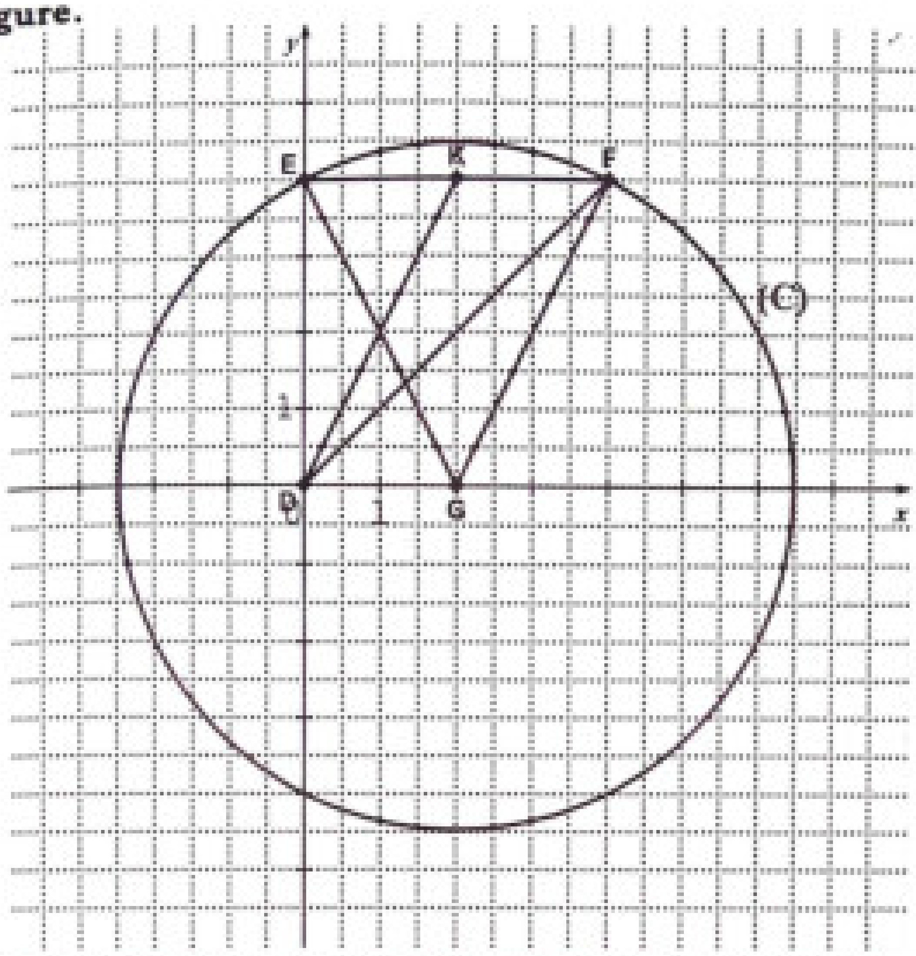
(Choisir une unité appropriée).

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1 : Bac C 2002 Session normale.

1.

a. Figure.



b. Démontrons que G est le barycentre de (D, 2), (E, - 1) et (F, 1).

On a : $\begin{cases} \overline{GD} = \frac{1}{2}\overline{FE} \Rightarrow 2\overline{GD} = \overline{FE} \Rightarrow 2\overline{GD} = \overline{FG} + \overline{GE} \\ \Rightarrow 2\overline{GD} - \overline{FG} - \overline{GE} = \vec{0} \Rightarrow 2\overline{GD} - \overline{GE} + \overline{GF} = \vec{0} \end{cases}$

Donc G est le barycentre des points pondérés (D, 2), (E, - 1) et (F, 1).

c. Démontrons que le quadrilatère GFKD est un parallélogramme.

$\overline{GD} = \frac{1}{2}\overline{FE}$ or K est milieu de [EF] $\Rightarrow \overline{FK} = \frac{1}{2}\overline{FE}$

$\Rightarrow \overline{GD} = \overline{FK}$ donc GFKD est un parallélogramme.

d. Déduisons que $GF = 2\sqrt{5}$.

Considérons le triangle GKF rectangle en K. D'après la propriété de Pythagore :

$GF^2 = GK^2 + KF^2 \Rightarrow GF^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow GF^2 = 20 \Rightarrow GF = \sqrt{20} \Rightarrow GF = 2\sqrt{5}$.

e. Démontrons que le triangle GEF est isocèle en G.

EDG est un triangle rectangle en D. Donc d'après la propriété de Pythagore,

$EG^2 = ED^2 + DG^2 \Rightarrow EG^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow EG^2 = 20 \Rightarrow EG = \sqrt{20} \Rightarrow EG = 2\sqrt{5}$.

Au total, on a : EG = GF donc le triangle GEF est isocèle en G.

2. Soit (C), l'ensemble des points M du plan tels que : $2MD^2 - ME^2 + MF^2 = 48$.

a. Vérifions que E et F sont des éléments de (C).

<u>Pour E</u>, on a: $2ED^2 - EE^2 + EF^2 = 2ED^2 + EF^2 = 2\times4^2 + 4^2 = 32 + 16 = 48$ Donc $E \in (C)$.

Pour F, on a: $2FD^2 - FE^2 + FF^2 = 2FD^2 - FE^2 = 2\times(\sqrt{32})^2 - 4^2 = 2\times 32 - 16 = 48$
Donc $F \in (C)$.
En conclusion, E et F sont des éléments de (C).
b. Déterminons l'ensemble (c).
On a : $2MD^2 - ME^2 + MF^2 = 48$ et $G = \{(D, 2), (E, -1) \text{ et } (F, 1)\}$
Donc l'ensemble (C) des points M est le cercle de centre G passant par les points E et F (ou bien (C) est le cercle de centre G et de rayon GE).
c. Construisons l'ensemble (C). (Voir figure ci-dessus).

EXERCICE 2 : Bac E 1995 Session de remplacement

1. a. Ecrivons $\overrightarrow{G_1G_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

On a $G_1 = \text{bar}$

A	B	C
3	2	-1

$\Rightarrow \overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \quad (1)$

$G_2 = \text{bar}$

A	B	C
2	1	1

$\Rightarrow \overrightarrow{AG_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \quad (2)$

Les relations (1) et (2) donnent :

$$\overrightarrow{AG_1} - \overrightarrow{AG_2} = \left(\frac{2}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) - \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{AG_1} - \overrightarrow{G_2A} = \frac{2}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{G_2G_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{4}\overrightarrow{AC}.$$

$$-\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{4}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{G_1G_2} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.}$$

b. Les points A, B et C sont non alignés, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires. Par conséquent, $-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc $\overrightarrow{G_1G_2} \neq \vec{0}$ d'où $G_1 \neq G_2$

2. a.

$$\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 3\left(\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1A}\right) + 2\left(\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1B}\right) - \left(\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1C}\right)$$

$$\overrightarrow{MM_1} = 4\overrightarrow{MG_1} + 3\overrightarrow{G_1A} + 2\overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1C} \quad or \quad 3\overrightarrow{G_1A} + 2\overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$$

D'où $\overrightarrow{MM_1} = 4\overrightarrow{MG_1} \Rightarrow \overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1M_1} = 4\overrightarrow{MG_1} \Rightarrow \overrightarrow{G_1M_1} = 3\overrightarrow{MG_1} \Leftrightarrow$
$\overrightarrow{G_1M_1} = -3\overrightarrow{G_1M}$
Donc M_1 est l'image de M par l'homothétie de centre G_1 et de rapport -3.
Lorsque M décrit une droite (D), son image M_1 décrit la droite (Δ) image de (D) par cette homothétie.
b. On a : $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{MM_2} = 2\left(\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2A}\right) + \left(\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2B}\right) + \left(\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2C}\right) = 4\overrightarrow{MG_2} + 2\overrightarrow{G_2A} + \overrightarrow{G_2B} + \overrightarrow{G_2C}$$

$\boxed{\overrightarrow{MM_2} = 4\overrightarrow{MG_2}}$ *car* $2\overrightarrow{G_2A} + \overrightarrow{G_2B} + \overrightarrow{G_2C} = \vec{0}$ *or* $\overrightarrow{MM_1} = 4\overrightarrow{MG_2}$ *d'où*

$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MM_2} = -4\overrightarrow{MG_1} + 4\overrightarrow{MG_2} = 4\overrightarrow{G_1M} + 4\overrightarrow{MG_2}$

$\boxed{\overrightarrow{M_1M_2} = 4\overrightarrow{G_1G_2}}$ *donc* $\overrightarrow{M_1M_2}$ ne depend pas de M.

Par conséquent, $\overrightarrow{M_1M_2}$ est constant et est égale à $4\overrightarrow{G_1G_2}$

3. Ensemble (S).

$\overrightarrow{MM_1}.\overrightarrow{MM_2} = 0 \Leftrightarrow \left(+4\overrightarrow{MG_1}\right)\left(4\overrightarrow{MG_2}\right) = 0 \Leftrightarrow 16\ \overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0$

soit I milieu du segment $[G_1G_2] \Leftrightarrow \overrightarrow{IG_1} = -\overrightarrow{IG_2}$.

d'où $\overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG_1}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG_2}\right) = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG_1}\right).\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IG_1}\right) = 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IG_1}^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MI}^2 = \overrightarrow{IG_1}^2 \Rightarrow MI^2 = IG_1^{\ 2} \Rightarrow MI = IG_1$$

Conclusion: l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MM_1}.\overrightarrow{MM_2} = 0$ est la sphère de centre I et de rayon IG_1.

EXERCICE 3 : Bac C 1996 Session de remplacement

1. Déterminons puis construisons I

I=bar

A	B	C
1	2	-2

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AI} = 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\right) = 2\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB}$

Construction (voir figure)

2. Calcul de IA^2; IB^2 et IC^2 en fonction de a.

- Pour IA^2.

on a: $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{BC}$ *donc* $\left(\overrightarrow{IA}\right)^2 = \left(2\overrightarrow{CB}\right)^2 \Rightarrow IA^2 = 4BC^2$ *donc* $\boxed{IA^2 = 4a^2}$

- Pour IB^2.

$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{IB} = -2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

$\left(\overrightarrow{IB}\right)^2 = \left(2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right)^2 = 4BC^2 - 4\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} + BA^2$

$IB^2 = 4BC^2 - 4BC.BA.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) + BA^2 = 4a^2 - 4a \times a \times \cos\frac{\pi}{3} + a^2 = 5a^2 - 4a^2 \times \frac{1}{2}$

$\boxed{IB^2 = 3a^2}$

Calculons IC^2

$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} \Rightarrow -\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$

$\left(\overrightarrow{IC}\right)^2 = \left(-2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)^2 = 4CB^2 + 4\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} + CA^2$

$IC^2 = 4CB^2 + 4CB.CA.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right) + CA^2 = 4a^2 + 4a \times a \times \cos\frac{\pi}{3} + a^2 = 5a^2 + 4a^2 \times \frac{1}{2}$

$\boxed{IC^2 = 7a^2}$

3. a.

Déterminons l'ensemble (Ω_k).

$MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = ka^2$

on a: $1+2-2 \neq 0$ d'où on a:

$MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 = MI^2 + IA^2 + 2IB^2 - 2IC^2$

D'après la formule de Leibniz.

D'où $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = ka^2 \Leftrightarrow MI^2 + IA^2 + 2IB^2 - 2IC^2 = ka^2$

$\Leftrightarrow MI^2 = ka^2 - IA^2 - 2IB^2 + 2IC^2$

$MI^2 = ka^2 - 4a^2 - 2\times 3a^2 + 2\times 7a^2 = ka^2 + 4a^2$

$MI^2 = (k+4)a^2$

1er cas: si $k+4<0$ ou $k<-4$ alors l'ensemble (Ω_k) est vide

2e cas: si $k+4=0$ ou $k=-4$ alors l'ensemble (Ω_k) est le singleton $\{I\}$.

3e cas: si $k+4>0$ ou $k>-4$ alors l'ensemble (Ω_k) est le cercle de centre I et de rayon $a\sqrt{k+4}$.

b. Déterminons la valeur de k.

$B \in (\Omega_k) \Leftrightarrow BA^2 + 2BB^2 - 2BC^2 = ka^2 \Leftrightarrow BI^2 = (k+4)a^2 \Leftrightarrow 3a^2 = (k+4)a^2$

$\Leftrightarrow k+4 = 3$ Donc pour $k=-1$, B appartient au cercle (Ω_k)

4.a. Déterminons l'ensemble (Ω_{-1})

$MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = -a^2 \Leftrightarrow MI^2 = (-1+4)a^2 \Leftrightarrow MI^2 = 3a^2 \Leftrightarrow MI^2 = IB^2$

$\Leftrightarrow \boxed{MI = IB}$

donc l'ensemble (Ω_{-1}) est le cercle de centre I et de rayon IB.

(Ω_{-1}) est donc le cercle passant par B et tangent à la droite (AB).

b. Démontrons que (Ω_{-1}) est tangent à (AC) en D.

- Montrons que les points C, A et D sont alignés.

• Déterminons une mesure de l'angle $\widehat{CAD}$

• $mes\,\widehat{CAD} = mes\,\widehat{CAB} + mes\,\widehat{BAI} + mes\,\widehat{IAD}$

Or $mes\widehat{BAI} = mes\widehat{CBA} = \frac{\pi}{3}$ car angles alternes internes formés de deux droites parallèles (AI), (CB) et une sécante (AB).

et $mes\,\widehat{IAD} = mes\,\widehat{BAI} = \frac{\pi}{3}$ car angles symétriques par rapport à (AI)

Donc $mes\widehat{CAD} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$.

Les points A, D et C sont donc alignés.

Par conséquent, le point D appartient à la droite (AC).

c. Montrons que (Ω_{-1}) est tangent à (AC) en D.

Soit D le symétrique de B par rapport à (AI).

• $D \in (\Omega_{-1})$ car ID=IB.

• $\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AD} = \left(-\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AD} + AD^2 = -AI.AD.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AD}}\right) + AD^2$

$$= -2a \times a.\cos\frac{\pi}{3} + a^2 \quad \text{car} \quad AD = AB$$

$$= -2a^2 \times \frac{1}{2} + a^2$$

$\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AD} = 0$ donc $(ID) \perp (AD)$.

Par conséquent, la droite (AC) est tangente au cercle (Ω_{-1}) en D.

d. Nature du triangle IBD

B et D sont symétriques par rapport à la droite (AI).

IB = ID donc le triangle IBD est isocèle en I.

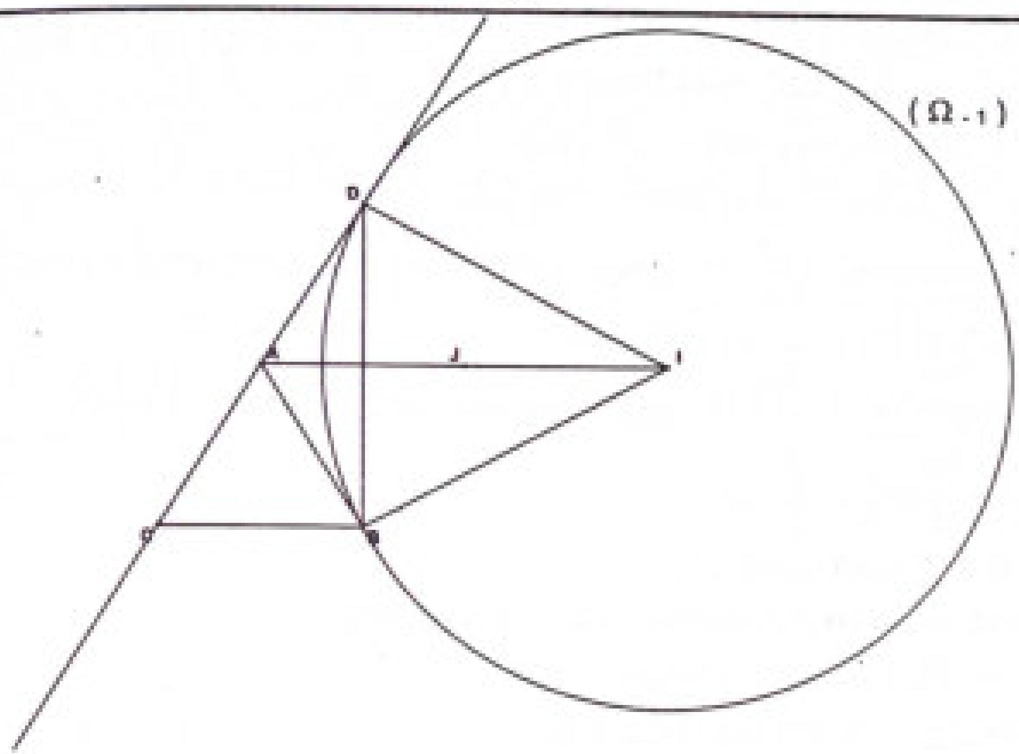
Les angles $\widehat{ABD}$ *et* $\widehat{AID}$ sont associés donc $mes\widehat{ABD} = 2mes\,\widehat{AID}$.

Les angles $\widehat{ABD}$ *et* $\widehat{BAI}$ sont complémentaires donc $mes\,\widehat{ABD} = \frac{\pi}{6}$

Par conséquent, $mes\widehat{IBD} = mes\widehat{IBA} - mes\,\widehat{ABD} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \Rightarrow mes\widehat{IBD} = \frac{\pi}{3}$

Au total, $mes\widehat{IBD} = \frac{\pi}{3}$.

En conclusion, le triangle BID est un triangle équilatéral.



EXERCICE 4 : Bac C 1998 Session de remplacement

1\. a. On a : G barycentre de (A, 1) ; (B,- 1) ; (C,1) ⇔ $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

D'où $\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ (en utilisant l'égalité de Chasles)

G est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Construction de G : (voir figure)

b. Pour tout point M du plan,

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}&=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{MC}\\&=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\\&=2\overrightarrow{CI}\end{aligned}$$ (I étant le milieu du segment $[AB]$).

Pour tout point M du plan.

$$\begin{aligned}M\in(C)&\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|2\overrightarrow{CI}\right\|\\&\Leftrightarrow MG=2CI\end{aligned}$$

(C) est le cercle de centre G et rayon $2CI$

Construction de (C), voir figure.

2\. a.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HA}\right)-\left(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA}\right)\end{aligned}$$

d'où : $\frac{3}{2}\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{0}$

Donc $3\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}-2\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{0}$

On a : $3+1-2=2\neq 0$, donc H est le barycentre des points pondérés (A,3); (B,1) et (C,-2)

Autre méthode : on peut justifier que les points pondérés (A, 3) ; (B,1) et (C,-2) admettent un barycentre K et que $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ et conclure.

b. $C\in E_k \Leftrightarrow 3CA^2+CB^2=ka^2$.

ABC étant un triangle rectangle en A,

$$CB^2=AB^2+AC^2=4a^2+a^2=5a^2.$$

$$C\in E_k \Leftrightarrow 3a^2+5a^2=ka^2$$

$$\Leftrightarrow 8a^2=ka^2 \qquad \Leftrightarrow k=8$$

Pour $k=8, C\in E_k$

c. Déterminons l'ensemble (Γ) : $3MA^2+MB^2-2MC^2=8a^2$

On a : $3MA^2+MB^2-2MC^2=8a^2$

En introduisant H dans la relation ci-dessus, on obtient : $3HA^2+HB^2-2HC^2+2MH^2=8a^2$

Calculons HA^2 ; HB^2 et HC^2

On a : $HA^2=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{4}AB^2+AC^2-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$HA^2=\frac{1}{4}AB^2+AC^2$ car $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ avec $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

$HA^2=\frac{1}{4}(4a^2)+a^2$ donc $HA^2=2a^2$

On a : $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}$ équivaut à $\overrightarrow{BH}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$; d'où $\overrightarrow{BH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

On a : $BH^2=\frac{1}{4}AB^2+AC^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ On a : $BH^2=\frac{1}{4}AB^2+AC^2$ car $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$BH^2=\frac{1}{4}(4a^2)+a^2+0$ $\qquad BH^2=2a^2$

$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$CH^2=(-2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})^2=\frac{1}{4}AB^2+4AC^2-2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$CH^2=\frac{1}{4}(4a^2)+4a^2-0=5a^2$ $\qquad$ Donc $CH^2=5a^2$

On sait que : $3HA^2+HB^2-2HC^2+2MH^2=8a^2$

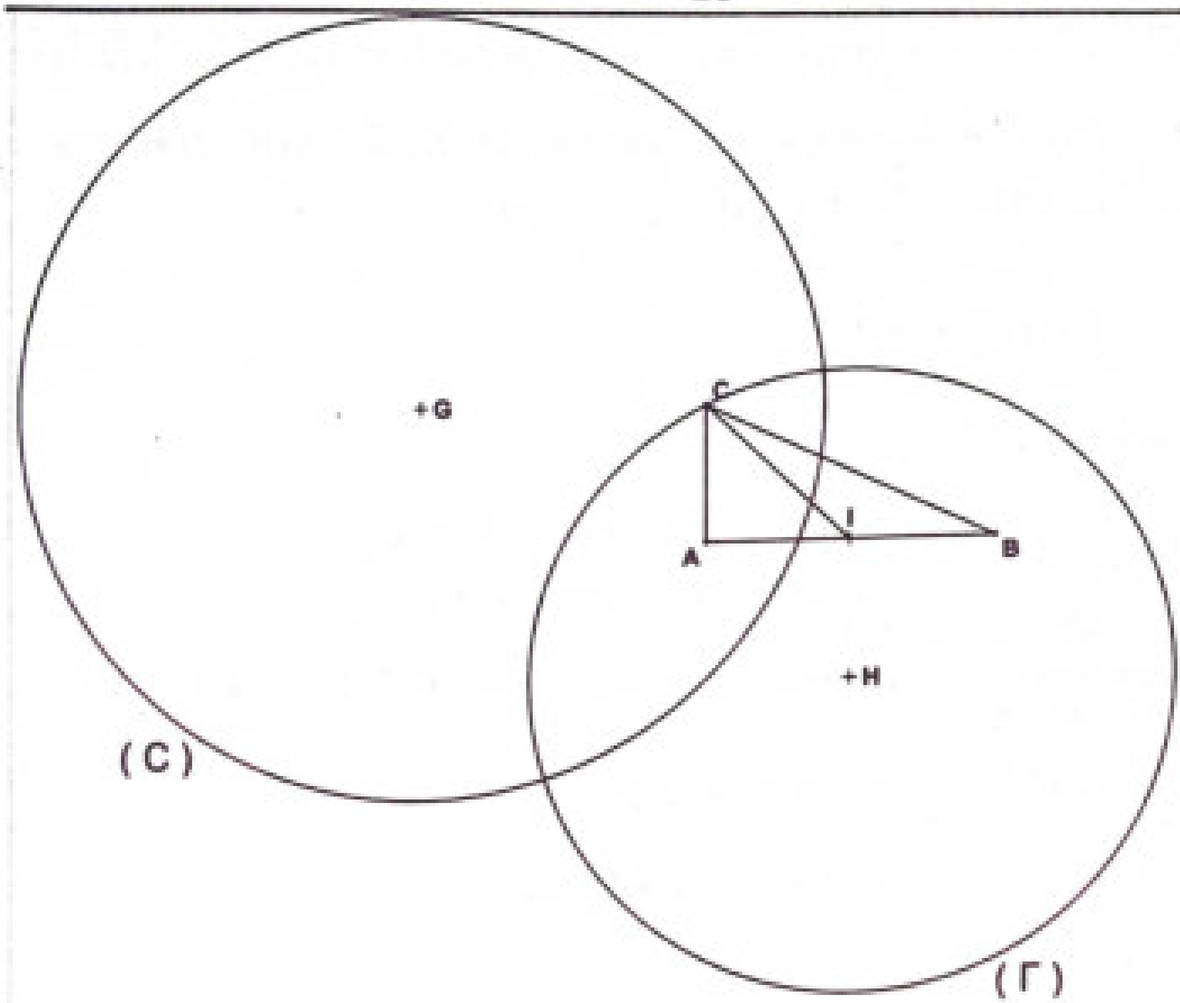
Ce qui donne $3(2a^2)+2a^2-2(5a^2)+2MH^2=8a^2$

$6a^2+2a^2-10a^2+2MH^2=8a^2$

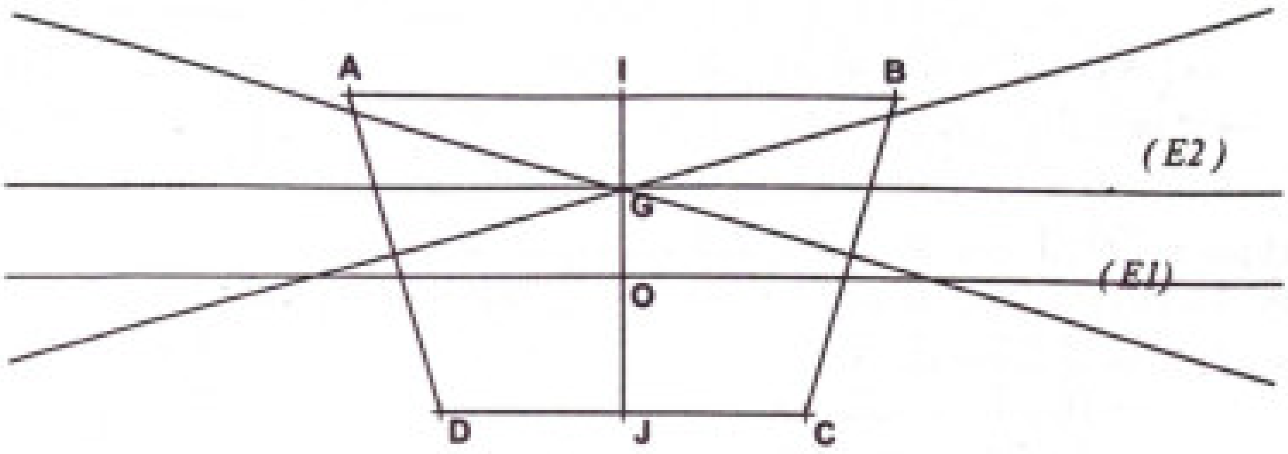
$MH^2=5a^2$ Or $CH^2=5a^2$; d'où $MH^2=CH^2$ Donc $MH=CH$

Puisque $C\in(\Gamma)$, alors (Γ) est le cercle de centre H et de rayon HC.

Construction de (Γ); voir figure.


+G
C
I
A
B
+H
(C)
(Γ)

EXERCICE 5 : Bac C 2000 Session normale
FIGURE



1. $M \in (E_1) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|$

$$\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MI}\| = \|2\overrightarrow{MJ}\|$$

$$\Leftrightarrow MI = MJ$$

(E_1) est la médiatrice du segment [IJ].

2. G appartient à la médiatrice de [AD], donc GA = GD.
G appartient à la médiatrice de [BC], donc GB = GC.
Alors $GA^2+GB^2=GD^2+GC^2$.

3. a. $M \in (E_2)$ car $GA^2+GB^2=GD^2+GC^2$ donc (E_2) est non vide.

b. $M \in (E_2) \Leftrightarrow MA^2+MB^2=MC^2+MD^2$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2=(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC})^2+(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JD})^2$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2+IA^2+IB^2=2MJ^2+JC^2+JD^2$$

$$\Leftrightarrow 2(MI^2-MJ^2)=\frac{DC^2}{2}-\frac{AB^2}{2}.$$

$$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ})(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MJ})=\frac{1}{2}(DC^2-AB^2)$$

$$\Leftrightarrow \left(\overline{MI}+\overline{MJ}\right)\overline{JI}=\frac{1}{4}\left(DC^2-AB^2\right)$$

$$.\Leftrightarrow \left(\overline{MO}+\overline{OI}+\overline{MO}+\overline{OJ}\right)\overline{JI}=\frac{1}{4}\left(DC^2-AB^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}\right).\overrightarrow{JI} = \frac{1}{4}(DC^2-AB^2)$$

$$\Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{JI} = \frac{1}{4}(DC^2-AB^2)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{8}(DC^2-AB^2)$$

Par conséquent, $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{IJ}$, précisement $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OM}$ est une constante réelle.

c. Comme $G \in (E_2)$ on peut aussi écrire $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OG} = \frac{1}{8}(DC^2-AB^2)$

alors $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OG} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG}) = 0$

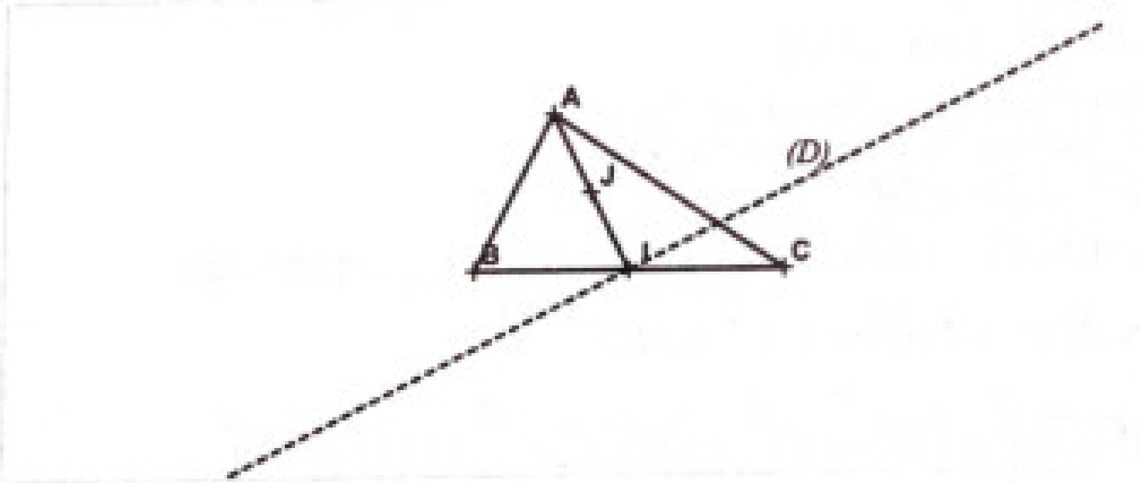
$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{GM} = 0$

d.On a : $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{GM} = 0$;

La droite (GM) est donc perpendiculaire à la droite (IJ) .

Par conséquent, (E_2) est la perpendiculaire à la droite (IJ) passant par le point G

EXERCICE 6



Soit I le milieu de [BC], on a $IA^2 = IB^2 = IC^2$ et donc $IB^2 + IC^2 = 2IA^2$.

I appartient à l'ensemble demandé.

On a donc $MB^2 + MC^2 = 2IM^2 + \frac{1}{2}BC^2$ et donc $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ si et seulement

si $2MA^2 = 2IM^2 + \frac{1}{2}BC^2$, c'est-à-dire (1) $MA^2 - IM^2 = \frac{1}{4}BC^2$.

Si J est le milieu de [AI], on a $MA^2 - MI^2 = 2\overline{JM}\cdot\overline{AI}$

(1) se lit donc $\overline{JM}\cdot\overline{AI} = \frac{1}{8}BC^2$

L'ensemble demandé est donc une droite orthogonale à (AI).

En conclusion : Les points M vérifiant $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ sont ceux de la droite (D) passant par I et orthogonale à (AI).

EXERCICE 7

ABC est un triangle rectangle en C. D'après la propriété de Pythagore.

On a : $AB^2 = CA^2 + CB^2$ donc : $AB^2 = 45$ d'où : $AB = 3\sqrt{5}$.

1. Rappelons que : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$ où I est le milieu de [AB].

$MA^2 - MB^2 = 2\overline{IH} \times \overline{AB}$ où H est le projeté orthogonal de M sur (AB).

Choisissons pour sens positif sur la droite (AB) celui du vecteur unitaire $\vec{u}$

avec $\vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\overrightarrow{AB}$. On a alors : $\overrightarrow{AB} = (3\sqrt{5})\vec{u}$ *donc* $\overline{AB} = 3\sqrt{5}$.

La condition : $MA^2 - MB^2 = 60$ équivaut alors à : $2\overline{IH} \times 3\sqrt{5} = 60$

c'est-à-dire : $\overline{IH} = 2\sqrt{5}$.

L'ensemble Γ_1 est donc la droite perpendiculaire à (AB) en H où

H est le point de (AB) tel que : $\overline{IH} = 2\sqrt{5}$.

Remarque : On a donc $\overrightarrow{IH} = (2\sqrt{5})\vec{u}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{IH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

2. a. Considérons le barycentre G de {(A, 1), (B, 2)}.

Calculons:

$MA^2 + 2MB^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$

$MA^2 + 2MB^2 = (MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2) + 2(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + GB^2)$ (I)

$MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB}) + (GA^2 + 2GB^2)$

D'une part : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ d'autre part : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ d'où : $AG^2 = \frac{4}{9}AB^2$

$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}BA^2$ d'où : $BG^2 = \frac{1}{9}BA^2$

On a donc : $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + \frac{6}{9}AB^2$.

Puisque $AB^2 = 45$ alors $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + 30$

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow 3MG^2 + 30 = 45$ *C'est à dire* : $MG = \sqrt{5}$.

L'ensemble Γ_2 est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{5}$.

b. Pour tout point M du plan P, on a $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + 30$

donc : $MA^2 + 2MB^2 \geq 30$

La somme $MA^2 + 2MB^2$ est minimale si, et seulement si : $3MG^2 = 0$, c'est-à-dire si M est en G. Cette valeur minimale est alors : $GA^2 + 2GB^2 = 30$.

3. Remarquons que, si un point M du plan P vérifie : $\frac{MA}{MB} = 2$, alors M est nécessairement distinct de A et B.

On a donc : $M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2$ c'est-à-dire :

$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}^2 - 4\overrightarrow{MB}^2) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) = 0$.

D'une part, on a $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$ où G est le barycentre de {(A,1),(B,2)} et $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MK}$ où K est le barycentre de {(A, 1), (B, -2)}.

Il en résulte : $M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}.(-1)\overrightarrow{MK} = 0$; on a $-3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MK} = 0$.

L'ensemble Γ_3 est donc le cercle de diamètre [GK].

EXERCICE 8

1. On introduit le point A dans l'expression de $f(M)$:

$$f(M)=\left(\overline{MA}+\overline{AB}\right)^2+\left(\overline{MA}+\overline{AC}\right)^2-2MA^2=AB^2+AC^2+2\overline{MA}\cdot\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right).$$

Or, comme A' est le milieu de [BC], on a : $\overline{AB}+\overline{AC}=2\overline{AA'}$,

soit : $f(M)=AB^2+AC^2+4\overline{MA}\cdot\overline{AA'}$

2. A' est barycentre de {(B, 1), (C, 1)}

I est barycentre de {(A',1), (A, 1)} donc de {(A', 2), (A, 2)}

Alors, par le théorème des barycentres partiels, I est barycentre de {(A,2), (B,1), (C,1)}.

On introduit le point I dans l'expression de $g(M)$:

$$g(M)=2(\overline{MI}+\overline{IA})^2+(\overline{MI}+\overline{IB})^2+(\overline{MI}+\overline{IC})^2$$

$$g(M)=4MI^2+g(I)+2\overline{MI}.(2\overline{IA}+\overline{IB}+\overline{IC})$$

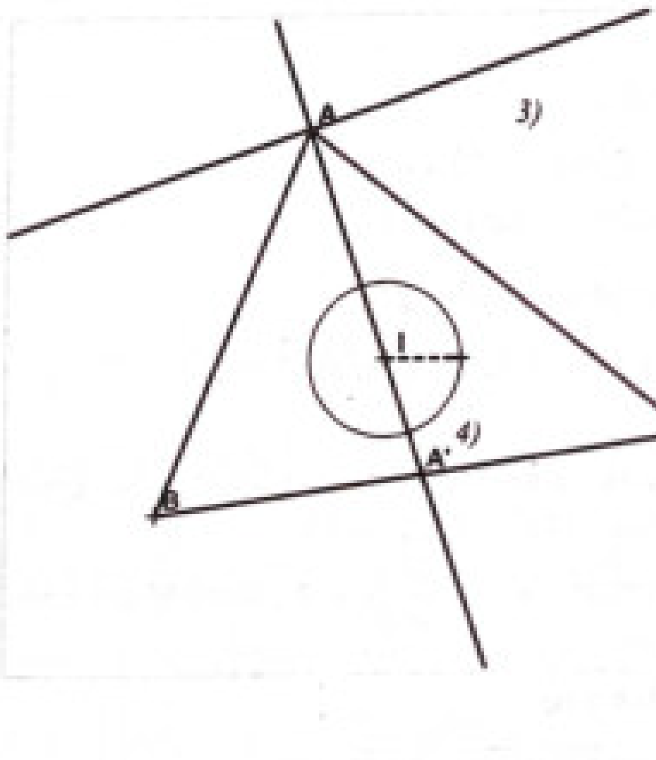
Or, I est barycentre de {(A, 2), (B, 1), (C, 1)}, donc $2\overline{IA}+\overline{IB}+\overline{IC}=\vec{0}$ et on a le résultat

$g(M)=4MI^2+g(I)$ avec $g(I)=2IA^2+IB^2+IC^2$

3. L'ensemble des points M est celui des points M vérifiant $\overline{MA}\cdot\overline{AA'}=\vec{0}$ soit la droite perpendiculaire à (AA') et passant par A.

4. L'ensemble des points M est celui des points M vérifiant $MI^2=\dfrac{g(I)}{4}$ soit un cercle passant par I et de rayon $\dfrac{1}{2}\sqrt{g(I)}$.

Figure



EXERCICE 9 : Bac C 2004 Session normale

1. Voir Figure.

2. Démontrons que le triangle ABC est isocèle en B.

Calculons AB, AC et BC

$$AB=|z_{AB}|=|z_B-z_A|=|8+5i+i|=|8+6i|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$$

$$AC=|z_{AC}|=|z_C-z_A|=|8-5i+i|=|8-4i|=\sqrt{8^2+(-4)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

$$BC=|z_{BC}|=|z_C-z_B|=|8-5i-8-5i|=|-10i|=\sqrt{(-10)^2}=\sqrt{100}=10$$

On remarque que : **AB = BC** donc le triangle ABC est isocèle en B.

3. Déterminons l'affixe du barycentre G des points pondérés (A, -1), (B,1) et (C,-1).

G est barycentre des points pondérés (A, - 1), (B, 1) et (C,- 1)

Donc on a : $\overline{AG}=-\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{BA}+\overline{AC}=\overline{BC} \Rightarrow \overline{AG}=\overline{BC}$

$$\overline{AG}=\overline{BC}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_G-x_A\\y_G-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_G-x_A=x_C-x_B\Rightarrow x_G=x_C-x_B+x_A\\y_G-y_A=y_C-y_B\Rightarrow y_G=y_C-y_B+y_A\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_G=8-8+0=0\\y_G=-5-5-1=-11\end{cases}\Rightarrow G(-11i)$$

4. Démontrons que : GA = GC.

$\overline{AG}=\overline{BC}\Rightarrow AG^2=BC^2 \Rightarrow AG=BC \Rightarrow AG=GA=10$

$\overline{AG}=\overline{BC}\Rightarrow\overline{AC}+\overline{CG}=\overline{BC} \Rightarrow\overline{CG}=\overline{BC}-\overline{AC}=\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{BA} \Leftrightarrow\overline{GC}=\overline{AB}$

$\overline{GC}=\overline{AB}\Rightarrow GC^2=AB^2 \Rightarrow GC=AB \Rightarrow CG=10$

En conclusion, **GA = GC = 10**

5. Soit l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $MA^2-MB^2+MC^2=-20$.

a. Démontrons que A et C appartiennent à (Γ).

<u>Pour A</u>, on a : $AA^2-AB^2+AC^2=-AB^2+AC^2=-10^2+(4\sqrt{5})^2$

$\Rightarrow AA^2-AB^2+AC^2=-100+80=-20$ Donc $A\in(\Gamma)$.

<u>Pour C</u>, on a : $CA^2-CB^2+CC^2=CA^2-CB^2=(4\sqrt{5})^2-10^2$

$\Rightarrow CA^2-CB^2+CC^2=80-100=-20$ Donc $C\in(\Gamma)$.

En conclusion, **A et C appartiennent à (Γ).**

b. Démontrons que (Γ) est le cercle de centre G et de rayon GA.

On a : $MA^2-MB^2+MC^2=-20$.

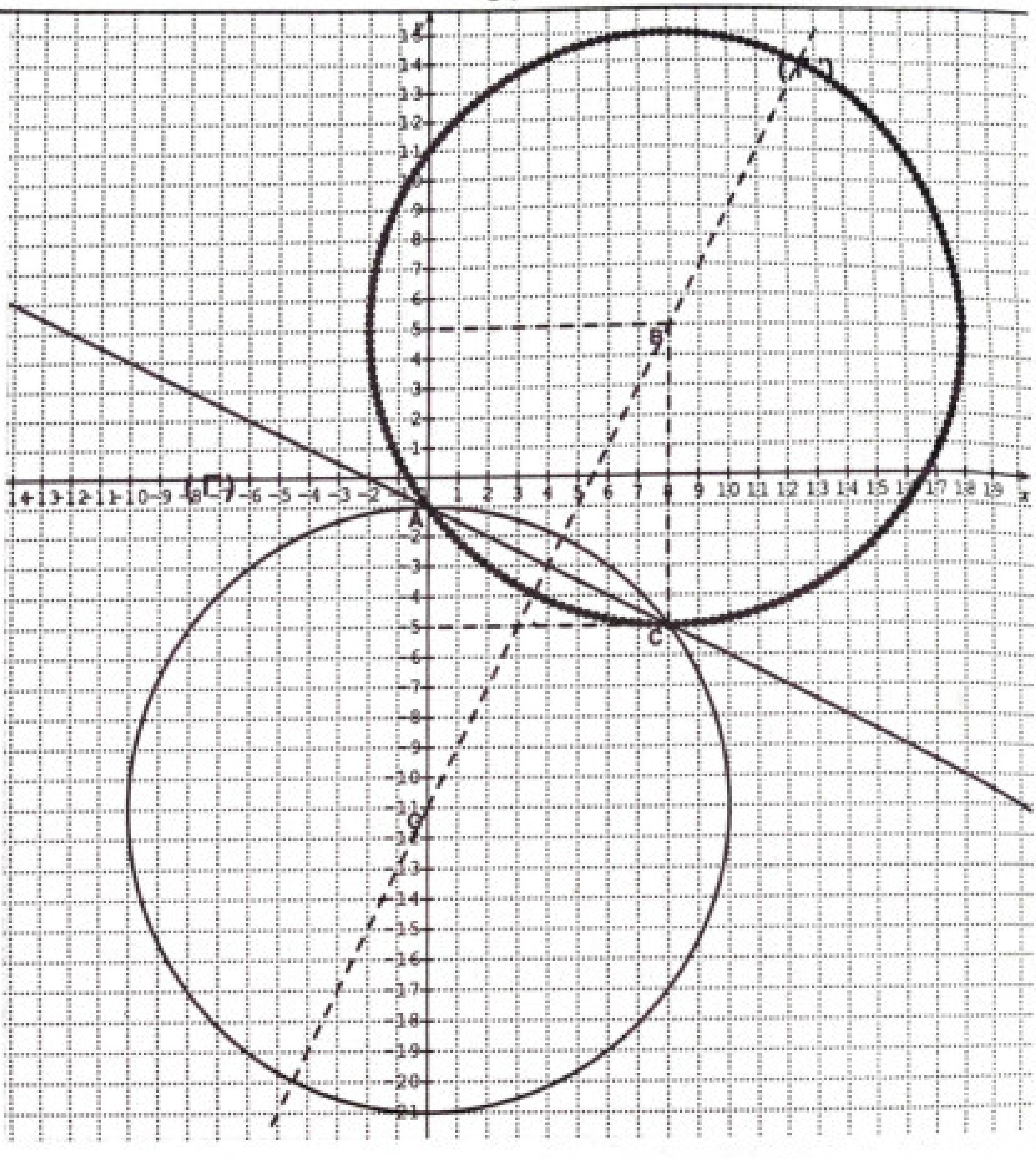
Or G est barycentre des points pondérés (A, - 1), (B, 1) et (C,- 1) ; ce qui équivaut à dire que G est aussi barycentre des points pondérés (A, 1), (B, -1) et (C, 1).

Donc l'ensemble des points M est le cercle de centre G passant par A et C.

D'où (Γ) **est le cercle de centre G et de rayon GA.**

Construction du symétrique (Γ') de (Γ) par rapport à (AC)

(Voir figure ci-dessus).



A
B
C
Ω
(Γ)
(Γ')
x

CHAPITRE III : NOMBRES COMPLEXES
NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE

FICHE DE COURS

Forme algébrique

Tout nombre complexe a pour forme algébrique $Z = a + ib$ où $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$
a est la partie **réelle** de Z, notée $a = R_e(Z)$
b est la partie **imaginaire** de Z, notée $b = Im(Z)$
On a : $i^2 = -1$.
Le **module** de Z est : $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriété : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall z' \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

$|Z| = |-Z| = |\overline{Z}| = |-\overline{Z}|$; $\forall Z \neq 0$, $\left|\frac{Z'}{Z}\right| = \frac{|Z'|}{|Z|}$ *et* $\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$;

$|z^n| = |z|^n$;

$|Z \times Z'| = |Z| \times |Z'|$ Mais $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Forme trigonométrique

Tout nombre complexe a pour forme trigonométrique :

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |Z|$ et $\cos\theta = \frac{Re(Z)}{|Z|}$; $\sin\theta = \frac{Im(Z)}{|Z|}$

Propriété

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall z' \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$
$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\arg(z^n) = n.\arg(z) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Forme exponentielle

Tout nombre complexe a pour forme exponentielle : $Z = re^{i\theta}$ avec $r = |Z|$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On a : $e^{i\theta} = \cos\theta + i.\sin\theta$

Propriété

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall \theta' \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$

Représentation géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
L'axe (OI) est appelé **l'axe des réels**, et l'axe (OJ) est celui des **imaginaires purs**.
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$;
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_D - z_C$
$AB = |z_B - z_A|$

Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Racine n- ième d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$).
On appelle **racine n-ième** de Z, tout nombre complexe z tel que : $z^n = Z$.
Z admet n racines n-ième de la forme : $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$ avec $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; ... ; n-1\}$

Equation du second degré ($az^2 + bz + c = 0$, avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$)

- On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$,
- Puis on détermine les racines carrées de Δ,
- Et enfin, on calcule les solutions de l'équation.

Configuration du plan et nombres complexes

Angles orientés de vecteurs. $\forall k \in \mathbb{Z}$, on a :
$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}}) = \arg.(Z_B) + 2k\pi$;
$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}}) = \arg.\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) + 2k\pi$

Configurations géométriques

Configurations	Caractérisations complexes
Triangle ABC isocèle en A	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\theta}$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{-i\theta}$
Triangle ABC équilatéral	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = i$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = -i$
Triangle ABC rectangle en A	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = bi$ $(b \in \mathbb{R}^*)$
(AB) $\perp$ (CD)	$\frac{Z_D - Z_C}{Z_A - Z_B} = bi$ $(b \in \mathbb{R}^*)$
Points A, B, C alignés	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = b$ $(b \in \mathbb{R}^*)$
Points A, B, C, D cocycliques	$\frac{Z_C - Z_B}{Z_C - Z_A} : \frac{Z_D - Z_B}{Z_D - ZA} = b$ $(b \in \mathbb{R}^*)$

EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1 : Bac E 1995 Session de remplacement

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit a un nombre complexe non nul et A le point d'affixe a.

On considère l'application f du plan dans lui- même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = a^3 z + a - 1$

1. Déterminer l'ensemble E_1 des nombres complexes a pour lesquels f est une translation. Caractériser f pour chacune des valeurs trouvées.
2. Déterminer l'ensemble E_2 des nombres complexes a pour lesquels f est une homothétie.

Représenter graphiquement l'ensemble des points A dont l'affixe a appartient à E_2.

3. Caractériser f pour $a = 1 + i$.
4. a. Soit M_0 le point d'affixe 1 et M'_0 son image par f. On considère l'ensemble (Γ) des points A d'affixe a telle que M'_0 appartient à l'axe $(O, \vec{u})$.

Démontrer que (Γ) est la réunion d'une droite et d'une hyperbole.

b. Sur une figure distincte de celle de la deuxième question, représenter graphiquement (Γ).

EXERCICE 2 : Bac C 1996 Session de remplacement

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On prend 2 centimètre comme unité graphique.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + (-1 + 2i)z^2 - (1 + 2i)z - 3 + 4i = 0$

1. a. Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure unique, que l'on calculera.
   b. Résoudre l'équation (E).
2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $i, -1-2i$ et $2-i$.

a. Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Démontrer que le triangle ABC est isocèle en B.

b. Calculer les réels b et c pour que le point O soit le barycentre des points (A, 1), (B, b) et (C, c).

EXERCICE 3

On considère le plan complexe P muni du repère orthonormé (O, I, J).

1. Soit le polynôme P tel que $\forall z \in \mathbb{Z}$, $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

a. Comparer $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$

b. Montrer que 1 + i est un zéro de P(z).

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

2. On donne les points $A(z_1)$; $B(z_2)$ et $C(z_3)$ tels que z_1 , z_2 et z_3 sont les solutions de P (z) = 0.

z_1 a pour partie imaginaire positive et z_2 est le conjugué de z_1 .

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer R (B) ; puis l'affixe de R (C).

b. Démontrer que les points O, B, A, et C appartiennent à un même cercle dont on précisera le rayon.

3. Soit l'application f du plan P privé du point C qui à tout point M d'affixe $z \neq 2$ associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{z-(1+i)}{z-2}$

a. Déterminer f (A) ; f (B).

b. Déterminer l'affixe de E tel que f (E) = C

c. Démontrer que (AB) est perpendiculaire à (BE)

d. En déduire l'ensemble décrit par le point M' si M appartient à la médiatrice de [AC]

EXERCICE 4

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes et P le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

1. Vérifier que $(1-i)^2 = -2i$ et $(1+i)^2 = 2i$

2. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^4 - 14iz^2 + 32 = 0$

a. Montrer que si le complexe α est solution de (E), alors – α est aussi une solution de (E).

b. Vérifier que pour tout nombre complexe z : $z^4 - 14iz^2 + 32 = (z^2+2i)(z^2-16i)$

3. En utilisant les questions précédentes, résolver dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

EXERCICE 5

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (Unité graphique : 4 cm)

On note A le point d'affixe $z_A = -1+i$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}-\{z_A\}$ par : $f(z) = \frac{2z-i}{z+1-i}$

1. On pose z = x + iy où x et y sont des réels.

a. Déterminer $R_e(f(z))$ et $I_m(f(z))$ en fonction de x et de y.

b. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z telle que f(z) soit réel.

c. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixe z telle que f(z) soit imaginaire pur.

2. Soit B le point d'affixe $z_B = \frac{1}{2}i$ et C le point d'affixe $z_C = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$

a. Vérifier que B appartient à (E) et à (F) et que C appartient à (F).
Placer B et C sur la figure.

b. Ecrire $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ sous forme trigonométrique.

c. Déduire en la nature du triangle ABC.

EXERCICE 6

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
unité graphique : 2 cm.
On note f l'application du plan P, privé du point O, dans P qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

On a donc aussi $z' = \frac{z}{|z|^2}$ où $|z|$ désigne le module de z.

1. Montrer que O, M et M' sont alignés.
2. Déterminer l'ensemble Γ des points invariants par f.
Vérifier que l'ensemble Γ contient les points A et B d'affixes respectives -1 et i.
3. Soit (C) le cercle de diamètre [AB], E le milieu de [AB] et E' = f(E).
Déterminer une équation de (C).
Montrer que E' appartient à (C).

EXERCICE 7

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$;
unité graphique : 4 cm.
On considère le point A d'affixe $z_A = 2 + i$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$
1. Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.
2. a. Déterminer les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O,\vec{u})$.
   b. On désigne par B et C les points d'affixes respectives $z_B = 1$ et $z_C = 3$.
Déterminer l'affixe z_D du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ)
3. Soit M le point d'affixe $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$.

a. Calculer le nombre complexe $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.

b. Interpréter géométriquement un argument du nombre $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.

En déduire que le point M appartient au cercle (Γ)
4. On note (Γ') le cercle de diamètre [AB].
La droite (BM) recoupe le cercle (Γ') en un point N.
a. Montrer que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.
b. Déterminer l'affixe du point N.

EXERCICE 8 : Bac E 1996 Session normale

On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, z^3 + (1-6i)z^2 - (17+8i)z - 33 + 30i = 0$
1. a. Vérifier que -3 est solution de (E).
b. Résoudre l'équation (E).
Les solutions seront notées z_0, z_1 et z_2, où $z_0 = -3$ et z_2 a sa partie réelle positive.
2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (Unité : 1 cm).

On considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0 et z_1

a. Placer les points M_0, M_1 et M_2 dans le repère $\left(O, \overline{u}, \overline{v}\right)$

b. Démontrer que le triangle $M_0M_1M_2$ est rectangle isocèle.

3. On désigne par G le barycentre des points pondérés (M_0 – 1) ; (M_1 ,1) et (M_2, 1).

a. Construire géométriquement le point G. Justifier la construction.
(On ne demande pas de calculer les coordonnées de G)

b. Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que :

$-MM_0^2 + MM_1^2 + MM_2^2 = -GM_2^2$ *(On pourra vérifier que M_2 est un point de (C))*

EXERCICE 9 : Bac E 2001 Session normale.

1. On considère l-équation

$$(E): \; z \in \mathbb{C}, z^3 + (1-8i)z^2 - (23+4i)z - 3 + 24i = 0$$

a. Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l-on déterminera.

b. Résoudre l-équation (E).

2. Dans le plan muni d-un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d-affixes respectives $1+2i\,;3i\,;-2+3i.$ Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, –2 et 1.

a. Déterminer puis écrire sous forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$

b. Démontrer que les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont des termes d-une suite géométrique dont on déterminera la raison.

c. En déduire qu-il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude.

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1 : Bac E 1995 Session de remplacement

1. Déterminons l'ensemble E_1 des nombres complexes a pour lesquels f est une translation.

f est une translation si et seulement si, z' = z + b, c'est-à-dire $a^3 = 1$

Déterminons les racines cubiques de 1 : Ecrivons a^3 et 1 sous forme exponentielle.

$$\left.\begin{array}{l} a^3 = \left(re^{i\theta}\right)^3 = r^3e^{i3\theta} \\ 1 = e^{i0} \end{array}\right\} a^3 = 1 \Leftrightarrow r^3e^{i3\theta} = e^{i0} \Rightarrow \begin{cases} 3\theta = 0 + 2k\pi \\ r^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \dfrac{2k\pi}{3} \\ r = 1 \end{cases}$$

Pour $k = 0$, on a: $a_0 = 1e^{i0} = 1$

Pour $k = 1$, on a: $a_1 = 1e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

$$a_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pour $k = 2$, on a: $a_2 = 1e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

$$a_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc $\boxed{E_1 = \left\{1\,;\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$

Caractérisons f pour chacune des valeurs trouvées .

- *Pour $a = 1$ alors $z' = z$ donc f est l'écriture complexe d'une translation de vecteur nul; c'est donc l'application identique.*
- Pour $a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $z' = z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \Rightarrow z' = z - \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c'est donc l'écriture complexe d'une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}} = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Pour $a = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $z' = z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \Rightarrow z' = z - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c'est donc l'écriture complexe d'une translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $z_{\vec{v}} = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Déterminons l'ensemble E_2

f est une homothétie si $z' = kz + b$,

c'est à dire k est un nombre réel.

On a: $z' = a^3z + a - 1$

Posons $a = x + iy$.

On a: $a^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2iy - 3xy^2 - iy^3 = \left(x^3 - 3xy^2\right) + \left(3x^2y - y^3\right)i$

$a^3 \in R^*$ *si* $3x^2y - y^3 = 0 \Rightarrow y\left(x^3 - y^2\right) = 0$

$$\Rightarrow y\left(\sqrt{3}x - y\right)\left(\sqrt{3}x + y\right) = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ *ou* $\sqrt{3}x - y = 0$ *ou* $\sqrt{3}x + y = 0$

$y = \sqrt{3}x \qquad y = -\sqrt{3}x$

• *si* $y = 0$ alors $a^3 = x^3$ *donc* $S_1 = R\setminus\{0;1\}$

Si $y = \sqrt{3}x$ *alors* $a^3 = \left(x + i\sqrt{3}x\right)^3$ *car* $a = x + i\sqrt{3}x$

$$a^3 = x^3\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 = x^3\left(1 + 3\times(1)^2\times\left(i\sqrt{3}\right) + 3\times\left(i\sqrt{3}\right)^2 - 3i\sqrt{3}^3\right)$$

$$a^3 = x^3\left(1 + 3i\sqrt{3} - 9 - 9i\sqrt{3}\right) = x^3\left(-8 - 6i\sqrt{3}\right)$$

$$\boxed{a^3 = -8x^3 - 6i\sqrt{3}x^3}$$

Or $a^3 \in C\setminus\{0;1\}$ *d'où on a:*

•*si* $a^3 = 0 \Rightarrow -8x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

•*si* $a^3 = 1 \Rightarrow -8x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

d'où $a = x - \sqrt{3}xi \Rightarrow a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Donc $S_3 = \left\{x - \sqrt{3}xi\right\}\setminus\left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ *avec* $x \in R^*$

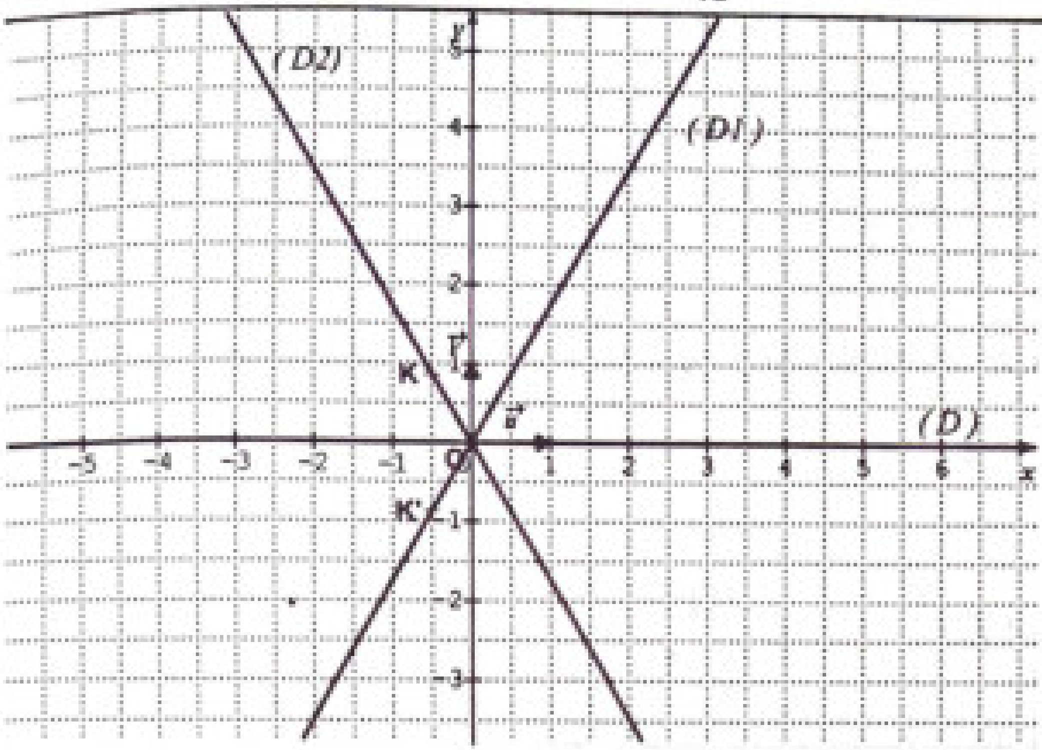
En conclusion, l'ensemble E_2 *est :*

$$E_2 = \left\{R^* \cup \left\{x + xi\sqrt{3}\right\} \cup \left\{x - xi\sqrt{3}\right\}\right\}\setminus\left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\} \text{ avec } x \in R^*$$

E_2 *est représenté graphiquement par la réunion des droites:*

(D): $y = 0$; (D_1): $y = \sqrt{3}x$; (D_2): $y = -\sqrt{3}x$ *privée des points* $O(0;0)$,

$K\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *et* $K'\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



3. L'écriture complexe de f est $z'=a^3z+a-1$

Pour $a=1+i$ d'où $z'=(1+i)^3z+(1+i)-1$

$\Rightarrow z'=(-2+2i)z+i$ est de la forme $z'=az+b$ avec $a=-2+2i$ et $b=i$

$|a|=|-2+2i|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=-\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2ex] \sin\theta=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right| \theta=\frac{3\pi}{4}$$

$$z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{i}{1+2-2i}=\frac{i}{3-2i}=\frac{i(3-2i)}{9+4}=-\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

Au total, f est une similitude directe de rapport $k=2\sqrt{2}$,

d'angle orienté $\frac{3\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe $z=-\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$

4. a. Déterminons l'affixe de M_0'

$f(M_0) = M_0' \Rightarrow z_0' = a^3z_0+a-1=a^3(1)+a-1=a^3+a-1$

$M_0'\in(0,\vec{u}) \Rightarrow z_0'\in\mathbb{R}$. Posons $a = x+iy$

$z_0' = (x+iy)^3+(x+iy)-1= (x^3-3xy^2+x-1)+(-y^3+y+3x^2y)i$

$z_0' \in R \Leftrightarrow -y^3+y+3x^2y = 0 \Leftrightarrow y\left(-y^2+1+3x^2\right) = 0$

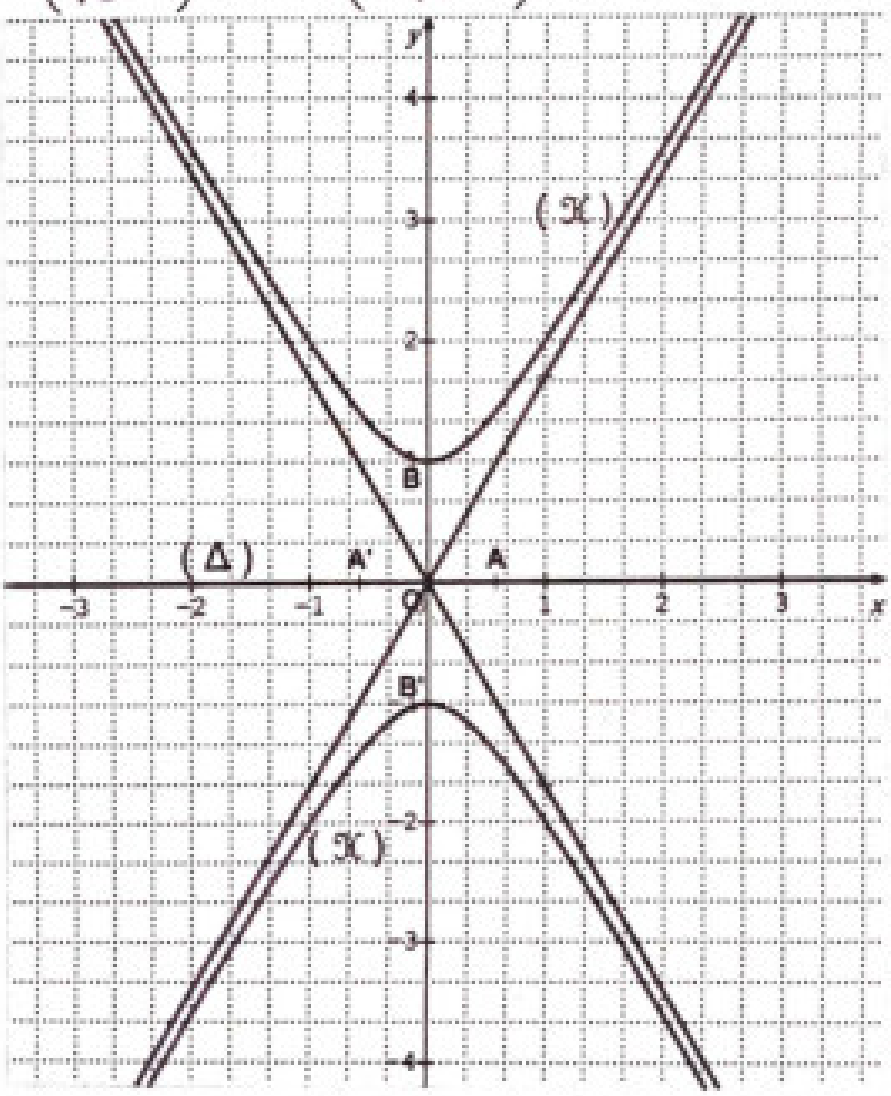
$$\Leftrightarrow \boxed{y=0} \quad ou \quad -y^2+1+3x^2=0 \Leftrightarrow -y^2+3x^2=-1 \Leftrightarrow y^2-3x^2=1$$

$$\boxed{y^2-\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=1}$$

Donc (Γ) *est la réunoin de la droite* (Δ) *d'équation* $y = 0$ *et de l'hyperbole* (H) *d'équation* $y^2-\dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$

b. les sommets de (H) sont $B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; $B'\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

$A\left(\frac{1}{\sqrt{3}};0\right)$ *et* $A'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};0\right)$



EXERCICE 2 : Bac C 1996 Session de remplacement

1. a. Démontrons que (E) admet une solution imaginaire pure à déterminer

Soit $z_0 = bi$ *cette solution . On a :*

$$z_0 \in (E) \Leftrightarrow z_0^3 + (-1+2i)z_0^2 - (1+2i)z_0 - 3 + 4i = 0$$

$$z_0 \in (E) \Leftrightarrow (bi)^3 + (-1+2i)(bi)^2 - (1+2i)(bi) - 3 + 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow -b^3i - b^2(-1+2i) - bi + 2b - 3 + 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow -b^3i + b^2 - 2ib^2 - bi + 2b - 3 + 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2 + 2b - 3) + (-b^3 - 2b^2 - b + 4)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 2b - 3 = 0 & (1) \\ -b^3 - 2b^2 - b + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

- **Résolvons** (1) : $b^2 + 2b - 3 = 0$
  $\Delta = 2^2 - 4(-3) = 16$, d'où $b_1 = 1$ ou $b_2 = -3$
- Vérifions les deux solutions dans (2)
  $-b^3 - 2b^2 - b + 4 = -1^3 - 2 \times 1^2 - 1 + 4 = 0$
  $-b^3 - 2b^2 - b + 4 = -(-3)^3 - 2 \times (-3)^2 - (-3) + 4 = 16 \neq 0$

On constate que $b_1 = 1$ vérifie l'équation (2) et $b_2 = -3$ ne vérifie pas (2).

En conclusion, la solution imaginaire pure de (E) est $z_0 = i$

b. Résolvons l'équation (E).

Soit $P(z) = z^3 + (-1+2i)z^2 - (1+2i)z - 3 + 4i$:(1)

Puisque i est un zéro de $P(z)$, alors $P(z) = (z - i)(z^2 + bz + c)$ avec $b \in C$ et $c \in C$

Calculons b et c par la méthode d'identification des coéfficients.

$P(z) = (z - i)(z^2 + bz + c)$. Aprés développement, puis réduction, on obtient :

$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = z^3 + (b - i)z^2 + (c - i)z - ic$: (2)

Ce qui donne, après identification, membre à membre des relations (1) et (2) :

$$\begin{cases} b - i = -1 + 2i \\ c - ib = -1 - 2i \\ -ic = -3 + 4i \end{cases} \text{ d'où on a : } \begin{cases} b = -1 + 3i \\ c = -4 - 3i \end{cases}$$

Au total, $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z - i)(z^2 + (-1 + 3i)z - 4 - 3i)$

Donc $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - i)(z^2 + (-1+3i)z - 4 - 3i) = 0$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z - i = 0$ ou $z^2 + (-1+3i)z - 4 - 3i = 0$

$z = i$

- Résolvons l'équation $z^2 + (-1+3i)z - 4 - 3i = 0$
  $\Delta = (-1+3i)^2 - 4(-4-3i) = 1 - 6i - 9 + 16 + 12i = 8 + 6i$
  Déterminons les racines carrées de $\Delta = 8 + 6i$
  Soit $\delta = x + yi$ une racine carrée de $8 + 6i$

On a : $\delta^2 = 8 + 6i \Leftrightarrow (x + yi)^2 = 8 + 6i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |8 + 6i| \\ x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} \\ x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Donc les racines carrées de $\Delta = 8 + 6i$ sont $3 + i$ et $-3 - i$

Les solutions de l'équation $z^2 + (-1 + 3i)z - 4 - 3i = 0$ sont:

On a : $z_1 = \frac{-(-1+3i)-(3+i)}{2} = \frac{-2-4i}{2} = -1 - 2i$; $z_2 = \frac{-(-1+3i)+(3+i)}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$

En conclusion : L'ensemble solution de (E) est $S_C = \{ i ; -1 - 2i ; 2 - i \}$

2. a. Placer les points A, B et C (voir figure)

• Démontrons que ABC est un triangle isocèle en B.

Calculons AB, AC et BC.

$AB = |z_B - z_A| = |(-1-2i) - i| = |-1-3i| = \sqrt{1+9}$ $\boxed{AB = \sqrt{10}}$

$AC = |z_C - z_A| = |2 - i - i| = |2-2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ $\boxed{AC = 2\sqrt{2}}$

$BC = |z_C - z_B| = |(2-i) - (-1-2i)| = |2 - i + 1 + 2i| = |3+i| = \sqrt{1+9}$ $\boxed{BC = \sqrt{10}}$

On a AB = BC donc le triangle ABC est isocèle en B.

b. Calculons b et c.

O= bar

A	B	C
1	b	c

$\Rightarrow \overline{OA} + b\overline{OB} + c\overline{OC} = \overline{0}$

Les coordonnées de $\overline{OA}, \overline{OB}$ *et* $\overline{OC}$ sont:

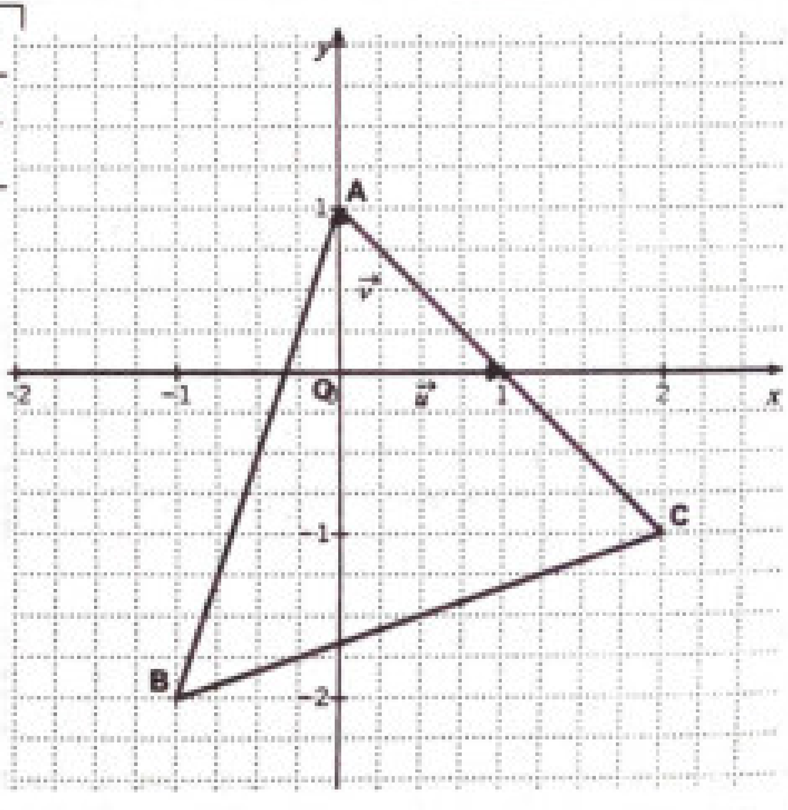
$\overline{OA}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}; \overline{OB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ *et* $\overline{OC}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ *d'où* $\Rightarrow \overline{OA} + b\overline{OB} + c\overline{OC} = \overline{0}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}0 - b + 2c = 0\\1 - 2b - c = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-b + 2c = 0\\2b + c = 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-b + 4c = 0\\2b + c = 1\end{cases} \Rightarrow 5c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{5}}$ *et* $-b + 2c = 0 \Rightarrow -b = -2c \Rightarrow \boxed{b = \frac{2}{5}}$

Donc O = bar

A	B	C
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$



EXERCICE 3

1. a. On a : $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

D'où, $P(\bar{z}) = \bar{z}^3 - 4\bar{z}^2 + 6\bar{z} - 4$ et $\overline{P(z)} = \overline{z^3 - 4z^2 + 6z - 4} = \bar{z}^3 - 4\bar{z}^2 + 6\bar{z} - 4$

Donc $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$

b. Calculons P(1 + i)

$P(1+i) = (1+i)^3 - 4(1+i)^2 + 6(1+i) - 4$

$= (1+i)(2i) - 4(2i) + 6 + 6i - 4$

$= 2i - 2 - 8i + 6 + 6i - 4$

$P(1+i) = 0$

Donc 1 + i est un zéro de P(z)

c. Résoudre l'équation P(z) = 0

On a: $P(z)=(z - 1 - i)(az^2 + bz + c)$

Utilisons la division Euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 4z^2 + 6z - 4 & z - 1 - i \\ \cline{2-2} -z^3 + (1+i)z^2 & z^2 + (-3+i)z + (2-2i) \\ \cline{1-1} 0 + (-3+i)z^2 + 6z & \\ (3-i)z^2 - (4+2i)z & \\ \cline{1-1} 0 + (2-2i)z - 4 & \\ (-2+2i)z + 4 & \\ \cline{1-1} 0 + 0 & \end{array}$$

Donc $P(z) = (z - 1 - i)(z^2 + (-3+i)z + 2 - 2i)$

On a: $P(z) = 0 \Rightarrow z - 1 - i = 0$ ou $z^2 + (-3+i)z + 2 - 2i = 0$

$\Rightarrow z = 1 + i$ $\quad \Delta = (-3+i)^2 - 4(2-2i) = 2i$

Les racines carrées de Δ sont :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 1 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

donc les racines carrées de Δ sont : $1 + i$ et $-1 - i$

Les solutions de l'équation sont :

$z_1 = \dfrac{-(-3+i)-(1+i)}{2} = 1 - i$ et $z_2 = \dfrac{-(-3+i)+(1+i)}{2} = 2$

Donc $S = \{1+i;\ 1-i;\ 2\}$

2. On donne $A(1+i)$; $B(1-i)$ et $C(2)$

a. L'écriture complexe de la rotation est : $z' = iz$

d'où $R(B) = B' \Rightarrow z_{B'} = iz_B = i(1-i) = 1 + i = z_A$ donc $R(B) = A$

$R(C) = C' \Rightarrow z_{C'} = iz_C = i(2) = 2i$ donc l'image de C est $C'(2i)$

b. On a : $AB = |z_B - z_A| = |-2i| = 2$ et $OC = |z_C - z_O| = |2| = 2$

Donc les points O, B, A et C appartiennent à un même cercle de rayon $\frac{1}{2}AB = 1$

3. On donne f : $z' = \dfrac{z-(1+i)}{z-2}$

a. f(A) : $\dfrac{z_A-(1+i)}{z_A-2} = \dfrac{(1+i)-(1+i)}{(1+i)-2} = 0$ donc $f(A) = O$

f(B) : $\dfrac{z_B-(1+i)}{z_B-2} = \dfrac{(1-i)-(1+i)}{(1-i)-2} = 1+i$, donc $f(B) = A$

b. Déterminons l'affixe de E

$f(E) = C \Rightarrow z_C = \dfrac{z_E-(1+i)}{z_E-2} \Rightarrow 2 = \dfrac{z_E-(1+i)}{z_E-2} \Rightarrow z_E = 3-i$

c. Montrons que (AB) est perpendiculaire à (BE)

On a $\dfrac{z_B-z_A}{z_B-z_E} = \dfrac{(1-i)-(1+i)}{(1-i)-(3-i)} = i \in i\mathbb{R}$; donc (AB) est perpendiculaire à (BE)

d. Si M appartient à la médiatrice de [AC] alors $AM = MC \Rightarrow \dfrac{AM}{MC} = 1$

Or $z' = \dfrac{z-(1+i)}{z-2} \Rightarrow z_{M'} - z_O = \dfrac{z_M - z_A}{z_M - z_C} \Rightarrow OM' = \dfrac{AM}{CM} = 1 \Leftrightarrow OM' = 1$

Donc l'ensemble des points M' est le cercle de centre O et de rayon 1

EXERCICE 4

1. Vérifions que $(1-i)^2 = -2i$ et $(1+i)^2 = 2i$

$(1-i)^2 = (1-i)(1-i) = 1-i-i-1 = -2i$

$(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = 1+i+i-1 = 2i$

2. On a l'équation (E) : $z^4 - 14iz^2 + 32 = 0$

a. α est solution de l'équation (E) $\Rightarrow \alpha^4 - 14i\alpha^2 + 32 = 0 \qquad (1)$

- α est solution de l'équation de (E)

$\Rightarrow (-\alpha)^4 - 14i(-\alpha)^2 + 32 = 0 \Rightarrow \alpha^4 - 14i\alpha^2 + 32 = 0 \qquad (2)$

Les relations (1) et (2) sont égales donc si α est solution de (E) alors - α l'est aussi.

Developpons $(z^2+2i)(z^2-16i)$

b. Vérifions que $z^4 - 14iz^2 + 32 = (z^2+2i)(z^2-16i)$

Developpons $(z^2+2i)(z^2-16i)$

$$(z^2+2i)(z^2-16i) = z^4 - 16iz^2 + 2iz^2 + 32 = z^4 - 14iz^2 + 32$$

Donc $z^4 - 14iz^2 + 32 = (z^2+2i)(z^2-16i)$

3. Resolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (E)

On a : $z^4 - 14iz + 32 = 0 \Rightarrow (z^2+2i)(z^2-16i) = 0 \Rightarrow$

$z^2+2i = 0$ ou $z^2-16i = 0$

(1) : $z^2 = -2i \Rightarrow z^2 = (1-i)^2 \Rightarrow z = 1-i$ ou $z = -(1-i)$

(2) : $z^2 = 16i$. Posons $z = x+iy$, on a : $z^2 = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2xyi$

et $|16i| = 16$

D'où on a : $\begin{cases} x^2+y^2 = 16 \\ x^2-y^2 = 0 \\ 2xy = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 16 \\ 2y^2 = 16 \\ xy = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 8 \\ y^2 = 8 \\ xy = 8 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases}$ Ou bien $\begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases}$

Les solutions de l'équation (2) : $z^2 = 16i$ sont $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ et $-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

Au total, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$S = \{1-i ; -1+i ; 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i ; -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i\}$

EXERCICE 5

On donne $f(z) = \dfrac{2z - i}{z + 1 - i}$

1. a. Déterminons $R_e(f(z))$ et $I_m(f(z))$

Posons $z = x + iy$

$$f(z) = \frac{2(x+iy) - i}{(x+iy) + 1 - i}$$

$$= \frac{2x + (2y-1)i}{(x+1) + (y-1)i} = \frac{(2x + (2y-1)i)((x+1) - (y-1)i)}{(x+1)^2 + (y-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x + 2y^2 - 3y + 1}{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \frac{x + 2y - 1}{(x+1)^2 + (y-1)^2}i$$

Donc $R_e(f(z)) = \dfrac{2x^2+2x+2y^2-3y+1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$ et $I_m(f(z)) = \dfrac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$

b. $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow I_m(f(z)) = 0 \Rightarrow \dfrac{x + 2y - 1}{(x+1)^2 + (y-1)^2} = 0 \Rightarrow$

$x + 2y - 1 = 0$ donc l'ensemble des points M est la droite d'équation $x + 2y - 1 = 0$ privé du point A $(-1 ; 1)$

c. $f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow R_e(f(z)) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 2y^2 - 3y + 1 = 0 \Rightarrow$

$2(x^2 + x) + 2(y^2 - \frac{3}{2}y) + 1 = 0$

$$\Rightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{8} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2$ donc l'ensemble des points M est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$

2. a. Vérifions que B appartient à (E) et (F)

Remplaçons les coordonnées de B dans l'ensemble (E)

On a : $x + 2y - 1 = 0$ d'où $0 + 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$ donc $B \in (E)$. On a :

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{16}\right)$ d'où

$$\left(0 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

Donc $B \in (F)$.

- Vérifions que C appartient à (F)

Remplaçons les coordonnées de C dans l'ensemble (F)

On a : $\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{16}$ donc $C \in (F)$

- Placer B et C sur la figure (voir repère)

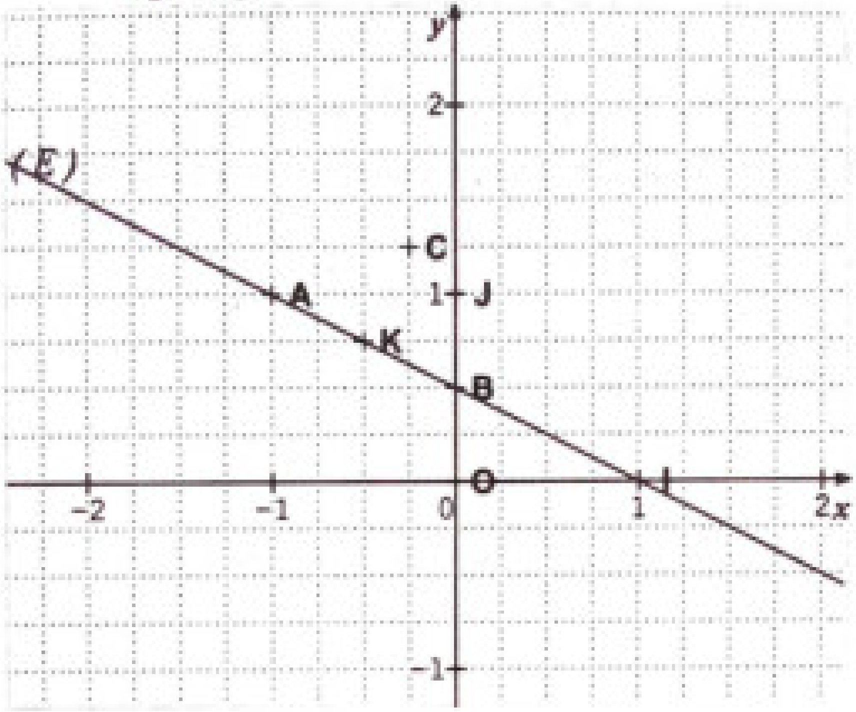
b. Ecrivons $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ sous forme trigonométrique.

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{(-1 + i) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i\right)}{\frac{1}{2}i - \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i\right)} = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i}{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i} = -i$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

c. Nature du triangle ABC.

On a : $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc ABC est un triangle rectangle isocèle en C.



EXERCICE 6

1. Pour tout complexe z non nul, nous avons aussi : $z' = \frac{1}{|z|^2}z$. D'où $\overline{OM}' = \frac{1}{|z|^2}\overline{OM}$.

Les vecteurs $\overline{OM}$ *et* $\overline{OM}'$ sont colinéaires car nous avons mis en évidence un réel k (ici k > 0) tel que $\overline{OM}' = k\overline{OM}$ donc O, M, M' sont alignés.

2. M est invariant par f (*et* $M \neq O$) si et seulement si :

$$z' = z \Rightarrow \frac{1}{|z|^2}z = z \Rightarrow z\left(\frac{1}{|z|^2} - 1\right) = 0 \text{ avec } z \neq 0 .$$

M est invariant par f (*et* $M \neq O$) si et seulement si : $z \neq 0$ *et* $|z| = 1$.

Γ est le cercle de centre O et de rayon 1.

$|-1| = 1$ d'où $A \in \Gamma$. $|i| = 1$ d'où $B \in \Gamma$.

3. A a pour coordonnées (-1 ; 0), B a pour coordonnées (0 ; 1).

Le milieu E de [AB] a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

De plus, (C) a pour rayon $\frac{1}{2}\mathrm{AB}$. Or $\mathrm{AB} = |z_B - z_A| = |i+1|$ soit $\mathrm{AB} = \sqrt{2}$.

(C) est le cercle de centre $\mathrm{E}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Une équation de (C) est donnée par : $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

E a pour affixe $z_E = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

E' a pour affixe $z_{E'} = \frac{z_E}{|z_E|^2} \Rightarrow z_{E'} = -1 + i$

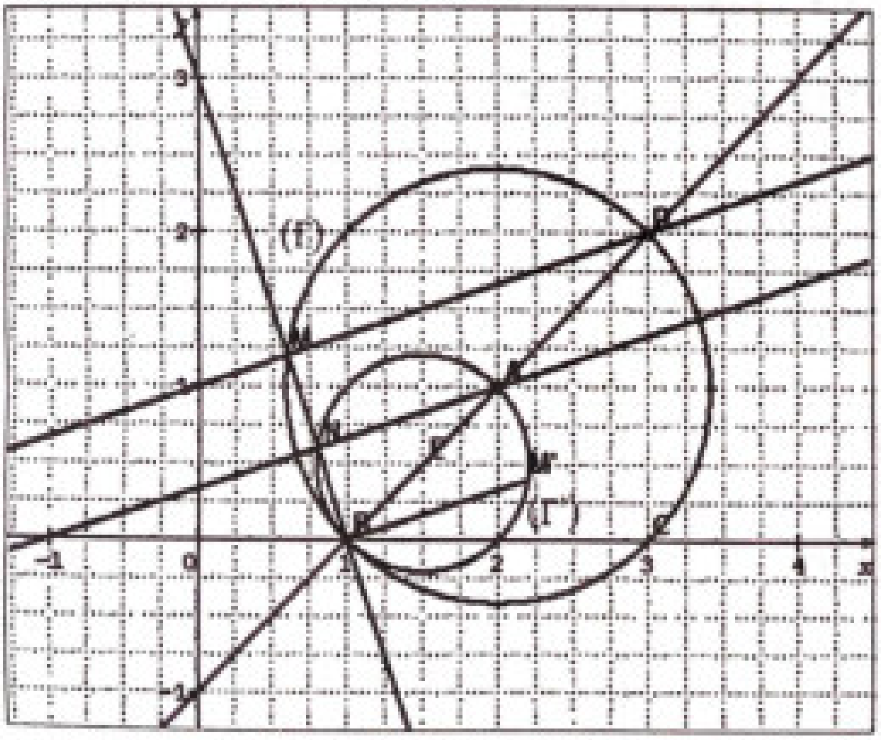
$|z_E|^2 = \frac{1}{2}$ d'où $z_{E'} = 2z_E$;

$\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ d'où $\mathrm{E'} \in \Gamma$.

Autre méthode : M est élément de (C) si et seulement si $\overline{\mathrm{MA}}.\overline{\mathrm{MB}} = 0$.

EXERCICE 7

1. Figure complète : Voir ci-dessous



2. a. Les points de l'axe $(O,\vec{u})$ ont une affixe réelle. Soit M un point d'affixe réelle x.

$\mathrm{M} \in (\Gamma) \Leftrightarrow |x - z_A| = \sqrt{2} \Leftrightarrow (x-2-i)\overline{(x-2-i)} = 2 \Leftrightarrow$
$(x-2-i)(x-2+i) = 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow$
$x = 1$ ou $x = 3$

Les points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O,\vec{u})$ sont d'affixes 1 et 3.

2. b. Le point D est tel que le milieu de $[BD]$ est le point A.

On a donc : $\frac{z_B + z_D}{2} = z_A \Leftrightarrow z_D = 2z_A - z_B \Rightarrow z_D = 4 + 2i - 1 = 3 + 2i$

3. a. $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = \dfrac{15 + 10i - 3 - 6i}{5 - 3 - 6i} = \dfrac{6 + 2i}{1 - 3i} = \dfrac{(6 + 2i)(1 + 3i)}{1 + 9} = 2i$

3. b. On a : $\arg\left(\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}}\right)$

Or l'argument de ce complexe imaginaire pur à partie imaginaire positive vaut $\frac{\pi}{2}$, donc le triangle MDB est rectangle en M.

On en déduit que M appartient au cercle de diamètre [BD] c'est-à-dire à (Γ).

4. a. On vient de voir que $(DM) \perp (BM)$.

Comme N appartient au cercle de diamètre [AB], le triangle ABN est rectangle en N autrement dit $(BN) \perp (AN)$.

Puisque $N \in (BM)$, on en déduit que (DM) et (AN) sont perpendiculaires à une même droite, donc parallèles.

b. Dans le triangle MDB, A est le milieu de [BD] et (DM)//(AN) donc (AN) coupe le côté [BM] en son milieu. On a donc

N est le milieu de [BM], d'où : $z_N = \frac{z_M + z_B}{2} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i + 1}{2} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

EXERCICE 8 : Bac E 1996 Session normale

1 . a. Posons $P(z) = z^3 + (1 - 6i)z^2 - (17 + 8i)z - 33 + 30i$

$P(-3) = (-3)^3 + (1 - 6i)(-3)^2 - (17 + 8i)(-3) - 33 + 30i$

$P(-3) = -27 + 9 + 51 - 33 + (-54 + 24 + 30)i$

$P(-3) = 60 - 60 + (54 - 54)i$

$P(-3) = 0$, donc -3 est une solution de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E)

-3 est une solution de $P(z)$ d'où $P(z) = (z + 3)(az^2 + bz + c)$.

Déterminons a, b et c par division euclidienne

$z^3 + (1 - 6i)z^2 - (17 + 8i)z - 33 + 30i$	$z + 3$
$z^3 + 3z^2$	
$0 + (-2 - 6i)z^2 - (17 + 8i)z - 33 + 30i$	$z^2 - (2 + 6i)z - 11 + 10i$
$(-2 - 6i)z^2 - (6 + 18i)z$	
$0 + (-11 + 10i)z - 33 + 30i$	
$(-11 + 10i)z - 33 + 30i$	
$0 + 0$	

D'où $P(z) = (z + 3)(z^2 - (2 + 6i)z - 11 + 10i)$

avec $a = 1$, $b = -2 - 6i$ et $c = -11 + 10i$

$P(z) = 0 \Rightarrow z + 3 = 0$ ou $z^2 - (2 + 6i)z - 11 + 10i = 0$

$\Rightarrow z = -3$ ou $z^2 - (2 + 6i)z - 11 + 10i = 0$

Résolvons l'équation (1) : $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - (2 + 6i)z - 11 + 10i = 0$

$\Delta = [-(2+6i)]^2 - 4(-11+10i) = 12 - 16i$

Cherchons les racines carrées de Δ.

Posons $\delta = x + yi$ une racine carrée de Δ .

On a : $\delta^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ et $|\delta|^2 = x^2 + y^2$;

$|1 - 16i| = 20$

$$\delta^2 = 12 - 16i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x^2 - y^2 = 12 \\ 2xy = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 32 \\ 2y^2 = 8 \\ xy = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 4 \\ xy = -8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$$

Donc les racines carrées de Δ sont $4 - 2i$ et $-4 + 2i$.

Les solutions de l'équation (1) sont donc :

$z_1 = \frac{2+6i+(4-2i)}{2} = 3 + 2i$ et $z_2 = \frac{2+6i-(4-2i)}{2} = -1 + 4i$

Au total, l'ensemble des solution de l'équation (E) est : $S = \{-3 \,;\, -1+4i \,;\, 3+2i\}$

2 . a. $z_0 = -3$; $z_1 = -1 + 4i$; $z_2 = 3 + 2i$ d'où $M_0\binom{-3}{0}$;

$M_1\binom{-1}{4}$; $M_2\binom{3}{2}$ Figure (voir à la fin)

b. On a : $\overrightarrow{M_1M_0}\binom{-2}{-4}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}\binom{4}{-2}$ d'où

$M_1M_0 = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$M_1M_2 = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

On a aussi : $\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = -2 \times 4 + (-4)(-2) = 0$

On constate que $M_1M_0 = M_1M_2$ et $\overrightarrow{M_1M_0} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$, donc le triangle $M_0M_1M_2$ est rectangle isocèle en M_1 .

3. a. Soit K le milieu du segment $[M_1M_2]$.

G est le barycentre des points pondérés $(M_0, -1)$ et $(K, 2)$ $\Leftrightarrow -\overrightarrow{GM_0} + 2\overrightarrow{GK} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM_0} = -2\overrightarrow{M_0K} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_0G}$,

donc le point K est le milieu du segment $[M_0G]$.

Par conséquent, G est le symétrique de M_0 par rapport à K .

Méthode de construction de G.

Construire le milieu K de $[M_1M_2]$, puis le symétrique G de M_0 par rapport à K.

b. Déterminons l'ensemble (C)

$-MM_0^2 + MM_1^2 + MM_2^2 = -GM_2^2$.

En introduisant G dans le premier membre de l'égalité, puis en developpant et en reduisant, on obtient :

$MG^2 - GM_0^2 + GM_1^2 + GM_2^2 = -GM_2^2 \Leftrightarrow MG^2 = GM_0^2 - GM_1^2 - 2GM_2^2$ (1)

Calculons GM_0^2 ; GM_1^2 et GM_2^2 .

K est le milieu commun des segments $[M_0G]$ et $[M_1M_2]$; donc $M_0M_1GM_2$ est un parallélogramme.

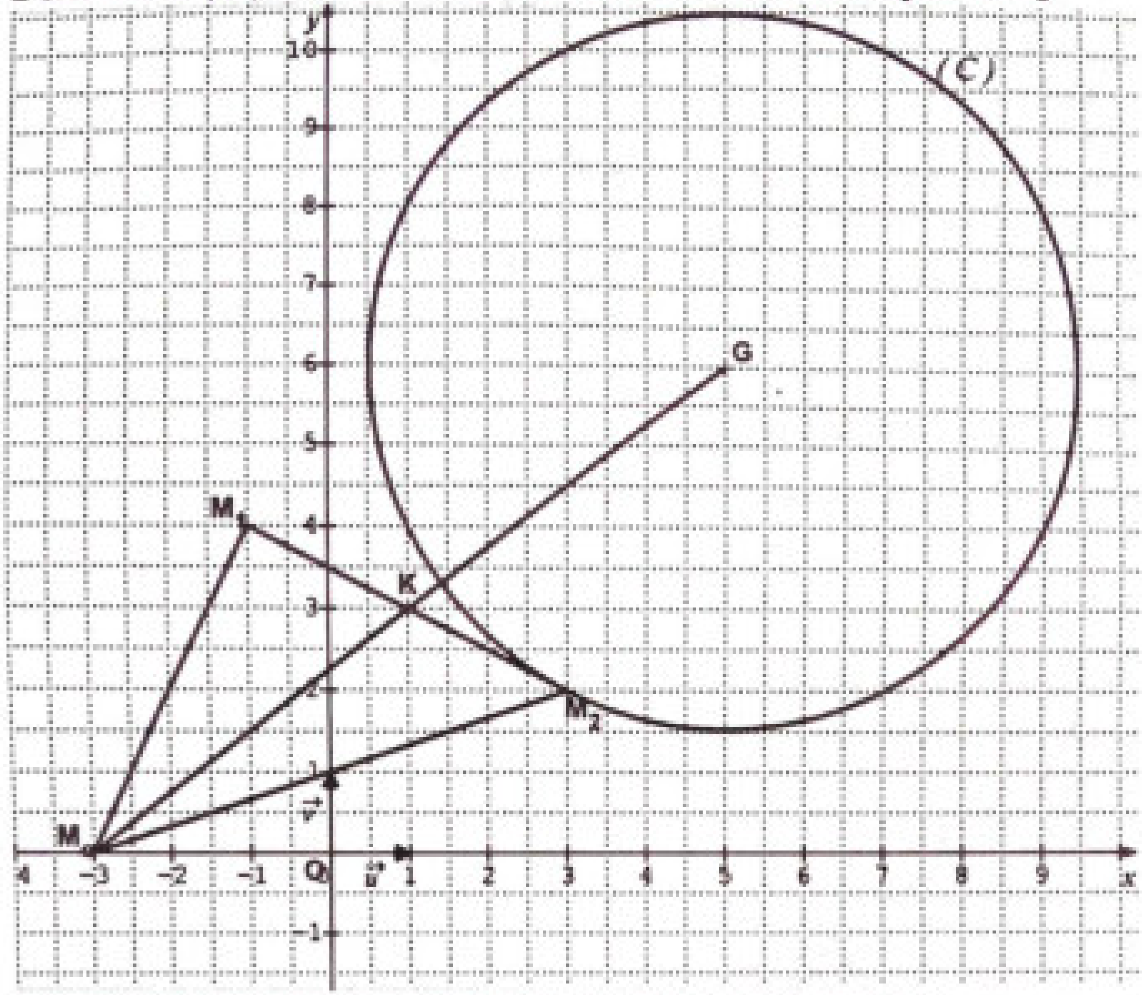
$GM_1 = M_0M_2 \Rightarrow$ $\mathbf{GM_1^2} = M_0M_2^2 = (3+3)^2 + (2+0)^2 = 40$

$GM_2 = M_0M_1 = 2\sqrt{5}$ d'où $\mathbf{GM_2^2 = 20.}$

$GM_0 = 2M_0K.$

On sait que M_0M_1K est un triangle rectangle en M_1 et $M_1K = \frac{M_1M_2}{2} = \sqrt{5}$.

D'après la propriété de Phythagore, on a :
$M_0K^2 = M_0M_1^2 + M_1K^2 = 20 + 5 = 25$. Donc $M_0K = 5$
$GM_0^2 = 4\, M_0K^2 = 100$.
La relation (1) devient : $MG^2 = 100 - 40 - 2(20) = 20 \Rightarrow MG = 2\sqrt{5}$
$MG = 2\sqrt{5} = GM_2$; donc $M_2 \in (C)$.
L'ensemble (C) est donc le cercle de centre G et de rayon GM_2



EXERCICE 9 : Bac E 2001 Session normale.

1.a. S_E l'ensemble solution de (E).
Soit x un nombre réel.

$$ix \in S_E \Leftrightarrow (ix)^3 + (1-8i)(ix)^2 - (23+4i)(ix) - 3 + 24i = 0$$

$$\Leftrightarrow -ix^3 + (1-8i)(-x^2) - 23ix + 4x - 3 + 24i = 0$$

$$\Leftrightarrow (-x^2 + 4x - 3) + i(-x^3 + 8x^2 - 23x + 24) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \ \ et \ \ -x^3 + 8x^2 - 23x + 24 = 0$$

Résolvons l'équation $-x^2 + 4x - 3 = 0$
On a une solution évidente, 1 ; l'autre solution est 3.
1 n'est pas une solution de l'équation $-x^3 + 8x^2 - 23x + 24 = 0$ mais 3 l'est car $-3^3 + 8\times 3^2 - 23\times 3 + 24 = 0$, d'où
On déduit que l'équation (E) admet une seule solution imaginaire pure $3i$.

b. Effectuons la division euclidienne de $z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i$ par $z-3i$

$$\begin{array}{l|l} z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i & z-3i \\ \hline -z^3+3iz^2 & z^2+(1-5i)z+(-8-i) \\ \hline (1+5i)z^2-(23+4i)z-3+24i & \\ -(1-5i)z^2+(15+3i)z & \\ \hline (-8-i)z-3+24i & \\ (8+i)z-24i+3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On déduit que :

$$z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i=(z-3i)(z^2+(1-5i)z-8-i)$$

L'équation (E) est donc équivalente à : $z-3i=0$ ou $z^2+(1-5i)z-8-i=0$

Résolvons l'équation $z^2+(1-5i)z-8-i=0$

$$\Delta = (1-5i)^2-4(-8-i) = 1-25-10i+32+4i$$

$$\Delta = 8 - 6i$$

Cherchons les racines carrées de Δ :

Soit δ une racine carrée de Δ ; $\delta=x+iy$, où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\delta^2 = x^2-y^2+2xy\,i, \quad |\delta|^2 = x^2+y^2$$

$$|\Delta| = 10$$

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2-y^2=8 \\ xy=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \\ xy < 0 \end{cases}$$

On obtient $x=3$ et $y=-1$ ou $x=-3$ et $y=1$.

Les racines carrées de Δ sont les nombres complexes $3-i$ et $-3+i$.

Les solutions de l'équation $z^2+(1-5i)z+(-8-i)=0$ sont :

$$z_1=\frac{-1+5i+3-i}{2}=1+2i \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-1+5i-3+i}{2}=-2+3i$$

On en déduit : $S_E = \{3i, 1+2i, -2+3i\}$.

2. a. Notons z_A, z_B, z_C *et* z_G et les affixes respectives des points A, B, C, G.

G est le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients respectifs 2, -2 et 1.

Donc $\overline{GA} = -2\overline{BA} + \overline{CA}$

$\overline{GB} = 2\overline{AB} + \overline{CB}$

$\overline{GC} = 2\overline{AC} - 2\overline{BC} = 2\overline{AB}$

On déduit les affixes respectives $z_{\overline{GA}}, z_{\overline{GB}}$ et $z_{\overline{GC}}$ des vecteurs $\overline{GA}, \overline{GB}$ et $\overline{GC}$

$$z_{\overline{GA}} = -2(z_A - z_B) + z_A - z_C = -z_A + 2z_B - z_C;$$

$$= -1 - 2i + 6i + 2 - 3i = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_{\overline{GB}} = 2(z_B - z_A) + z_B - z_C = 3z_B - 2z_A - z_C;$$

$$= 9i - 2 - 4i + 2 - 3i = 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_{\overline{GC}} = 2(z_C - z_A) - 2(z_C - z_B) = 2(z_B - z_A);$$

$$= 2(i - 1) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

b. On en déduit que :

$$z_{\overline{GB}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} z_{\overline{GA}}$$

$$z_{\overline{GC}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} z_{\overline{GB}}$$

$z_{\overline{GA}}$; $z_{\overline{GB}}$ et $z_{\overline{GC}}$ et sont donc des termes d'une suite géométrique de raison $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

c. on a : $z_B - z_G = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A - z_G)$

$z_C - z_G = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_B - z_G)$

La transformation complexe définie par $z' - z_G = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_G)$ est celle de la similitude directe de centre G, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Cette similitude transforme A en B et B en C.

CHAPITRE IV : ISOMETRIES PLANES

FICHE DE COURS

Définition

On appelle isométrie plane, toute application du plan dans lui-même qui **conserve la distance**.
Pour tous points M et N du plan d'images respectives M' et N', on a: **MN = M'N'**.

Groupe des isométries planes

- Une **isométrie** est soit un **déplacement ou un antidéplacement**.
- Un **déplacement** est une isométrie qui conserve les angles orientés.

Ex : La rotation et la translation.

- Un **antidéplacement** est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.

Ex : La symétrie orthogonale et la symétrie glissée.

- Les isométries du plan conservent les distances, le produit scalaire, le barycentre, l'orthogonalité, le parallélisme, le contact, les aires, les angles géométriques.

Composition d'isométries planes

La composée de **deux rotations de même centre** est une rotation d'angle la somme des angles.
La composée de **deux rotations de centres distincts** et d'angles θ_1 et θ_2 est :
Si $\theta_1 + \theta_2 = 0$, une translation
Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$, une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$
La composée de **deux symétries orthogonales** $S_{(D1)}$ et $S_{(D2)}$ ($S_{(D1)} o S_{(D2)}$)

- **d'axes parallèles** est une translation de vecteur $2\,\overrightarrow{O_2O_1}$.
- **d'axes sécantes** est une rotation de centre le point d'intersection des deux droites et d'angle orienté $2(\widehat{\vec{u_2}, \vec{u_1}})$ avec $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_1$ les vecteurs directeurs des droites respectives (D_2) et (D_1).

Classification des isométries

		Nature		
Isométries	Identité	Identité	Composée de deux réflexions	Déplacement
	Non identité	Translation de vecteur $\vec{u} \neq 0$		
		Rotation d'angle non nul		
		Symétrie orthogonale	réflexion	Antidéplacement
		Symétrie glissée	Composée de 3 réflexions	

EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1 : Bac C 2003 Session normale

Dans le plan orienté, on considère le triangle isocèle ABC tel que : AB = AC et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Soit I le point du plan tel que le triangle CAI est isocèle rectangle en C et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI}}\right) = -\frac{\pi}{2}$

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure. On prendra AB = 5 cm.
2. On appelle r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et r_C la notation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $f = r_C \circ r_A$.

a. Déterminer les images respectives des points A et B par f.

b. Démontrer que f est une rotation et préciser son angle.

3. Démontrer que $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}}\right) = \frac{\pi}{2}$.
4. On appelle O le symétrique de A par rapport à (BC).

a. Démontrer que le quadrilatère ABOC est un losange.

b. Démontrer que O appartient à la médiatrice du segment [AI].

5. Démontrer que O est le centre de la rotation f.

EXERCICE 2 : Bac C 1995 Session normale

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit a un réel strictement positif.

On considère le point A de coordonnées $(a,0)$ et B le point de coordonnées $(a,\ a)$.

On désigne par R la rotation de centre O et l'angle de mesure $+\frac{\pi}{2}$, par S la symétrie de centre B et par R' la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $F = R' \circ S \circ R$

1. Quelle est la nature de la transformation F ?
Préciser ses éléments caractéristiques.
(*On pourra considérer l'image par F du point C défini par C = $R^{-1}(B)$.*)
2. Soit (D) la droite d'équation $x + y = a$ et $S_{(D)}$ la symétrie orthogonale d'axe (D).
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation composée $S_{(D)} \circ F$.

EXERCICE 3 : Bac E 1996 Session de remplacement

Dans le plan orienté $\mathcal{P}$, on considère un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R et un point O' tel que OO' = 3R.

Soit r la rotation de centre O' et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. On pose : $f = r \circ t$

1. a. Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle.

b. Déterminer l'image de $(\mathcal{C})$ par f. Faire une figure où l'on prendra R = 3 cm.

c. Déterminer et construire Ω, centre de la rotation f

2. M étant un point quelconque de $(\mathcal{C})$ et M' son image par f, on appelle I le milieu du segment [MM'].
a. Déterminer la nature du triangle $\Omega MM'$.
b. En déduire que I est l'image de M par une similitude directe de centre Ω, dont on précisera le rapport et l'angle.
c. Déterminer et construire l'ensemble des points I quand M décrit le cercle $(\mathcal{C})$.
Justifier votre construction.

EXERCICE 4 : Bac C 1997 Session normale

Dans le plan, on donne trois points alignés A, B et P.
Soit un point Q n'appartenant pas à la droite (AB) et tel que : AQ = BP.
La parallèle à la droite (PQ) passant par B coupe la droite (AQ) en C.
1. Justifier l'existence d'une homothétie h transformant P en B et Q en C.
Préciser son centre.
2. a. Construire B_1 et C_1 les images respectives de B et C par h.
 b. Démontrer que : $AC = BB_1$.
3. On donne un triangle RST. On veut construire deux points I et J tels que :

$$\begin{cases} (IJ) \parallel (ST) \\ I \in (SR) \setminus \{S; R\} \\ J \in (RT) \text{ et } RJ = SI \end{cases}$$

(Dans cette question, on ne demande pas de trouver toutes les solutions mais seulement d'en donner une.)
a. Démontrer que, si le triangle RST est isocèle en R, il y a une solution évidente.
b. Dans la suite, les segments [RS] et [RT] ne sont pas de même longueur.
A l'aide des deux premières questions, donner un programme de construction d'un couple de point (I, J) solution du problème.
Justifier ce programme.

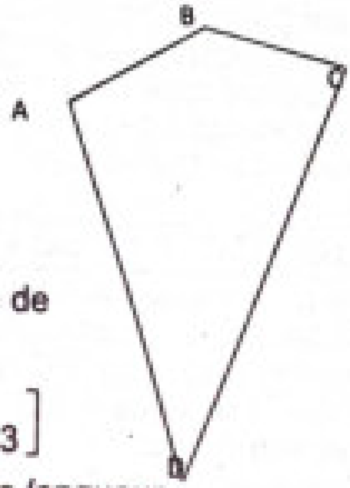
EXERCICE 5 : Bac C 1998 Session normale

Dans le plan orienté on considère le carré ABCD de centre O tel que $Mes\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)=\frac{\pi}{2}$

Soit M un point de la droite (DC), N le point d'intersection de la droite (BC) et de la perpendiculaire à la droite (AM) passant par A, et I le milieu de [MN].
1. Faire une figure.
2. On considère la rotation r de centre A telle que : $r(D)=B$
a. Démontrer que N est l'image de M par r.
b. En déduire la nature du triangle AMN.
3. a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre A telle que s(D)= O.
b. Quelle est l'image de C par s ?
c. Démontrer que I est l'image de M par s.
d. En déduire l'ensemble des points I lorsque M décrit la droite (DC).

EXERCICE 6 : Bac E 1998 Session normale

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère :



- Le quadrilatère convexe ABCD. (voir figure ci-contre.)
- Extérieurement au quadrilatère, le point M_1 (Respectivement M_2 ; M_3 ; M_4) tel que le triangle AM_1B (respectivement BM_2C, CM_3D, DM_4A) soit rectangle et isocèle de sommet M_1 (respectivement M_2 ; M_3 ; M_4).

Le but de l'exercice est de démontrer que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et ont la même longueur.

1. Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D et z_1, z_2, z_3 et z_4 les affixes respectives des points M_1, M_2, M_3 et M_4.

a. Exprimer z_1 en fonction de a et b.

b. En déduire les expressions de z_1, z_2, z_3 et z_4 en fonction de a, b, c et d.

2. Démontrer que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et ont la même longueur.

EXERCICE 7 : Bac E 2000 Session normale

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que : $\begin{cases} AB = AC \\ \text{Mes}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [BC] ; [CA] et [AB]

On appelle r la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

On pose : $f = r \circ t$ et $g = t \circ r$

1. a. déterminer l'image de K par f et l'image de J par g.

b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g.

2. a. Déterminer la nature de la transformation $g \circ f^{-1}$

(f^{-1} étant la transformation réciproque de f).

b. Déterminer l'image de A par $g \circ f^{-1}$ et caractériser alors $g \circ f^{-1}$

3. Démontrer que (AC) est l'image de (IJ) par f.

4. Soit M un point du plan.

On désigne par M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g.

a. Démontrer que $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$

b. Démontrer que M appartient à la droite (IJ) si et seulement si les points A, C, M_1 et M_2 sont alignés.

c. On suppose que le point M n'appartient pas à la droite (IJ).

Quelle est la nature du quadrilatère ACM_1M_2 ? Justifier.

EXERCICE 8 : Bac E 2001 Session normale

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC, c'est-à-dire tel que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et par la rotation r_2 de centre B et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$

Pour tout point M du plan, on pose : $N = r_1(M)$, $M' = r_2(N)$, $r = r_2 \circ r_1$

1. a. Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB).
   Déterminer $r(D)$.
   b. Démontrer que r est la symétrie centrale de centre Ω milieu de [BD]

2. a. Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, N et M' soient alignés est un cercle passant par les points A et Ω

(On pourra considérer l'angle $(\widehat{\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA}})$)

b. Prouver que (Γ) admet [AD] pour diamètre et que le milieu I de [AB] appartient à (Γ).

Construire le cercle (Γ).

EXERCICE 9 (Non corrigé)

Dans le plan orienté, on considère un losange ABCD tel que AB = BC = CD = DA = 5 cm et Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{3}$. On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA] et [BD].

On note (Δ) la médiatrice de [AB] et (Δ') la médiatrice de [CD].

1. Soit f l'isométrie du plan définie par f(A) = B, f(B) = D ; f(D) = C.

a. Prouver que f est un antidéplacement.

b. Démontrer que, s'il existe un point M invariant par f, alors M est équidistant des points A, B, C et D.

c. L'isométrie f admet – elle un point invariant ? Justifier votre réponse.

2. Soit $S_{(\Delta)}$ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et R la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

a. Démontrer que f = R o $S_{(\Delta)}$.

b. A- t- on f = $S_{(\Delta)}$ o R ?

3. Soit S_1 la symétrie orthogonale d'axe (BC).

a. Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale S_2 telle que R = S_1 o S_2.

b. En déduire que f peut s'écrire sous la forme f = S_1 o T_1 où T_1 est une translation que l'on précisera.

EXERCICE 10 (Non corrigé)

Le plan est rapporté au repère orthonormal. Unité graphique : 4 cm.

Partie I

1. Placer les points I, J, H, A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_I = 1,\ z_J = i,\ z_H = 1+i,\ z_A = 2,\ z_B = \frac{3}{2} + i,\ z_C = 2i,\ z_D = -1.$$

2. Soit E le symétrique de B par rapport à H.
La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la parallèle à la droite (OC) passant par D se coupent en F.

Placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe $z_F = -1 + \frac{1}{2}i$.

3. Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques.

Partie II

On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe : $z' = -i\bar{z} + 2i$.

1. Déterminer les images des points O, A, B par f.

2. a. Montrer que f est une isométrie.

   b. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

   c. La transformation f est-elle une symétrie axiale ?

3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.
Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1}.

4. On pose $s = f \circ t^{-1}$.

a. Montrer que l'écriture complexe de s est : $z' = -i\bar{z} + 1 + i$.

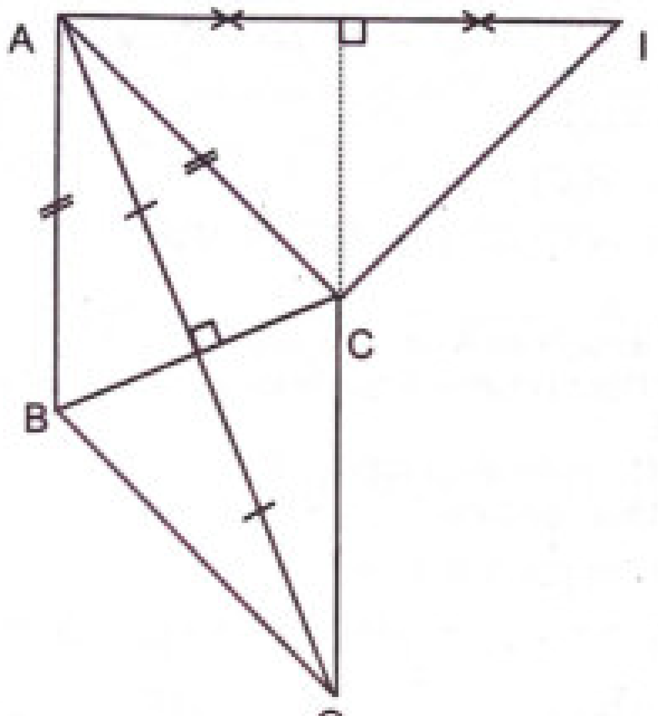
b. Montrer que I et J sont invariants par s. En déduire la nature de s.

c. En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1 : Bac C 2003 Session normale

1. Figure. On prendra AB = 5 cm.



2. On pose $f = r_C \circ r_A$.

a. Déterminons les images respectives des points A et B par f.

$f(A) = r_C \circ r_A(A) = r_A(A) = I$ $\qquad$ $f(B) = r_C \circ r_A(B) = r_A(C) = C$

b. Démontrons que f est une rotation et précisons son angle.

On a $\frac{\pi}{4}+(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{4} \neq 0$ donc f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

3. Démontrons que $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}) = \frac{\pi}{2}$.

$Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}) = \frac{\pi}{2}$

4. On appelle O le symétrique de A par rapport à (BC).

a. Démontrons que le quadrilatère ABOC est un losange.

On a : BA = BO ; CA = CO et AB = AC donc BO = OC = CA = AB.

O est le symétrique de A par rapport à (BC) donc (AO) est perpendiculaire à (BC).

En conclusion, ABOC est un losange.

b. Démontrons que O appartient à la médiatrice du segment [AI].

On a $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$ et les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont orthogonaux. (OC) est donc la hauteur issue de C du triangle ACI isocèle en C. D'où (OC) est la médiatrice de [AI].

5. Démontrons que O est le centre de la rotation f.

O appartient à la médiatrice de [BC] et à la médiatrice de [AI].

D'autre part, f(A) = I et f(B) = C donc le centre de rotation f appartient aux médiatrice de [AI] et [BC]. D'où O est le centre de f.

EXERCICE 2 : Bac C 1995 Session normale

1. Nature et éléments caractéristique de F.

$F = R' \circ S \circ R = R'_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)} \circ R_{(B;\pi)} \circ R_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$

car $S_B = R_{(B;\pi)}$ *: la symétrie de centre B est aussi la rotation de centre B et d'angle* π

la somme des angles donne : $\frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2} = \pi$. *Donc F est une rotation d'angle* π

Déterminons le centre de la rotation F.

On sait que $R'^{1}(B) = C \Rightarrow R(C) = B$

Donc $F(C) = R' \circ S \circ R(C) = R' \circ S(B) \Rightarrow F(C) = R'(B)$ *car* $S(B) = B$

D'où $F(C) = E$

Le triangle ABE est rectangle isocèle en A de sens indirect.

Les coordonnées de A(a,0) et B(a,a) montrent que le triangle OAB est rectangle isocèle en A de sens direct d'où S(A) = E

Le milieu de [EC] est le point Ω, centre de la rotation F.

2. Nature et éléments caractéristique de $S_{(D)} \circ F$

- Déterminer les coordonnées des points E, C et Ω

$$R(C) = B \Rightarrow z_B = iz_C \Rightarrow z_C = -iz_B = -i(a+ai) = a - ia \quad donc \quad \boxed{C(a;-a)}$$

Ecriture complexe de la rotation R' de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

L'écriture complexe :

$$z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}z + b = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)z + b = -iz + b$$

$$or \quad R'(A) = A \Leftrightarrow z_A = -iz_A = b \Rightarrow b = z_A(1+i) = a(1+i)$$

$$\boxed{b = a + ia}$$

Donc l'écriture complexe de R' est $z' = -iz + a + ia$

on a $R'(B) = E \Leftrightarrow z_E = -iz_B + a + ia = -i(a+ai) + a + ia = -ia + a + a + ia$

d'où $\boxed{z_E = 2a}$ *donc* $\boxed{E(2a\ ;\ 0)}$

Ω *est le milieu de* $[CE] \Rightarrow z_\Omega = \frac{z_E + z_C}{2} = \frac{2a + a - ia}{2} \Rightarrow z_\Omega = \frac{3a - ia}{2}$

donc $\Omega\left(\frac{3}{2}a; -\frac{a}{2}\right)$

(D) est la droite d'équation $y = -x + a$.

Soit $\vec{u}(1;-1)$ *un vecteur directeur de (D).*

Soit le vecteur $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{CE}.\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=-a+a \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{CE}.\vec{u}=0}$

Donc les droites (CE) et (D) sont perpendiculaires.

$y=-x+a \Rightarrow y_{\Omega}=-\dfrac{3}{2}a+a=-\dfrac{a}{2}$ *donc* $\Omega\in(D)$

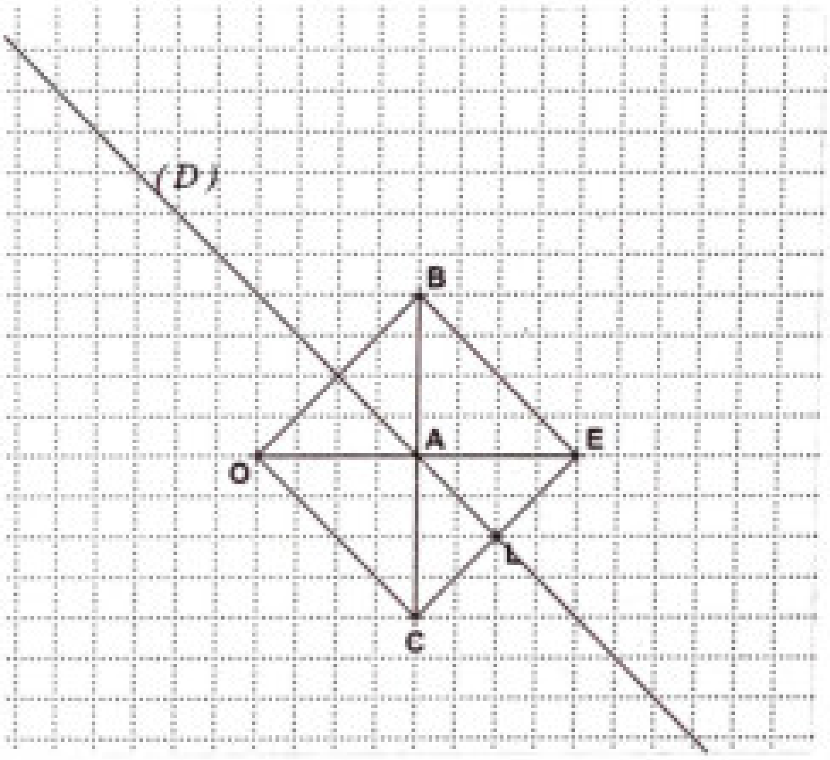
Les droites (CE) et (D) sont perpendiculaires en Ω. On peut donc écrire :

$S_{(D)}\circ F=S_{(D)}\circ R_{(\Omega;\pi)}=S_{(D)}\circ S_{(D)}\circ S_{(CE)}$

$S_{(D)}\circ F=S_{(CE)}$

En conclusion : $S_{(D)}\circ F$ est la symétrie orthogonale d'axe (CE)

Figure



EXERCICE 3 : Bac E 1996 Session de remplacement

1.

a. La composée d'une rotation d'angle non nul de mesure α et d'une translation est une rotation d'angle de mesure α.

Donc f est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$

b. Déterminons l'image de (C) par f = rot.

t(O) = O' et r(O') = O', donc f(O) = O'.

Par conséquent l'image de (C) par f est le cercle (C ') de centre O' et de rayon R

c. Déterminons Ω

f est la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

Comme f(O) = O' , Ω est tel que ΩOO' est un triangle équilatéral direct ; ce qui permet de construire Ω.

Construction de Ω (voir figure)

2. a. Nature du triangle $\Omega MM'$

$f(M) = M' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$; donc le triangle $\Omega MM'$ est un triangle isocèle où $mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{3}$. Il est donc un triangle équilatéral direct.

b. (ΩI) est la bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right)$, donc $mes\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}\right) = \frac{\pi}{6}$

ΩMI est un triangle rectangle en I et $mes\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}\right) = \frac{\pi}{6}$.

$S(M) = I \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Omega I = k\Omega M \\ mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$; or $k = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\Omega I}{\Omega M} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Cette similitude directe S , de centre Ω, a pour rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et pour angle de mesure $\frac{\pi}{6}$

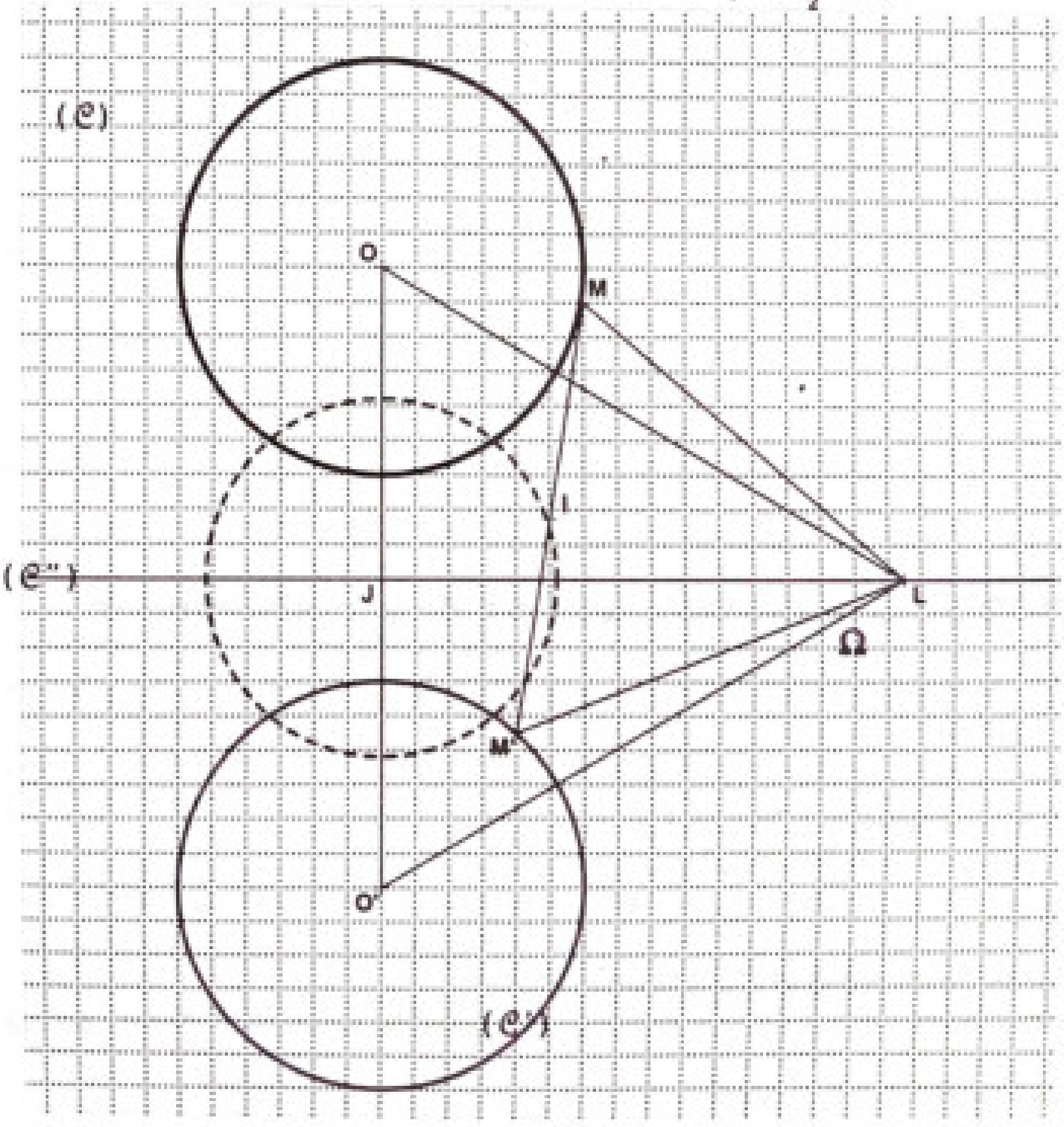
c. Déterminons $S(O)$

$\Omega OO'$ est un triangle équilateral direct.

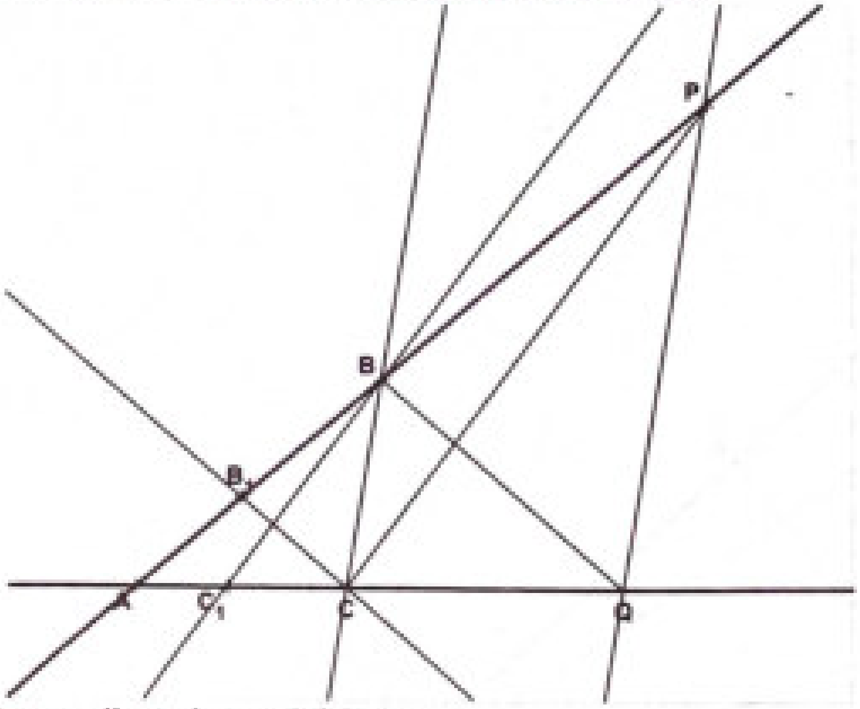
Soit J le milieu de $[OO']$, on a : $\begin{cases} \frac{\Omega J}{\Omega O} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ mes(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega J}) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$ donc $S(O) = J$

Lorsque M décrit le cercle (C), I décrit le cercle (C'') de centre J et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}R$.

Construction : On construit le cercle de centre J et de rayon $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.



EXERCICE 4 : Bac C 1997 Session normale



1. Justifions l'existence d'une homothétie h.

(BC) // (PQ) et (BP) ∩ (QC) = {A} ; donc il existe une homothétie h transformant P en B et Q en C. Son centre est A.

2. a. Construction de B_1 et de C_1 (voir figure ci-dessus)

h	
A	A
P	B
Q	C
B	B_1
C	C_1

- B_1 est tel que (BQ) // (CB_1) et $B_1 \in$ (AB)
- C_1 est tel que (BC_1) // (PC) et $C_1 \in$ (AC)

b ' Si k est le rapport de h alors $AC = |k|\,AQ$ et $BB_1 = |k|\,BP$

Or $AQ = BP$, donc $AC = |k|\,BP = BB_1$

Par conséquent, $AC = BB_1$.

3. RST est un triangle.

I et J sont deux points tels que : $\begin{cases} (IJ) \parallel (ST) \\ I \in (SR) \setminus \{S; R\} \\ J \in (RT) \\ RJ = SI \end{cases}$

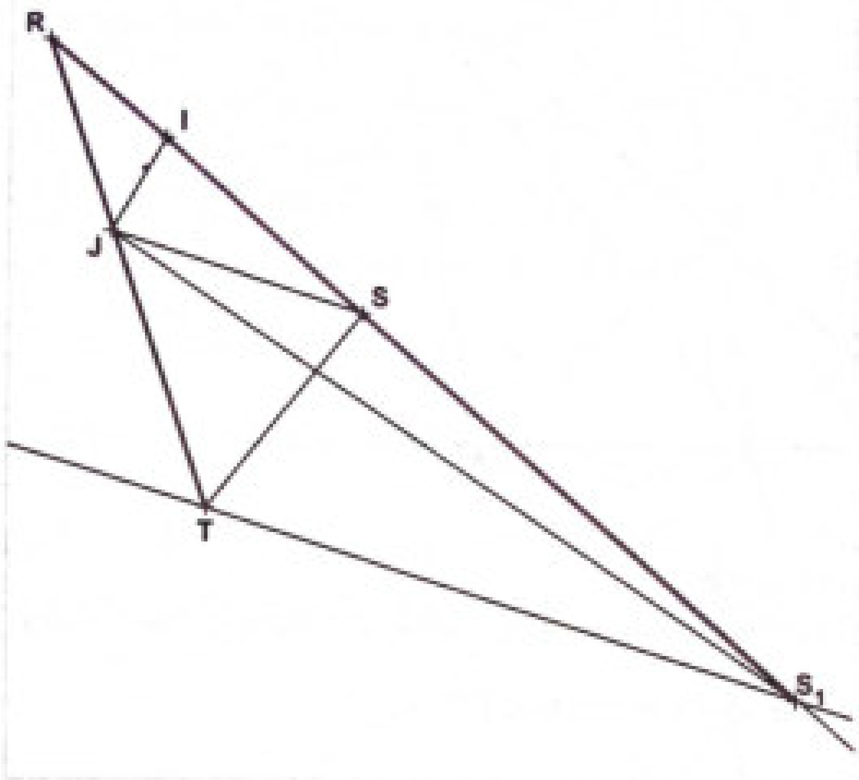
a. RST est un triangle isocèle en R.

Soit I et J les milieux respectifs de [SR] et [RT].

On a bien : $\begin{cases} (IJ) \parallel (ST) \\ I \in (SR) \setminus \{S; R\} \\ J \in (RT) \\ RJ = SI \end{cases}$

Les points I et J sont des solutions au problème posé.

b. RST est un triangle tel que $RS \neq RT$



Soit S_1 un point de [RS) tel que $SS_1 = RT$.
Soit J le point de (RT) tel que (SJ) // (TS_1)
I est le point de (RS) tel que (IJ) // (ST).
Soit h l'homothétie telle que :

Avec $SS_1 = RT$

h

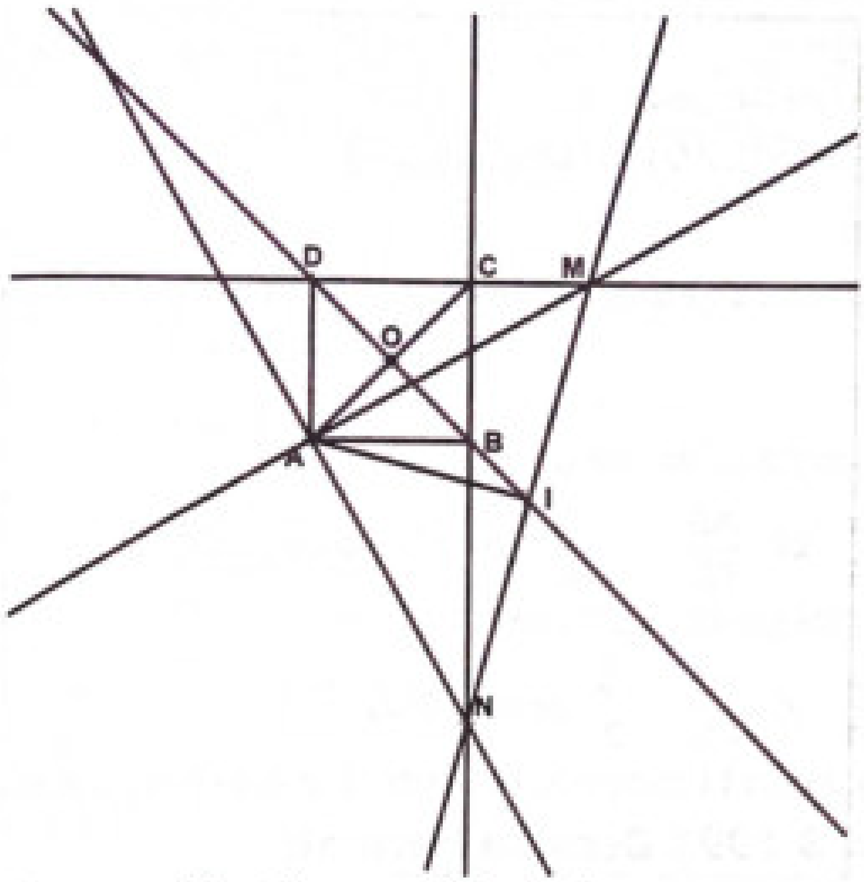
R	R
S_1	S
T	J
S	I

D'après les premières questions, en prenant : R pour A
J pour C
S pour B
I pour B_1

On a : SI = RJ

EXERCICE 5 : Bac C 1998 Session normale

1. figure



2. a. Démontrons que N est l'image de M par r.

r est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On sait que $\{M\}=(DC)\cap(AM)$.

L'image de la droite (AM) par r est la perpendiculaire à (AM) en A c'est-à-dire (AN).

L'image de la droite (AD) par r est la droite (AB) par définition de r.

(AD) est la perpendiculaire à (DC) en D.

Par conservation de l'orthogonalité, (AB) est la perpendiculaire en B à l'image de (DC) par r.

Or la perpendiculaire à (AB) en B est (BC).

Donc l'image de la droite (DC) par r est la droite (BC).

$\{M\}=(DC)\cap(AM)$

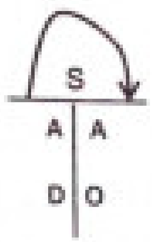
$\{ r(M) \}=(BC)\cap(AN)=\{N\}$ donc $r(M) = N$

b. Nature du triangle AMN

$r(M) = N \Leftrightarrow (AM = AN \text{ et } Mes(\widehat{\overline{AM},\overline{AN}}) = -\frac{\pi}{2})$

Donc le triangle AMN est rectangle isocèle en A

3. a.



Soit k le rapport de S. $S(D) = O \Rightarrow k = \frac{AO}{AD}$.

OAD est un triangle rectangle et isocèle en O. On a : $AD = \sqrt{2}\,AO$.

Donc $k = \frac{AO}{AD} = \frac{AO}{\sqrt{2}AO} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit θ la mesure principale de l'angle de S.

On a $S(D) = O \Rightarrow \theta = Mes(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AO}}) = \frac{1}{2}Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}\right)$

$\theta = Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AO}}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

Donc S est la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle de mesure principale $-\frac{\pi}{4}$

b. Image de C par S

ACB est un triangle rectangle et isocèle en B.

D'où $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) = -\frac{\pi}{4}$ et $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\boxed{S(C) = B}$

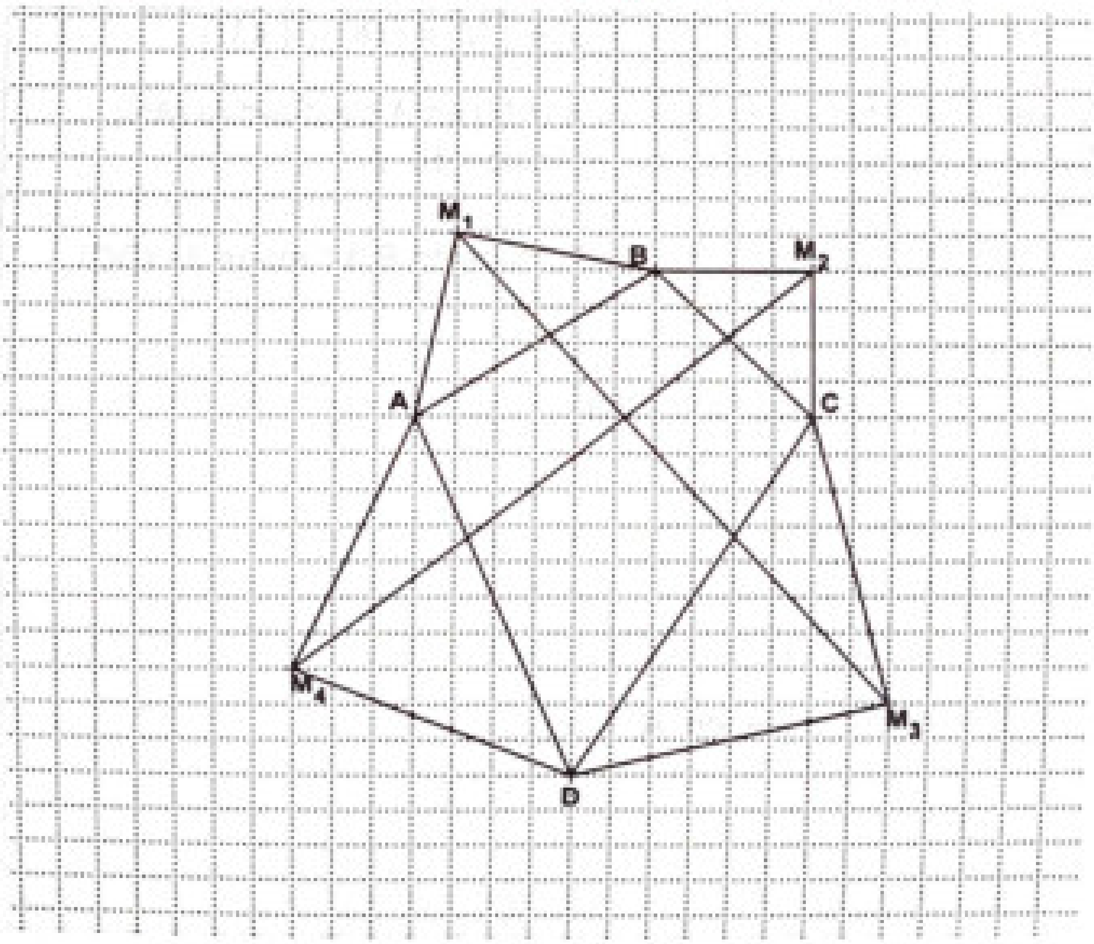
c. AMI est un triangle rectangle et isocèle en I.

D'où $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AI}}\right) = -\frac{\pi}{4}$ et $\frac{AI}{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\boxed{S(M) = I}$

d. Lorsque M décrit (DC), I décrit l'image de (DC) par S, c'est-à-dire (OB).

EXERCICE 6 : Bac E 1998 Session normale

1. L'orientation des angles est donnée par la figure de base.



a. On a :

$$\left.\begin{array}{l} M_1A = M_1B \\ \text{Mes}\left(\overline{M_1A, M_1B}\right) = \frac{\pi}{2} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \left|\frac{b-z_1}{a-z_1}\right| = 1 \\ \text{Arg}\left(\frac{b-z_1}{a-z_1}\right) = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{b-z_1}{a-z_1} = i$$

$$\Leftrightarrow b - z_1 = i(a - z_1)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{-b+ia}{-1+i}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{(b+a)+i(b-a)}{2}$$

b. Par le même procédé, on obtient :

$$z_2 = \frac{(c+b)+i(c-b)}{2}$$

$$z_3 = \frac{(d+c)+i(d-c)}{2}$$

$$z_4 = \frac{(a+d)^2+i(a-d)}{2}$$

2. le vecteur $\overrightarrow{M_1M_3}$ a pour affixe $z_3 - z_1 = \frac{(c+d-b-a)+i(a+d-c-b)}{2}$

Le vecteur $\overrightarrow{M_2M_4}$ a pour affixe $z_4 - z_2 = \frac{(a+d-b-c)+i(a+b-d-c)}{2}$

$$M_1M_3 = |z_3 - z_1| = \frac{1}{2}\sqrt{(c+d-b-a)^2+(a+d-c-b)^2}$$

$$M_2M_4 = |z_4 - z_2| = \frac{1}{2}\sqrt{(a+d-b-c)^2+(a+b-d-c)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a+d-b-c)^2+(c+d-a-b)^2}$$

Par conséquent, $M_1M_3 = M_2M_4$.

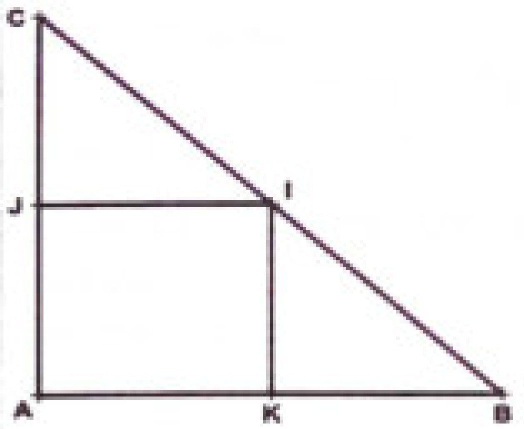
Les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont la même longueur. Par ailleurs,

$$\overrightarrow{M_1M_3}.\overrightarrow{M_2M_4} = \frac{1}{4}(c+d-b-a)(a+d-b-c) + \frac{1}{4}(c+b-c-d)(a+d-c-b)$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}.\overrightarrow{M_2M_4} = \frac{1}{4}(c+d-b-a)(a+d-b-c) - \frac{1}{4}(c+d-a-b)(a+d-b-c) = 0$$

Donc les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires.

EXERCICE 7 : Bac E 2000 Session normale



1. a. $f(K)=r(t(K))$

K et J étant les milieux respectifs de [AB] et [AC], on a $\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

(Droites des milieux) donc $t(K)=J$.

IJAK est un carré direct donc Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $IJ=IK.$

Par suite $r(J) = K$ D'où $f(K) = K$.

$g(J) = t(r(K)) = t(K)$ car $r(J) = K.$

$g(J)=J$ car $t(K)=J$ d'après ce qui précède.

b. La composée d'une rotation d'angle non nul α et d'une translation est une rotation d'angle α. Par conséquent, f est la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$; car K est invariant par f

g est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. a. f^{-1} est la rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ car la réciproque d'une rotation est une rotation de même centre et d'angle opposé.

La somme des angles de f^{-1} et de g étant nulle, gof^{-1} est une translation.

b. On a $\overline{KI} = \frac{1}{2}\overline{AC}$

IJAK est un carré, donc $Mes\widehat{\left(\overline{KA},\overline{KI}\right)} = -\frac{\pi}{2}$

$\begin{cases} KA = KI \\ Mes\widehat{\left(\overline{KA},\overline{KI}\right)} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ Donc $f^{-1}(A) = I$

Déterminons $g(I)$.

On a $JI = JC$ et $Mes\widehat{\left(\overline{JI},\overline{JC}\right)} = \frac{\pi}{2}$ Donc $g(I) = C$

Par conséquent, $gof^{-1}(A) = C$.

gof^{-1} est donc la translation de vecteur $\overline{AC}$.

3. D'après 2)b-, $f^{-1}(A) = I$ donc $f(I) = A$

$(KI) \perp (IJ)$ alors $f(KI) \perp f(IJ)$ donc $(KA) \perp f(IJ)$

$f(IJ)$ est la perpendiculaire à (KA) en A, c'est-à-dire (AC).

4. a. $\left[gof^{-1}(M_1) = M_2\right] \Leftrightarrow \left[\overline{MM_2} = \overline{AC}\right]$

Car gof^{-1} est la translation de vecteur $\overline{AC}$

b. $M \in (IJ) \Rightarrow M_1 \in (AC)$ car $f(IJ) = (AC)$ car d'après 3)

$\Rightarrow M_1, M_2, A$ et C sont alignés car $\overline{M_1M_2} = \overline{AC}$ d'après 4)a-

c. Puisque M n'appartient pas à (IJ) alors M_1, M_2, A et C sont non alignés d'après 4. b. Et puisque $\overline{M_1M_2} = \overline{AC}$ alors ACM_2M_1 est un parallélogramme.

EXERCICE 8 : Bac E 2001 Session normale

1. a. Désignons par S la symétrie orthogonale d'axe (AB).

On a le tableau de correspondance suivant : $\xrightarrow{S}$

A	A
B	B
C	D

Or S est un antidéplacement et ABC un triangle équilatéral direct ; donc ABD est un triangle équilatéral indirect. On en déduit que : $r(D) = r_2\left[r_1(D)\right] = r_2(B) = B$.

b. On a : r_1 est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$; r_2 est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$

donc $r_2 o r_1$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\pi$. C'est-à-dire une symétrie centrale.

Or $r(D)=B$; donc r est la symétrie centrale de centre Ω, milieu de [BD].

2. a. Si $M=\Omega$ alors M = M' et les points M, N et M' sont alignés.
Si M = A alors M = N et les points M, N et M' sont alignés.
Supposons dans la suite que $M \neq \Omega$ et $M \neq A$

On a alors $M \neq N$ et $M \neq M'$

D'après l'égalité de Chasles, on a : $\left(\overline{M\Omega}, \overline{MA}\right)=\left(\overline{M\Omega}, \overline{MN}\right)+\left(\overline{MN}, \overline{MA}\right)$

Or $\overline{M\Omega}=\frac{1}{2}\overline{MM'}$ car Ω est le milieu du segment [MM'] ; donc

$\left(\overline{M\Omega}, \overline{MA}\right)=\left(\overline{MM'}, \overline{MN}\right)+\left(\overline{MN}, \overline{MA}\right)$

Les points M, N et M' sont alignés si, seulement si, $\left(\overline{MM'}, \overline{MN}\right)\equiv 0[\pi]$.

Or $\left(\overline{MN}, \overline{MA}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ car $r_1(M)=N$;

Donc M, N et M' sont alignés si, seulement si, $Mes\left(\overline{M\Omega}, \overline{MA}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]$.

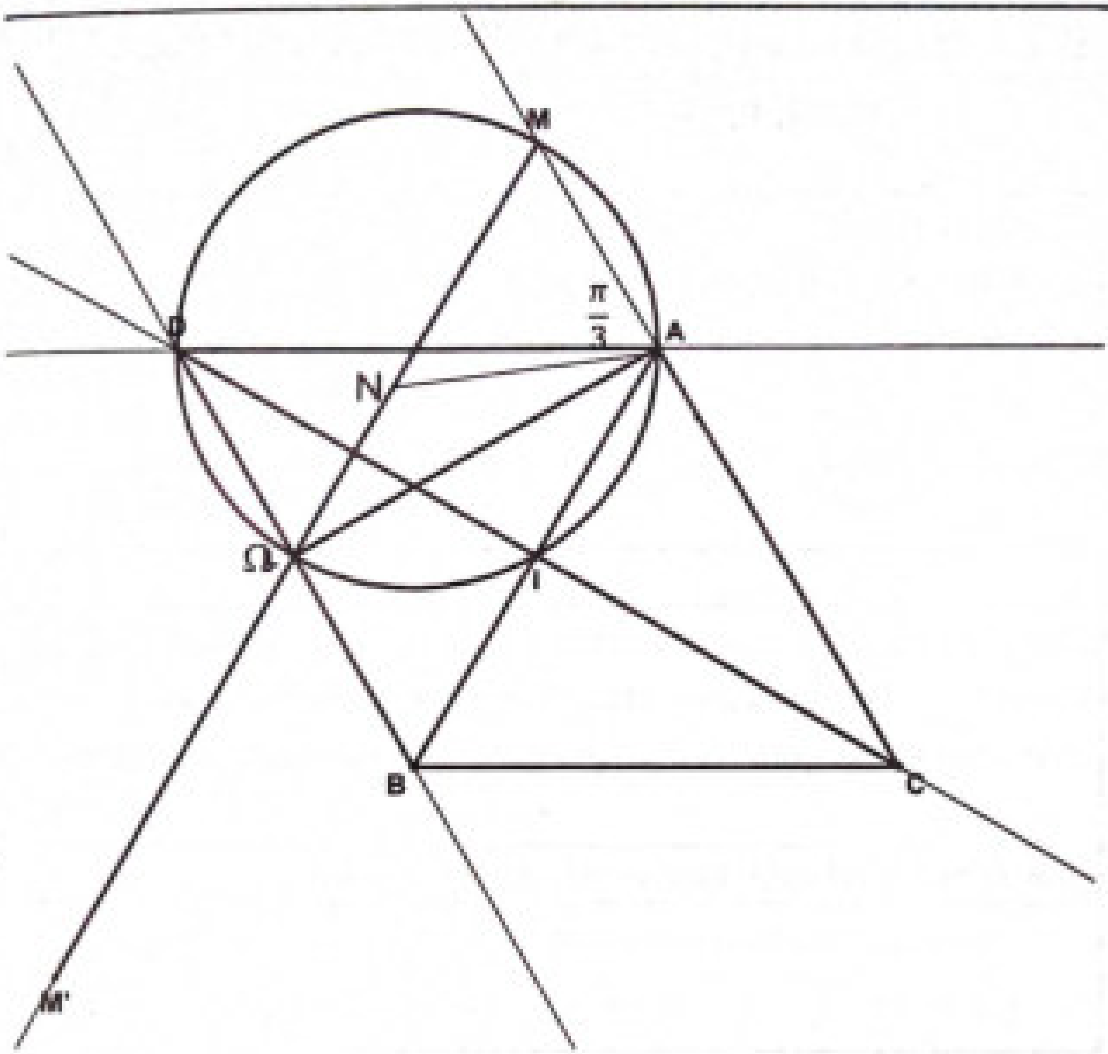
On sait que l'ensemble des points M tels que $Mes\left(\overline{M\Omega}, \overline{MA}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]$ est le cercle (Γ) formé des deux arcs capables d'extrémités Ω et A et de mesures respectives $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$. On déduit de cette étude que l'ensemble des points M tels que M, N et M' soient alignés est le cercle (Γ) tout entier.

b. On sait que ADB est un triangle équilatéral direct et que Ω est le milieu de [BD] ; donc $Mes\left(\overline{DB}, \overline{DA}\right) = Mes\left(\overline{D\Omega}, \overline{DA}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

On en déduit que D appartient (Γ).

(Γ) est donc le cercle circonscrit au triangle ADΩ rectangle en Ω D'où [AD] est un diamètre de (Γ)

On sait que le triangle ADΩ est rectangle en Ω et que le triangle ADI est rectangle en I.
Donc les points A, D, Ω et I"sont cocycliques. On en déduit que I appartient à (Γ).


M
D
A
N
Ω
I
B
C
M'

CHAPITRE V : SIMILITUDES PLANES DIRECTES

FICHE DE COURS

Définition

k est un nombre réel strictement positif.

• On appelle similitude de rapport k et d'angle θ, toute transformation du plan telle que : pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : M'N' = k.MN et $\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}\right) = \theta$

• On appelle similitude directe de rapport k, toute similitude qui conserve l'orientation des angles.

Propriétés

Toute similitude directe de rapport k est soit une translation, soit une rotation, soit une homothétie de rapport k, soit la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport k, ou la composée d'une homothétie de centre O et de rapport k, d'une rotation de centre O et d'une translation.

Ecriture complexe d'une similitude directe

Toute similitude directe du plan a une écriture complexe de la forme :

$Z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et rapport $k = |a|$ où $a = ke^{i\theta}$ ou bien

$Z' = Z_\Omega + ke^{i\theta}(Z - Z_\Omega)$

Eléments caractéristiques

Toute similitude directe du plan, sauf la translation, est déterminée par son centre, son rapport et son angle orienté.

Propriétés

Toute similitude directe admet pour point invariant son centre Ω.

La composée de la similitude directe S de rapport k et d'angle orienté θ et de la similitude directe S' de rapport k' et d'angle orienté θ' est la similitude directe de rapport k.k' et d'angle orienté θ + θ'

La réciproque de la similitude directe S de rapport k et d'angle orienté θ est la similitude directe S^{-1} de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle orienté $-\theta$

Toute similitude directe de rapport k,

Conserve : le parallélisme, l'alignement, l'orthogonalité, les angles orientés, les barycentres, le contact….

Multiplie : les longueurs par k ; les aires par k^2

Transforme : les droites en droites, les segments en segments, les cercles en cercles, les figures géométriques en figures géométriques de même nature.

EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1 : Bac C 1996 Session normale

L'unité choisie est le centimètre.
Dans le plan orienté, on considère deux points A et O tels que AO = 1,5.
Soit f la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$

1. On pose $B=f(A)$ et $C=f(B)$.
a. Construire les points B et C.
b. Démontrer que $\frac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ et que BC = 2BA.
En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Soit R la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$
On désigne par D, E et F les points tels que : B = R(D), E = R(C) et F = f(D).
a. Construire les points E, D puis F.
b. Démontrer que les points A, D, B et O sont cocycliques.
En déduire que B, F, C et O sont cocycliques.
c. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABD ;
$\mathscr{C}'$ le cercle circonscrit au triangle BCF ;
$\mathscr{C}''$ le cercle circonscrit au triangle ACE ;
Démontrer que ces trois cercles ont le point O en commun.

EXERCICE 2 : Bac C 2001 Session normale

Le quadrilatère OHKL est un rectangle de sens direct tel que : OH = 2LO.
La médiatrice de [OK] coupe (OH) en E et (OL) en F.
Le cercle (C) de centre E passant par O recoupe (OH) en A.
Le cercle (C') de centre F passant par O recoupe (OL) en O'.
S est la similitude directe qui applique A sur O et O sur O'.

1. Démontrer que l'angle de S mesure $-\frac{\pi}{2}$
2. Démontrer que : $(C)\cap(C')=\{O;K\}$
3. Déterminer le centre de la similitude S
4. Démontrer que : S(H) = L et en déduire le rapport de S.
5. Déterminer l'image du point E par S
6. Soit M un point de (OH) distinct des points O et A.
on admet que le cercle passant par O, K et M recoupe (OL) en M'.
Démontrer que : S(M)=M'.

EXERCICE 3 : Bac C 1994 Session de remplacement

Dans le plan orienté, on désigne par (C_1) et (C_2) deux cercle de centres O_1 et O_2, de rayons respectifs 2 et 5 et sécants en I et J tels que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{IO_1},\overrightarrow{IO_2}}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

1. Faire une figure (unité : 1 cm)
2. Soit s une similitude directe plane transformant (C_1) en (C_2).
a. Quel est le rapport d'une telle similitude ?

b. Si N est le centre de s, quelle est la valeur du rapport $\frac{NO_2}{NO_1}$?

c. Déterminer et construire avec soin l'ensemble (Γ) des centres N des similitudes directes transformant (C_1) en (C_2)

3. On considère maintenant la similitude plane directe S de centre I transformant (C_1) en (C_2).

Faire une deuxième figure ne faisant pas apparaître (Γ).

a. Soit M_1 un point de (C_1) et M_2 son image par S.

b. Placer un point M_1 sur (C_1), construire alors M_2.

4. Une droite (D) passant par J recoupe (C_1) en B_1 $(B_1 \neq M_1)$ et (C_2) en B_2.

a. Pourquoi les droites (B_1M_1) et (B_2M_2) sont- elles sécantes ?

b. On désigne par P le point d'intersection de (B_1M_1) et (B_2M_2).

Démontrer que les points I, B_1, B_2 et P sont cocycliques.

EXERCICE 4

Dans le plan complexe, on donne T_1 la transformation du plan d'écriture complexe $z' = (1-i)z - i$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T_1.
2. Soit T_2 la transformation du plan d'écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

a. Déterminer a et b pour que $T_1 o T_2$ soit l'homothétie de centre A d'affixe $1+i$ et de rapport 2.

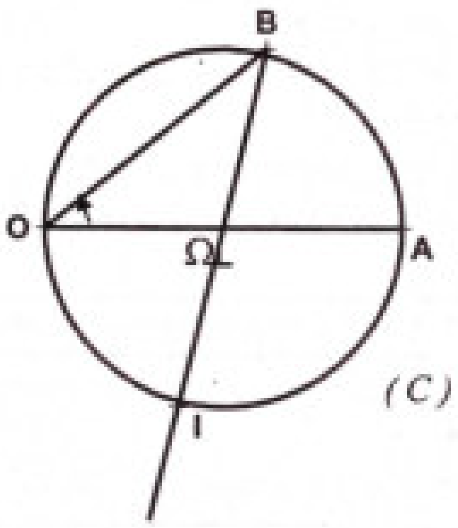
b. Déterminer a et b pour que $T_1 o T_2$ soit la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2-i$.

EXERCICE 5

Sur la figure ci-dessous, O, A et B sont trois points du plan orienté tels que: Mes$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{4}$.

Le cercle (C), de centre Ω, est le cercle circonscrit au triangle OAB.

On désigne par I le point diamétralement opposé à B sur (C).



1. On appelle S la similitude directe de centre I qui transforme A en B.

a. Déterminer l'angle de la similitude S.

b. Justifier que le triangle IAB est rectangle isocèle direct ?
c. En déduire le rapport de la similitude S.
2. On appelle G le point défini par la relation $\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$
La droite (IG) coupe (C) en K.
On appelle S' la similitude directe de centre K qui transforme A en B.
a. Déterminer l'angle de la similitude S'
b. On se propose de déterminer le rapport de la similitude S'.
b1. Démontrer l'égalité: $KA \times KB = -\frac{\sqrt{2}}{2} KA \times KA$
b2. On désigne par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BK).
Exprimer KH en fonction de KB
b3. En déduire que $KA \times KB = -\frac{1}{2} KB^2$.
Déterminer le rapport de la similitude S'.

EXERCICE 6

On considère deux triangles équilatéraux ABC et ANP de sens direct tels que le point N soit le milieu de [BC].
Soit S la similitude directe de centre A qui applique B sur N.
On note Q le milieu de [NP].
1. Faire une figure
2. a. Déterminer le rapport de la similitude S.
   b. Déterminer la mesure principale de l'angle orienté de S.
3. a. Justifier que P est l'image de C par S.
   b. Justifier que S(N) = Q.
4. On considère le plan complexe muni du repère orthonormé (O, I, J) tels que
A (2) ; $B(-1+i\sqrt{3})$ et $C(-1+i\sqrt{3})$
a. Calculer l'affixe du point N.
b. Déterminer la transformation complexe associée à S.
c. Calculer les affixes des points P et Q.

EXERCICE 7 : Bac C 1999 Session normale

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) ; unité : 1 cm.

PARTIE A

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3-\left(6+i\sqrt{3}\right)z^2+\left(11+4i\sqrt{3}\right)z-6-3i\sqrt{3}=0$$

1. Résoudre cette équation en cachant qu'elle à deux solutions réelles.
2. On appelle A, B, C, E et G les points d'affixes respectives 3 ; $2+i\sqrt{3}$; -1 ; 7 et $11+4i\sqrt{3}$
a. Démontrer que le triangle IAB est équilatéral.
b. Démontrer que les points B, C et G sont alignés.
c. Placer les points A, B, C, E et G.
3. Calculer l'affixe du point F de l'axe des abscisses tel que le triangle EFG est équilatéral.

PARTIE B

On appelle O' le centre de gravité du triangle IAB.

1. On veut déterminer l'homothétie h qui transforme le triangle IAB en EFG.

a. Démontrer que l'image par h de [IA] est [EF].

b. Justifier que : $h(I) = E$, $h(A) = F$ et $h(B) = G$.

c. Déterminer le centre et le rapport de h.

2. Soit r la rotation de centre O' et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et f la similitude directe telle que : $f = h \circ r$

a. Déterminer le rapport et l'angle de f.

b. Démontrer que f transforme le triangle IAB en EFG.

3. Soit g une similitude directe qui transforme IAB en EFG.

a. Démontrer que $h^{-1} \circ g$ est une rotation qui laisse le triangle IAB globalement invariant (c'est-à-dire que le triangle IAB a pour image lui-même)

b. Caractériser les trois rotations qui laissent globalement invariant le triangle IAB.

c. En déduire que les similitudes directes qui transforment IAB en EFG sont h, f et une troisième f' que l'on décomposera à l'aide de h et de r.

d. Déterminer le rapport et l'angle de f'

4. Soit Ω le centre de la similitude f. On appelle K le milieu du segment [IA].

a. Déterminer l'image K' de K par f.

b. Démontrer que Ω, A, G et F sont cocycliques.

c. Démontrer que Ω, A, F, K et K' sont cocycliques.

d. Construire Ω.

5. Déterminer l'application complexe associée à f'.

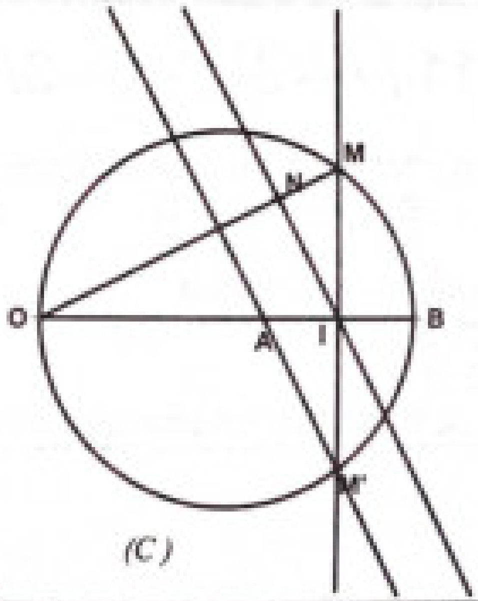
6. Calculer l'affixe du centre Ω' de f'

EXERCICE 8

On considère dans le plan (P) un cercle de diamètre [OB].

Soit A un point du segment [OB], distinct de O et de B ; I le milieu de [AB].

La médiatrice du segment [AB] coupe le cercle en M et M' tels qu'une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}})$ soit $\frac{\pi}{2}$. Soit N le projeté orthogonal de A sur (OM).



1. Donner la nature du quadrilatère AMBM'.
En déduire que la droite (AM') est orthogonale à (OM) et que N, A et M' sont alignés.
2. On appelle S la similitude directe de centre N, telle que S(M) = A.
Préciser l'angle de cette similitude.
Déterminer les images par S des droites (MI) et (NA).
En déduire l'image par S du point M';
3. Montrer que l'image par S de I est le point I', milieu de [OA].
En déduire que la droite (NI) est tangente en N au cercle de diamètre [OA].

EXERCICE 9 : Bac C 2005 Session Normale

L'unité graphique est le centimètre.
A et B sont deux points du plan tels que **AB = 6**.
G_1 est le barycentre des points pondérés **(A ; 1)** et **(B ; 3)**.
G_2 est le barycentre des points pondérés **(A ; 1)** et **(B ; - 3)**.
1. a. Construire les points G_1 et G_2.
b. Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $MA^2 - 9MB^2 = 0$ est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.
c. Construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $Mes\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{3}$.

2. Soit C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$;

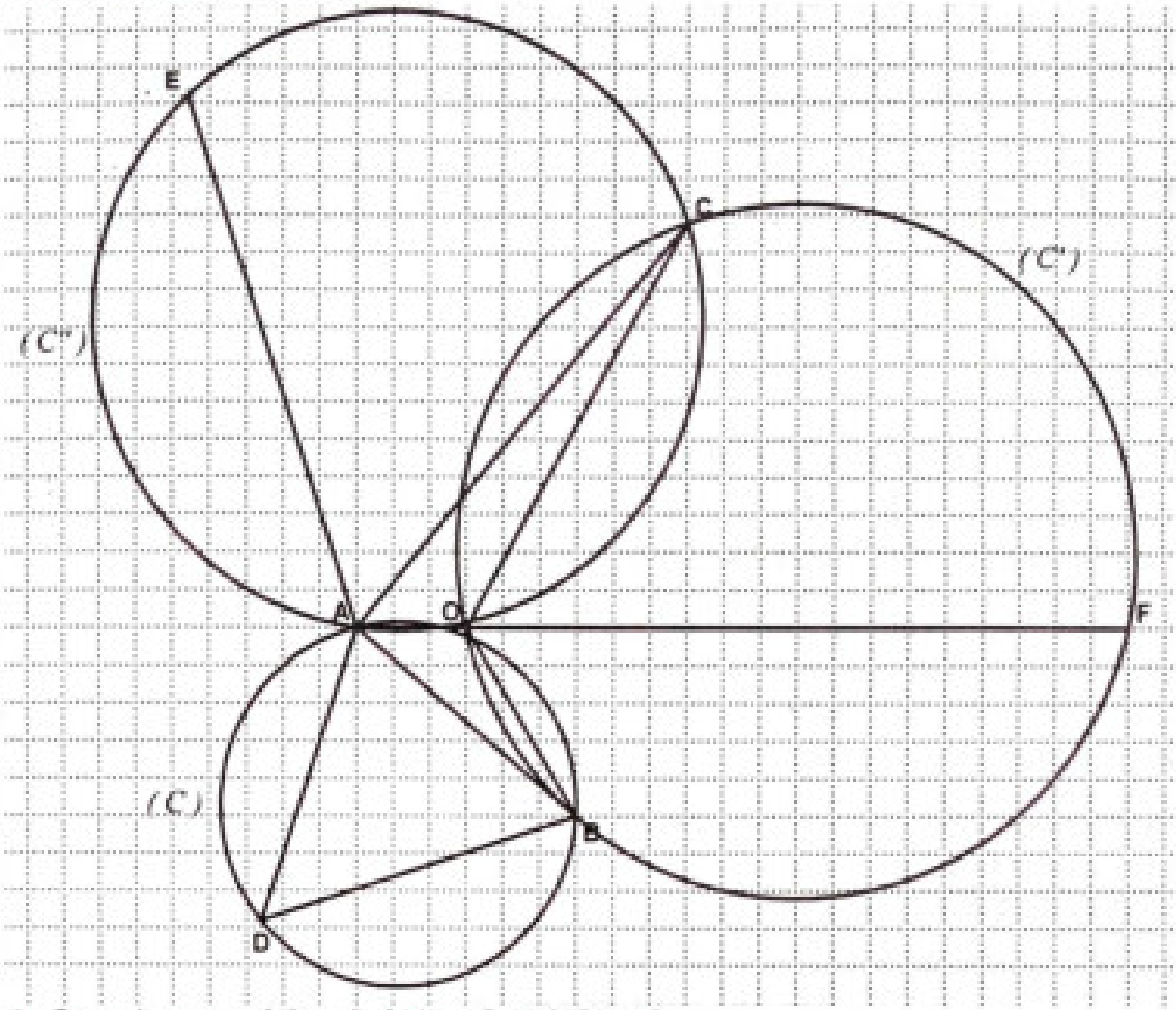
D l'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.

S la similitude directe qui applique A sur B et C sur D.
a. Construire les points C et D.
b. Calculer le rapport de S.
c. Justifier qu'une mesure de l'angle de S est $\frac{\pi}{3}$.
3. On note Ω le centre de S.
a. Démontrer que Ω appartient à (Γ) et (E). Placer Ω.
b. Démontrer que $Mes\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = -\frac{2\pi}{3}$.
c. En déduire que les points A, C, D et Ω appartiennent à un même cercle $(\mathscr{C})$.
Construire $(\mathscr{C})$.

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1 : Bac C 1996 Session normale

1. a. Construction des points



b. On sait que : $f(0)=0; f(A)=B$ *et* $f(B)=C$

f est la similitude directe d' angle de centre O et de rapport 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{BC}{AB}=2 \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=\dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

• *On a :* $\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BA}}\right)=-\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AB};-\overrightarrow{AB}}\right)$

$$=-\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)+\pi+\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB}}\right)=-\frac{2\pi}{3}+\pi$$

Donc $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right)=-\dfrac{2\pi}{3}+\pi$

$$\boxed{Mes\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right)=\frac{\pi}{3}}$$

• *et* $\dfrac{BC}{AB}=2 \Rightarrow \boxed{BC=2AB}$

• *Montrons que le triangle ABC est rectangle en A.*

D'après le théorème d'Al Kashi, on a

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)$$

$$= AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC \times \frac{1}{2}$$

$$= AB^2 + BC^2 - AB.BC \quad \text{or } BC = 2AB$$

$$= AB^2 + BC^2 - 2AB^2 = BC^2 - AB^2$$

$\Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2$. *D'après la réciproque de la propriété de pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.*

2. a- Constructions des points E, D et F. (voir figure)

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{R}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ D & B \\ C & E \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f}{\curvearrowright}} \\ \hline O & O \\ D & F \end{array}$$

R est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} AD = AB \\ \text{et} \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

de même $\begin{cases} AC = AE \\ \text{et} \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

b- Montrons que les points A, D, B et O sont cocycliques

le triangle ABD est isocèle en A et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{3}$; *donc*

le triangle ABD est équilatéral d'où $\boxed{Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DA}}\right) = Mes\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD}}\right) = Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{3}}$ (1)

f est la similitude direct de centre O, d'angle $\frac{2\pi}{3}$ *et de rapport* $2 \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{OB}{OA} = 2 \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

On a : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}\right) = -\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boxed{Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}\right) = \frac{\pi}{3} + \pi}$ (2)

Les relations (1) et (2) donnent : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}\right) = Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DA}}\right) + \pi$;

donc les points A, B, D, O sont cocycliques.

Comme l'image d'un cercle par une similitude directe est un cercle, alors les points B, C, F et O images respectives de A, B, D et O par f sont cocycliques.

c . On sait que A, B, D et O sont cocycliques ; de même B, C, F et O sont cocycliques ; donc les deux cercles (C) et (C') ont un point commun qui est le point O.

Démontrons que O appartient à (C")

$$R(C) = E \iff \begin{cases} AC = AE \\ Mes\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right) = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

ACE est un triangle isocèle et $Mes\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

donc ACE est un triangle équilatéral.

D'où, on a : $Mes\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right) = Mes\left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CA}\right) = Mes\left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

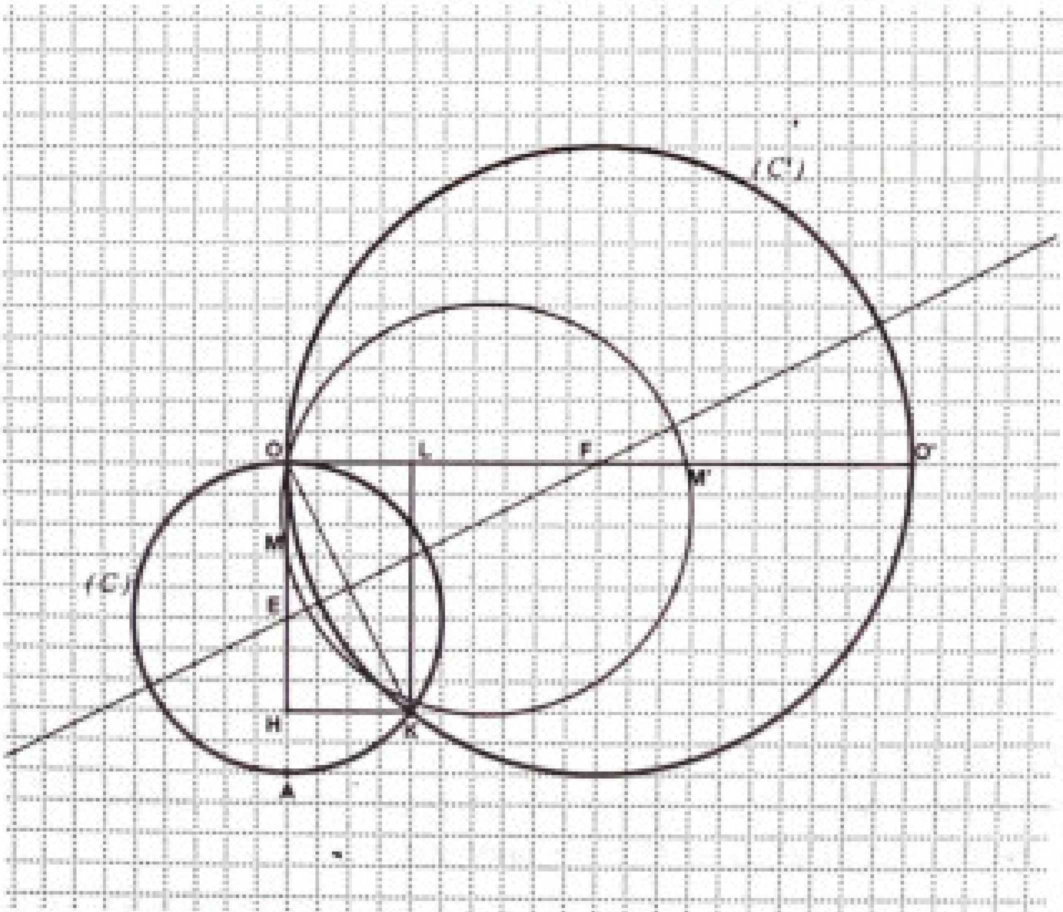
donc $\boxed{Mes\left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}\right) = \dfrac{\pi}{3}}$ (1)

$$Mes\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) = Mes\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) + Mes\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$$

$$Mes\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) = \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi = Mes\left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}\right) + \pi$$

Au total A, C, E et O sont cocycliques. Le point O appartient à (C")
donc les cercles (C), (C') et (C") ont le même point O en commun.

EXERCICE 2 : Bac C 2001 Session normale



1. Soit θ l'angle de la similitude directe S.

comme

$\xrightarrow{S}$

A	O
O	O'

Alors $\theta = \text{mes}\overline{\left(AO,OO'\right)} = \text{mes}\overline{\left(HO,HK\right)} = -\,\text{mes}\overline{\left(HK,HO\right)}$

$\theta = -\frac{\pi}{2}$ Car le rectangle OHKL est de sens direct :

Donc l'angle de S est $-\frac{\pi}{2}$

2. Par hypothèse, les cercles (C) et (C'), de centres respectifs E et F, passent par O.

De plus, la droite (EF) est la médiatrice du segment [OK].

D'où $EO=EK$ et $FO=FK$

On en déduit que K appartient aux cercles (C) et (C'). Donc $(C)\cap(C')=\{O;K\}$

3. Dans [OA] et [OO '] sont respectivement des diamètres des cercles (C) et (C').

Soit Ω le centre de S. Puisque :

$\xrightarrow{S}$

Ω	Ω
A	O
O	O'
(ΩA)	(ΩO)
(ΩO)	$(\Omega O')$

Alors $(\Omega O)\perp(\Omega A)$ et $(\Omega O')\perp(\Omega O)$ car $-\frac{\pi}{2}$ est l'angle de S.

On en déduit que : $\Omega\in(C)\cap(C')$

Par conséquent, $\Omega = O$ ou $\Omega = K$ (d'après 2). O n'est pas invariant par S.

Il s'ensuit que $\Omega = K$. Donc le centre de S est le point K.

4. H appartient à (OA) et à la perpendiculaire à (OA) passant par K.
Donc S(H) appartient à (OO') image de (OA) par S.
S(M) appartient à la perpendiculaire à (OO') passant par S(K), c'est-à-dire (LK).
Donc S(H)=L.

Soit α le rapport de S

Comme

$\xrightarrow{S}$

K	K
H	L

Alors $\alpha = \frac{KL}{KH}$ .or KL = HO = 2LO et KH = LO

D'où : $\alpha = \frac{2LO}{LO} = 2$.

Le rapport de S est donc 2.

5. Comme

$$\begin{cases} S(A) = O \\ S(K) = K \\ S(O) = O' \end{cases}$$

Alors l'image de (C) par S est le cercle (C').

Par conséquent, l'image du centre de (C) par S est le centre de (C'), c'est-à-dire F.

6. Les points K, M, O et M' sont cocycliques, donc

$2\,\overline{(\overline{KM},\overline{KM'})} = 2\,\overline{(\overline{OM},\overline{OM'})}$ (1)

Comme $M \in (OH)$, $M' \in (OL)$ et $(OH) \perp (OL)$, alors

$$2\,Mes\overline{(\overline{OM},\ \overline{OM'})} = \pi.$$

De plus, $Mes\overline{(\overline{KM},\ \overline{KS(M)})} = -\frac{\pi}{2}$. Alors $2Mes\overline{(\overline{KM},\overline{KS(M)})} = \pi$

d'où $2Mes\overline{(\overline{OM},\overline{OM'})} = 2Mes\overline{(\overline{KM},\overline{KS(M)})}$

De l'égalité (1) on déduit $2\overline{(\overline{KM},\ \overline{KM'})} = 2\overline{(\overline{KM},\ \overline{KS(M)})}$.

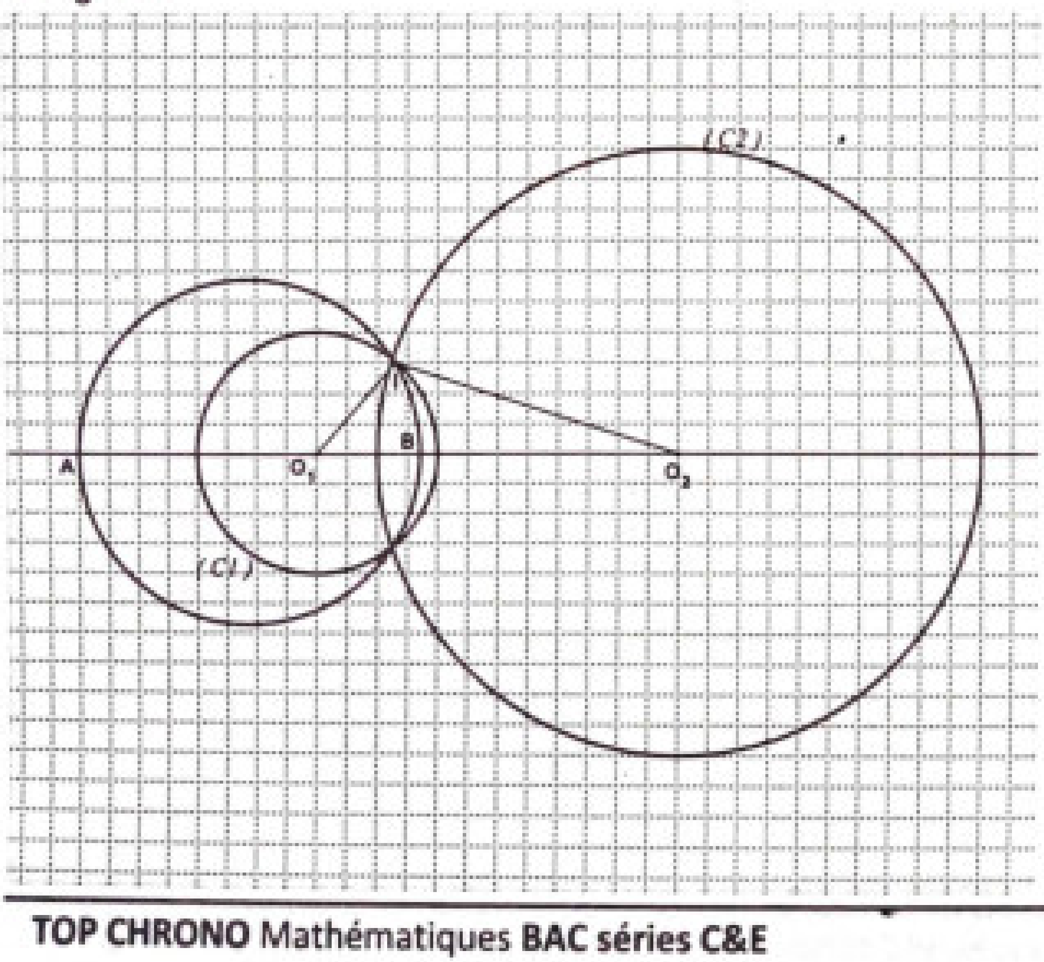
D'où S(M) appartient à (KM').

Puisque $M \in (AH)$ et (AH) = (OH), alors S(M) appartient à (OL) image de (AH) par S.

Ainsi S(M) appartient à $(KM') \cap (OL) = \{M'\}$. Par conséquent, S(M) = M'.

EXERCICE 3 : Bac C 1994 Session de remplacement

1. Figure 1



2. a. Le rapport de la similitude est :
Soit k le rapport de la similitude S. On a : $S(C_1) = (C_2)$

$$\Leftrightarrow \quad kr_1 = r_2 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{r_2}{r_1} \Leftrightarrow \quad k = \frac{5}{2}$$

b. N est le centre de la similitude S donc $S(N) = N$.

Or $S(O_1) = O_2$ donc le rapport $\dfrac{NO_2}{NO_1} = k = \dfrac{5}{2}$

c. On sait que $S(N) = N$ et $S(O_1) = O_2$ d'où

$$\frac{NO_2}{NO_1} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2NO_2 = 5NO_1 \Leftrightarrow 4NO_2^{\,2} = 25NO_1^{\,2}$$

$$\Leftrightarrow 4NO_2^{\,2} - 25NO_1^{\,2} = 0 \Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{NO_2} - 5\overrightarrow{NO_1}\right)\left(2\overrightarrow{NO_2} + 5\overrightarrow{NO_1}\right) = 0$$

Soit A le barycentre des points pondérés $(O_2 ; 2)$ et $(O_1 ; -5)$ et soit B le barycentre des points pondérés $(O_2 ; 2)$ et $(O_1 ; 5)$. On a :

$$2\overrightarrow{NO_2} - 5\overrightarrow{NO_1} = 2\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{AO_2} - 5\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{AO_1} = -3\overrightarrow{NA} \quad \text{car } 2\overrightarrow{AO_2} - 5\overrightarrow{AO_1} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{NO_2} + 5\overrightarrow{NO_1} = 2\overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{BO_2} + 5\overrightarrow{NB} + 5\overrightarrow{BO_1} = 7\overrightarrow{NB} \quad \text{car } 2\overrightarrow{BO_2} + 5\overrightarrow{BO_1} = \vec{0}$$

$$\left(2\overrightarrow{NO_2} - 5\overrightarrow{NO_1}\right)\left(2\overrightarrow{NO_2} + 5\overrightarrow{NO_1}\right) = \left(-3\overrightarrow{NA}\right)\left(7\overrightarrow{NB}\right) = -21\,\overrightarrow{NA}\overrightarrow{NB}$$

donc $\left(2\overrightarrow{NO_2} - 5\overrightarrow{NO_1}\right)\left(2\overrightarrow{NO_2} + 5\overrightarrow{NO_1}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -21\overrightarrow{NA}\overrightarrow{NB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{NA}\overrightarrow{NB} = 0$

Soit K le milieu du segment [AB]; on a : $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KB} \Rightarrow \overrightarrow{KA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

On a :

$$\overrightarrow{NA}\overrightarrow{NB} = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KA}\right)\left(\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KB}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KA}\right)\left(\overrightarrow{NK} - \overrightarrow{KA}\right) = 0 \Rightarrow NK^2 - KA^2 = 0 \Rightarrow NK = KA$$

Donc l'ensemble (Γ) est le cercle de centre K et de rayon KA où le cercle de diamètre [AB]

3. a -On a $S(I) = I$; $S(O_1) = O_2$ et $S(M_1) = M_2$.
D'après le théorème des angles inscrits, on a :

$$2\left(\overrightarrow{JM_1}, \overrightarrow{JI}\right) = \left(\overrightarrow{O_1M_1}, \overrightarrow{O_1I}\right) \quad \text{et} \quad 2\left(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JM_2}\right) = \left(\overrightarrow{O_2I}, \overrightarrow{O_2M_2}\right) \qquad (1)$$

En ajoutant membre à membre les deux relations (1), et en appliquant l'égalité de Chasles, on a : $2\left(\overrightarrow{JM_1}, \overrightarrow{JI}\right) + 2\left(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JM_2}\right) = \left(\overrightarrow{O_1M_1}, \overrightarrow{O_1I}\right) + \left(\overrightarrow{O_2I}, \overrightarrow{O_2M_2}\right)$

$$2\left(\overrightarrow{JM_1}, \overrightarrow{JM_2}\right) = \left(\overrightarrow{O_1M_1}, \overrightarrow{O_1I}\right) + \left(\overrightarrow{O_2I}, \overrightarrow{O_2M_2}\right)$$

Comme la similitude directe conserve les angles orientés, on a $\left(\overrightarrow{O_1I}, \overrightarrow{O_1M_1}\right) = \left(\overrightarrow{O_2I}, \overrightarrow{O_2M_2}\right)$

Donc, on a : $2\left(\overrightarrow{JM_1}, \overrightarrow{JM_2}\right) = \left(\overrightarrow{O_1M_1}, \overrightarrow{O_1I}\right) + \left(\overrightarrow{O_1I}, \overrightarrow{O_1M_1}\right)$. On obtient : $2\left(\overrightarrow{JM_1}, \overrightarrow{JM_2}\right) = \widehat{(0)}$

En conclusion, les points J, M_1, et M_2 sont alignés.
b. voir figure à la fin
4. a. L'image du point B_1 est un pont du cercle (C_2) qui est aligné avec J et B_1 ; C'est donc B_2.
On a: $S(M_1) = M_2$ et $S(B_1) = B_2$ donc $S(M_1B_1) = (M_2B_2)$.

La droite (B_2M_2) est l'image de la droite (B_1M_1) par la similitude S.

Comme S est une similitude directe d'angle $\frac{2\pi}{3}$ alors les droites

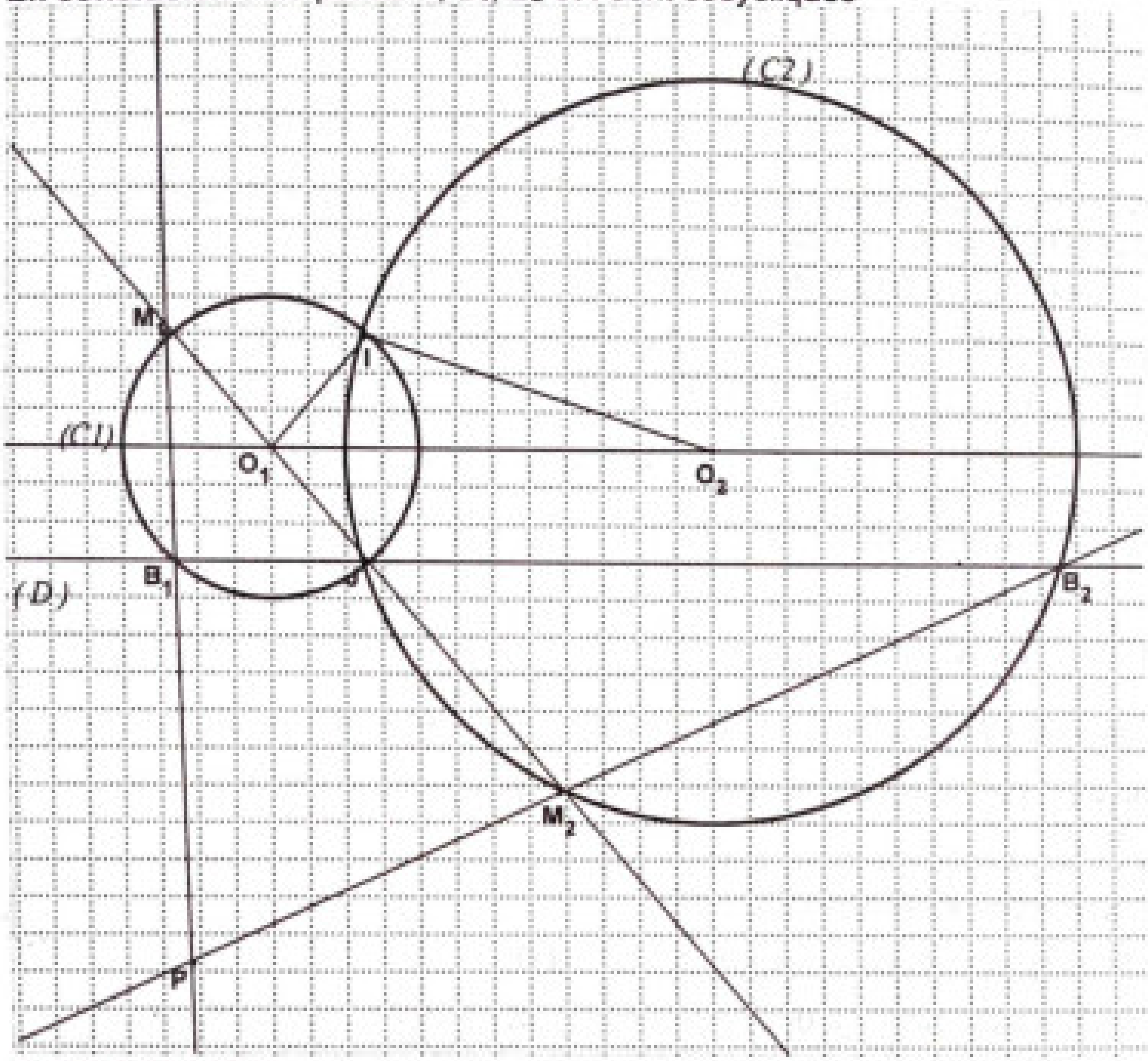
(B_1M_1) et (B_2M_2) sont sécantes.

b. Les points P, B_1 et M_1 sont alignés, de même les points P, B_2, M2 sont alignés alors $2(\overrightarrow{PB_1}, \overrightarrow{PB_2}) = 2(\overrightarrow{M_1B_1}, \overrightarrow{M_2B_2})$.

Or S([M $_1B_1$)] = [M_2B_2] et S([IB_1]) = [IB_2]

On a donc $2(\overrightarrow{IB_1}, \overrightarrow{IB_2}) = 2(\overrightarrow{M_1B_1}, \overrightarrow{M_2B_2})$ On en déduit que $2(\overrightarrow{PB_1}, \overrightarrow{PB_2}) = 2(\overrightarrow{IB_1}, \overrightarrow{IB_2})$.

En conclusion : les points P, B_1, B_2 et I sont cocycliques



EXERCICE 4

1. Nature et éléments caractéristiques de T_1

On a : $z' = (1 - i)z - i$

$$|1 - i| = \sqrt{2}; \ \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{et} \ \sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \ \text{donc} \ \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$z_D = \frac{b}{1 - a} = \frac{-i}{1 - (1 - i)} = -1$$

Donc T_1 est une similitude de rapport de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de centre A d'affixe -1

2. a. Déterminons les nombres réels a et b tels que $T_1 \circ T_2$ soit une homothétie.
Ecriture complexe de l'homothétie est : $z' = 2z + b$; or

$$Z_A = \frac{b}{1-a} \Rightarrow b = (1-a)Z_A = -1-i$$

Donc $z' = 2z - 1 - i$: (1)
Ecriture complexe de $T_1 \circ T_2$ est : $T_1 \circ T_2(z) = T_1[T_2(z)]$
$= T_1[az + b]$ d'où $z' = (1-i)(az+b) - i$

$\Rightarrow z' = a(1-i)z + b(1-i) - i$: (2)

Les relations (1) et (2) donnent :

$a(1-i) = 2$ et $b(1-i) - i = -1-i \Rightarrow a = \frac{2}{1-i} = 1+i$ et $b = -\frac{1}{2}(1+i)$

Au total, on a : $T_2 : z' = (1+i)z - \frac{1}{2}(1+i)$

b. Déterminons a et b pour que $T_1 \circ T_2$ soit une translation
L'écriture complexe de la translation est : $z' = z + 2 - i$ (1)
$T_1 \circ T_2(z) = T_1[T_2(z)] \Rightarrow z' = a(1-i)z + b(1-i) - i$ (2)
Les relations (1) et (2) donnent $a(1-i) = 1$ et $b(1-i) - i = 2 - i$
Donc $a = \frac{1}{2}(1+i)$ et $b = 1+i$

En conclusion, T_2 : $Z' = \frac{1}{2}(1+i) + 1 + i$

EXERCICE 5

1. a. Déterminons l'angle orienté de la similitude S :

S(I) = I et S(A) = B donc l'angle de S est : $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}})$

I, A, B et O sont cocycliques. De plus, I appartient au même arc $\widehat{AB}$ que O, donc :
D'après le théorème des angles inscrits, les angles $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$, d'où, on a : Mes$(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}})$ = Mes$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{4}$

b. **Justifions que IAB est un triangle rectangle isocèle direct.**
[IB] est un diamètre du cercle (C) et A appartient à (C) donc le triangle IAB est rectangle en A.

De plus Mes$(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}}) = \frac{\pi}{4}$, donc le triangle IAB est rectangle isocèle direct en A.

c. **Le rapport de la similitude S**

Soit k le rapport de S. On a : $k = \frac{IB}{IA}$.

Or le triangle IAB est rectangle isocèle en A ; donc d'après la propriété de Pythagore, on a : $BI^2 = AB^2 + AI^2 \Rightarrow BI^2 = 2AI^2 \Rightarrow BI = \sqrt{2}\,AI$ d'où $k = \frac{IB}{IA} = \sqrt{2}$

2. a. **Déterminons la mesure de l'angle orienté de S'**

S'(K) = K et S'(A) = B, donc l'angle de S' est : $(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}})$

Les angles $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}})$ interceptent respectivement les arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{AB}$, d'où, on a : mes$(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}})$ = mes$(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}}) + \pi \Rightarrow$ mes$(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}}) = -\frac{3\pi}{4}$

b. b1. Démontrons l'égalité $\overline{KA}.\overline{KB} = -\frac{\sqrt{2}}{2}KA\times KB$

On a : $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = KA\times KB\times\cos(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB}}) = KA\times KB\times\cos(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}KA\times KB$

b2. Exprimons $\overline{KH}$ **en fonction de** $\overline{KB}$

On a : $\overline{GA} = -\frac{1}{2}\overline{GB} \Rightarrow \overline{AG} = \frac{1}{3}\overline{AB} \Rightarrow \overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BA} \Rightarrow BG = \frac{2}{3}BA \Rightarrow \frac{BG}{BA} = \frac{2}{3}$

On a aussi : $(GK)\perp(BK)$ et $(AH)\perp(BK)$ donc $(GK)//(AH)$

$G\in[AB]$ et $K\in[BH]$, d'après la propriété de Thalès dans le triangle ABH, on a :

$\frac{BG}{BA} = \frac{BK}{BH}$ donc $\frac{BK}{BH} = \frac{2}{3} \Rightarrow BK = \frac{2}{3}BH$. Or $BH = BK + KH$ d'où

$BK = \frac{2}{3}(BK + KH) \Rightarrow BK = 2KH$ or $K\in[BH]$ donc $\overline{KB} = -2\overline{KH}$

En conclusion $\overline{KH} = -\frac{1}{2}\overline{KB}$

b3. On a :

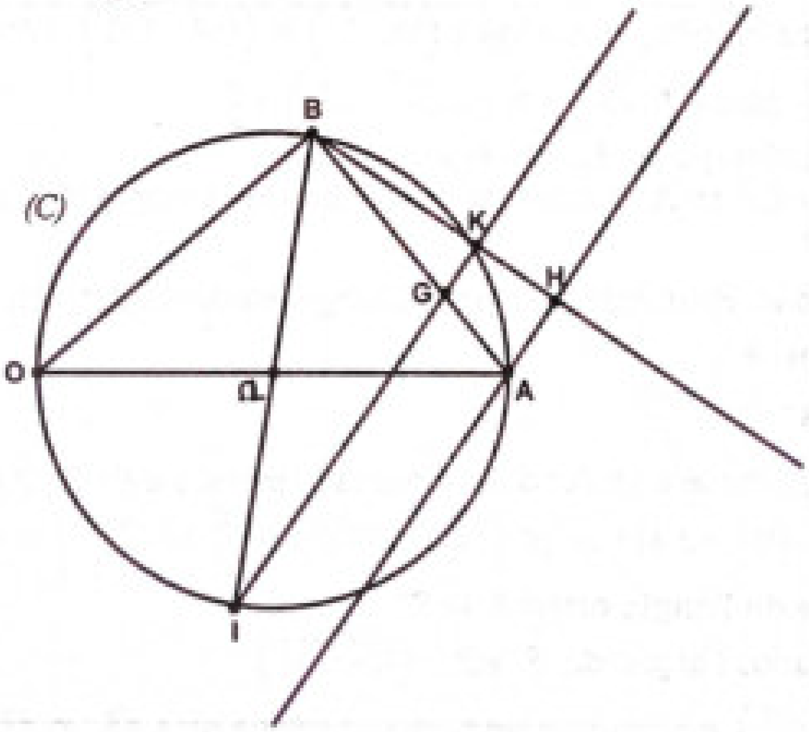
$\overline{KA}.\overline{KB} = (\overline{KH}+\overline{HA}).\overline{KB} = \overline{KH}.\overline{KB} + \overline{HA}.\overline{KB}$ or $\overline{HA}.\overline{KB} = 0$ car $(HA)\perp(KB)$

donc $\overline{KA}.\overline{KB} = \overline{KH}.\overline{KB} = -KH\times KB$ car $K\in[BH]$ or $\overline{KH} = \frac{1}{2}\overline{KB}$ donc $\overline{KA}.\overline{KB} = -\frac{1}{2}KB^2$

Le rapport de la similitude est $k' = \frac{KB}{KA}$

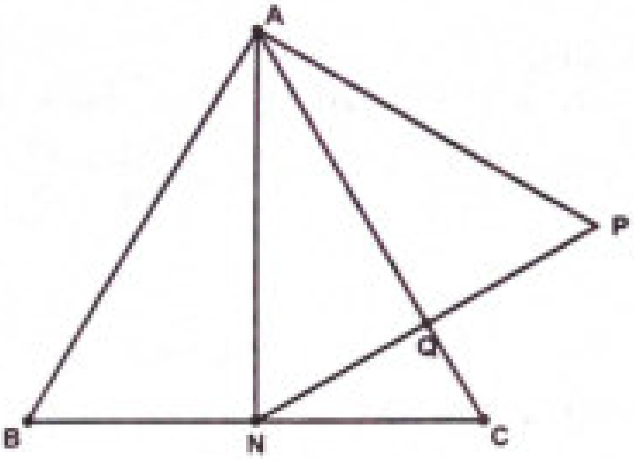
D'après les relations de la question b1 et b3, on obtient :

$-\frac{1}{2}KB^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}KA\times KB$ donc $KB = \sqrt{2}\,KA$ d'où $k' = \frac{KB}{KA} = \sqrt{2}$



EXERCICE 6

1.



2\. a. Rapport k de la similitude S

$S(A) = A$ et $S(B) = N \Rightarrow AN = k\,AB$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}}\right) = \theta$

Considérons le triangle ABN rectangle en N.
D'après la propriété de Pythagore, on a : $AB^2 = AN^2 + BN^2 \Rightarrow$

$AN^2 = AB^2 - BN^2 = AB^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = \frac{3}{4}AB^2$

$\Rightarrow \frac{AN^2}{AB^2} = \frac{3}{4}$ or $k = \frac{AN}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. Mesure principale de l'angle de S

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}}\right) = \frac{1}{2} Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \Rightarrow Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3}$ donc $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}}\right) = \frac{\pi}{6}$

3\. a. Justifions que P est l'image de C par S

Calculons $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}}\right)$

ANP est un triangle équilatéral ; N milieu de [BC] et Q celui de [N P].

On a : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}}\right) = 2\,Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AQ}}\right) = 2\,Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP}}\right)$

Or $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP}}\right) = Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}}\right)$ Car $Q \in (AC)$; d'où

$Mes(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}}) = 2\,Mes(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}}) \Rightarrow Mes(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}}) = \frac{1}{2} Mes(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}}) \Rightarrow$

$Mes(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}}) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3}$. Donc $Mes(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}}) = \frac{\pi}{6}$

Calculons le rapport $\frac{AP}{AC}$

ANP est un triangle équilatéral d'où $AN = AP = NP$ et $AC = AB$ d'où
$\frac{AP}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{2}$

En conclusion : P est l'image de C par la similitude S

b. Montrons que $S(N) = Q$

Calculons $Mes(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AQ}})$

ABC est un triangle équilatéral, N est le milieu de [BC] d'où

Mes $\left(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{6}$; Or Mes $\left(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AQ}\right)$ = Mes$(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC})$, donc Mes $\left(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AQ}\right) = \frac{\pi}{6}$

Calculer le rapport $\frac{AQ}{AN}$

Considérons le triangle ANQ rectangle en Q.

D'après la propriété de Pythagore, on a : $AQ^2+QN^2= AN^2 \Rightarrow AQ^2= AN^2 - QN^2$

$\Rightarrow AQ^2 = AN^2 - \left(\frac{1}{2}AN\right)^2 \Rightarrow AQ^2 = \frac{3}{4}AN^2 \Rightarrow \frac{AQ^2}{AN^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow k = \frac{AQ}{AN} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

En conclusion : S (N) = Q

4. a. Calculons l'affixe de N.

N est le milieu de [BC $\Leftrightarrow \overline{NB} = -\overline{NC}$; $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC} \Rightarrow z_N = \frac{1}{2}(z_C - z_B) + z_B = -1$

b. Déterminons la transformation complexe associée à S.

$$\begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 \\ (-1 + i\sqrt{3})a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \\ b = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Donc l'écriture complexe de S est : $z' = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. Déterminons l'affixe de P et Q

$S(C) = P \Rightarrow Z_P = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(-1 - i\sqrt{3}) + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Z_P = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$S(N) = Q \Rightarrow Z_Q = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)(-1) + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Z_Q = -\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$

EXERCICE 7 : Bac C 1999 Session normale

PARTIE A

1. Soit a une solution réelle.

$$\begin{aligned} P(a) = 0 &\Leftrightarrow a^3 - (6 + i\sqrt{3})a^2 + (11 + 4i\sqrt{3})a - 6 - 3i\sqrt{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow a^3 - 6a^2 - ia^2\sqrt{3} + 11a + 4ia\sqrt{3} - 6 - 3i\sqrt{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^3 - 6a^2 + 11a - 6) + (-a^2\sqrt{3} + 4a\sqrt{3} - 3\sqrt{3})i = 0 \end{aligned}$$

Donc on a : $\begin{cases} a^3 - 6a^2 + 11a - 6 = 0 & (1) \\ -\sqrt{3}a^2 + 4\sqrt{3}a - 3\sqrt{3} = 0 & (2) \end{cases}$

Résolvons l'équation (2) :

$$\begin{aligned} -\sqrt{3}a^2 + 4\sqrt{3}a - 3\sqrt{3} = 0 &\Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-2)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-2-1)(a-2+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-3)(a-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 3 \; ou \; a = 1 \end{aligned}$$

1 et 3 vérifient l'équation (1) donc 1 et 3 sont les solutions réelles de l'équation $P(z) = 0$

On a : $P(z) = (z-1)(z-3)(az + b) = (z^2 - 4z + 3)(az + b)$

$$P(z) = az^3 + (b-4a)z^2 + (-4b+3a)z + 3b$$

Par identification

$$\begin{cases} a=1 \\ b-4a=-(6+i\sqrt{3}) \\ 3a-4b=11+4i\sqrt{3} \\ 3b=-6-3i\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2-i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$P(z)=(z-1)(z-3)(z-2-i\sqrt{3})$$

$P(z)=0 \Leftrightarrow (z=1 \; ou \; z=3 \; ou \; z=2+i\sqrt{3})$ D'où $S_C=\{1; 3; 2+i\sqrt{3}\}$

Autre méthode : Faire la division euclidienne de $P(z)$ par z^2-4z+3

2. a.- $I(1); A(3); B(2+i\sqrt{3})$

$$IA=|3-1|=2$$

$$IB=|2+i\sqrt{3}-1|=|1+i\sqrt{3}|=2$$

$$AB=|2+i\sqrt{3}-3|=|-1+i\sqrt{3}|=2$$

$$IA=IB=AB$$

Donc le triangle IAB est équilatéral.

b- $\overrightarrow{BC}\binom{-3}{-\sqrt{3}}$ et $\overrightarrow{BG}\binom{9}{3\sqrt{3}}$ $\overrightarrow{BG}=-3\overrightarrow{BC}$ donc les points B, C et G sont alignés.

Autre méthode : soit z_M l'affixe d'un point M.

$\dfrac{z_G-z_B}{z_C-z_B}=\dfrac{11+4i\sqrt{3}-2-i\sqrt{3}}{-1-2-i\sqrt{3}}=\dfrac{9+3i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}}=-3$, d'où mes $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BG}})=-\pi$

On a : $mes(\widehat{\overrightarrow{BG},\overrightarrow{BC}})=\pi$; donc les points B, C et G sont alignés.

c. voir figure

3. $F\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ et EFG est un triangle équilatéral. $E\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}; G\begin{pmatrix}11\\4\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Soit G' le projeté orthogonal de G sur (OI). G' est le milieu du segment $[EF]$.

On a : $x_G=11$ donc $11=\dfrac{x_E+x_F}{2}$ d'où $x_F=15$; $F\begin{pmatrix}15\\0\end{pmatrix}$

Autre méthode : EFG est un triangle équilatéral donc $EF=EG$

$$|z_F-z_E|=|z_G-z_E|=\sqrt{16+16\times 3}=8$$

$z_P - z_E = 8$ ou $z_P - z_E = -8$

$z_P = 8+7 = 15$ ou $z_P = -8+7 = -1$

Si $F\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ alors $FG = |z_G - z_F| = |12+4\sqrt{3}i| = 8\sqrt{3} \neq EG$

Si $F\begin{pmatrix}15\\0\end{pmatrix}$ alors $FG = |z_G - z_F| = |-4+4\sqrt{3}i| = 8 = EG$ Donc $F\begin{pmatrix}15\\0\end{pmatrix}$

PARTIE B

1\. a. Un segment et son image par une homothétie ont des rapports parallèles.
Or seule la droite (IA) est parallèle à la droite (EF).

Donc l'image du segment $[IA]$ par h est le segment $[EF]$

b. Si $h([IA]) \underset{h}{=} [EF]$ alors $h(B) = G$ et on a les deux possibilités suivantes :

$\xrightarrow{h}$

I	F
A	E
B	G

$\xrightarrow{h}$

I	E
A	F
B	G

Dans le premier cas, la droite (IB) n'est pas parallèle à la droite (FG).

En effet $\overrightarrow{IB}\binom{1}{\sqrt{3}}$, $\overrightarrow{FG}\binom{-4}{4\sqrt{3}}$ et $\det\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{FG}\right) \neq 0$.

Donc la seule homothétie h qui transforme IAB en EFG est telle que :
h(I) = E ; h(A) = F ; et h(B) = G
c. Les droites (BG) et (IE) sont sécantes en C

Soit k le rapport de h. Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{EF}$ ayant le même sens, k est positif. On a : $k = \dfrac{EF}{IA} = \dfrac{|15-7|}{|3-1|} = 4$

Donc h est l'homothétie de centre C et de rapport 4.

2\. a. Le rapport de f est celui de h c'est-à-dire 4. L'angle de f est celui de r car r est la forme réduite de f. Il a donc pour mesure $\dfrac{2\pi}{3}$.

b.

$$\left.\begin{array}{l} r(I) = A \\ r(A) = B \\ r(B) = I \end{array}\right|$$

donc $r(IAB) = ABI = IAB$ or $h(IAB) = EFG$ donc $f(IAB) = EFG$

3. a- h^{-1} a pour rapport $\frac{1}{4}$ et pour centre C.

Soit α le rapport de la similitude directe g .

$$\alpha=\frac{\text{mesure d'un côté de EFG}}{\text{mesure d'un côté de IAB}}=\frac{8}{2}=4$$

$h^{-1}og$ est une similitude directe qui a pour rapport 1.

C'est donc un déplacement.

$g(IAB)=EFG$ d'après l'énoncé.

Or $h^{-1}(EFG)=IAB$ donc $h^{-1}og(IAB)=IAB$

La seule translation qui laisse globalement invariant un triangle est Id_p qui est une rotation (c'est une rotation d'angle nul).

Donc $h^{-1}og$ est une rotation qui laisse globalement invariant le triangle IAB.

b. Les trois rotations qui laissent globalement invariant le triangle IAB sont : La rotation de centre O' et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ c'est-à-dire r.

La rotation de centre O' et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ c'est-à-dire r^{-1}.

L'identité de P

c. $h^{-1}og=R$ (où $R\in\{\mathrm{Id}_p,r,r^{-1}\}$ (d'après ce qui précède).

$\Leftrightarrow g=hoR$ d'où g = h o I_d = h ou $g=hor=f$ ou $g=hor^{-1}=f'$

d- $f'=hor^{-1}$

f' a pour rapport 4 et pour angle $-\frac{2\pi}{3}$

4.

$\xrightarrow{f}$

I	F
A	G
B	E
Ω	Ω
K	K

a. K est le milieu de $[\mathrm{IA}]$; son image K' est donc le milieu de $[\mathrm{FG}]$ car une similitude directe conserve le milieu.

b. $mes(\overline{\Omega A,\Omega G})=\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$E \in [FA)$ donc $\widehat{(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FG})} = \widehat{(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FG})}$

FEG est un triangle équilatéral de sens indirect.

Donc $mes\widehat{(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FG})} = mes\widehat{(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FG})} = -\frac{\pi}{3}$

$$mes\widehat{(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FG})} = \frac{5\pi}{3}[2\pi] = \pi + \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

$$mes\widehat{(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega G})} = mes\widehat{(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FG})} + \pi + 2k\pi$$

donc les points Ω, F, A, G sont cocycliques.

c. On démontre de la même manière (voir b) que les points Ω, F, K et K' sont cocycliques.

d. Les deux cercles passant respectivement par Ω, F, A, G et Ω, F, K et K' sont sécants en Ω et F or, F n'est pas invariant, donc Ω est le point d'intersection des deux cercles différents de F.

5. On a : $f'(I)=G$; $f'(A)=E$; $f'(B)=F$

Soit $z'=az+b$ l'écriture complexe associée à f'. Déterminons a et b.

$\begin{cases} z_G = az_I + b \\ z_E = az_A + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11+4i\sqrt{3} = a + b \\ 7 = 3a + b \end{cases}$, on obtient

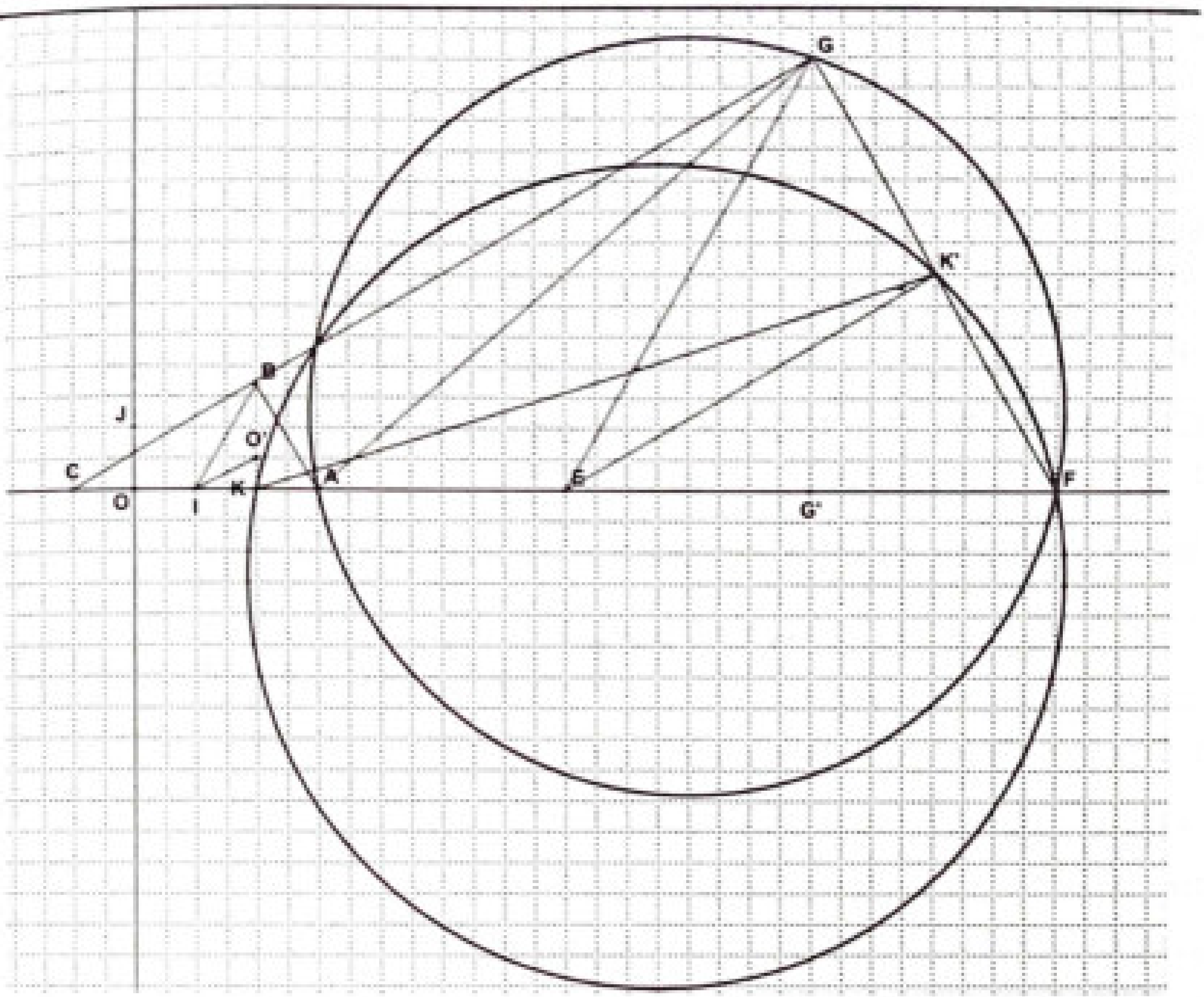
$$2a = -4-4i\sqrt{3} \Rightarrow a = -2-2i\sqrt{3}$$

$$b = 11+4i\sqrt{3}-a \Rightarrow b = 13+6i\sqrt{3}$$

$$z' = (-2-2i\sqrt{3})z + 13 + 6i\sqrt{3}$$

6. Le centre Ω' de f' a pour affixe $\frac{b}{1-a}$

$z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{13+6i\sqrt{3}}{3+2i\sqrt{3}} = \frac{(13+6i\sqrt{3})(3-2i\sqrt{3})}{21}$ donc $z_\Omega = \frac{75-8i\sqrt{3}}{21}$



EXERCICE 8

1. Déterminons la nature du quadrilatère AMBM'

La médiatrice de segment [AB] coupe le cercle en M et M' d'où M et M' sont symétriques par rapport à la droite (AB) ou (OB).

Les diagonales du quadrilatère AMBM' se coupent en leur milieu et sont perpendiculaire.

En conclusion : AMBM' est un losange .

L'angle $\widehat{OMB}$ intercepte la moitié de l'arc du cercle ; d'où l'angle $\widehat{OMB}$ est un angle droit.

La droite (AN) est perpendiculaire à (OM) ; le losange AMBM' est tel que

(AM) // (BM') et (BM) // (AM') .

Or (BM) // (AN) donc la droite (AM') est perpendiculaire à (OM).

Les droites (AN) et (AM') perpendiculaires à la même droite (OM) au point N sont confondues. Les points N, A et M' sont alignés .

2. Déterminons l'angle de la similitude S :

On a : S(N) = N et S (M) = A d'où l'angle de S est $\left(\widehat{\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NA}}\right)$

$\left(\widehat{\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NA}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{NO}, \overrightarrow{NA}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NA}}\right) = -\left(\widehat{\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}}\right)$

Donc l'angle de la similitude est Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NA}}\right) = -\frac{\pi}{2}$

L'image de la droite (MI) est orthogonale à (MI).

Comme de plus S(M) = A alors , on obtient S(MI) = (OB).

De même la droite (NA) est orthogonale à (NA).
Comme S(N) = N d'où S(NA) = (OM).
L'image de M' par S appartient à la fois à S(NA) et S(IM) ; puisque M' est intersection des droites (NA) et (IM). On obtient donc S(M') = O.
3. Les similitudes directes conservent les barycentres et en particulier les milieux. Comme S(M) = A et S(M')=O, l'image de I milieu de [MM'] est le milieu de [AO] , à savoir I'.
En déduire que : $\text{Mes}\left(\widehat{\overline{NI}, \overline{NI'}}\right) = -\frac{\pi}{2}$
[NI'] est un rayon du cercle passant par les points O, N, A.
Comme (NI) est orthogonale à (NI').
(NI) est tangente au cercle passant par A, N, O de diamètre [OA]

EXERCICE 9 : Bac C 2005 Session Normale

1. a) Construction des points G_1 et G_2.

G_1 est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 3) ⇒ $\overline{AG_1} = \frac{3}{4}\overline{AB}$.

G_2 est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; - 3) ⇒ $\overline{AG_2} = \frac{3}{2}\overline{AB}$.

Pour la construction, voir figure.

b. Ensemble (Γ) des points M du plan tels que $MA^2 - 9MB^2 = 0$.

$$\Rightarrow \left(\overline{MA}\right)^2 - \left(3\overline{MB}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\overline{MA} - 3\overline{MB}\right)\left(\overline{MA} + 3\overline{MB}\right) = 0$$

Or $\overline{MA} - 3\overline{MB} = -2\overline{MG_2}$ et $\overline{MA} + 3\overline{MB} = 4\overline{MG_1}$

Donc, on a : $\left(-2\overline{MG_2}\right)\left(4\overline{MG_1}\right) = 0 \Rightarrow -8\overline{MG_1}.\overline{MG_2} = 0 \Rightarrow \overline{MG_1}.\overline{MG_2} = 0$

Conclusion : l'ensemble (Γ) des points M est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

c. Construction de l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\text{Mes}(\widehat{\overline{MA}, \overline{MB}}) = \frac{\pi}{3}$.

L'ensemble (E) des points M du plan tels que $\text{Mes}(\widehat{\overline{MA}, \overline{MB}}) = \frac{\pi}{3}$ est l'arc $\widehat{AB}$ privé des points A et B. (voir figure)

2. a. Construction des points C et D.

$$R_{\left(A\,;\,\frac{2\pi}{3}\right)}(B) = C \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \text{Mes}(\widehat{\overline{AB}, \overline{AC}}) = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$h_{\left(A\,;\,\frac{2}{3}\right)}(B) = D \quad \Leftrightarrow \quad \overline{AD} = \frac{2}{3}\overline{AB}$$

Voir figure pour la construction.

b. Calculons le rapport de S.

$$S(A)=B \text{ et } S(C)=D \Leftrightarrow \begin{cases} BD = kAC \\ Mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}}) = \theta \end{cases}$$

On a : $k = \dfrac{BD}{AC}$ or $AC = AB$

et $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow BD = \frac{1}{3}AB$

Donc $k = \dfrac{\frac{1}{3}AB}{AB} = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{1}{3}$

c. Justifions qu'une mesure de l'angle de S est $\dfrac{\pi}{3}$.

$$\theta = Mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) + Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) + Mes(\widehat{-\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}})$$

$$\theta = Mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) + \pi + Mes(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}}) = -\frac{2\pi}{3} + \pi + 0 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Conclusion : une mesure de l'angle de S est $\dfrac{\pi}{3}$.

3. On note Ω le centre de S.

a. Démontrons que Ω appartient à (Γ) et (E) et plaçons Ω.

$$S(A)=B \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega B = \frac{1}{3}\Omega A \\ Mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Or (E) : $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{3}$

Si $\Omega = M$ on a : $Mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}}) = \dfrac{\pi}{3}$ donc $\Omega \in (\Gamma)$

(Γ) : $MA^2 - 9MB^2 = 0 \Leftrightarrow MA = 3MB \Leftrightarrow MB = \dfrac{1}{3}MA$

Si $M = \Omega$, on a : $\Omega B = \dfrac{1}{3}\Omega A$ donc $\Omega \in (\Gamma)$

b. Démontrons que $Mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}) = \dfrac{-2\pi}{3}$.

On a : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) \Rightarrow Mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) = -\dfrac{2\pi}{3}$

c. Déduisons que les points A, C, D et Ω appartiennent à un même cercle ($\mathscr{C}$).

$$S(A)=B \Leftrightarrow Mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}}) = \frac{\pi}{3}$$

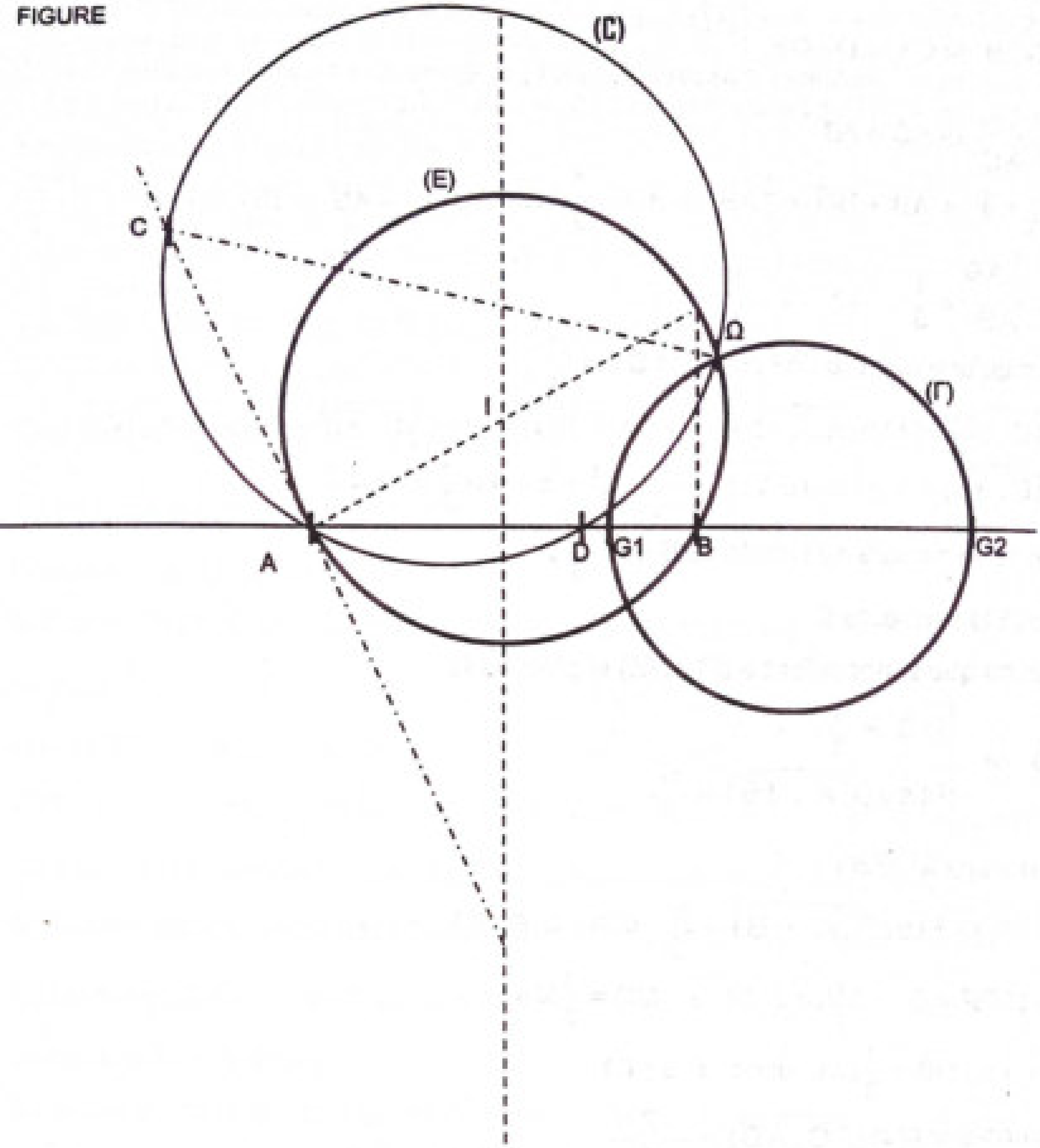
$$S(C)=D \Leftrightarrow Mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega D}}) = \frac{\pi}{3}$$

D'où : $2Mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}}) = 2Mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega D}}) = \dfrac{2\pi}{3}$

Comme A, C et D sont non alignés alors les points A, C, D et Ω sont cocycliques.

Construction de ($\mathscr{C}$). Voir figure

FIGURE



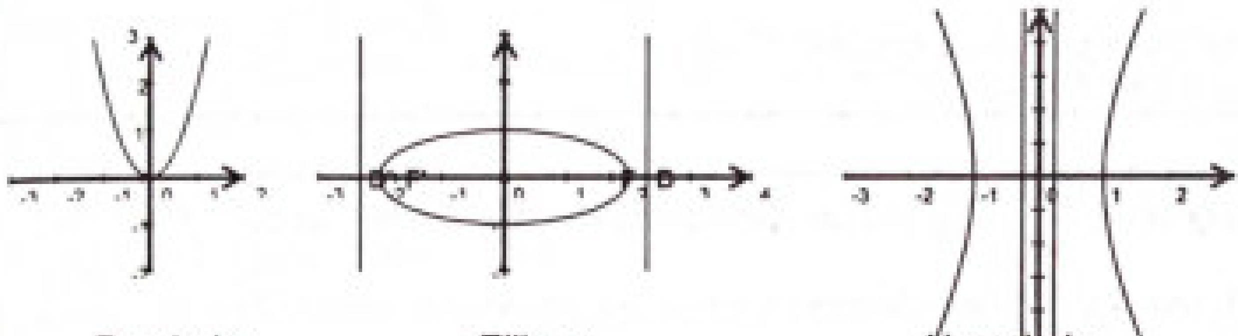
CHAPITRE VI : CONIQUES

FICHE DE COURS

DEFINITION PAR FOYER ET DIRECTION

Soit (D) une droite, F un point n'appartenant pas à (D) et un nombre réel strictement positif. On appelle conique, de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e, l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur (D).

- Si $e = 1$, l'ensemble (Γ) est une parabole
- Si $0 < e < 1$, l'ensemble (Γ) est une ellipse
- Si $e > 1$, l'ensemble (Γ) est une hyperbole.



Parabole Ellipse Hyperbole

EQUATIONS CARTESIENNES REDUITES

Parabole

Soit un repère orthonormé (O, I, J) où O est le sommet de la parabole (P) de foyer F et de directrice (D).
Une équation réduite de la parabole est $y^2 = 2px$ avec $0 < p$ (paramètre) si $\vec{\imath}$ est le vecteur unitaire de l'axe focal (OF).
Une équation de la directrice (D) est $x = -\frac{p}{2}$
En intervertissant le rôle des axes de la parabole, l'équation réduite est $x^2 = 2py$

Ellipse

Soit un repère orthonormé (O, I, J) où O est le **centre** de l'ellipse (E) ; $\vec{\imath}$ est le vecteur unitaire de l'axe focal.
Une équation cartésienne réduite de (E) est : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$). Le point O est le seul centre de symétrie de (E).
Les points A(a, 0), A'(− a, 0), B(0 , b) et B'(0, − b) sont les sommets de l'ellipse.
La demi distance focale $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ si $b < a$.
Les équations des directrices (D) : $x = \frac{a^2}{c}$ et (D') : $x = -\frac{a^2}{c}$.
Les foyers F(c, 0) et F ' (− c, 0).

Remarque

Si la demi distance focale est $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ avec $b > a$ alors les coordonnées des foyers sont : $F(0, c)$ et $F'(0, -c)$

Hyperbole

Soit un repère orthonormé (O, I, J) où O est le centre de l'hyperbole (H) ;

Une équation cartésienne de l'hyperbole (H) est : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $(a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*)$.

Le point O est le seul centre de symétrie de (H).
Les points A (a, 0) et A' (- a, 0) sont les sommets de l'hyperbole (H).
L'axe (O, I) est l'axe transverse de (H).
La demi-distance focale $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

(H) admet deux asymptotes d'équations respectives $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$

L'équation cartésienne de l'hyperbole est aussi de la forme : $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

L'axe transverse (focal), dans ce cas, est (O, J).
Les foyers $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$

Remarque

L'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l'image de l'hyperbole d'équation

$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ par la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice (y = x).
Si a = b alors les asymptotes de l'hyperbole sont orthogonales.
On dit, dans ce cas, que l'hyperbole est **équilatère**.
Si l'hyperbole (H) a pour asymptotes les droites $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ alors (H) a une équation de la forme : $XY = k$ où $k \in \mathbb{R}^*$

Définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole

Soit F et F' deux points distincts tels que FF' = 2c et a un nombre réel.
Si a > c alors l'ensemble des points M du plan tels que MF + MF' = 2a est l'ellipse de foyers F et F' dont la distance des sommets de l'axe focal est 2a.
FF' est appelée **distance focale.**

Si 0 < a < c alors l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$ est l'hyperbole de foyers F et F' dont la distance des sommets est 2a.

Equation de la tangente en un point de l'ellipse et de l'hyperbole

Soit l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

L'équation de la tangente en un point $M_0(x_0, y_0)$ de l'ellipse est de la forme :

$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

Soit l'hyperbole d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

L'équation de la tangente en un point $M_0(x_0, y_0)$ de l'hyperbole est de la forme :

$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1

Soit, dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j), les courbes (H) et (E), ensembles des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient :

(H) : $4x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 113 = 0$ et (E) : $16x^2 + 9y^2 + 32x - 54y - 47 = 0$

1. Déterminer les équations réduites de (H) et de (E).
2. Reconnaitre les courbes (H) et (E) ; puis déterminer leurs axes de symétrie et leurs foyers.

EXERCICE 2 : Bac C 1994 Session de remplacement

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overline{u}, \overline{v}\right)$.

On prendra 4 cm pour unité.

1. Soit (H) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient : $x^2 - y^2 + x = 0$.

a. Déterminer la nature de (H).

Préciser ses éléments de symétrie et asymptotes éventuelles.

b. Représenter graphiquement (H)

2. A tout point M d'affixe z différente de 0 et de – 1 on associe le point M' d'affixe z' telle que: $z' = \dfrac{2}{z^2 + z}$

a. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit un réel.

b. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit imaginaire pur.

EXERCICE 3 : Bac E 1998 Session normale

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère l'ensemble (E) des points M de coordonnées (x ; y) vérifiant l'équation :

(1) $\quad 25(x^2 + y^2) = (3x - 16)^2$

1. En interprétant géométriquement l'équation (1), démontrer que (E) est une ellipse de foyer O et de directrice associée la droite (Δ) d'équation $x = \dfrac{16}{3}$.

Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de (E) et θ une détermination de l'angle de vecteur $\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{OM}\right)$

2. a. Déduire de l'équation (1) une relation entre OM et l'abscisse x de M.

b. Démontrer que : $OM = \dfrac{16}{5 + 3\cos\theta}$

3. On suppose ici que θ appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

La droite (OM) coupe (Δ) en I et recoupe (E) en un point M '.

a. Démontrer que $\frac{1}{OM}+\frac{1}{OM'}$ est une constante indépendante de M.

b. Démontrer que : $\frac{1}{OM}-\frac{1}{OM'}=\frac{2}{OI}$

EXERCICE 4

On considère l'ensemble (E) des points M du plan dont les coordonnées (x, y) dans le repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ satisfont à la relation : $\frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1$.

1. Démontrer que (E) est la réunion de deux coniques.
2. On dessinera ces coniques après avoir déterminé leurs axes, leurs sommets, leurs foyers et les asymptotes éventuelles.

EXERCICE 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On considère la droite (D) d'équation x = 1 et le point F (3 ; 0).

Soit H le projeté orthogonal de M(x ; y) sur (D).

1. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (E) des points M tels que $MF = \sqrt{3}\ MH$
2. Déterminer la nature de l'ensemble (E), puis ses sommets et l'équation de ses asymptotes.

EXERCICE 6

Dans le plan muni du repère orthonormé (O, i, j) (unité 2cm).

On considère l'ensemble (F_m) des points M(x ; y) tels que :

$2mx^2 - 8mx - (m-1)y^2 + 12m - 2 = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$

1. Déterminer, suivant les valeurs de m, la nature de (F_m).
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (F_m) est :

a. un cercle

b. une hyperbole équilatère.

3. Tracer (F_m) pour $m = \frac{1}{3}$ et pour $m = -1$

EXERCICE 7 : Bac C 1998 Session de remplacement

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère l'ensemble (E) des points M d'affixe z telle que :

$|z-1| = \frac{1}{4}|z - i\bar{z} - 2(i-1)|$

On appelle (D) la droite d'équation : x – y + 2 = 0

1. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{1}{2}(z + i\bar{z}) + i - 1$

(On pourra poser $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ x, y, x' et y' sont des réels.)

a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = M$ est la droite (D).

b. Démontrer que pour tout point M du plan, les coordonnées de M' vérifient l'équation de (D).

c. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est normal à la droite (D), puis caractériser géométriquement l'application f.

2. On se propose de déterminer l'ensemble (E) défini au début de l'exercice.

a.Démontrer que : $z - z' = \frac{1}{2}\left|z - i\overline{z} - 2(i-1)\right|$

b. En déduire que (E) est une ellipse de foyer F d'affixe 1, de directrice associée (D) et d'excentricité $\frac{1}{2}$. préciser son axe focal (Δ).

c. Vérifier que les points A et A' d'affixes respectives $\frac{1}{2}(1+i)$ *et* $\frac{1}{2}(5-3i)$ sont les sommets de (E) situés sur l'axe focal.

3. a. Construire la droite (D), l'axe focal (Δ), les points A, A' et F.

b. Déterminer géométriquement les autres sommets de (E).

c. Construire (E).

EXERCICE 8 : Bac C 1996 Session de remplacement

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$.

L'unité choisie est le centimètre.

PARTIE A

1. Soit (h) la conique d'équation : $y^2 - x^2 = 16$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Quelle est la nature de (h) ?

On note A le sommet de (h) d'ordonnée positive. Tracer (h).

2. On pose : $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $z'' = x'' + iy''$ où x, x', x'', y, y', y'' sont des réels.

Soit R l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$

Démontrer que R est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

3. Soit S l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' définie par : $z'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\overline{z}$.

a. Démontrer que l'ensemble des points invariants par S est la droite (D) d'équation : $y = (\sqrt{2}+1)x$.

b. Démontrer que $S = R \circ S_{(OJ)}$ où J est le point de couple de coordonnées (0 ; 1).

c. Déduire de ce qui précède la nature de S

4. a. Vérifier que : R(A) = S(A). On notera A' ce point.

b. Démontrer que (D) coupe (h) en deux points E et F

5. a. Démontrer que les coordonnées de M, M', M'' vérifient :

$$x'y' = x''y'' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2).$$

b. En déduire que (h) a la même image par R et S. on appelle $(\mathcal{H})$ cette image.

Donner la nature et une équation de $(\mathcal{H})$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6. a. Expliquer pourquoi E et F appartiennent à $(\mathcal{H})$.
b. Construire sur la même figure (h), les points A et A', la droite (D) et la courbe $(\mathcal{H})$.

PARTIE B

1. On note (h^+) l'ensemble des points de (h) d'ordonnées positives.
a. Démontrer que (h^+) est une courbe représentative de la fonction
$f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 16}$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
b. Soit N un point de (h^+) d'abscisse x positive.
On note $U(x)$ l'aire de la partie (Δ) du plan, limitée par la courbe (h^+) et les segments [OA] et [ON].
Démontrer que, pour tout réel positif ou nul x :
$$U(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + 16}\,dt - \frac{x\sqrt{x^2 + 16}}{2}$$
On ne cherchera pas à calculer $U(x)$
c. Pour tout réel positif ou nul x, on pose : $G(x) = 8\ln(x + \sqrt{x^2 + 16})$
Prouver que U et G ont la même fonction dérivée sur $\left]0; +\infty\right[$.
Calculer U(0) et G(0).
En déduire que pour tout réel positif ou nul x :
$$U(x) = 8\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 16}}{4}\right)$$
2. Soit (C) la courbe représentative de U dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité : 1cm). *On fera un graphique séparé de celui de la partie A.*
a. Etudier le sens de variation de la fonction U sur $\left[0; +\infty\right[$
b. Calculer le nombre dérivé de U en 0.
Préciser l'allure de la courbe (C) au voisinage de l'origine.
c. Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[0; 8]$. On construira la tangente à (C) en O.
On prendra :
$\ln 2 \simeq 0{,}693$; $\ln(1+\sqrt{2}) \simeq 0{,}881$; $\ln(2+\sqrt{5}) \simeq 1{,}444$; $\ln(1+\sqrt{5}) \simeq 1{,}174$

PARTIE C

On appelle $(\mathcal{H}+)$ l'ensemble des points de $(\mathcal{H})$ d'ordonnées positives.
On se donne un point N' de $(\mathcal{H}+)$ d'abscisse x' telle que : $x' \geq 2\sqrt{2}$
1. Démontrer que le point N_1 tel que : $N_1 = R^{-1}(N')$ appartient à $(\mathcal{H}+)$ et que son abscisse x est positive.
2. Soit (Δ') la partie du plan limitée par $(\mathcal{H}+)$, les segments [OA'] et [ON'].
Démontrer géométriquement que (Δ') et (Δ) ont la même aire.

EXERCICE 9 : Bac C 1999 Session de remplacement

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère le carré direct OIKJ de côté 1 (l'unité étant le centimètre, on prendra : OI = 4).
Soit A un point quelconque de la droite (IJ) distinct de J et soit S la similitude directe de centre O qui applique J sur A.

PARTIE A

On désigne par I', K' et A' les images respectives des points I, K, et A par S.
1. Démontrer que le quadrilatère OI'K'A est un carré direct.
2. Construire les points O, I, K, J, I' et K'.

3. Démontrer que les points A, A' et I' sont alignés.
4. Démontrer que : OA' = A'K'.

PARTIE B

Soit a l'affixe du point A, α un argument de a et x la partie réelle de a.
1. Déterminer l'affixe de K.
2. Démontrer que : $ia+1=x(1+i)$
3. En déduire qu'il existe un argument de $ia+1$ dans la paire $\left\{\frac{\pi}{4}\,;\,-\frac{3\pi}{4}\right\}$
4. Démontrer que : $\left(\overline{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA}}\right)=\left(\overline{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KJ}}\right)$
5. En déduire que $-\frac{\pi}{2}-\alpha$ est un argument du nombre complexe $a-(1+i)$

PARTIE C

Soit M un point du plan d'affixe z et M' son image d'affixe z' par S.
1. Démontrer que : $z = -ia\bar{z}$
2. Calculer en fonction de a les affixes respectives k' et a' des points K' et A'.
3. Soit u et v les affixes des vecteurs $\overrightarrow{KK'}$ et $\overrightarrow{K'A'}$
a. Démontrer que u est un imaginaire pur et que v est un réel.
b. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{KK'}$ et $\overrightarrow{K'A'}$ sont orthogonaux.
4. Démontrer que I, K, et K' sont alignés et en déduire que K' est le projeté orthogonal de A' sur la droite (IK).
5. En déduire une construction de A'.
6. Démontrer que, lorsque A décrit (IJ) privée de J, A' appartient à la parabole (Γ) de foyer O et de directrice (IK).

PARTIE D

On veut construire (Γ).
1. Donner l'axe focal et le sommet de (Γ)
2. Démontrer que J appartient à (Γ).
3. Construire (Γ)

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1

1. Déterminons l' équation réduite de (H)

$$(H) : 4x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 113 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 9y^2 + 54y - 113 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4(x^2 + 2x) - 9(y^2 - 6y) - 113 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4[(x+1)^2 - 1] - 9[(y-3)^2 - 9] - 113 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2 - 4 - 9(y-3)^2 + 81 - 113 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2 - 9(y-3)^2 - 36 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

Donc l'équation réduite de (H), dans le repère (O, I, J) est :

$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ ou bien dans le repère (Ω, I, J) est $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1$,

en posant $X = x + 1$ et $Y = y - 3$; et $\Omega(-1 ; 3)$

Déterminons l'équation réduite de (E)

$$(E) : 16x^2 + 9y^2 + 32x - 54y - 47 = 0 \Leftrightarrow 16(x^2 + 2x) + 9(y^2 - 6y) - 47 = 0$$
$$\Leftrightarrow 16[(x+1)^2 - 1] + 9[(y-3)^2 - 9] - 47 = 0$$
$$\Leftrightarrow 16(x+1)^2 - 16 + 9(y-3)^2 - 81 - 47 = 0$$
$$\Leftrightarrow 16(x+1)^2 + 9(y-3)^2 - 144 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

Donc l'équation reduite de (E) dans le repère (O,I,J) est : $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

ou bien dans le repère (Ω, I, J) est : $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{16} = 1$, en posant

$X = x + 1$ et $Y = y - 3$ et $\Omega(-1 ; 3)$

2. (H) est l'équation d'une hyperbole de centre $\Omega(-1 ; 3)$

La demi distance focale est : $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Les coordonnées des foyers dans le repère (O, I, J) sont :

$F\begin{pmatrix} -1 + \sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix} -1 - \sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix}$

Les axes de symétries de (H) sont les droites d'équations respectives $x = -1$ et $y = 3$

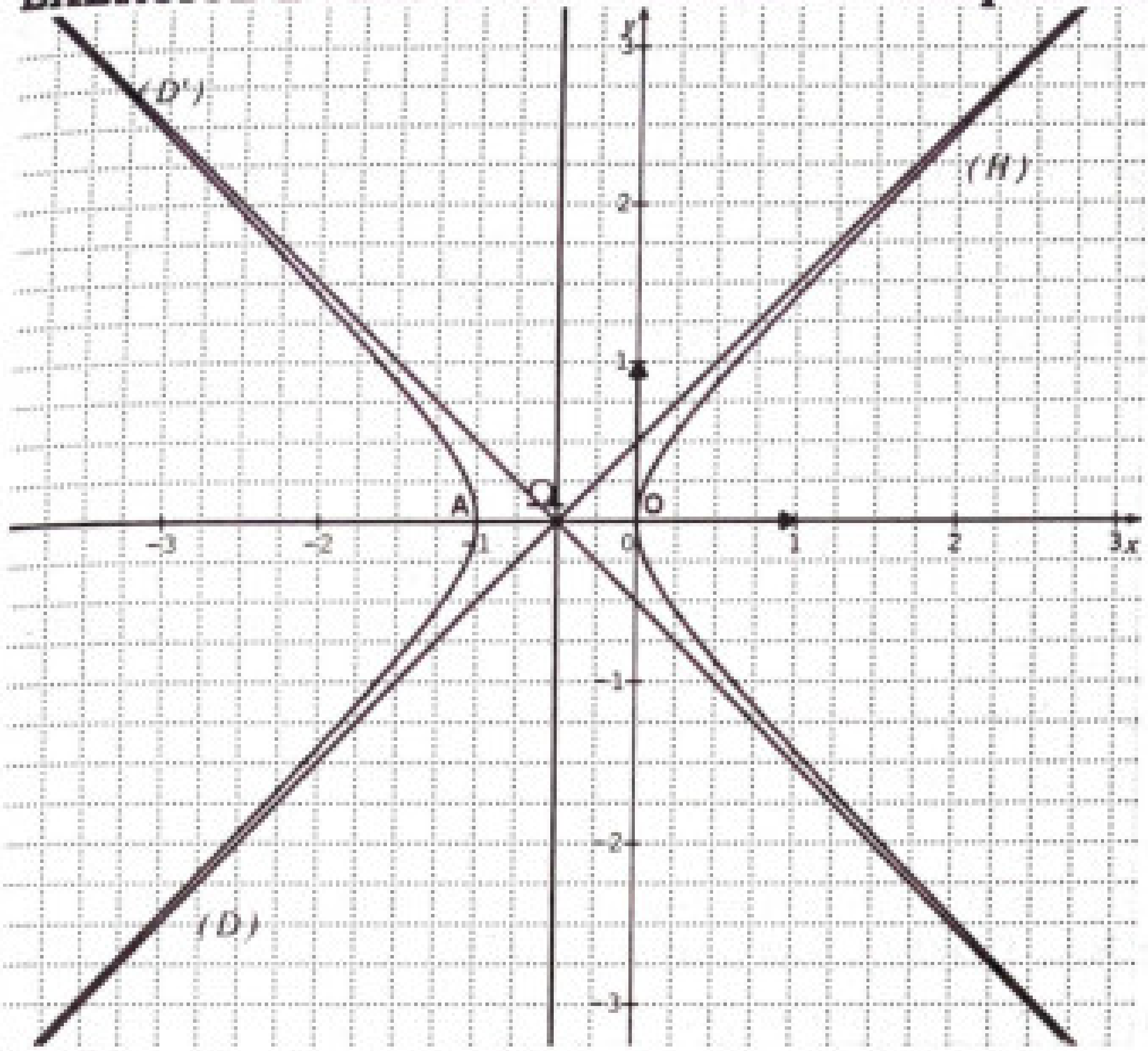
(E) est l'équation d'une ellipse de centre $\Omega(-1 ; 3)$

La demi distance focale est : $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

Les coordonnées des foyers dans le repère (O, I, J) sont: $F\begin{pmatrix} -1 \\ 3 + \sqrt{7} \end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix} -1 \\ 3 - \sqrt{7} \end{pmatrix}$

Les axes de symetries de (E) sont les droites d'équations respectives $x = -1$ et $y = 3$

EXERCICE 2 : Bac C 1994 Session de remplacement



1. a. Déterminons la nature de (H).

$$M \in (H) \Leftrightarrow x^2 - y^2 + x = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - (y - 0)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (y - 0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{(y - 0)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

Soit Ω le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ et M le point de coordonnée (X ; Y) dans le repère $\left(\Omega, \vec{u}, \vec{v}\right)$. En posant $X = x + \frac{1}{2}$ et $Y = y$, on a : $M \in (H) \Leftrightarrow \frac{X^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$;

donc (H) est une hyperbole équilatère de centre Ω.

Les éléments de symétries de (H) dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ sont :

- le centre de symétrie de (H) est $\Omega\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$
- les droites d'équation y = 0 (l'axe focale) et $x = -\frac{1}{2}$ sont les axes de symétrie de (H).

Les asymptotes de (H) dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ sont :

La droite (D) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ et la droite (D') d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$

b. Voir repère au debut

2. a. l'ensemble des points M tel que z ' est un réel est :

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On a :

$$z' = \frac{2}{z^2 + z} \Leftrightarrow x' + iy' = \frac{2}{(x+iy)^2 + (x+iy)} \Leftrightarrow x' + iy' = \frac{2}{(x^2 - y^2 + x) + (2xy + y)i} \Leftrightarrow$$

$$x' + iy' = \frac{2[(x^2 - y^2 + x) - (2xy + y)i]}{(x^2 - y^2 + x)^2 + (2xy + y)^2} \Leftrightarrow x' + iy' = \frac{2(x^2 - y^2 + x)}{(x^2 - y^2 + x)^2 + (2xy + y)^2} - \frac{2(2xy + y)i}{(x^2 - y^2 + x)^2 + (2xy + y)^2}$$

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow I_m(z') = 0 \Leftrightarrow -\frac{2(2xy + y)}{(x^2 - y^2 + x)^2 + (2xy + y)^2} = 0 \Leftrightarrow 2xy + y = 0$$

$$\Leftrightarrow y(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Donc l'ensemble des points M est l'union des droites d'équation $y = 0$ et $x = -\frac{1}{2}$ privé des points O (0 ; 0) et A (- 1 ; 0)

b. L'ensemble des points M tel que z' est imaginaire pur est :

$$z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow R_e(z') = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - y^2 + x)}{(x^2 - y^2 + x)^2 + (2xy + y)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - y^2 + x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + x = 0$$

Donc l'ensemble des points M est l'hyperbole (H) privé des points O(0,0) et A(−1,0).

EXERCICE 3 : Bac E 1998 Session normale

1. Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y),

La distance de M à la droite (Δ) d'équation $x = \frac{16}{3}$ est $\left|x - \frac{16}{3}\right|$

$\left|x - \frac{16}{3}\right| = \frac{1}{3}|3x + 6|$ et la distance OM est égale à $\sqrt{x^2 + y^2}$

$$M \in (E) \Leftrightarrow 25(x^2 + y^2) = (3x\ '\ 16)^2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{(3x - 16)^2} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{3x - 16}{3}\right)^2} = \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OM^2}{d(M,(\Delta))^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{OM}{d(M,(\Delta))} = \frac{3}{5}$$

(E) est donc l'ellipse de foyer O, d'excentricité $\frac{3}{5}$ et de directrice associé (Δ).

2. a. $OM = \frac{1}{5}|3x - 16|$ Puisque $x < \frac{16}{3}$, *d'où* $3x - 16 < 0$ donc $OM = \frac{1}{5}(16 - 3x)$.

b. $x = OM\cos\theta$

Donc $5OM = 16 - 3OM\cos\theta$. Par suite $OM = \frac{16}{5 + 3\cos\theta}$.

3. On a : $\text{mes}\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM'}}\right) = \theta + \pi$ et M '∈(E) D'où $OM' = \frac{16}{5 + 3\cos(\theta + \pi)} = \frac{16}{5 - 3\cos\theta}$

a) $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

b) On a : $OI\cos\theta = \frac{16}{3}$, d'où $OI = \frac{16}{3\cos\theta}$; $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{6\cos\theta}{16} = 2 \times \frac{3\cos\theta}{16} = \frac{2}{OI}$

EXERCICE 4

1. Montrons que (E) est la reunion de deux coniques :

On a : **(E)** : $\frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{y^4}{16} = (x^2 - 1)^2$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - \frac{y^4}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 1 - \frac{y^2}{4}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{y^2}{4}\right) = 0$$

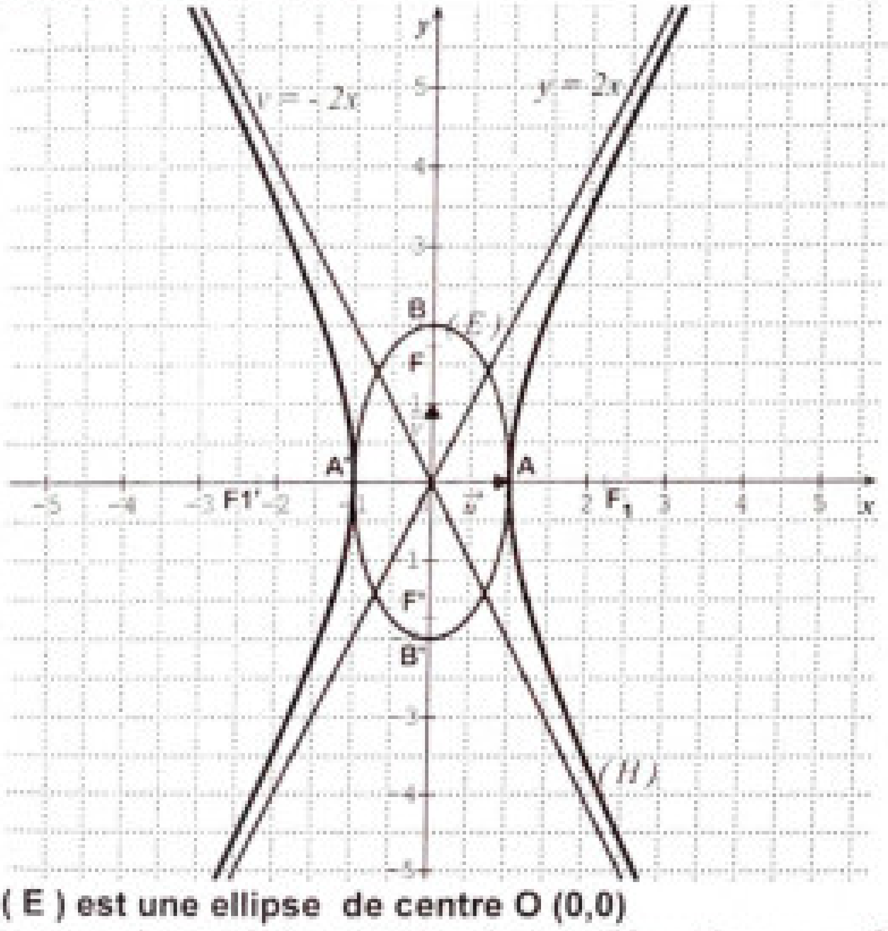
$$\frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1 \Leftrightarrow \left(x^2 - 1 - \frac{y^2}{4}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \left(x^2 - 1 + \frac{y^2}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

Donc (E) est la réunion d'une ellipse d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ et

d'une hyperbole d'équation $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

2. Courbe de (E) et (H)



• (E) est une ellipse de centre O (0,0)

Les axes de symétries sont les droites d'équations x = 0 et y = 0

Les coordonnées de (E) sont : A(1, 0) ; A'(- 1, 0); B(0 , 2) et B'(0,−2)

La demi distance focal est c = $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

Les coordonnées des foyers sont : F(0,$\sqrt{3}$) et F'(0, − $\sqrt{3}$)

• (H) est une hyperbole de centre O (0,0)

Les axes de symétries sont les droites d'équations x = 0 et y = 0

Les sommets de (H) sont A(1,0) et A'(− 1, 0)

La demi distance focal est c =$\sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

Les coordonnées des foyers de (H) sont: F_1($\sqrt{5}$, 0) et F_1'(− $\sqrt{5}$, 0)

Les asymptotes de (H) ont pour equations: $y = 2x$ et $y = -2x$

EXERCICE 5

1. Déterminons l'équation cartésienne de (E).

On a : $\overrightarrow{MF}\begin{pmatrix}3-x\\0-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MH}\begin{pmatrix}1-x\\y-y\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{MH}\begin{pmatrix}1-x\\0\end{pmatrix}$

D'où on a : $MF = \sqrt{3}MH \Leftrightarrow MF^2 = 3MH^2 \Leftrightarrow (3-x)^2 + (-y)^2 = 3(1-x)^2$

$\Leftrightarrow 9 - 6x + x^2 + y^2 = 3 - 6x + 3x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - y^2 - 6 = 0$

Donc l'équation de (E) est : $2x^2 - y^2 - 6 = 0$

2. Nature, Sommets et asymptotes de (E)

On a : $MF = \sqrt{3}\,MH \Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = \sqrt{3}$, d'où l'excentricité $e = \sqrt{3}$

$\sqrt{3} > 1$, donc l'ensemble (E) est une hyperbole de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité $\sqrt{3}$

On a : $2x^2 - y^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - y^2 = 6 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$

Les sommets de l'hyperbole (E) ont pour coordonnées $A(\sqrt{3}, 0)$ et $A'(-\sqrt{3}, 0)$

Les asymptotes de (E) ont pour équations cartésiennes : $y = \sqrt{2}\,x$ et $y = -\sqrt{2}\,x$

EXERCICE 6

1. Déterminons la nature de (F_m)

1er cas : Pour $m = 0$; On a (F_0) a pour équation : $y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{2}$

Donc F_0 est la reunion de deux droites parallèles d'équations $y = \sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{2}$

2ème cas : Pour $m = 1$. On a (F_1) a pour équation : $2x^2 - 8x + 10 = 0$

$\Delta = -16$. L'équation n'admet pas de solutions. Donc l'ensemble (F_1) est vide.

3ème cas : Pour $m \neq 0$ et $m \neq 1$

On a : $2mx^2 - 8mx - (m " 1)y^2 + 12m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2m(x^2 - 4x) " (m " 1)y^2 + 12m " 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2m[(x " 2)^2 - 4] - (m " 1)y^2 + 12m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2m(x " 2)^2 - (m " 1)y^2 + 4m " 2 = 0$

Si $4m - 2 = 0$, c'est à dire $m = \frac{1}{2}$ alors on a : $(x " 2)^2 + \frac{1}{2}y^2 = 0$

L'ensemble ($F_{\frac{1}{2}}$) est le singleton $\{G\}$ avec $G(2, 0)$

Si $m \neq \frac{1}{2}$ alors on a : $2m(x " 2)^2 - (m " 1)y^2 + 4m " 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2m(x " 2)^2 - (m " 1)y^2 = -4m + 2 \Leftrightarrow \frac{2m(x " 2)^2}{-4m+2} - \frac{(m " 1)y^2}{-4m+2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{\frac{-4m+2}{2m}} - \frac{y^2}{\frac{-4m+2}{m-1}} = 1$

Etudions le signe de $\frac{-4m+2}{2m}$ et $\frac{-4m+2}{m-1}$ sachant que $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; \frac{1}{2}; 1\}$

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-4m+2$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2m$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$m-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-4m+2}{2m}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{-4m+2}{m-1}$		$-$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Pour $m \in]-\infty, 0[$; (F_m) est une hyperbole .

Pour $m \in \left]0 ; \frac{1}{2}\right[$; (F_m) est une ellipse .

Pour $m \in \left]\frac{1}{2} ; 1\right[$; (F_m) est vide

Pour $m \in]1 ; +\infty[$; (F_m) est une hyperbole

2. **Déterminons la valeur de m lorsque** :

a. (F_m) est un cercle .

(F_m) est un cercle si et seulement si : $m = \frac{1}{2}$ ou $\begin{cases} 0 < m < \frac{1}{2} \\ \frac{-4m+2}{2m} = -\frac{-4m+2}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow$

$m = \frac{1}{3}$ ou $m = \frac{1}{2}$

Pour $m = \frac{1}{2}$, on obtient le cercle de centre $G(2, 0)$ et de rayon nul.

Pour $m = \frac{1}{3}$, on obtient le cercle de centre $G(2, 0)$ et de rayon 1

b. (F_m) est une hyperbole équilatère.

(F_m) est une hyperbole équilatère si et seulement si $\begin{cases} m \in]-\infty, 0[\cup]1 ; +\infty[\\ \frac{-4m+2}{2m} = \frac{-4m+2}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$

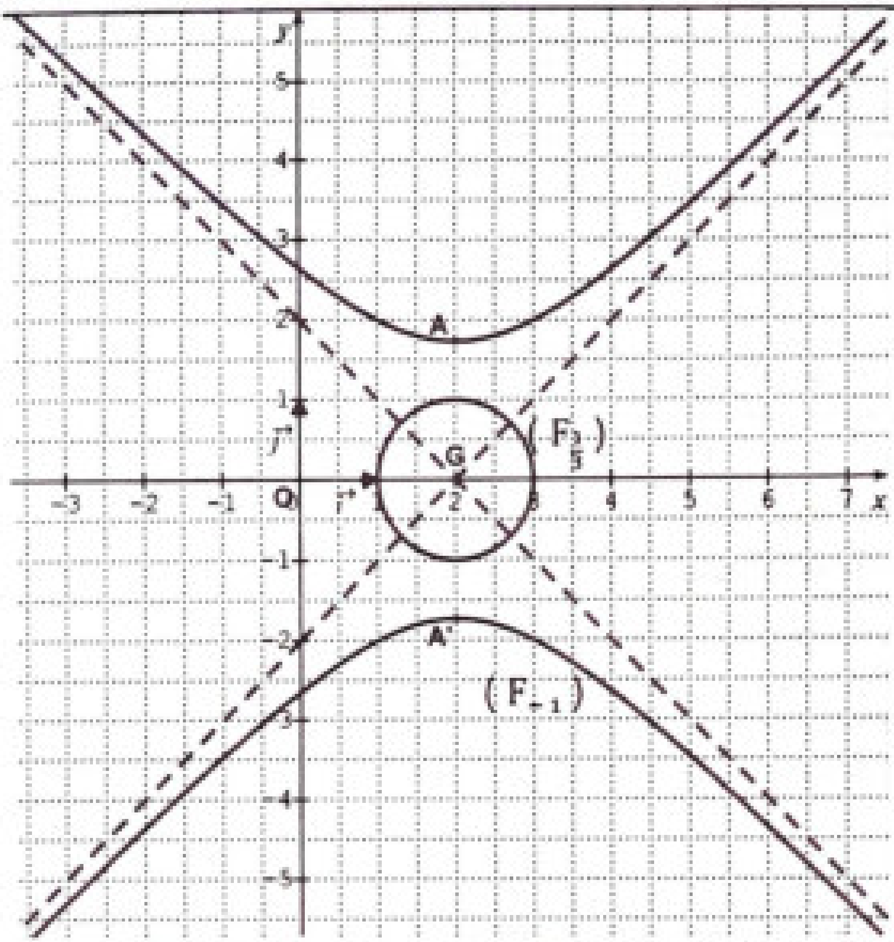
L'hyperbole équilatère (F_{-1}) a pour équation cartésienne : $-\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{y^2}{3} = 1$

3. Traçons $(F_{\frac{1}{3}})$ et (F_{-1})

Les asymptotes de (F_{-1}) ont pour équations : $y = x - 2$ et $y = -x + 2$

Les sommets de (F_{-1}) sont les points $A(2, \sqrt{3})$ et $A'(2, -\sqrt{3})$

Le point $G(2, 0)$ est le centre de $(F_{\frac{1}{3}})$ et (F_{-1})



EXERCICE 7 : Bac C 1998 Session de remplacement

1. a. Pour tout point M du plan,

$$f(M) = M \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(z + i\bar{z}) + i - 1$$

$$\Leftrightarrow x + iy = \frac{1}{2}(x + iy + i(x - iy)) + i - 1$$

$$\Leftrightarrow x + iy = \frac{1}{2}(x + y - 2) + \frac{1}{2}i(x + y + 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x + y - 2) \\ y = \frac{1}{2}(x + y + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(x - y + 2) = 0 \\ \frac{1}{2}(x - y + 2) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x - y + 2 = 0$ donc l'ensemble des points M tels que $f(M) = M$ est la droite (D) d'équation $x - y + 2 = 0$

b. Déterminons les coordonnées de M'.

$$f(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{1}{2}(z + i\bar{z}) + i - 1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = \frac{1}{2}(x + iy + i(x - iy)) + i - 1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = \frac{1}{2}(x + y - 2) + \frac{1}{2}i(x + y + 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + y - 2) \\ y' = \frac{1}{2}(x + y + 2) \end{cases}$$

Donc $M'\left(\frac{1}{2}(x + y - 2); \frac{1}{2}(x + y + 2)\right)$

Démontrons maintenant que M' appartient à (D).

On a : $\frac{1}{2}(x+y-2) - \frac{1}{2}(x+y+2) + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$

Ainsi, les coordonnées de M' vérifient l'équation de (D). Donc M' appartient à (D).

c. On a : $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $M'\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(x+y-2)\\\frac{1}{2}(x+y+2)\end{pmatrix}$; d'où $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(-x+y-2)\\\frac{1}{2}(x-y+2)\end{pmatrix}$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, un vecteur directeur de (D).

$\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{u} = -\frac{1}{2}(x-y+2)+\frac{1}{2}(x-y+2) = 0$ Alors $\overrightarrow{MM'}$ est normal à la droite(D).

- Caractérisons géométriquement f.

A tout point M du plan, f associe le point M' tel que : $\begin{cases}\text{M' appartient à (D)}\\ \overrightarrow{MM'} \text{ est normal à (D)}\end{cases}$

f est donc la projection orthogonale sur la droite (D).

2. a. $z-z'=\frac{1}{2}\left|2z-z-i\bar{z}-2i+2\right|=\frac{1}{2}\left|z-i\bar{z}-2(i-1)\right|$

b. Pour tout point M du plan,

$$\begin{aligned}M\in(E) &\Leftrightarrow |z-1|=\frac{1}{4}\left|z-i\bar{z}-2(i-1)\right|\\ &\Leftrightarrow |z-1|=\frac{1}{2}|z-z'| \text{ d'après 2)a}\\ &\Leftrightarrow MF=\frac{1}{2}MM'\\ &\Leftrightarrow \frac{MF}{d\left(M,(D)\right)}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(E) est donc l'ellipse de foyer F, de directrice associée (D) et d'excentricité $\frac{1}{2}$

L'axe focal (Δ) est la perpendiculaire à (D) passant par F.

Une équation de (Δ) est de la forme : $x+y+c=0$ car $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, vecteur directeur de (D)

est un vecteur normal à (Δ)

(Δ) passe par $F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; donc **1 + 0 + c = 0**, soit **c = - 1**

Une équation cartésienne de (Δ) est donc : $x+y-1=0$

c. Vérifions que les points A et A' sont des points d'intersection de (Δ) et (E).

$(\Delta)\ x+y-1=0$ $\qquad$ $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; $A'\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$ donc $A\in(\Delta)$; $\frac{5}{2}-\frac{3}{2}-1=0$ donc $A'\in(\Delta)$.

$\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-1\right| = \frac{1}{2}|-1+i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{4}\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)-2(i-1)\right| = \frac{1}{4}|2-2i| = \frac{1}{2}|1-i| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\left|\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i-1\right| = \left|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ donc $A' \in (E)$.

Par conséquent, A et A' sont les sommets de (E) situés sur l'axe focal (Δ).

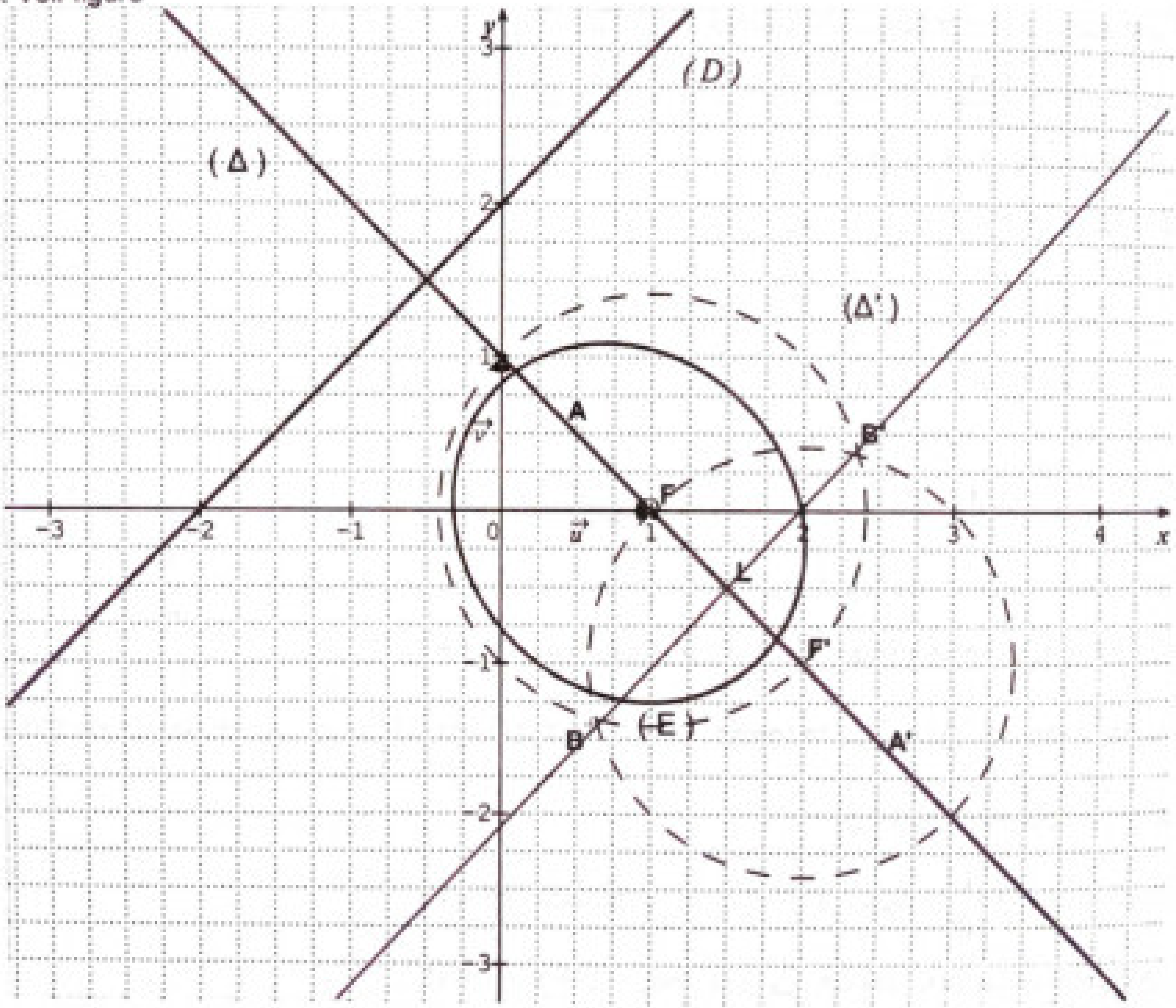
3. a. courbe (voir figure)

b. construction des autres sommets B et B' :

Soit Ω le centre de l'ellipse (E), (Δ') l'axe non focal de (E).

Ω est le milieu du segment $[AA']$; B et B' sont les points d'intersection de l'axe non focal (Δ') et du cercle de centre F et de rayon ΩA.

c. Voir figure



EXERCICE 8 : Bac C 1996 Session de remplacement

Partie A

1. Nature de la conique (h)

Soit $M(x;y) \in (h) \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$

donc (h) est une hyperbole équilatère.

Le sommet A de (h) a pour coordonnées $A(0;4)$.

Tracer (h) : (voir figure)

2. Montrons que R est une rotation, puis déterminons les éléments caractéristiques.

on a: $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$ est de la forme $z' = az + b$ avec $a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ et $b = 0$

- le module de a est : $|a| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} \Rightarrow |a| = 1$

- l'angle orienté de R

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \quad \left.\begin{matrix} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}\right| \theta = -\frac{\pi}{4}$$

- le centre de R $\quad z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{0}{1-a} = 0$

Donc R est une rotation de centre O et d'angle orienté $-\frac{\pi}{4}$

3.a. Ensemble des points invariants par S.

M est un point invariant par S $\Leftrightarrow S(M) = M$

$\Leftrightarrow z' = z" \Leftrightarrow x + iy = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)(x - iy) \Leftrightarrow x + iy = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + iy + ix + y)$

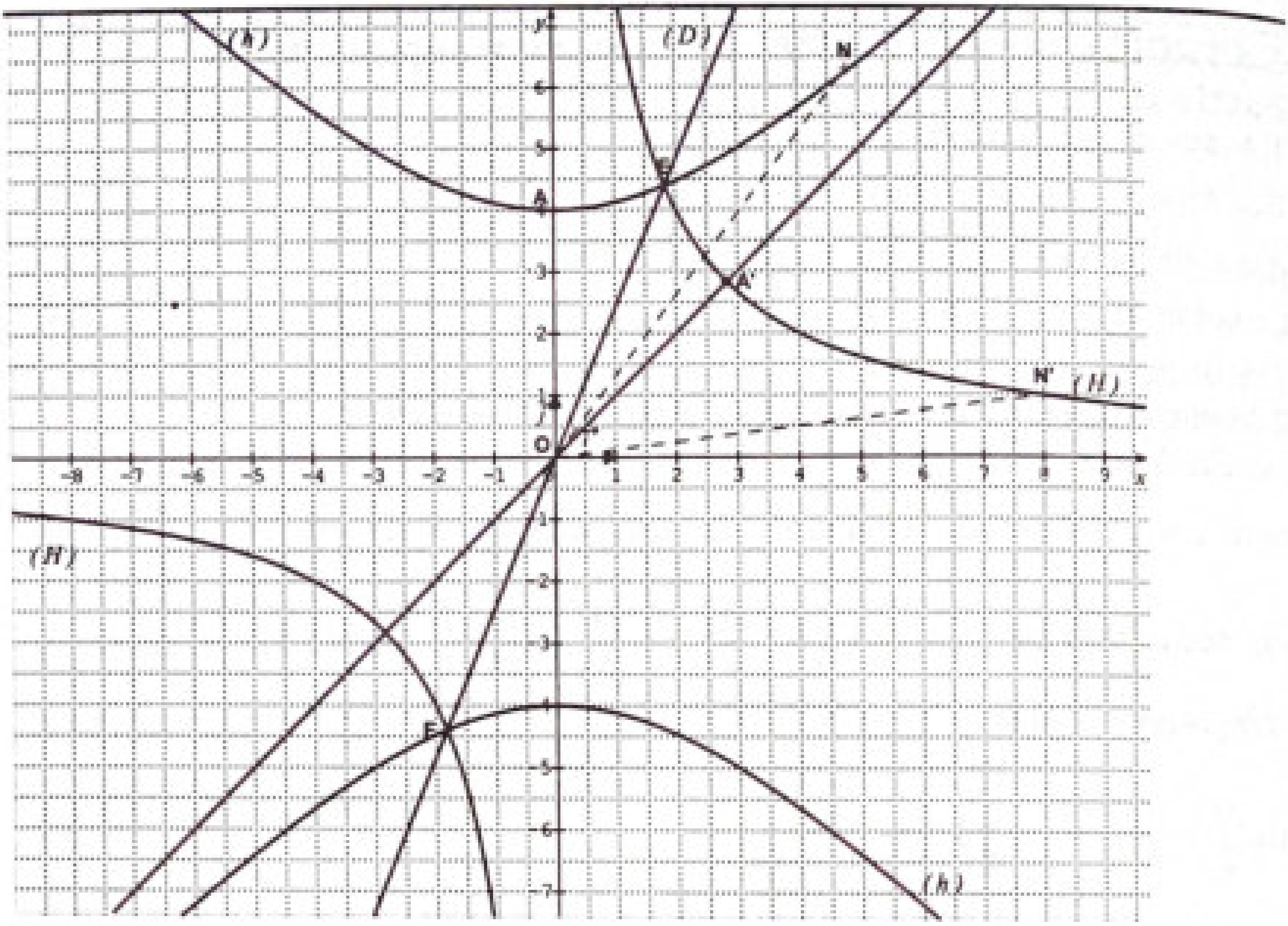
$\Leftrightarrow x + iy = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}iy + \frac{\sqrt{2}}{2}ix + \frac{\sqrt{2}}{2}y$

$\Leftrightarrow x + iy = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}y = x + \frac{\sqrt{2}}{2}x \\ y - \frac{\sqrt{2}}{2}y = \frac{\sqrt{2}}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}y = \frac{2+\sqrt{2}}{2}x \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}y = \frac{\sqrt{2}}{2}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (1+\sqrt{2})x \\ y = (1+\sqrt{2})x \end{cases} \Leftrightarrow y = (1+\sqrt{2})x$$

Donc l'ensemble des points invariants par S est la droite (D) d'équation $y = (1+\sqrt{2})x$.



b. Démontrons que $S = R \circ S_{(OJ)}$.

- Déterminons l'écriture complexe de $S = R \circ S_{(OJ)}$

· l'écriture complexe de R est $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$

· l'écriture complexe de $S_{(OJ)}$ est $z' = -\bar{z}$

· l'écriture complexe de $R \circ S_{(OJ)}$ est $R \circ S_{(OJ)} = R\left[S_{(OJ)}\right] = R[-\bar{z}]$

$$z_{R \circ S_{(OJ)}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\bar{z}$$

Donc l'écriture complexe de $R \circ S_{(OJ)}$ est $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\bar{z} \Rightarrow z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\bar{z}$

On constacte que l'écriture complexe de S est aussi celui de $R \circ S_{(OJ)}$ donc $S = R \circ S_{(OJ)}$

c. Nature de S.

L'application S est la composée de deux isometries, donc elle est une isométrie.

De plus S admet la droite (D) comme ensemble de points invariants.

S est donc la symétrie orthogonale d'axe (D).

4. a. Vérifions que R(A) = S(A).

$$R(A)=A' \Leftrightarrow z_{A'}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(4i)=\frac{\sqrt{2}}{2}(4i+4)=2\sqrt{2}i+2\sqrt{2}$$

$$\boxed{z_{A'}=2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}$$

$$S(A)=A' \Leftrightarrow z_{A'}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\overline{z_A}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(-4i)=\frac{\sqrt{2}}{2}(4i+4)$$

$$\boxed{z_{A'}=2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}$$

Donc $R(A)=S(A)=A'$ avec $A'\left(2\sqrt{2}\ ;\ 2\sqrt{2}\right)$

b. Points d'intersection de (D) et (h)

$$M\in(D)\cap(h)\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-x^2=16 & (1)\\ y=\left(1+\sqrt{2}\right)x & (2)\end{cases}$$

Remplaçons dans (1) l'équation (2).

$$y^2-x^2=16\Leftrightarrow\left[\left(1+\sqrt{2}\right)x\right]^2-x^2=16\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{2}\right)^2x^2-x^2=16$$

$$\Leftrightarrow\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^2-1\right]x^2=16\Leftrightarrow\left(1+2\sqrt{2}+2-1\right)x^2=16$$

$$\Leftrightarrow\quad\left(2+2\sqrt{2}\right)x^2=4^2\quad\Leftrightarrow\quad x^2=\frac{4^2}{2+2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{4}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\quad\text{ou}\quad x=-\frac{4}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$$

l'équation (2) donne :

Pour $x=\dfrac{4}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$ on a : $y=\left(1+\sqrt{2}\right)x=\dfrac{4\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$

Donc $E\left(\dfrac{4}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}};\ \dfrac{4\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right)$

Pour $x=-\dfrac{4}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$ on a : $y=\left(1+\sqrt{2}\right)x=\dfrac{-4\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$

Donc $F\left(-\dfrac{4}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}};-\dfrac{4\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right)$

En conclusion : (D) coupe (h) en deux points E et F.

5. a. Démontrons que les coordonnées de M, M' et M" vérifient $x'y'=x''y''=\frac{1}{2}(y^2-x^2)$

Déterminons d'abord l'expression analytique de R.

On a : $M'=R(M)\Leftrightarrow z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z\Leftrightarrow x'+iy'=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(x+iy)$

$$\Leftrightarrow x'+iy'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)+\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)i$$

donc $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \end{cases}$ est l'expression analytique de R.

On a : $x'.y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \times \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) = \frac{2}{4}(x+y)(y-x) = \frac{1}{2}(xy - x^2 + y^2 - xy)$

Donc $\boxed{x'.y' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)}$ (1)

- Expression analytique de S.

$S(M) = M'' \Leftrightarrow z'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\bar{z} \Leftrightarrow x''+iy'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(x-iy)$

$\Leftrightarrow x''+iy'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+iy+ix+y)$

$\Leftrightarrow x''+iy'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) + \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)i$

donc $\begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \\ y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{cases}$ est l'expression analytique de S.

on a : $x''.y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x).\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) = \frac{2}{4}(y-x)(x+y) = \frac{1}{2}(xy - x^2 + y^2 - xy)$

donc $\boxed{x''.y'' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)}$ (2)

les relations (1) et (2) donnent $x'.y' = x''.y'' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$

b- Déterminons l'image de (h) par R et S

- Par R : soit R(h)

$x'.y' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$ et (h) : $y^2 - x^2 = 16 \Rightarrow y^2 = 16 + x^2$

d'où $x'.y' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) \Leftrightarrow x'.y' = \frac{1}{2}(16 + x^2 - x^2) \Leftrightarrow \boxed{x'.y' = 8} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{8}{x'}}$

- Par S : soit S(h)

$x''.y'' = \frac{1}{2}(y^2 + x^2)$ et (h) : $y^2 - x^2 = 16 \Rightarrow y^2 = 16 + x^2$

d'où $x''.y'' = \frac{1}{2}(16 + x^2 - x^2) \Leftrightarrow \boxed{x'.y' = 8} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{8}{x'}}$

En conclusion: S(h) et R(h) ont la même équation $xy = 8$ ou $y = \frac{8}{x}$.
c'est l'équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes.
On en déduit que (h) a même image par R et S qui est l'hyperbole d'équation $y = \frac{8}{x}$

6. Vérifions que E et F appartiennent à ($\mathcal{H}$)

On a : $E\left(\frac{4}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}};\frac{4(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right) \Rightarrow E\left(\frac{4}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}};2\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)$

On a : $F\left(-\frac{4}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}};\frac{-4(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right) \Rightarrow F\left(-\frac{4}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}};-2\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)$

$$\bullet E \in (H) \Leftrightarrow y_E = \frac{8}{x_E} \Leftrightarrow y_E = \frac{8}{\frac{4}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}}$$
$$\Leftrightarrow y_E = 2\sqrt{2+2\sqrt{2}}$$

Donc E appartient à ($\mathcal{H}$)

$$F \in (\mathcal{H}) \Leftrightarrow y_F = \frac{8}{x_F} \Leftrightarrow y_F = \frac{8}{-\frac{4}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}} \Leftrightarrow y_F = -2\sqrt{2+2\sqrt{2}}$$

Donc F appartient à ($\mathcal{H}$)

b – Tracer de (h), (D) et ($\mathcal{H}$). (voir figure ci-dessus)

PARTIE B

1. a. Soit M un point du plan de coordonnées $(x;y)$

On a : $M \in (h^+) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (h) \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 = 16 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 + 16 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2+16}$ car $y \geq 0$.

Donc la courbe représentative de la fonction(h^+) est $y = \sqrt{x^2+16}$.

b. Une équation de la droite (ON) est de la forme $z = at$.

Puisque N a pour coordonnées $\left(x;\sqrt{x^2+16}\right)$alors $z = \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}t$

U(x) est l'aire de la partie limitée par (h^+) et les segments $[OA]$et$[ON]$

$$\Leftrightarrow U(x)=\int_0^x\left(f(t)-\frac{\sqrt{x^2+16}}{x}t\right)dt=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x\frac{\sqrt{x^2+16}}{x}t\,dt$$

$$=\int_0^x\sqrt{t^2+16}\,dt-\frac{\sqrt{x^2+16}}{x}\int_0^x t\,dt$$

$$=\int_0^x\sqrt{t^2+16}\,dt-\frac{\sqrt{x^2+16}}{x}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x$$

$$U(x)=\int_0^x\sqrt{t^2+16}\,dt-\frac{\sqrt{x^2+16}}{x}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$\boxed{U(x)=\int_0^x\sqrt{t^2+16}\,dt-\frac{x\sqrt{x^2+16}}{2}}$$

c. Dérivée de G et U.

$$G(x)=8\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)$$

$$G'(x)=8\frac{\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)'}{x+\sqrt{x^2+16}}=8.\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}}{x+\sqrt{x^2+16}}=8.\frac{\sqrt{x^2+16}+x}{\left(\sqrt{x^2+16}\right)\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)}$$

$$\boxed{G'(x)=\frac{8}{\sqrt{x^2+16}}}$$

$$U(x)=\int_0^x\sqrt{t^2+16}\,dt-\left(\frac{x\sqrt{x^2+16}}{2}\right)$$

$$U'(x)=\sqrt{x^2+16}-\left(\frac{x\sqrt{x^2+16}}{2}\right)'=\sqrt{x^2+16}-\frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+16}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}.x\right]$$

$$=\sqrt{x^2+16}-\frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+16}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}\right]=\sqrt{x^2+16}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+16+x^2}{\sqrt{x^2+16}}\right)$$

$$U'(x)=\sqrt{x^2+16}-\frac{1}{2}.\frac{2x^2+16}{\sqrt{x^2+16}}=\sqrt{x^2+16}-\frac{x^2+8}{\sqrt{x^2+16}}=\frac{x^2+16-x^2-8}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$\boxed{U'(x)=\frac{8}{\sqrt{x^2+16}}}$$

donc $\forall x\in[0;+\infty[$, $G'(x)=U'(x)=\dfrac{8}{\sqrt{x^2+16}}$

- Calculons U(0) et G(0).

$$U(x)=\int_0^x \sqrt{t^2+16}\,dt-\left(\frac{x\sqrt{x^2+16}}{2}\right) \Rightarrow U(0)=\int_0^0 \sqrt{t^2+16}\,dt-\left(\frac{0\sqrt{0^2+16}}{2}\right)=0$$

- $G(x)=8\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)$

$$G(0)=8\ln\left(0+\sqrt{0^2+16}\right) \Rightarrow \boxed{G(0)=8\ln 4}$$

- $U'(x)=G'(x)$ donc $U(x)=G(x)+c$

car ce sont les primitives d'une même fonction sur $[0;+\infty[$.

$\forall x\in[0;+\infty[, U(x)=G(x)+c \Rightarrow c=U(x)-G(x)$

$c=U(0)-G(0)=0-8\ln 4$ donc $\boxed{c=-8\ln 4}$

Au total, $U(x)=G(x)+c$

$$U(x)=8\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)-8\ln 4=8\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)-\ln 4\right]$$

donc $\boxed{U(x)=8\ln\left(\frac{\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)}{4}\right)}$

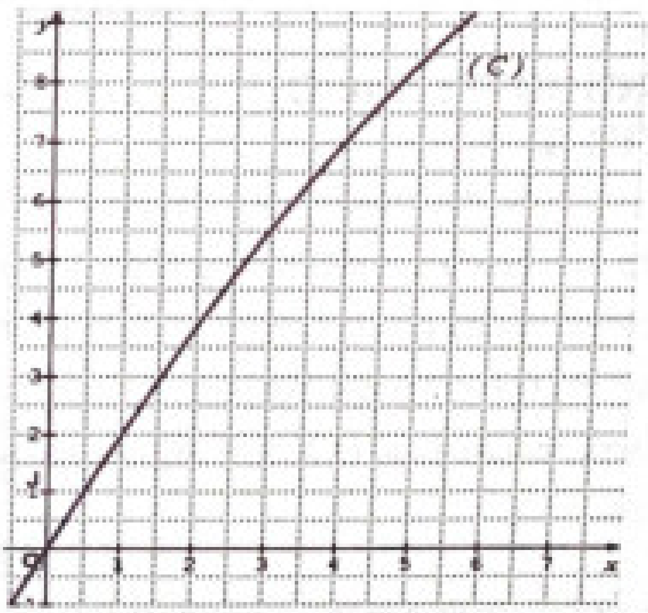
2.a. Sens de variation de U(x).

On a : $U'(x)=\dfrac{8}{\sqrt{x^2+16}}$

$\forall x\in[0;+\infty[$, $U'(x)>0$ donc U est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

b. $U'(0)=\dfrac{8}{\sqrt{0^2+16}}=\dfrac{8}{4} \Rightarrow \boxed{U'(0)=2}$. Donc (C) admet une demi-tangente au point d'abscisse O de coefficient directeur 2.

c. courbe (C). (voir figure).



PARTIE C

1. Démontrons que N_1 appartient à (h^+)

Soit $N_1(x_1;y_1)$ et $N'(x';y')$

$$N_1 = R^{-1}(N') \Leftrightarrow R(N_1) = N' \Leftrightarrow z_{N'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z_{N_1}$$

$$\Leftrightarrow (x'+iy') = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x_1+y_1) \Leftrightarrow x'+iy' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+iy_1-ix_1+y_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+y_1) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_1-x_1) \end{cases} \text{ d'où on a } \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}$$

Puisque N' appartient à $(\mathcal{H}_+)$, alors y ' est positif . D'où $\begin{cases} x' = 2\sqrt{2} \\ y' \geq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \; y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \quad \text{donc} \quad y \geq 0$$

N_1 appartient donc à (h_+).

Montrons que x_1 est positive.

On a $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$. Or $N_1 \in (\mathcal{H}_+)$, d'équation $y = \frac{8}{x}$

D'où $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x' - \frac{8}{x'}\right)$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x'^2 - 8}{x'}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{(x'-\sqrt{8})(x'+\sqrt{8})}{x'} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{(x'-2\sqrt{2})(x'+2\sqrt{2})}{x'}$$

On a : $x' \geq 2\sqrt{2}$ donc $x \geq 0$. L'abscisse x est donc positive.

2. $(\mathcal{H}_+)$ est l'image de (h) par la rotation R ; d'où (Δ') est l'image de (Δ) par l'isométrie R, qui est une rotation.

Or les isométries conservent les aires, donc (Δ) et (Δ') ont la même aire .

EXERCICE 9 : Bac C 1999 Session de remplacement

PARTIE A

1. Une similitude directe conserve le rapport des distances et l'angle orienté.

Par suite l'image du carré OIKJ par S est le carré OI'K'A

2. Construction des points O, I, J, K, I', K' (voir figure)

3. Les points I, J et A sont alignés.

Donc leurs images I', A' et A sont alignés car une similitude directe conserve l'alignement de points.

4.

$$\overset{S}{\curvearrowright}$$

O	O
J	A
I	I'
K	K'
A	A'

La similitude directe conserve le rapport des distances. Donc : $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'K'}{AK}$

Démontrer que $OA' = A'K'$ revient à démontrer que $OA = AK$

La droite (IJ) est un axe de symétrie du carré OIKJ. C'est la médiatrice du segment $[OK]$. Le point A appartient à la droite (IJ) donc $OA = AK$.

Par conséquent, $OA' = A'K''$.

PARTIE B

1. K a pour couple de coordonnées (1 ; 1) donc l'affixe z_k de K est $1+i$.

2. Soit (x, y) le couple de coordonnées de A dans le repère (O, I, J).

$$\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix};\ \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}A \in (IJ) &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IJ}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow x - 1 + y = 0\\ &\Leftrightarrow y = 1 - x\end{aligned}$$

$$a = x + iy = x + i(1 - x)$$

$$ia + 1 = ix - (1 - x) + 1 = x(1 - x)$$

3. Un argument de $1+i$ est $\frac{\pi}{4}$. Un argument du réel non nul x est 0 ou $+\pi$ selon le signe de x . ($x \neq 0$ car $A \neq J$) ;

par suite un argument de $x(1+i)$ est $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$ c'est-à-dire $\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$.

car $\arg[x(1+i)] = \arg x + \arg(1+i) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Donc il existe un argument de $ia+1$ dans la paire $\left\{\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\}$.

4. Considérons la symétrie orthogonale $S_{(IJ)}$ d'axe (IJ).

$S_{(IJ)}$

O	K
J	J
A	A

On a : $\widehat{\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA}\right)} = -\widehat{\left(\overrightarrow{KJ},\overrightarrow{KA}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KJ}\right)}$

Car une symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé.

5. Le vecteur-image du complexe $a-(1+i)$ est $\overrightarrow{KA}$: car $z_{\overrightarrow{KA}} = z_A - z_K$

$$\widehat{\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{KA}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{KA}\right)} \left(car\, \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{JK}\right)$$

$$= \widehat{\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{KJ}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{KA}\right)} = \left(\widehat{\pi}\right) - \widehat{\left(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KJ}\right)} = \left(\widehat{\pi}\right) - \widehat{\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA}\right)}$$

$$= \left(\widehat{\pi}\right) - \widehat{\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA}\right)} - \widehat{\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)} = \left(\widehat{\pi}\right) + \widehat{\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)} - \widehat{\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)}$$

$$mes\widehat{\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{KA}\right)} \equiv \pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\,[2\pi] \equiv 3\frac{\pi}{2} - \alpha\,[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2} - \alpha\,[2\pi]$$

Donc $-\frac{\pi}{2}-\alpha$ est un argument du nombre complexe $a-(1+i)$.

PARTIE C

1. S(O) = O et S(J) = A

L'écriture complexe de S est : $z' = tz + p$ où $t \in \mathbb{C}^*$

On a : $\begin{cases} 0 = 0 + p \\ a = t(i) + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \\ t = -ia \end{cases}$ Donc $z' = -iaz$

2. $K' = S(K) \Leftrightarrow k' = -ia(1+i)$

$A' = S(A) \Leftrightarrow a' = -ia^2$

3. a.

$$u = k' - (1+i) = -ia(1+i) - (1+i) = (1+i)(-ia-1)$$

$$= -(1+i)(ia+1)$$

$$\begin{cases} \arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ ou \\ \arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} + \pi - \frac{3\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \qquad \begin{cases} \arg(u) \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi] \\ ou \\ \arg(u) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$\arg(u) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ Donc u est un imaginaire pur.

$$v = a' - k' \Leftrightarrow v = -ia^2 + ia(1+i)$$

$$\Leftrightarrow v = -ia(a-(1+i))$$

$$\arg(v) \equiv -\frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2} - \alpha [2\pi] \equiv -\pi [2\pi]$$

Donc v est un nombre réel.

b. u est un imaginaire pur donc (KK') ⊥ (OI)

v est un réel donc $(K'A')//(OI)$ donc $(KK') \perp (K'A')$,

par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{KK'}$ et $\overrightarrow{K'A'}$ sont orthogonaux.

4. On sait que $(KI) \perp (OI)$ et que $(KK') \perp (OI)$

Donc les droites (KI) et (KK') sont confondues.

Par conséquent, les points K, K' et I sont alignés.

On sait d'après 3.a. que les vecteurs $\overrightarrow{KK'}$ et $\overrightarrow{K'A'}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que les droites (KK') et $(K'A')$ sont perpendiculaires en K'.

Donc K' est le projeté orthogonal de A' sur la droite (KK') c'est-à-dire sur la droite (KI).

5. Construction de A'

On sait :

- D'après A.3) que $A' \in (AI')$
- D'après C.4) que $(A'K') \perp (KK')$

A' est donc l'intersection de la droite (AI') et de la perpendiculaire à la droite (KK') en K'.

6. On sait d'après A.4) que OA' = K'A' donc $\frac{OA'}{K'A'} = 1$

C'est-à-dire $\frac{d(A',O)}{d(A',(IK))} = 1$

Donc A' appartient à la parabole de foyer O et de directrice (IK).

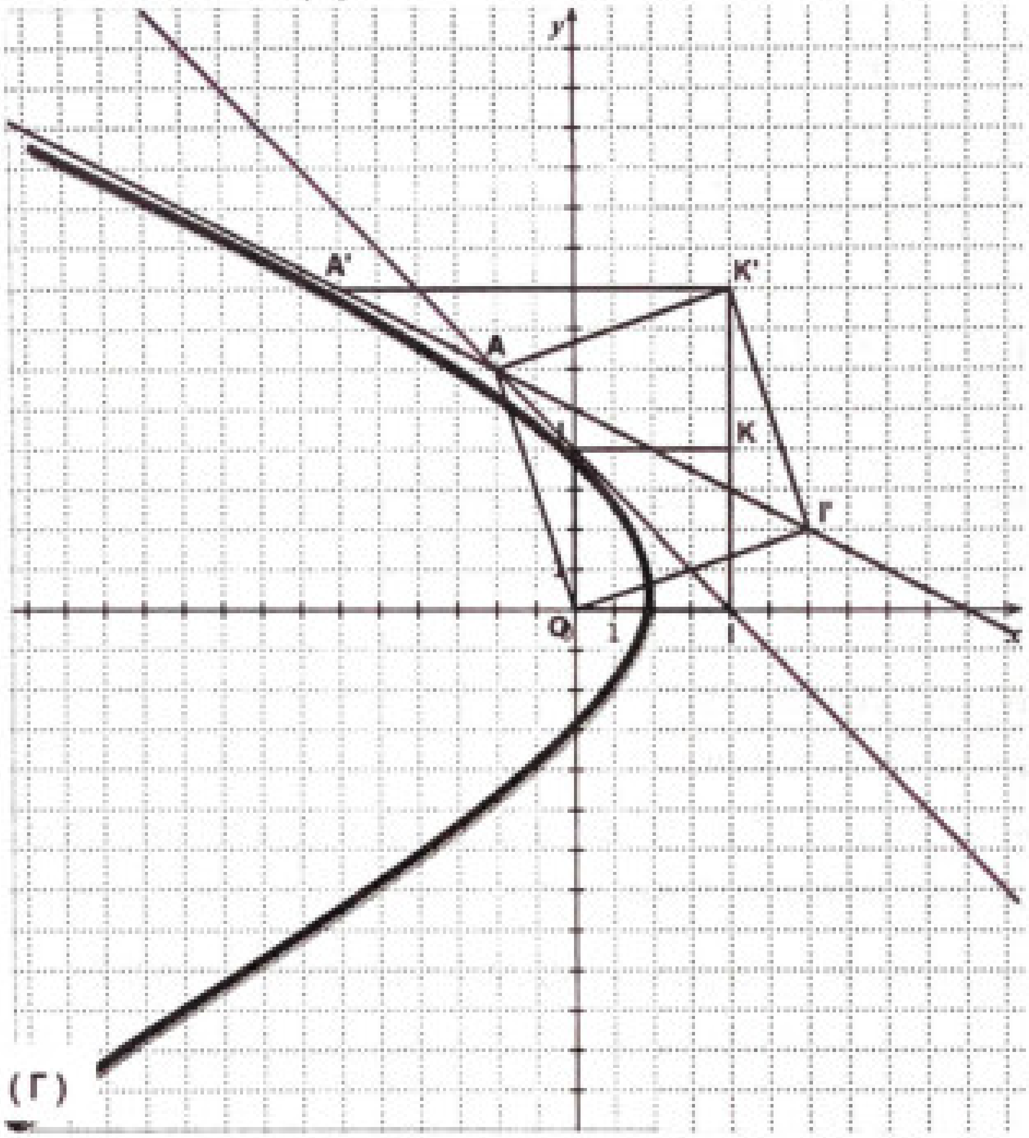
PARTIE D

1. L'axe focal de (Γ) est la perpendiculaire à la droite (IK) passant par O c'est-à-dire (OI).

Le sommet de la parabole est le milieu du segment [OI]

2. $\frac{d(J,O)}{d(J,(IK))} = \frac{1}{1} = 1$ donc $J \in (\Gamma)$

3. construction de (Γ)



CHAPITRE VII : LIMITES ET CONTINUITE DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

FICHE DE COURS

A- LIMITES ET CONTINUITE

Continuité en un point a

Soit a un nombre réel et f une fonction définie en a.

f est continue en a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou f est continue en a $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$

Prolongement par continuité en a

Soit f une fonction non définie en a . $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet un prolongement par continuité en a.

Ce prolongement est la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ , si } x \in D_f \\ g(a) = \ell \end{cases}$

symptote verticale

La droite d'équation x = a est une asymptote verticale à la courbe de f si et seulement si

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = -\infty$

Asymptote horizontale

La droite d'équation y = b est une asymptote horizontale à la courbe de f si et seulement

si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

Asymptote oblique

La droite d'équation y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe de f en

$+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

(respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$)

Branche parabolique de direction (OI)

La courbe de f admet une branche parabolique de direction (OI) si et seulement si

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

Branche parabolique de direction (OJ)

La courbe de f admet une branche parabolique de direction (OJ) si et seulement si

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$; ou $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$; ou $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$; ou $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

B- DERIVATION

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a.

On dit que f est dérivable en a si le taux de variation $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a.

Cette limite est appelée le nombre dérivé de f en a et est notée f '(a).

Ou bien f est dérivable en a $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x) - (a)}{x - a} = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Equation de la tangente au point d'abscisse a

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a, a pour équation :

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

- Si $f'(a) = 0$ alors la courbe de f admet au point a une tangente horizontale.
- Si $f_g'(a) \neq f_d'(a)$ alors f n'est pas dérivable en a; mais la courbe de f admet au point d'abscisse a deux (2) demi- tangentes.

Le point A (a, f(a)) est un point anguleux.

Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ alors la courbe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse a.

C- BIJECTION

- f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur f (I).

La fonction f et sa bijection réciproque f^{-1} ont le même sens de variation.

- f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [a, b].

Si f(a) et f (b) sont de signes contraires alors l'équation f(x)= 0 admet une solution unique dans] a; b [

- f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors pour tout $m \in f(I)$, l'équation f(x) = m admet une solution unique .
- Le nombre dérivé de f^{-1} en a est : $\left(f^{-1}\right)'(a) = \dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(a)\right]} = \dfrac{1}{f'(a)}$
- La courbe de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (une équation est y = x) dans un repère orthonormé.

D- POSITIONS RELATIVE DE DEUX COURBES

Soit f et g deux fonctions numériques, et K un sous-ensemble de $D_f \cap D_g$.

Pour étudier les positions relatives des deux courbes de f et g sur K, on calcule

f(x) – g(x) ; puis on étudie son signe.

- $\forall x \in K$, si f(x) - g(x) < 0 alors (C_f) est en dessous de (C_g)
- $\forall x \in K$, si f(x) – g(x) > 0 alors (C_f) est au dessus de (C_g)
- $\forall x = a \in K$, si f(x) – g(x) = 0 alors (C_f) et (C_g) se coupent au point A (a ; f(a))

E- AXE DE SYMETRIE ET CENTRE DE SYMETRIE

Dans un repère orthogonal, la droite d'équation x = a est un axe de symétrie pour la courbe de f si et seulement si $a - x \in D_f$; $a + x \in D_f$ et $f(a - x) = f(a + x)$

ou bien $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$

ou bien la fonction $g(x) = f(a + x)$ est une fonction paire.

Dans un repère orthogonal, le point A (a, b) est un centre de symétrie pour la courbe de f si et seulement si : $a - x \in D_f$; $a + x \in D_f$ et $f(a - x) + f(a + x) = 2b$

ou bien $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$

ou bien la fonction $g(x) = f(a + x) - b$ est une fonction impaire.

F- PARITE ET PERIODICITE

- f est paire si et seulement si $\forall x \in D_f$; $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$

La courbe de f admet l'axe des ordonnées (OJ) comme axe de symétrie.

- f est impaire si et seulement si $\forall x \in D_f$; $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

La courbe de f admet l'origine O(0; 0) du repère (O, I, J) comme centre de symétrie.

- T est un réel strictement positif ;

f est périodique de période T si et seulement si pour tout x de D_f, $f(x + T) = f(x)$

EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1

Partie A. On considère la fonction g définie sur ℝ par : $g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$

1. a. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

b. Etudier le sens de variation de g ; puis dresser son tableau de variation.

2. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α.

b. Vérifier que : $\alpha \in]-1\,;0[$

3. Démontrer que : $\forall x \in]-\infty\,;\alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha\,;+\infty[, g(x) > 0$.

Partie B. Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[, f(x) = 2x^2 - x - \dfrac{2}{x-1} \\ \forall x \in]1;+\infty[, f(x) = x - \dfrac{2}{x-1} \end{cases}$

(C_1) et (C_2) sont respectivement les courbes représentative de f sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité 2 cm

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Démontrer que pour tout réel x ; $\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$

puis étudier le sens de variation de f sur $]-\infty;1[$.

b. Etudier le sens de variation de f sur $]1;+\infty[$

c. Dresser le tableau de variation de f.

3. a. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C_2) en $+\infty$.

b. Etudier la position relative de (C_2) par rapport à (Δ).

4. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat.

5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection :

a. de (C_1) avec l'axe des ordonnées.

b. de (C_2) avec l'axe des abscisses.

6. Représenter la courbe (C_f) dans le repère (O, I, J). (Prendre $\alpha = -0.1$)

7. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1;+\infty[$.

a. Justifier que h est une bijection de $]1;+\infty[$ sur ℝ

b. Dresser le tableau de variation de h et celui de sa bijection réciproque h^{-1}.

c. Calculer $(h^{-1})'(0)$.

d. Représenter la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère (O, I, J).

EXERCICE 2

Soit la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et (C_g) sa courbe représentative dans le plan du repère orthonormé (O, I, J).

1. Ecrire g sans le symbole de la valeur absolue.
2. a. Etudier la dérivabilité de g en 1 et 5.
b. La courbe (C_g) admet – elle des tangentes en ces points 1 et 5?
3. Etudier le sens de variation de g.
4. Démontrer que la droite $x = 3$ est un axe de symétrie de la courbe (C_g).
5. Dresser le tableau de variation de g.
6. a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ et la droite (Δ) d'équation $y = -x + 3$ sont des asymptotes à la courbe (C_g) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.
b. Déterminer les coordonnées des points A et B intersections de (C_g) avec ses asymptotes. A est le point dont l'abscisse est supérieur à 3.
7. Montrer que g est une bijection de [1 ; 3] sur un intervalle K à préciser.
8. Tracer (D) ; (Δ) ; (C_g)

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{4 - 4x + x^2} + \dfrac{1}{x - 1}$

1. Ecrire f(x) sans le symbole de la racine carrée.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Etudier la dérivabilité de f au point 2.
4. a. Etudier le sens de variation de f.
   b. Dresser le tableau de variation de f.
5. a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2 - x$ et la droite (D') d'équation $y = x - 2$ sont des asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Montrer que les droites (D) et (D') sont sécantes en un point dont on déterminera les coordonnées.
6. a. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique $\alpha \in]0 ; 1[$
   b. Déterminer une valeur approchée par défaut de α à 0,1 près.
   c. Déterminer le signe de f(x) suivant les valeurs de x.
7. a. Montrer que f réalise une bijection de] 0 ; 1 [dans un intervalle K à préciser.
   b. Dresser le tableau de variation de la bijection réciproque f^{-1} de f sur]0 ; 1[
8. Construire (C), (D) et (D') dans un repère orthonormé (O, I, J).

EXERCICE 4

On désigne par f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$ et (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1. Montrer que f est périodique de période 2π.

2. a. Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$.

b. Puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c. Justifier le choix de l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$

3. a. Etudier le sens de variation de f sur I

b. Dresser le tableau de variation de f sur I.

4. Tracer la courbe de f sur $\left[-\pi ; \frac{3\pi}{2}\right]$

EXERCICE 5 (Non corrigé)

Soit la fonction f définie par :

$$f : \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{\cos x}$$

1. Etudier le sens de variation de f.

2. Dresser le tableau de variation de f

3. Montrer que f est une bijection de $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle K que l'on déterminera.

4. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f.

a. Déterminer $(f^{-1})'(x)$

b. Calculer $(f^{-1})'(4)$

5. Tracer la courbe (C) de f

EXERCICE 6 (Non corrigé)

Soit la figure (C) ci-dessous la représentation graphique d'une fonction numérique continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; de fonction dérivée f'.

1. Donner les limites aux bornes de D_f.

2. Donner $f'(0)$ et $f'(2)$

3. Déterminer l'équation de la droite (D).

4. Recopier, puis compléter le tableau suivant :

x	- 1		0,5	1,5		3
f(x)		1			9	

5. a. Déterminer graphiquement le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

b. Etudier la position relative de (C) par rapport à (D).

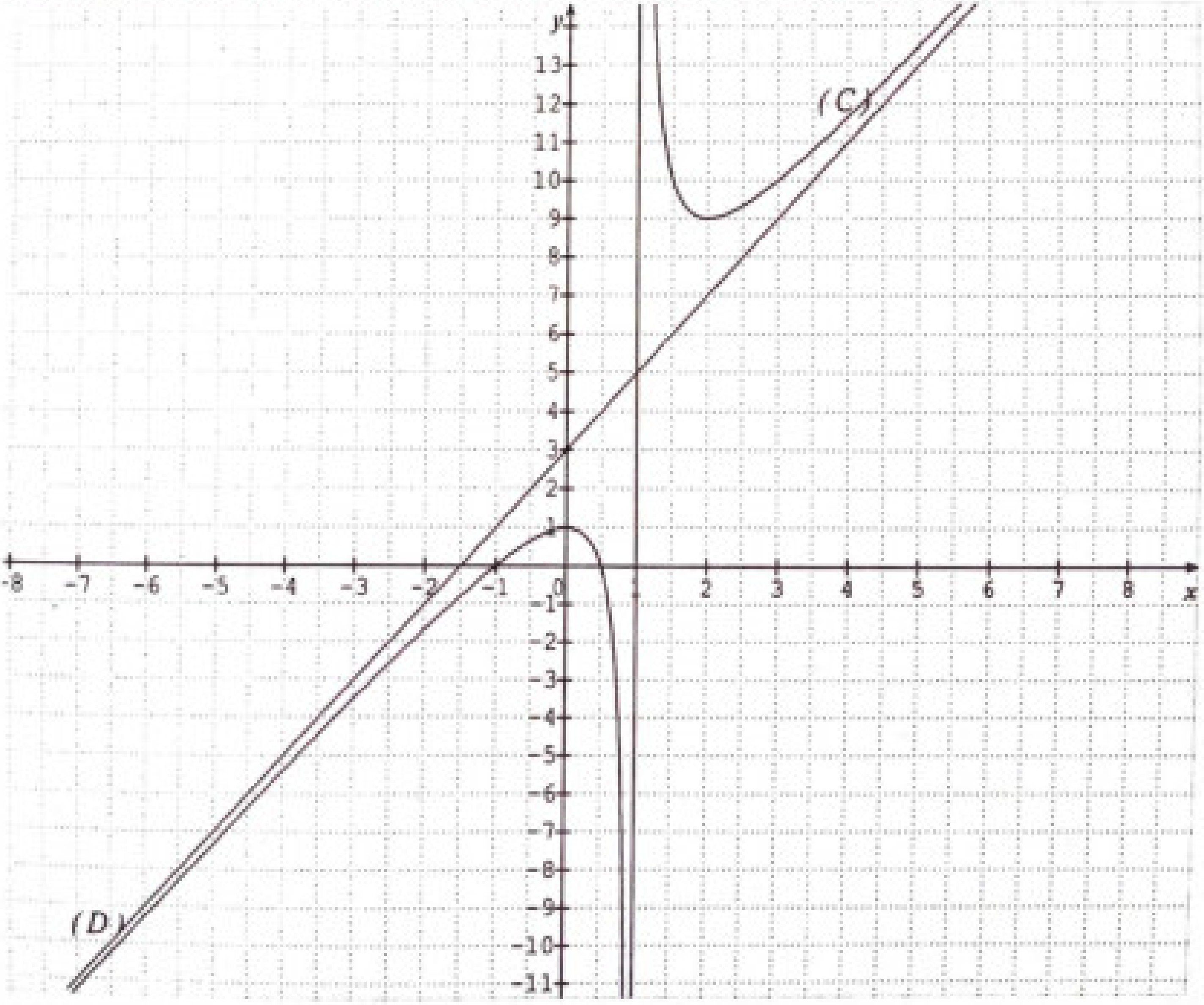
6. Etudier le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variation.

7. On suppose que f est la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x - 1}$ où a, b, et c sont des nombres réels.

a. Déterminer a, b et c en utilisant les questions précédentes.

b. Justifier que la droite (D) est une asymptote à la courbe (C).

c. Démontrer que le point A (1 ; 5) est centre de symétrie de la courbe (C)



CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1

Partie A

1. Sens de variation de $g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$

$D_g = \mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (4x^3 - 9x^2 + 6x + 1) = \lim_{x\to-\infty} (4x^3) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (4x^3 - 9x^2 + 6x + 1) = \lim_{x\to+\infty} (4x^3) = +\infty$

Dérivée de g

$g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$ d'où $g'(x) = 12x^2 - 18x + 6 = 6(2x - 1)(x - 1)$

$\forall x \in]-\infty ; \frac{1}{2}[\cup]1 ; +\infty[$, $g'(x) > 0$, donc g est strictement croissante sur $]-\infty ; \frac{1}{2}[$ et sur $]1 ; +\infty[$

$\forall x \in]\frac{1}{2} ; 1[$, $g'(x) < 0$, donc g est strictement décroissante sur $]\frac{1}{2} ; 1[$

* Tableau de variation de g

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	0	+	
g(x)	$-\infty$	↗	$\frac{9}{4}$	↘	2	↗	$+\infty$

2. a. $\forall x \in]-\infty ; \frac{1}{2}[$, g est continue et strictement croissant ;
elle réalise une bijection de $]-\infty ; \frac{1}{2}[$ dans $]-\infty ; \frac{9}{4}[$; or $0 \in]-\infty ; \frac{9}{4}[$ donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution $\alpha \in]-\infty ; \frac{1}{2}[$. $\forall x \in]\frac{1}{2} ; 1[$, g est continue et strictement décroissante.
Elle réalise une bijection de $]\frac{1}{2} ; 1[$ dans $]2 ; \frac{9}{4}[$; or $0 \notin]2 ; \frac{9}{4}[$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]\frac{1}{2} ; 1[$.

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, g est continue et strictement croissante.

Elle réalise une bijection de $]1 ; +\infty[$ dans $]2 ; +\infty[$; or $0 \notin]2 ; +\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution .

En conclusion, L'équation $g(x) = 0$ admet ne solution unique $\alpha \in]-\infty ; \frac{1}{2}[$

b. Vérifier que $\alpha \in]-1 ; 0[$

$\forall x \in]-1 ; 0[$, g est continue et strictement croissante.

On a : $g(-1) = -18$ et $g(0) = 1$ d'où $g(-1) \times g(0) < 0$, donc $\alpha \in]-1 ; 0[$

3°) Signe de g(x)

$\forall x \in]-\infty ; \alpha[$, g est continue et strictement croissante ;

or $g(]-\infty ; \alpha[) =]-\infty ; g(\alpha)[=]-\infty ; 0[$ car $g(\alpha) = 0$; d'où $g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, on a $]\alpha ; +\infty[=]\alpha ; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2} ; 1[\cup]1 ; +\infty[$; or $x \in]\alpha ; \frac{1}{2}[$,

g est continue et croissante , or $g(]\alpha ; \frac{1}{2}[) =]g(\alpha) ; g(\frac{1}{2})[=]0 ; g(\frac{1}{2})[$, d'où $g(x) > 0$

$\forall x \in]\frac{1}{2} ; 1[$, on a : g est continue et strictement décroissante ; or

$g(]\frac{1}{2} ; 1[) =]g(1) ; g(\frac{1}{2})[=]2 ; \frac{9}{4}[$, d'où $g(x) > 0$.

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, on a g est continue et croissante.

Or $g(]1 ; +\infty[) =]2 ; +\infty[$, d'où $g(x) > 0$

En conclusion : $\forall x \in]-\infty ; \alpha[$; $g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) > 0$

Partie B

1.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x^2 - x - \frac{2}{x-1}) = -\infty \text{ car } \lim_{x\to-\infty} (2x^2 - x) = \lim_{x\to-\infty} (2x^2) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{2}{x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} (x) - \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-1} = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-1} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} (2x^2 - x - \frac{2}{x-1}) = \lim_{x\to1} (2x^2 - x) - \lim_{x\to1} \frac{2}{x-1} = +\infty \text{ car } \lim_{x\to1} (2x^2 - x) = 1$$

$$\text{et } \lim_{x\to1} \frac{-2}{x-1} = +\infty$$

• $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} (x - \frac{2}{x-1}) = \lim_{x\to1} (x) - \lim_{x\to1} \frac{2}{x-1} = -\infty$ car $\lim_{x\to1} x = 1$ et $\lim_{x\to1} \frac{-2}{x-1} = -\infty$

2°) a- $\forall x \in]-\infty ; 1[$,

$$f(x) = 2x^2 - x - \frac{2}{x-1}$$

$$f'(x) = 4x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{4x^3 - 9x^2 + 6x + 1}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

* Sens de variation de f '(x) sur $]-\infty ; 1]$

Signe de f '(x)

x	$-\infty$		α		1
g(x)		-	0	+	
$(x-1)^2$		+	|	+	
f '(x)		-	0	+	

$\forall x \in]-\infty; \alpha[$ $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha[$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$,

b) Sens de variation de f sur $]1; +\infty[$

$f(x) = x - \dfrac{2}{x-1}$.

$f'(x) = 1 + \dfrac{2}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2+2}{(x-1)^2}$

$\forall x \in]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$, .

c-Tableau de variation de f

x	$-\infty$	α		1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	‖	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

3a- On a $f(x) - y = x - \dfrac{2}{x-1} - x = \dfrac{-2}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x} = 0$ donc la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C_2) en $+\infty$.

b) Position relative de (C_2) par rapport à (Δ).

$f(x) - y = x - \dfrac{2}{x-1} - x = \dfrac{-2}{x-1}$

$\forall x \in]1; +\infty[$, $f(x) - y < 0$ donc (C_2) est en dessous de (Δ)

4°) on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2 - x - \frac{2}{x-1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x - 1 - \dfrac{2}{x^2-x}) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^2-x} = 0$

Interprétations

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = -\infty$, donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe (OJ)

5°) Coordonnées des points d'intersections

a) de (C_1) avec l'axe des ordonnées

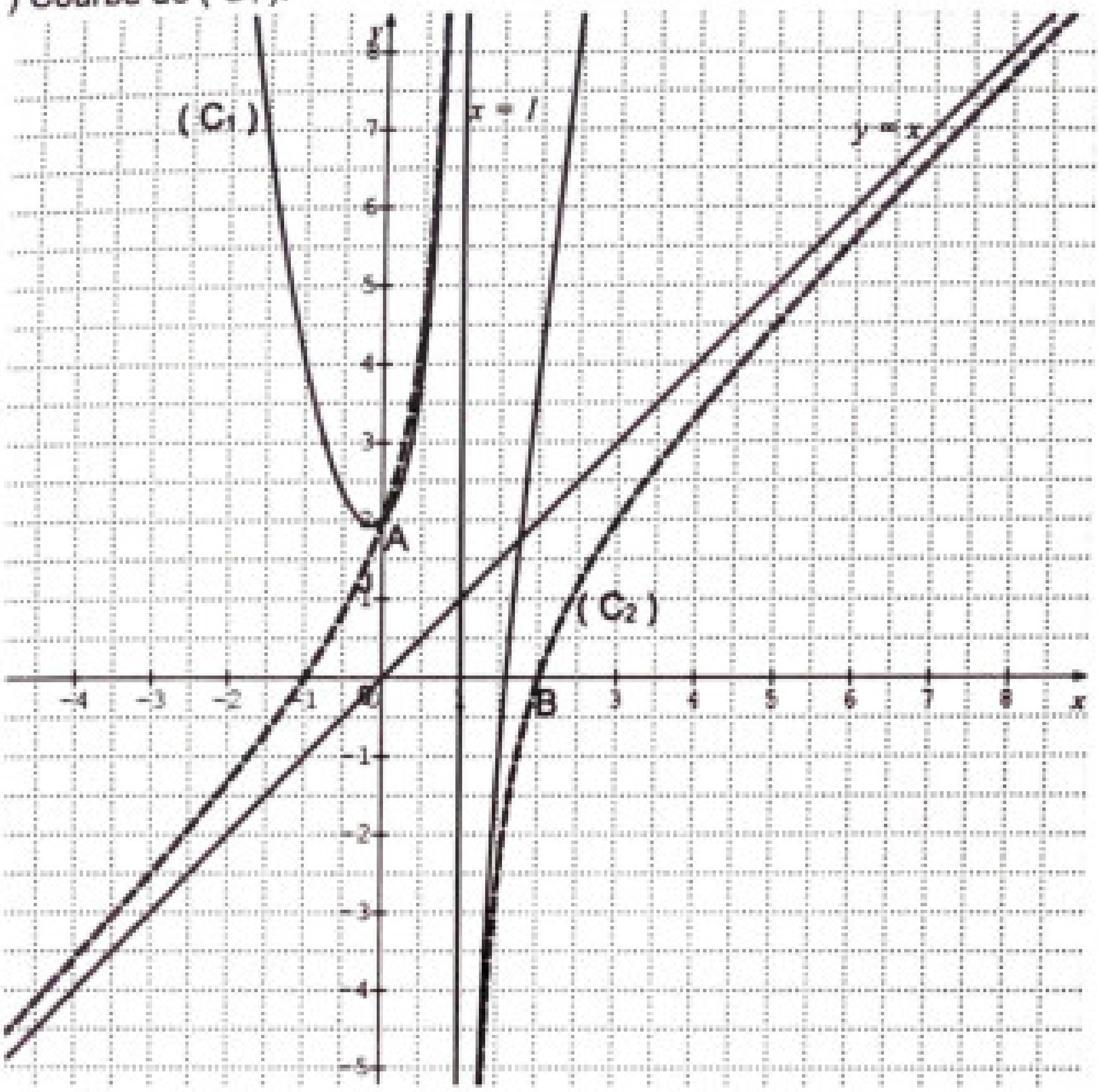
On a : $f(0) = 2$ donc le point d'intersection est $A(0;2)$

b) de (C_2) avec l'axe des abscisses

On a : $f(x) = 0 \Rightarrow x - \dfrac{2}{x-1} = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 2$

Or $-1 \notin]1; +\infty[$, donc le point d'intersection de (C_2) avec l'axe (OI) est $B(2, 0)$

6°) Courbe de (C_f).



7°) a- h est la restriction de f à] 1 ; +∞ [

∀ x ∈] 1 ; + ∞ [, h est continue et strictement croissante ; elle réalise une bijection de] 1 ; +∞ [dans h( ] 1 ; +∞[ ) = ℝ

b-Tableau de variation de h

x	1 + ∞
h'(x)	+
h (x)	- ∞ ↗ + ∞

Tableau de variation de h^{-1}

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$(h^{-1})'$	+
$h^{-1}(x)$	$1 \nearrow +\infty$

c) Calculons $(h^{-1})'(0)$; On a : $(h^{-1})'(0) = \dfrac{1}{h'[h^{-1}(0)]}$

Calculons $h^{-1}(0)$

$h^{-1}(0) = y \Leftrightarrow h(y) = 0 \Leftrightarrow$ or $h(y) = 0 \Leftrightarrow f(y) = 0$ d'où $y = 2$

Calculons $h'(2)$

$h'(2) = f'(2) = 1+\dfrac{2}{(2-1)^2}$ d'où $h'(2) = 3$ donc $(h^{-1})'(0) = \dfrac{1}{3}$

d) Représentation de h^{-1}

$\forall x \in]1;+\infty[$, $(C_{h^{-1}})$ et (C_h) sont symétriques par rapport à la première bissectrice $y = x$. (voir repère)

EXERCICE 2

1°) Ecrivons g sans le symbole de la valeur absolue

Soit $g(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$

x	$-\infty$	1		5		$+\infty$
$x^2 - 6x + 5$	+	0	-	0	+	
$\|x^2 - 6x + 5\|$	$x^2 - 6x + 5$	0	$-x^2 + 6x - 5$	0	$x^2 - 6x + 5$	

$\forall x \in]-\infty;1[\cup]5;+\infty[$, $g(x) = \sqrt{x^2-6x+5}$

$\forall x \in]1;5[$, $g(x) = \sqrt{-x^2+6x-5}$

2°) a- Dérivabilité de g en 1

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{\sqrt{x^2-6x+5}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-6x+5}} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} (x-5) = -4$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-6x+5}} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \dfrac{\sqrt{-x^2+6x-5}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \dfrac{-(x-5)}{\sqrt{-x^2+6x-5}} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} -(x-5) = 4$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}} = +\infty$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$, donc g n'est pas dérivable en 1

Dérivabilité de g en 5

$$\lim_{x \to 5} \frac{g(x)-g(5)}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{-x^2+6x-5}}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{-(x-1)}{\sqrt{-x^2+6x-5}} = -\infty \text{ car } \lim_{x \to 5} -(x-1) = -4 \text{ et}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{g(x)-g(5)}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x^2-6x+5}}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-6x+5}} = +\infty \text{ car } \lim_{x \to 5} (x-1) = 4 \text{ et}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+5}} = +\infty$$

On a $\lim_{x \to 5} \frac{g(x)-g(5)}{x-5} \neq \lim_{x \to 5} \frac{g(x)-g(5)}{x-5}$, donc g n'est pas dérivable en 5

b - La courbe (C_g) admet deux tangentes verticales aux points d'abscisses 1 et 5

3°) Sens de variation de g

* Dérivée de g

$\forall x \in]-\infty;1[\cup]5,+\infty[$, $g(x) = \sqrt{x^2-6x+5} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}$

$\forall x \in]1;5[$, $g(x) = \sqrt{-x^2+6x-5} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{-x+3}{\sqrt{-x^2+6x-5}}$

*** Sens de variation de g**

$\forall x \in]-\infty;1[\cup]3;5[$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur

$]-\infty;1[$ et sur $]3;5[$

$\forall x \in]1;3[\cup]5;+\infty[$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur

$]1;3[$ et sur $]5;+\infty[$.

4°) Démontrer que x = 3 est un axe de symétrie de la courbe (C)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $3-x \in \mathbb{R}$ et $3+x \in \mathbb{R}$

$g(3-x) = \sqrt{|(3-x)^2-6(3-x)+5|} = \sqrt{|x^2-4|}$

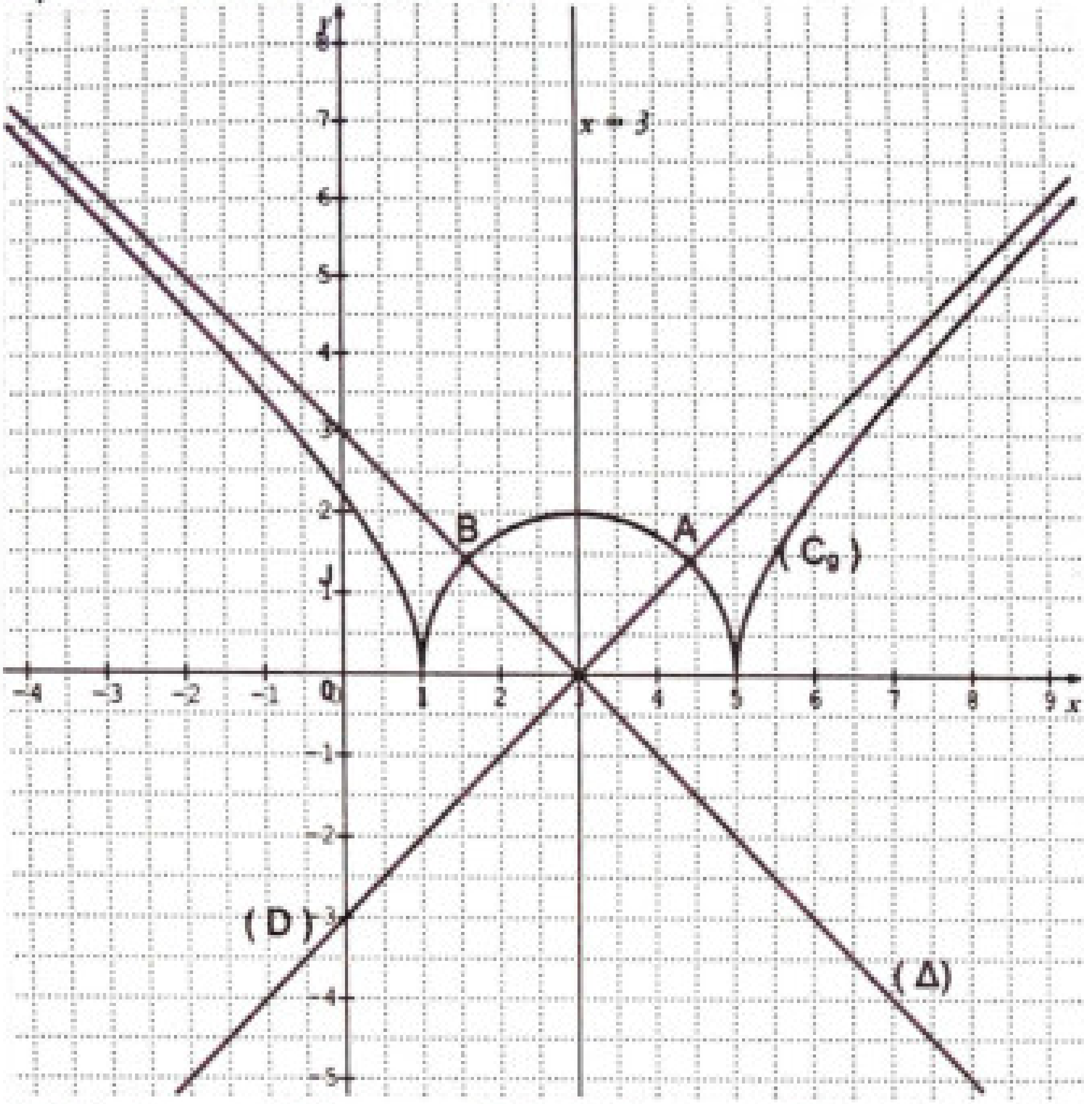
$g(3+x) = \sqrt{|(3+x)^2-6(3+x)+5|} = \sqrt{|x^2-4|}$

$g(3-x) = g(3+x)$ donc la droite d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de (C_g).

5°) Tableau de variation de g

X	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
g'(x)		-	‖	+	0	-	‖	+	
g(x)	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

8°) Courbe de (D) , (Δ) et (C_g)



6°) Montrer que (D) : y = x – 3 et (Δ) y = - x + 3 sont des asymptotes à (C_g)

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-y) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-6x+5} - (x-3) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-6x+5}+(x-3)} = 0 \text{ car}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-6x+5} + (x-3) = +\infty$$

donc la droite d'équation (D) : y = x – 3 est une asymptote oblique à (C_g) en $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(g(x)-y) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-6x+5} - (-x+3) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-6x+5}+(-x+3)} = 0 \text{, car}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-6x+5} + (-x+3) = +\infty$$

donc la droite (Δ) y = - x + 3 est une asymptote oblique à (C_g) en $-\infty$

b) Coordonnées du point d'intersection avec les asymptotes

$y=\sqrt{|x^2-6x+5|}$ et $y = x - 3$

$\forall x \in]-\infty ; 1[\cup]5 ; +\infty[$, (C_g) et ses asymptotes ne se coupent pas .

$\forall x \in]1 ; 5[$, on a : $\sqrt{-x^2+6x-5} = x-3 \Leftrightarrow 2x^2-12x+14=0$. On obtient :

$x_1 = 3-\sqrt{2}$ et $x_2 = 3+\sqrt{2}$

Or $y = x - 3$ donc $y = -\sqrt{2}$ et $y = \sqrt{2}$

En conclusion, les coordonnées des points d'intersections sont

$A(3+\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2})$ et $B(3-\sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{2})$

7°) a- Montrons que g est une bijection de [1 ; 3] sur un intervalle K à préciser

$\forall x \in [1, 3]$, g est continue et strictement croissante sur [1 ; 3].

Elle réalise une bijection de [1 ; 3] dans K = g ([1 ; 3] = [g(1) ; g(3)] = [0 ; 2]

EXERCICE 3

1°) Ecrivons f(x) sans le symbole de la racine carrée.

On a : $f(x)=\sqrt{4-4x+x^2}+\dfrac{1}{x-1} \Leftrightarrow f(x)=|x-2|+\dfrac{1}{x-1}$

2°) On $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (|x-2|+\dfrac{1}{x-1}) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} |x-2| = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (|x-2|+\dfrac{1}{x-1}) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} |x-2| = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} (|x-2|+\dfrac{1}{x-1}) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to1^-} |x-2| = 1$ et $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} (|x-2|+\dfrac{1}{x-1}) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to1^+} |x-2| = 1$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

3°) Dérivabilité de f en 2

Ecrivons f sans le symbole de la racine carrée. On obtient :

$\forall x \in]-\infty ; 1[\cup]1 ; 2[$, $f(x) = -x+2+\dfrac{1}{x-1}$

$\forall x \in]2 ; +\infty[$, $f(x) = x-2+\dfrac{1}{x-1}$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to2^-} \frac{-x+1+\frac{1}{x-1}}{x-2} = \lim_{x\to2^-} \frac{-x}{x-1} = -2 \text{, donc } f_g'(2) = -2$$

$$\lim_{x\to2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to2^+} \frac{x-3+\frac{1}{x-1}}{x-2} = \lim_{x\to2^+} \frac{x-2}{x-1} = 0 \text{ donc } f_d'(2) = 0$$

On remarque que $f_g'(2) \neq f_d'(2)$ donc f n'est pas dérivable en 2 .

4°) a – Sens de variation de f

* Dérivée de f

$\forall x \in]-\infty ; 1[\cup]1 ; 2[$, $f(x) = -x+2+\dfrac{1}{x-1} \Leftrightarrow f'(x) = -1-\dfrac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2}$

$\forall x \in]-\infty ; 1[\cup]1 ; 2[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 1[$ et $]1 ; 2[$.

$\forall x \in]2 . +\infty[$, $f(x) = x-2+\dfrac{1}{x-1} \Leftrightarrow f'(x) = 1-\dfrac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(x-2)x}{(x-1)^2}$

$\forall x \in]2 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]2 ; +\infty[$.

b – Tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5°) a – Montrons que (D) : $y = 2 - x$ et (D') : $y = x - 2$ sont des asymptotes à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)-y) = \lim_{x\to-\infty} \left(x-2 + \frac{1}{x-1} - (x-2)\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty} \left(x-2 + \frac{1}{x-1} - (x-1)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y) = 0$ donc (D) : $y = 2 - x$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y) = 0$ donc (D') : $y = x - 2$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b. Point d'intersection de (D) et (D')

On a : $y = 2 - x$ et $y = x - 2$ d'où $2 - x = x - 2$ donc $x = 2$ et $y = 0$

Le point A (2, 0) est le point d'intersection de (D) et (D') .

6. a - f est continue et strictement décroissante sur $]0 ; 1[$.

Elle réalise une bijection de $]0 ; 1[$ dans $f(]0 ; 1[) = \mathbb{R}$.

Or $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0 ; 1[$.

b. Valeur approchée par défaut de α à 0.1 près .

Méthode de balayage :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
f(x)	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-

donc $\alpha \in]0.3 ; 0.4[$

c. Signe de f

On obtient donc : $\forall x \in]-\infty ; \alpha[\cup]1 ; +\infty[$, $f(x) > 0$

$\forall x \in]\alpha ; 1[$, $f(x) < 0$

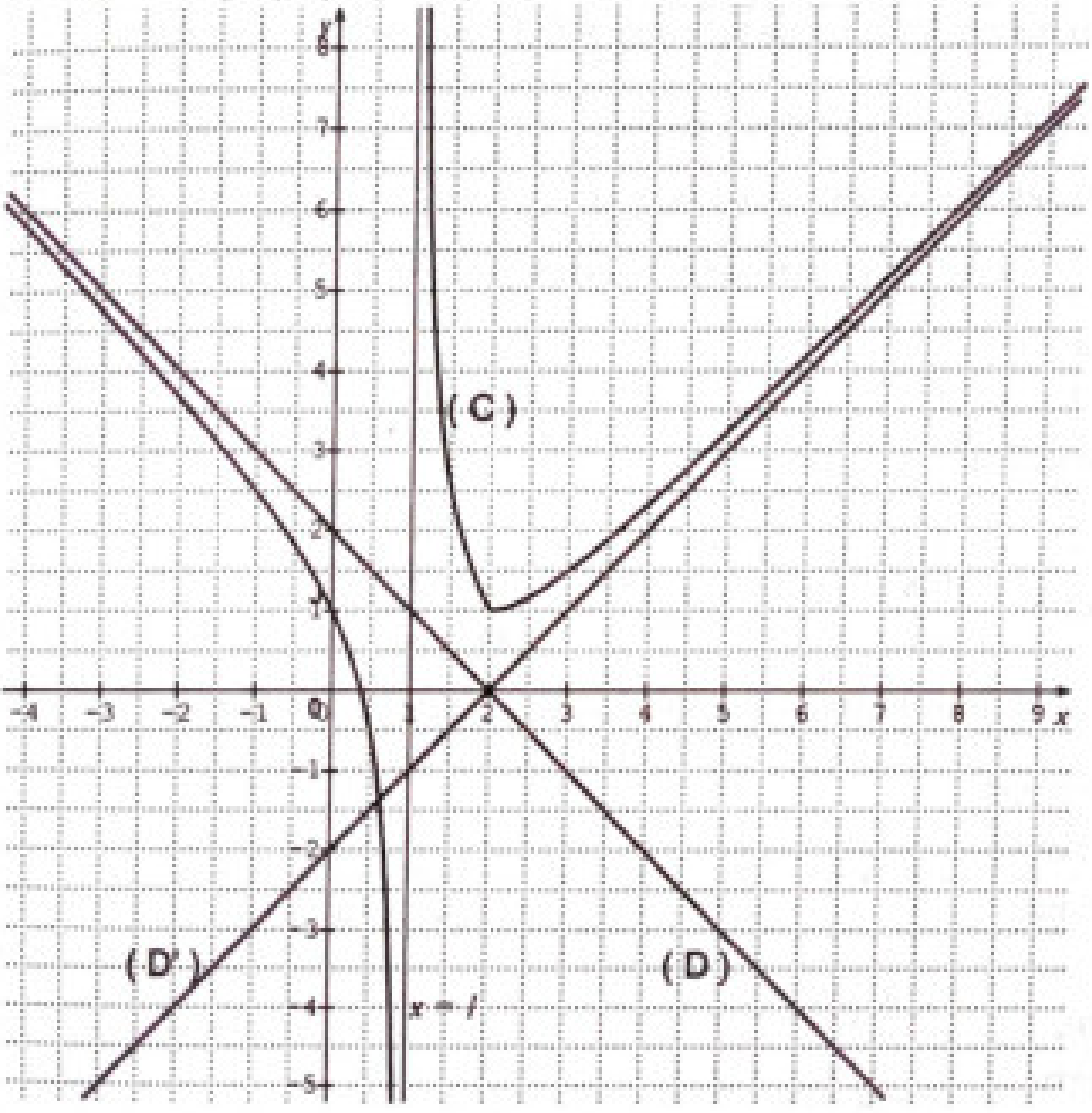
7. a. f est continue et strictement décroissante sur $]0 ; 1[$.

Donc elle réalise une bijection de $]0 ; 1[$ dans $K = f(]0 ; 1[) =]-\infty ; 1[$.

b - Tableau de variation de f^{-1} de f

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 1
$(f^{-1})'(x)$	$-$
$f^{-1}(x)$	1 $\searrow$ 0

8. Courbe de (C) , (D) et (D')



EXERCICE 4

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$

1. Montrons que f est périodique de période 2π .

On a $f(x+2\pi) = \dfrac{\sin(x+2\pi)}{1+\sin(x+2\pi)} = \dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)} = f(x)$ donc f est périodique de période 2π.

2. a. Comparons $f(\pi - x)$ et $f(x)$

$$f(\pi-x) = \frac{\sin(\pi-x)}{1+\sin(\pi-x)} = \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} = f(x)$$

b. On a $f(\pi - x) = f(x)$ qui est de la forme $f(2a - x) = f(x)$ donc la droite d'équation

$x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C) de f .

Pour obtenir une représentation graphique de f sur un intervalle de longueur π, il suffit d'étudier f sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et de prendre le symétrique de la courbe (C) par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$

3. a. Sens de variation de f sur I

Dérivée de f

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

b. Tableau de variation de f

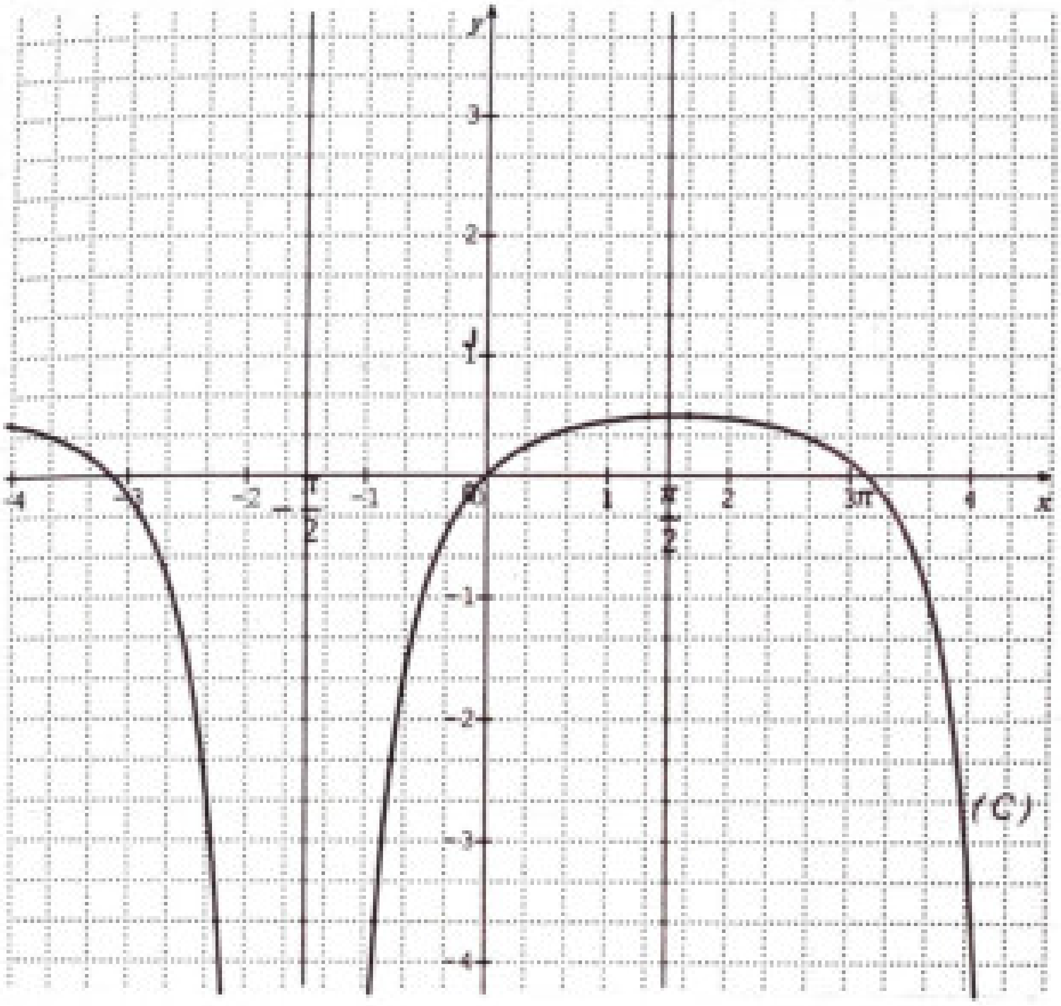
$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^{>}} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^{>}} \frac{\sin x}{1+\sin x} = -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^{>}} \sin x = -1 \ \text{ et } \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^{>}} \frac{1}{1+\sin x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{<}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{<}} \frac{\sin x}{1+\sin x} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{1+\sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2}$$

Tableau de variation de f

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
f '(x)		+	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

4. Courbe de f sur [- π ;   3π / 2]



CHAPITRE VIII : PRIMITIVES

FICHE DE COURS

PRIMITIVE D'UNE FONCTION

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle K.

On appelle primitive de f sur K toute fonction F dérivable sur K telle que f est la dérivée de F. En effet, $\forall x \in K$, $F'(x) = f(x)$.

Propriétés

Soit F une primitive de f sur K.

$\forall c \in \mathbb{R}$, $F(x) + c$ est aussi une primitive de f sur K.

Il existe une primitive de f sur K et une seule qui prend la valeur y_0 en x_0 avec $y_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$

TABLEAU DES PRIMITIVES

f(x)	a	X^r	$\frac{1}{X^r}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$(ax+b)^n$	$\frac{1}{(ax+b)^n}$ où $n \neq 1$
F(x)	ax	$\frac{X^{r+1}}{r+1}$	$\frac{-1}{(r-1)X^{r-1}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$	$\frac{-1}{a(n-1)(ax+b)^{n+1}}$

f(x)	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	Cos (ax + b)	Sin (ax + b)
F(x)	Tan x	– cotan x	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$

Operations et compositions

Fonction f	aU'	U' + V'	$U'U^n$	$\frac{U}{U^{n-1}}$
Primitive F	aU	U + V	$\frac{U^{n+1}}{n+1}$	$\frac{-1}{(n-1)U^{n-1}}$

Fonction f	$\frac{1}{\sqrt{U}}$	U'cosU	U'sin U	U' ×(V'oU)
Primitive F	$2\sqrt{U}$	Sin U	– CosU	VoU

EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$f(x)=x^2-3x+5$; $g(x)=(3x+2)^2$; $h(x)=8x(5x^2-4)^6$; $k(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$j(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$; $m(x)=\tan x+\tan^3 x$; $d(x)=\sin\left(\dfrac{x}{6}\right)-x\cos\left(3x^2-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$z(x)=(2x+1)\sqrt[3]{2x+1}$; $l(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)^2}$; $f_1(x)=\dfrac{1-2x^2}{x^5}$; $g_1(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

$h_1(x)=\dfrac{-4x+6}{\sqrt{-x^2+3x+1}}$; $k_1(x)=\dfrac{-1}{(2x-3)^2}+\dfrac{5}{(-7x+1)^3}$; $j_1(x)=\sin x\cos x$

$m_1(x)=\sin^3 x$; $d_1(x)=\cos^2 x.\sin^3 x$; $z_1(x)=\cos^4 x$

EXERCICE 2

A partir des indications ci-dessous, déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$f(x)=\cos 3x\cos 5x$; $g(x)=\cos x\sin 2x$; $h(x)=\sin 2x\sin 3x$

$k(x)=\cos 3x\cos 3x$; $d(x)=\sin 4x\cos 3x$; $z(x)=\sin x\sin 2x$

Indication : $\cos a\cos b = 1/2[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$

$\sin a\sin b = 1/2[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$

$\sin a\cos b = 1/2[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

EXERCICE 3 (Non corrigé)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers R définie par $f(x)=x\ln x$

1°) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\ ]0;+\infty[$

2°) En déduire une primitive F de f sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x\mapsto \ln x$

EXERCICE 4 (Non corrigé)

1°) g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x\sqrt{x}$

a. Calculer g '(x)

b. Prouver que g est derivable en 0 .

c. Déduire en une primitive sur $[0;+\infty[$ de $x\mapsto\sqrt{x}$

2°) Utiliser le résultat de la question précédente pour trouver une primitive sur $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$ de la fonction $x\mapsto\sqrt{3x+4}$

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1

Déterminons une primitive des fonctions suivantes :

$f(x) = x^2 - 3x + 5 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + c$

$g(x) = (3x+2)^2 \Rightarrow G(x) = \frac{1}{9}(3x+2)^3 + c$

$h(x) = 8x(5x^2-4)^6$. Posons $U = 5x^2 - 4$ d'où $U' = 10x$

On a $h(x) = \frac{4}{5}U'U^6$ donc $H(x) = \frac{4}{35}(5x^2-4)^7 + c$

$k(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$. Posons $U = x^2 + 1$ d'où $U' = 2x$.

On a $k(x) = \frac{U'}{U^2}$ Donc $K(x) = \frac{-1}{x^2+1} + c$

$j(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. Posons $U = x - 1$ d'où $U' = 1$. On a $j(x) = \frac{U'}{\sqrt{U}}$

Donc $J(x) = 2\sqrt{x-1} + c$

$m(x) = \text{Tan}x + \text{Tan}^3x \Rightarrow m(x) = \text{Tan}x(1 + \text{Tan}^2x)$.

Posons $U = \text{Tan}x$ d'où $U' = 1 + \text{Tan}^2x$.

On a $m(x) = U'U$; donc $M(x) = \frac{1}{2}\text{Tan}^2x + c$

$d(x) = \sin\left(\frac{x}{6}\right) - x\cos\left(3x^2 - \frac{\pi}{4}\right)$. Posons $d_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $d_2(x) = x\cos\left(3x^2 - \frac{\pi}{4}\right)$

Pour $d_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Posons $U = \frac{x}{6}$ d'où $U' = \frac{1}{6}$.

On a : $d_1(x) = 6U'\text{Sin}U$ Donc $D_1(x) = -6\cos\left(\frac{x}{6}\right)$

Pour $d_2(x) = x\cos\left(3x^2 - \frac{\pi}{4}\right)$. Posons $U = 3x^2 - \frac{\pi}{4}$. d'où $U' = 6x$

On a : $d_2(x) = \frac{1}{6}U'\cos U$; donc $D_2(x) = \frac{1}{6}\sin\left(3x^2 - \frac{\pi}{4}\right) + c$

Au total, $D(x) = -6\cos\left(\frac{x}{6}\right) - \frac{1}{6}\sin\left(3x^2 - \frac{\pi}{4}\right) + c$

$z(x) = (2x+1)\sqrt[7]{2x+1} \Rightarrow z(x) = (2x+1)(2x+1)^{\frac{1}{7}} = (2x+1)^{\frac{8}{7}}$

Posons $U = 2x + 1$, d'où $U = 2$. On a $z(x) = \frac{1}{2}U'U^{\frac{8}{7}}$;

Donc $Z(x) = \frac{7}{30}(2x+1)^{\frac{15}{7}} + c$

$l(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)^2}$. On a $l(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+3)^2}$.

Posons $U = \sqrt{x} + 3$ d'où $U' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ On a $l(x) = \frac{2U'}{U^2}$. Donc $L(x) = \frac{-2}{\sqrt{x}+3} + c$

$f_1(x) = \frac{1-2x^2}{x^3} \Rightarrow f_1(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x}$; donc $F_1(x) = -\frac{1}{2x^2} - 2\ln|x| + c$

$g_1(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$. Posons $U = \sin x$ d'où $U' = \cos x$.

On a $g_1(x) = \frac{U'}{U}$ donc $G_1(x) = \ln|\sin x| + c$

$k_1(x) = \frac{-1}{(2x-3)^2} + \frac{5}{(-7x+1)^3}$. Posons $k'(x) = \frac{-1}{(2x-3)^2}$ et $k''(x) = \frac{5}{(-7x+1)^3}$

Pour $k'(x) = \frac{-1}{(2x-3)^2}$ Posons $U = 2x - 3$ d'où $U' = 2$.

On a $k'(x) = \frac{-U'}{2U^2}$ Donc $K'(x) = \frac{1}{2(2x-3)}$

Pour $k''(x) = \frac{5}{(-7x+1)^3}$. Posons $U = -7x + 1$, d'où $U' = -7$.

On a : $k''(x) = \frac{-5U'}{7U^3}$ Donc $K''(x) = \frac{5}{14(-7x+1)^2}$

Au total ; on a $K_1(x) = \frac{1}{2(2x-3)} + \frac{5}{14(-7x+1)^2} + c$

$J_1(x) = \sin x \cos x$. Posons $U = \cos x$; d'où $U' = -\sin x$.

On a : $j_1(x) = -U'U$ Donc $J_1(x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + c$

$m_1(x) = \sin^3 x \Rightarrow m_1(x) = \sin x.\sin^2 x = \sin x\,(1 - \cos^2 x)$

$m_1(x) = \sin x - \sin x\cos^2 x$

Posons $m'(x) = \sin x\cos^2 x$. Posons $U = \cos x$ d'où $U' = -\sin x$.

On a : $m'(x) = -U'U^2$ Donc $M'(x) = \frac{1}{3}\mathrm{Cos}^3 x + c$

Au total, on obtient : $M_1(x) = -\cos x + \frac{1}{3}\mathrm{Cos}^3 x + c$

$d_1(x) = \mathrm{Cos}^2 x.\sin^3 x \Rightarrow d_1(x) = \cos^2 x.\sin^2 x.\sin x$

$d_1(x) = \cos^2 x(1 - \cos^2 x).\sin x \Rightarrow d_1(x) = \sin x.\cos^2 x - \sin x.\mathrm{Cos}^4 x$.

Posons $d'(x) = \sin x.\cos^2 x$ et $d''(x) = \mathrm{Sin}x.\mathrm{Cos}^4 x$

Pour $d'(x) = \sin x.\cos^2 x$. Posons : $U = \cos x$ d'où $U' = -\sin x$.

On a $d'(x) = -U'.U^2$ Donc $D'(x) = -\frac{1}{3}\mathrm{Cos}^3 x + c$

Pour $d''(x) = \sin x.\mathrm{Cos}^4 x$. Posons $U = \cos x$ d'où $U' = -\sin x$.

On a : $d''(x) = -U'.U^4$. Donc $D''(x) = -\frac{1}{4}\mathrm{Cos}^5 x + c$

Au total , on obtient : $D_1(x) = -\frac{1}{3}\mathrm{Cos}^3 x - \frac{1}{4}\mathrm{Cos}^5 x + c$

$z_1(x) = \mathrm{Cos}^4 x$. Linéarisons $\mathrm{Cos}^4 x$

On a : $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$; donc

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{i4x} + 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} + 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-i2x} + e^{-i4x}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{i4x} + e^{-i4x} + 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6\right)$$

Au total, $Z_1(x) = = \dfrac{1}{16}\left(2\times\dfrac{1}{4}\sin 4x + 8\times\dfrac{1}{2}\sin 2x + 6x\right) + c$

$$Z_1(x) = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + c$$

EXERCICE 2

$f(x) = \cos 3x.\cos 5x \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{3}[\cos 8x + \cos(-2x)]$

donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{8}\sin 8x - \dfrac{1}{2}\sin(-2x)\right] + c = \dfrac{1}{16}\sin 8x - \dfrac{1}{4}\sin(-2x) + c$

$g(x) = \cos x \,.\, \sin 2x \Rightarrow g(x) = \dfrac{1}{2}[\sin 3x + \sin(-x)]$

donc $G(x) = \frac{1}{2}[-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos(-x)] + c = -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos(-x) + c$

$h(x) = \sin 2x.\sin 3x \Rightarrow h(x) = \dfrac{1}{2}[\cos 5x - \cos(-x)]$

donc $H(x) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{5}\sin 5x + \sin(-x)\right] + c \Rightarrow H(x) = \frac{1}{10}\sin(5x) + \frac{1}{2}\sin(-x) + c$

$k(x) = \cos 3x.\cos 3x \Rightarrow k(x) = \dfrac{1}{2}[\cos 6x + \cos 0] = \dfrac{1}{2}[\cos 6x + 1]$;

donc $K(x) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{6}\sin 6x + x\right] + c \Leftrightarrow K(x) = \dfrac{1}{12}\sin 6x + \dfrac{1}{2}x + c$

$d(x) = \sin 4x.\cos 3x \Rightarrow d(x) = \dfrac{1}{2}[\sin 7x + \sin x]$ donc

$D(x) = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{7}\cos 7x - \cos x\right] + c \Leftrightarrow D(x) = -\dfrac{1}{14}\cos 7x - \dfrac{1}{2}\cos x + c$

$z(x) = \sin x \,.\, \sin 2x \Rightarrow z(x) = \dfrac{1}{2}[\cos 3x - \cos(-x)]$, donc

$Z(x) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}\sin 3x + \sin(-x)\right] + c \Leftrightarrow Z(x) = \dfrac{1}{6}\sin 3x + \dfrac{1}{2}\sin(-x) + c$

CHAPITRE IX : FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

FICHE DE COURS

Définition

On appelle fonction logarithme népérien, notée ln, la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ telle que : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$

Propriétés algébriques

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{R}$, on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln(a^r) = r.\ln a$; $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$; $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln b$; $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$

Etude de la fonction comportant ln

Ensemble de définition de : $\ln o\, u$ et $\ln o\, |u|$

- $x \in D_{\ln o\, u} \Leftrightarrow x \in D_u$ et $u(x) > 0$
- $x \in D_{\ln o |u|} \Leftrightarrow x \in D_u$ et $u(x) \neq 0$

Propriétés 1 : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$; $\ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$

$\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$; $\ln a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$

$\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$

Propriétés 2

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Dérivée de ln o u

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

La fonction $\ln o\, u$ est dérivable sur K et on a : $(\ln o\, u)' = \frac{u'}{u}$

Primitive de $\frac{u'}{u}$

Soit u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle K.

La fonction $\frac{u'}{u}$ admet pour primitive sur K la fonction $\ln o|u|$.

EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1 : Bac C 1999 Session normale

1. Soit h la fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ et définie par : $h(x) = \ln x - \frac{x}{e}$

a. Calculer $h'(x)$ sur $]0,+\infty[$.

b. Etudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.

c. Démontrer que : $\forall x \in [1;e],\ 0 \leq \ln x \leq \frac{x}{e}$

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

a. A l'aide de deux intégrations par parties, calculer I_2 .

b. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

c. Démontrer que la suite (I_n) est convergente.

d. En utilisant la question1) c., démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \leq \frac{e^2}{n+2} - \frac{e^2}{(n+2)e^n}$

e. En déduire la limite de la suite (I_n)

EXERCICE 2 : Bac C 2001 Session normale

PARTIE A

Dans tout le problème, les fonctions étudiées sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et ln désigne la fonction logarithme népérien.

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$, $h(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - 2\ln x$

1. Calculer les limites de h en $+\infty$ et à droite en 0.

2. On note h' la dérivée de h ; démontrer que :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ h'(x) = \frac{-2(1+x^2)}{x^3}$$

3. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]1;+\infty[$

4. En déduire le signe h.

PARTIE B

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$; $g(x) = x^2(1-\ln x) + 1 + \ln x$

1. Calculer les limites de g en $+\infty$ et à droite en 0.

2. On note g' la dérivée de g ; démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[$; $g'(x) = x.h(x)$

3. Démontrer que $g(x) > 0$

4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_1 dans $]0;1[$

5. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_2 dans $]x_0;+\infty[$

a. Déterminer le signe de g.

b. Démontrer que : $x_1 \in]0,3;0,4[$ et $x_2 \in]3,3;3,4[$

PARTIE C

On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(0)=0 \text{ et } \forall x\in\left]0;+\infty\right[,\ f(x)=\frac{x\ln x}{1+x^2}$$

1. Démontrer que f est continue à droite en 0 mais non dérivable à droite en 0.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat.
3. On note f' la dérivée de f ; démontrer que :

$$\forall x\in\left]0;+\infty\right[,\ f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x^2)^2}$$

4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Démontrer que si α est une solution de l'équation $g(x)=0$ alors :

$$\ln\alpha = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$$

6. En déduire que $f(x_1)<0$ et $f(x_2)>0$.
7. Vérifier que $f(1)=0$ puis en déduire le signe de f.
8. Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). (*On prendra pour tout unités : 3 cm en abscisse, 8 cm en ordonnées,* $x_1\approx 0{,}35$ *et* $x_2=3{,}35$.*)*

PARTIE D

1. On considère la fonction F définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$; $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$

Calcul de la limite de F en $+\infty$

a. Démontrer que $\forall t\in\left]1;+\infty\right[,\ \frac{1}{2t^2}\leq\frac{1}{1+t^2}\leq\frac{1}{t^2}$

b. Calculer $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt$

c. En déduire les limites de $F(x)$ et $\frac{F(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

Calcul de la limite de F en 0.

2. Pour tout nombre réel α élément de $]\,0\,;1\,[$, on pose : $\phi(\alpha)=\int_1^\alpha t\ln(t)dt$

a. Exprimer $\phi(\alpha)$ en fonction α

b. Calculer $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\phi(\alpha)$

c. En déduire un encadrement de $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}F(x)$

3. Déterminer la fonction dérivée F' de F.
4. Dresser le tableau de variation de F.
5. Donner l'allure de la courbe représentative de F dans le même repère (O, I, J) de la partie C.

EXERCICE 3 : Bac C 1997 Session normale

PARTIE A

Soit f la fonction définie par : $f(0)=0$ et pour tout réel strictement positif x par : $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Soit φ la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $\varphi(x)=\ln(x)+x+1$

a. Etudier le sens de variation de φ

b. Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une solution unique β telle que : $0,27\leq\beta\leq 0,28$

3. a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$

En déduire les variations de f .

b. Vérifier que : $f(\beta)=-\beta$

c. Calculer la limite de f en $+\infty$.

d. Dresser le tableau de variation de f .

4. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On placera en particulier les points d'abscisses 1 ; 3 ; 4 ; e^2 ; 12.

On prendra : $\ln(0,27)\simeq -1,31$; $\ln(0,28)\simeq -1,27$; $\ln(2)\simeq 0,7$; $\ln(3)\simeq 1,1$; $\ln(5)\simeq 1,6$

PARTIE B

1. a. Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une solution unique α dans [3, 4].

b. Démontrer que les équations $f(x)=1$ et $e^{1+\frac{1}{x}}=x$ sont équivalentes.

2. Soit g la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie pour tout réel strictement positif x par : $g(x)=e^{1+\frac{1}{x}}$

a. Etudier le sens de variation de g.

b. Démontrer que pour tout x élément de [3, 4], $g(x)$ est un élément de [3, 4] .

c. Démontrer que : $\forall x\in[3;4]$, $|g'(x)|\leq\frac{1}{2}$

On prendra. $e^{\frac{4}{3}}\simeq 3,8$; $e^{\frac{5}{4}}\simeq 3,49$

3. Soit (U_n) la suite définie par : $U_0=3$ et la relation de récurrence $U_{n+1}=g(U_n)$.

a. Démontrer par récurrence que : $\forall\ n\in\mathbb{N}, U_n\in[3;4]$.

b. Démontrer que pour tout entier n positif ou nul : $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

c. Démontrer que la suite (U_n) est convergente. Calculer sa limite.

d. Pour quelle valeurs de n, U_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} près ?

PARTIE C

1. Soit n un entier naturel non nul.
Démontrer que l'équation $f(x)=n$ admet une solution α_n et une seule.
Placer α_1 et α_2 dans le même repère que précédemment.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $\alpha_n \geq e^n$

b. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$f(\alpha_n)=n$ est équivalent à $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)=\frac{n}{\alpha_n}$

c. Déduire des questions 2.a et 2.b que la suite $\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 4 : Bac C 1997 Session de remplacement

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[, \ f(x)=\frac{x^2}{x-1}\ln(x) \\ f(0)=0 \ \ et \ \ f(1)=1 \end{cases}$$

On notera (C) la courbe représentative de f relativement à un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 5 cm.

PARTIE A

On considère la fonction g dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $g(x)=(x-2)\ln(x)+(x-1)$

1. Démontrer que pour tout réel x élément de $]0;+\infty[$, $g'(x)=\frac{2(x-1)}{x}+\ln(x)$
2. Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.
3. Déduire de 2) que g(x) est positif pour tout réel x élément de $]0;+\infty[$.

PARTIE B

1. a. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b. Démontrer que f est continue à droite en 0, et continue en 1.

c. Calculer le nombre dérivé de f à droite en 0.
Donner une interprétation graphique de ce résultat.

d. On admettra ici que f est dérivable en 1 et que : $f'(1)=\frac{3}{2}$

En déduire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

2. a. On admet que f est dérivable sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$

Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0;1[\cup]1;+\infty[$ $f'(x)=\frac{x}{(x-1)^2}g(x)$.

b. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c. Démontrer que pour tout réel appartenant à [0 ; 1], on a $0\leq f(x)\leq 1$

d. Dans le repère (O, I, J), tracer la démi- tangente à (C) au point O, la tangente à (C) au point B de coordonnées (1 ; 1) et la courbe (C).

On donne : $\ln 2 \simeq 0,69$; $\ln 3 \simeq 1,1$

PARTIE C

1. Pour tout réel α appartenant à $\left]0;\frac{1}{2}\right[$, on considère l'intégrale $A(\alpha)$ telle que :

$$A(\alpha)=\int_{\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}+a}\frac{t^2}{t-1}\ln(t)\,dt.$$

On note A la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures.

Que représente géométriquement le nombre A ?

2. a. Démontrer que la fonction H_n définie, pour tout entier naturel non nul n, sur $]0;+\infty[$ par $H_n(t)=\frac{t^{n+1}}{n+1}\left(\ln(t)-\frac{1}{n+1}\right)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto t^n\ln(t)$ sur $]0;+\infty[$.

b. Soit α dans $\left]0;\frac{1}{2}\right[$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n(\alpha)=\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n\ln(t)dt \text{ et } I_n=\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ <}}I_n(\alpha)$$

Calculer $I_n(\alpha)$ et en déduire que $I_n=-\frac{1}{(n+1)^2}$

3. a. Pour tout réel t différent de 1, et pour tout entier naturel non nul n, calculer la somme : $t^2+t^3+...+t^{n+1}$ *(Somme des n premiers termes d'une suite géométrique).*

Démontrer que : $\frac{t^2}{t-1}=-t^2-t^3-...-t^{n+1}+\frac{t^{n+2}}{t-1}$

et que $A(\alpha)=-I_2(\alpha)-I_3(\alpha)-...-I_{n+1}(\alpha)+\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(t)dt$

b. En utilisant la question 2) c. de la partie B, démontrer que :

$$0\leq\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(t)dt\leq\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n dt\leq\int_0^1 t^n dt$$

a. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel non nul n :

$0\leq A(\alpha)+I_2(\alpha)+I_3(\alpha)+...+I_{n+1}(\alpha)\leq\frac{1}{n+1}$ et que, pour tout entier naturel non nul n : $0\leq A-\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{(n+2)^2}\right)\leq\frac{1}{n+1}$

b. On admet que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{(n+2)^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$

Démontrer que $A=\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$

EXERCICE 5 : Bac E 2001 Session normale

PARTIE A

On propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{J}$ des fonctions numériques f d'une variable réelle, définies sur $]-1;+\infty[$, dérivables sur cet intervalle et vérifiant la relation suivante :

$\forall x\in]-1;+\infty[,\quad (1+x)f'(x)+f(x)=1+\ln(1+x)$

1. Soit f un élément de $\mathcal{J}$ et soit g la fonction dérivable sur $]-1;+\infty[$ et définie par : $g(x)=(1+x)f(x)$

a. Démontrer que g est une primitive sur $]-1;+\infty[$ de la fonction h définie par :

$\forall x\in]-1;+\infty[,\quad h(x)=1+\ln(1+x)$

b. Réciproquement, soit g_1 une primitive de la fonction h. Démontrer que la fonction f_1, définie par : $\forall x\in]-1;+\infty[,\quad f_1(x)=\frac{g_1(x)}{1+x}$ est élément de $\mathcal{J}$.

2. a. Déterminer les réels a et b tels que : $\forall x \in]-1;+\infty[$, $\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$

b. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'ensemble des primitives de h sur $]-1;+\infty[$

3. En déduire l'ensemble $\mathcal{J}$

PARTIE B

1. On considère l'ensemble des fonctions f_k dérivables sur $]-1;+\infty[$ et définies sur cet intervalle par : $f_k(x) = \ln(x+1) + \frac{k}{x+1}$, k étant un paramètre réel.

a. Calculer suivant les valeurs de k, la limite de f_k en $+\infty$ et à droite en -1.

b. Etudier suivant les valeurs de k, le sens de variation de f_k et dresser son tableau de variation.

c. Tracer avec soin, dans un même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les représentations graphiques respectives (C_{-1}), (C_0) et (C_1) des fonctions f_{-1}, f_0 et f_1

2. Pour tout réel t et pour tout entier naturel n supérieur à 2, on pose :

$$Q_{n-2}(t) = 1 - t + t^2 + ... + (-1)^{n-2} t^{n-2}$$

a. Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R} - \{1\}, Q_{n-2}(t) = \frac{1-(-1)^{n-1}t^{n-1}}{1+t}$

b. En déduire que $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + ... + (-1)^{n-2}t^{n-2} + (-1)^{n-1}t^{n-1}\left(\frac{t^{n-1}}{1+t}\right), t \neq 1.$

c. A l'aide d'une intégration sur [0 ; x] (0 ≤ x ≤ 1) ; démontrer que :

$$\left| f_0(x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \right|$$

avec $P_{n-1}(x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1}$

3. On considère la fonction φ définie sur [0 ; 1] par : $\begin{cases} \varphi(x) = \frac{f_0(x)}{x} \text{ si } x \in]0;1] \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$

a. Démontrer que : $\forall x \in]0;1], \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \leq \int_0^x t^{n-1} dt$

b. En déduire que : $\forall x \in]0;1], \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n}$

c. Utilisant 2) c. démontrer que : $\forall x \in]0;1], \frac{-1}{nx} \leq \varphi(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x} \leq \frac{1}{nx}$

d. Par intégration sur $\left[\frac{1}{n};1\right]$ démontrer que :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \varphi(x)dx + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n(1) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \varphi(x)dx - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right).$$

avec $S_n(x) = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + ... + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)^2}$ $\quad n \geq 2$

PARTIE C

1. Soit : $g_n(x) = \sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^i x^i = 1 - x + x^2 - x^3 + ... - x^{2n-1}$

Démontrer par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1;+\infty[, f_0'(x) = g_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}.$

2. a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], \frac{x^{2n}}{1+x} \leq x^{2n}.$

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx \leq \frac{1}{2n+1}$

3. On considère la suite (U_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \sum_{i=0}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{2n}.$$

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_0(1) = U_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx.$

b. En déduire la limite de la suite (U_n).

EXERCICE 6

Partie A

Soit g la fonction définie sur]0 ; + ∞ [par g(x) = x(1 – x³) + 1 – 2lnx

1. Déterminer les limites de g en 0 et en + ∞ ;
2. Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif, $g'(x) = \frac{(x+1)(-3x^2+3x-2)}{x}$
3. Démontrer que g est strictement décroissante.
4. Démontrer que g(x) = 0 admet une unique solution α dans] 1 ; + ∞ [
5. Démontrer que : $\forall x \in]0;\alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) < 0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par : $f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\ln x}{x} - (x-1)^2\right)$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J): unité 2 cm

1. Calculer la limite de f en 0 et en + ∞ .
2. Vérifier que $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ f(x) = -x + 2 + \frac{\ln x - x}{x^2}$
3. Démontrer que la droite (Δ) d'équation y = - x + 2 est asymptote à (C) en + ∞
4. Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$
5. Déterminer le signe de f ', puis dresser le tableau de variation de f.
6. Vérifier que 1 est solution de l'équation f(x)= 0, puis justifier que f(α) > 0
7. Démontrer que l'équation f(x)= 0 admet une unique solution β dans [α ; + ∞ [

Partie C

Soit h la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par h(x) = lnx - x

1. Dresser le tableau de variation de h
2. Démontrer que pou tout nombre réel strictement positif, h(x) < 0
3. Déterminer les positions relatives de (C) et (Δ)
4. Construire (Δ) et (C).

Partie D

Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1. On désigne par A(λ) l'aire en Cm² de la partie du plan délimitée par les droites x= 1, x = λ, (Δ) et la courbe (C).

1. Justifier que $A(\lambda) = \int_1^{\lambda} \frac{t - \ln t}{t^2}\,dt$
2. Calculer la dérivée de la fonction k définie sur] 0 ; + ∞ [par $k(x) = \frac{\ln x}{x}$
3. Démontrer que $A(\lambda) = \frac{\ln(\lambda)}{\lambda} + \ln(\lambda) + \frac{1}{\lambda} - 1$
4. Déterminer la limite de A(λ) lorsque λ tend vers + ∞ .

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1 : Bac C 1999 Session normale

1. a. $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{x}$

b- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$

h est donc strictement décroissante sur $[e;+\infty[$ et strictement croissante sur $]0;e]$.

Tableau de variation de h

x	0		e		$+\infty$
h'(x)		+	0	-	
h(x)		$\nearrow$	0	$\searrow$	

c. $\forall x \in [1;e]$, h est strictement croissante sur $[1;e]$.

Donc $\forall x \in [1;e], h(1) \leq h(x) \leq h(e) \Rightarrow -\frac{1}{e} \leq h(x) \leq 0$, d'où $h(x) \leq 0$ donc $\ln x \leq \frac{x}{e}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

a. $I_2 = \int_1^e x(\ln x)^2 dx$ Posons : $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = x$

On a : $u'(x) = \frac{2}{x}\ln x$. Choisissons $v(x) = \frac{x^2}{2}$

$I_2 = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e x\ln x \, dx$

$I_2 = \frac{e^2}{2} - \int_1^e x \ln x \, dx$

Soit $J = \int_1^e x \ln x dx$.

Posons $S(x) = \ln x$ et $T'(x) = x$. On a : $S'(x) = \frac{1}{x}$, choisissons $T(x) = \frac{x^2}{2}$

$J = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

$J = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$. On a donc : $I_2 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$.

b- $I_{n+1}-I_n=\int_1^e\left[x(\ln x)^{n+1}-x(\ln x)^n\right]dx$

$I_{n+1}-I_n=\int_1^e x(\ln x-1)(\ln x)^n dx \leq 0$, car $x\in[1;e]$;

$\ln x - 1 \leq 0$; Donc la suite (I_n) est décroissante.

c. $\forall x\in[1;e], x(\ln x)^n \geq 0$ donc $I_n \geq 0$

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 ; donc elle converge.

d. D'après 1)c- $\forall x\in[1;e], 0\leq \ln x \leq \frac{x}{e}$

$0 \leq (\ln x)^n \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n \Leftrightarrow 0 \leq x(\ln x)^n \leq \frac{x^{n+1}}{e^n}$

donc $0\leq\int_1^e x(\ln x)^n dx\leq\int_1^e \frac{x^{n+1}}{e^n}dx$

$0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+2}}{(n+2)e^n}\right]_1^e \Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{e^{n+2}}{(n+2)e^n}-\frac{1}{(n+2)e^n}$

$0 \leq I_n \leq \frac{e^2}{(n+2)}-\frac{1}{(n+2)e^n}$

e. On a : $0 \leq I_n \leq \frac{e^2}{(n+2)}-\frac{1}{(n+2)e^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^2}{(n+2)}-\frac{1}{(n+2)e^n} = 0$

d'après le théorème des gendarmes ; $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

EXERCICE 2 : Bac C 2001 Session normale

PARTIE A

1. Limite de h en $+\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2\ln x)=-\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\infty$

Limite de h à droite en 0.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(-2\ln x)=+\infty$, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}h(x)=+\infty$

2. $\forall x\in]0;+\infty[, h'(x)=-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x}=-\frac{2(1+x^2)}{x^3}$

3. $\forall x\in]0;+\infty[, h'(x)<0$ d'où h est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

Or $h(]0;+\infty[)=\mathbb{R}$ donc h réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Comme 0 appartient à $\mathbb{R}$, alors l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique x_0 dans $]0;+\infty[$.

$h(1)=2$ donc $h(1)>h(x_0)$. h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

On en déduit que $1<x_0$ c'est-à-dire $x_0 \in]1;+\infty[$.

Par conséquent, l'équation $x_0 \in]0;+\infty[$, $h(x_0)=0$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $]1;+\infty[$

4. $h(x_0)=0$ et h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ d'où

$$h(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$$

$$h(x)>0 \Leftrightarrow x \in]0;x_0[$$

$$h(x)<0 \Leftrightarrow x \in]x_0;+\infty[$$

PARTIE B

1. Limite de g en $+\infty$

On a : $\forall x \in]0;+\infty[, g(x)=x^2\left(1-\ln x+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x^2}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

Limite de g à droite en 0.

$\forall x \in]0;+\infty[, g(x)=x^2-x^2\ln x+1+\ln x.$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^2\ln x=0$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(x^2+1+\ln x\right)=-\infty$ D'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=-\infty$

2. $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x)=2x(1-\ln x)-\dfrac{x^2}{x}+\dfrac{1}{x}$

$$g'(x)=x\left(2-2\ln x-\frac{x}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x\left(2-2\ln x-1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=x\left(1+\frac{1}{x^2}-2\ln x\right)$$

$g'(x)=xh(x)$

3. On a : $g(x_0)=x_0^2\left(1-\ln x_0\right)+1+\ln x$

De plus $h(x_0)=0$ d'après la question 3) de la partie A

$$1+\frac{1}{x_0^2}-2\ln x_0=0 \Leftrightarrow \ln x_0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2x_0^2}$$

D'où $g(x_0)=x_0^2\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2x_0^2}\right)+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2x_0^2}$

$$g(x_0)\ =x_0^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2x_0^2}\right)+\frac{3}{2}+\frac{1}{2x_0^2}=\ \frac{x_0^2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2x_0^2}=\ \frac{x_0^2}{2}+1+\ \frac{1}{2x_0^2}$$

D'où $\qquad g(x_0)>0$

4. $\forall x\in\,]0;1[\,, g'(x)$ est du signe de $h(x)$

Or d'après la partie A.4), on a $h(x)>0$ d'où $\forall x\in\,]0;1[\,, g'(x)>0$

g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;1[$, $g\left(]0;1[\right)=]-\infty;2[$.

g réalise une bijection de $]0;1[$ sur $]-\infty\,;2[$

$0\in\,]-\infty\,;2[$ donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique x_1 dans $]0;1[$.

5. a- D'après la partie A.4), on a

$\forall x\in\,]0;x_0[\,, h(x)>0$ donc $g'(x)>0$

$\forall x\in\,]x_0;+\infty[\,, h(x)<0$ donc $g'(x)<0$

$h(x_0)=0$, donc $g'(x_0)=0$

Donc g est strictement croissante sur $]0;x_0[$ et strictement décroissante sur $]x_0;+\infty[$.

On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

x	0		x_1		1		x_0		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		+					0		-		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Comme $g(x_1)=0$ avec $x_1 \in]0;1[$ et $g(x_2)=0$ avec $x_2 \in]x_0;+\infty[$ alors :

$$\begin{cases} \forall x \in]0;x_1[\cup]x_2;+\infty[, g(x)<0 \\ \forall x \in]x_1;x_2[, g(x)>0 \\ \forall x \in \{x_1;x_2\}, g(x)=0. \end{cases}$$

b. On a $g(0,3) \simeq -0,005$; $g(0,4) \simeq -0,4$; $g(3,3) \simeq 0,08$; $g(3,4) \simeq -0,36$.

On déduit du sens de variation de g obtenue à la question précédente que :

$g(0,3)<0$ et $g(0,4)>0$, donc $x_1 \in]\ 0,3\ ;\ 0,4\ [$.

$g(3,3)>0$ et $g(3,4)<0$, donc $x_2 \in]\ 3,3\ ;\ 3,4\ [$.

PARTIE C

1. Continuité de f à droite en 0

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ln x = 0$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (1+x^2) = 1$, d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = f(0)$, alors f est continue à droite en 0.

Dérivabilité de f à droite en 0

$$\forall x \in]0;+\infty[, \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\ln x}{1+x^2}$$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$; d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

2. Limite de f en $+\infty$

$$\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{\ln x}{x}$$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

On en déduit que la droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$

3. $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \dfrac{(\ln x+1)(1+x^2)-2x(x\ln x)}{(1+x^2)^2}$

$$f'(x)=\frac{\ln x+1+x^2\ln x+x^2-2x^2\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{x^2-x^2\ln x+1+\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2\left(1-\ln x\right)+1+\ln x}{\left(1+x^2\right)^2} \quad \text{Donc} \quad f'(x)=\frac{g(x)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

4. Comme $\left(1+x^2\right)^2>0$ alors $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

Il résulte de la question 5)a- de la partie B, que :

$\forall x\in \left]0;x_1\right[\cup\left]x_2;+\infty\right[,\ f'(x)<0$

$\forall x\in \left]x_1;x_2\right[,\qquad f'(x)>0$

$\forall x\in \left\{x_1;x_2\right\},\qquad f'(x)=0$

Tableau de variation de f

x	0		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

5. Si α est une solution de l'équation $g(x)=0$, alors α vérifie :

$$\alpha^2\left(1-\ln\alpha\right)+1+\ln\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha^2\ln\alpha+1+\ln\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\alpha^2\right)\ln\alpha=-1-\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow \ln\alpha=\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$$

6. Si α est une solution de l'équation $g(x)=0$, on a :

$$f(\alpha)=\frac{\alpha}{\alpha^2+1}\times\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$$

Donc si $\alpha\in\left]0;1\right[$, alors $f(\alpha)<0$

Si $\alpha\in\left]1;+\infty\right[$, alors $f(\alpha)>0$

Comme $x_1 \in]0;1[$, alors on a $f(x_1) < 0$

Et comme $x_2 \in]1;+\infty[$, alors on a : $f(x_2) > 0$.

7. $f(1) = 0$.

D'après le tableau de variation de f et compte tenu du signe de $f(x_1)$ et $f(x_2)$, on déduit que :

$\forall x \in]0;1[, f(x) < 0$

$\forall x \in]1;+\infty[, f(x) > 0.$

$$f(1) = 0.$$

Tracé de (C_f) : voir figure

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$ donc (C_f) admet une tangente verticale à droite au point d'abscisse 0.

PARTIE D

1\. a. $\forall t \in]1;+\infty[, t^2 \leq 1 + t^2 \leq 2t^2$ Donc $\dfrac{1}{2t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$

b. $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,dt = \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_1^x = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ car $\dfrac{\ln t}{t} = \dfrac{1}{t} \times \ln t = (\ln t)' \times \ln t$

c. $\forall t > 1$, On a $\dfrac{1}{2t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$

d'où en multipliant par le nombre réel positif $t\ln t$ on obtient :

$$\forall t > 1, \quad \frac{\ln t}{2t^2} \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2}$$

Alors $\forall t \in]1;+\infty[, \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{2t}\,dt \leq \int_1^x f(t)\,dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t}\,dt$

Avec $x > 1$, on obtient $\dfrac{1}{4}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ d'après D1)b- ;

comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{4}(\ln x)^2 = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

On a : $\forall x > 1, \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 \leq \dfrac{F(x)}{x} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x} = 0$

2. $\forall \alpha \in \left]0;1\right[, \varphi(\alpha) = \int_1^{\alpha} t \ln t \, dt$

a. Intégrons par parties.

Posons $u(t)=\ln t$ et $v'(t)=t$

On a : $u'(t)=\frac{1}{t}$. choisissons $v(t)=\frac{t^2}{2}$

$$\varphi(\alpha)=\left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^{\alpha} - \int_1^{\alpha}\frac{t}{2}dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right]_1^{\alpha} = \frac{\alpha^2}{2}\left(-\frac{1}{2}+\ln\alpha\right)+\frac{1}{4}$$

b- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\varphi(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{\alpha^2}{2}\left(-\frac{1}{2}+\ln\alpha\right)+\frac{1}{4}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{-\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha+\frac{1}{4}\right)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\varphi(\alpha)=\frac{1}{4}$ $\quad$ *car* $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \alpha^2\ln\alpha = 0$

c. $\forall t \in \left]0,1\right[, 1 \le 1+t^2 \le 2;$ d'où $\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+t^2} \le 1$.

$t\ln t \le \frac{t\ln t}{1+t^2} \le \frac{1}{2}t\ln t \quad car\; t\ln t < 0$

pour $0 < \alpha \le t < 1$, on a : $\int_{\alpha}^{1} t\ln t\, dt \le \int_{\alpha}^{1}\frac{t\ln t}{1+t^2}dt \le \int_{\alpha}^{1}\frac{t\ln t}{2}dt$

$$\Rightarrow \; -\int_{\alpha}^{1}\frac{t\ln t}{2}dt \le -\int_{\alpha}^{1}\frac{t\ln t}{1+t^2}dt \le -\int_{\alpha}^{1} t\ln t\, dt$$

$$\Rightarrow \; \int_{1}^{\alpha}\frac{t\ln t}{2}dt \le \int_{1}^{\alpha}\frac{t\ln t}{1+t^2}dt \le \int_{1}^{\alpha} t\ln t\, dt$$

$\Rightarrow \; \frac{1}{2}\varphi(\alpha) \le F(\alpha) \le \varphi(\alpha)$.

comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\varphi(\alpha) = \frac{1}{4}$, alors $\frac{1}{8} \le \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} F(\alpha) \le \frac{1}{4}$

3. Comme f est continue sur $\left]0; +\infty\right[$, la fonction F définie par :

$F(x)=\int_1^x f(t)dt$, est la primitive de f sur $\left]0;+\infty\right[$ qui s'annule en 1.

Donc $\forall x \in \left]0;+\infty\right[, F'(x)=f(x)$.

4. D'après la partie C7), on a :

$F'(x) < 0 \iff x \in]0;1[$

$F'(x) > 0 \iff x \in]1;+\infty[$

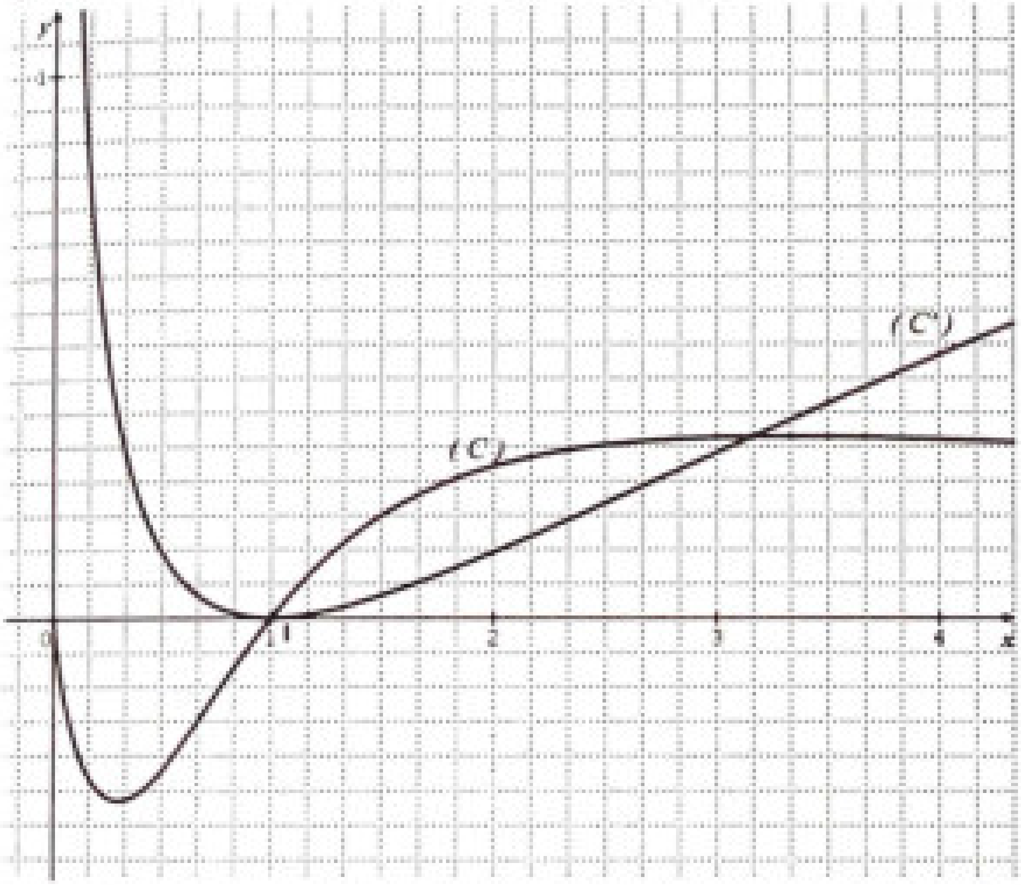
$F'(x) = 0 \iff x = 1$

Car le signe de $F'(x)$ est celui de $f(x)$.

Tableau de variation de F

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$	‖	-	0	+	
$F(x)$	‖	↘	1	↗	$+\infty$

5. Allure de la courbe représentative de F



EXERCICE 3 : Bac C 1997 Session normale

PARTIE A

1. Continuité de f en 0.

$D_f = [\,0\,;+\infty\,[$. f est définie en 0 car $0 \in [\,0\,;+\infty\,[$

$\lim\limits_{x \to 0^>} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^>} \dfrac{x\ln x}{x+1} = 0$, car $\lim\limits_{x \to 0^>} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^>}(x+1) = 1$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^>} f(x) = f(0)$, donc f est continue à droite en 0 .

Dérivabilité de f en 0.

$\lim\limits_{x \to 0^>} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^>} \dfrac{\ln x}{x+1} = -\infty$, car $\lim\limits_{x \to 0^>} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^>}(x+1) = 1$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

2. a. **Sens de variation de $\varphi(x)$**

$\forall x \in]0; +\infty[$, $\varphi(x) = \ln x + x + 1 \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $\varphi'(x) > 0$ donc φ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

b – Montrons que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β

φ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $\varphi(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$, donc φ est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Or $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]0; +\infty[$.

On a : $\varphi(0{,}27) = -0{,}04$ et $\varphi(0{,}28) = 0{,}007$

d'où $\varphi(0{,}27) \times \varphi(0{,}28) < 0$ donc $\beta \in]0{,}27; 0{,}28[$.

3°) a – **Dérivée de f**

$\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x+1) - x\ln x}{(x+1)^2} = \frac{x\ln x + \ln x + x + 1 - x\ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2}$$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(x+1)^2}$

Sens de variation de f

$f'(x)$ a le même signe que $\varphi(x)$

$\forall x \in]0; \beta[$ $f'(x) < 0$, donc f est strictement croissante sur $]0; \beta[$

$\forall x \in]\beta; +\infty[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement décroissante sur $]\beta; +\infty[$

b. Vérifions que $f(\beta) = -\beta$

On a : $f(\beta) = \frac{\beta\ln\beta}{\beta+1}$.

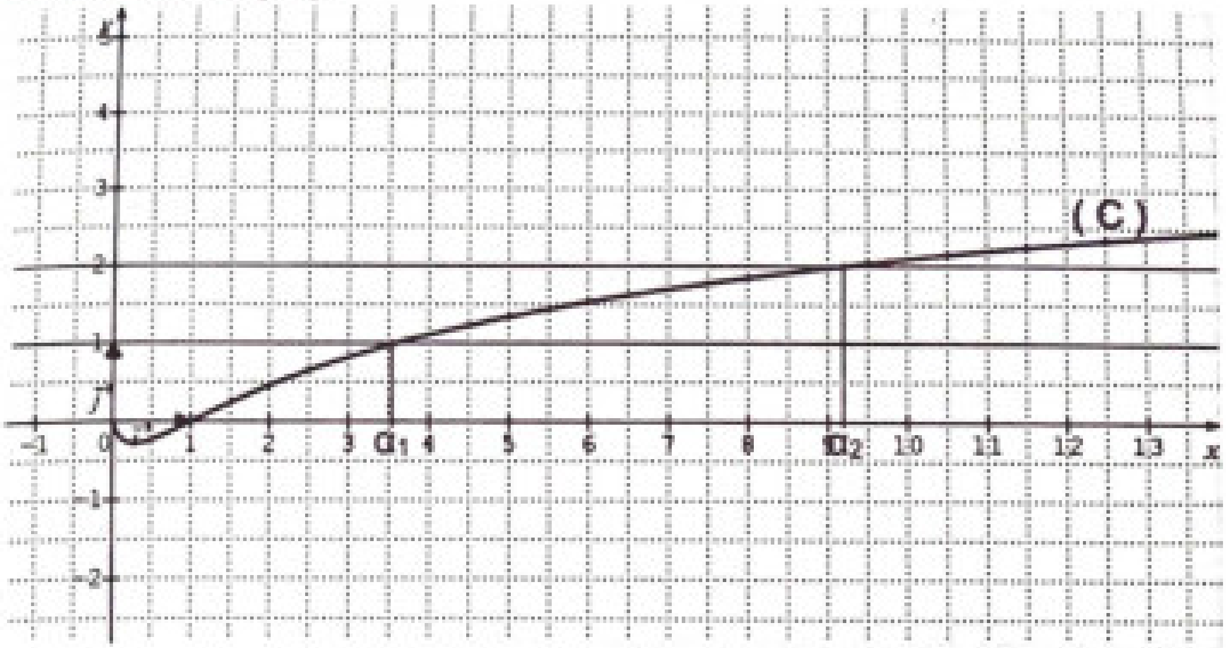
On a : $\varphi(\beta) = \ln(\beta) + \beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(\beta) = -\beta - 1$ donc $f(\beta) = \frac{\beta(-\beta-1)}{\beta+1} = -\beta$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x+1} . \ln x\right) = +\infty$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = 1$

d. Tableau de variation de f

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-\beta$	↗	$+\infty$

4. Construction de (C)



PARTIE B

1\. a. f est continue et strictement croissante sur $[\beta\,;+\infty[$ et

$f([\beta\,;+\infty[) = [-\beta\,;+\infty[$. Donc f est une bijection de $[\beta\,;+\infty[$ sur $[-\beta\,;+\infty[$.

Or $1 \in [-\beta\,;+\infty[$, donc l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[\beta\,;+\infty[$

.

On a aussi : $[3\,;4] \subset [\beta\,;+\infty[$ et $f(3) = 0{,}82$ et $f(4) = 1{,}1$ d'où $f(3) \le 1 \le f(4)$.

f étant strictement croissante, on a : $3 \le \alpha \le 4$, c'est-à-dire $\alpha \in [3\,;4]$

b. $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x\ln x}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x\ln x = x + 1$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = e^{1+\frac{1}{x}}$$

Donc les équations $f(x) = 1$ et $x = e^{1+\frac{1}{x}}$ sont équivalentes.

2\. a. Sens de variation de g

$\forall x \in]0;+\infty[$, $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$ alors $g'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1+\frac{1}{x}}$

On a : $\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) < 0$, g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

b. $x \in [3\,;4] \Leftrightarrow 3 \le x \le 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{4} \le 1 + \frac{1}{x} \le \frac{4}{3}$

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$; on a :

$e^{\frac{5}{4}} \le e^{1+\frac{1}{x}} \le e^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow e^{\frac{5}{4}} \le g(x) \le e^{\frac{4}{3}}$; or $e^{\frac{5}{4}} = 3{,}49$ et $e^{\frac{4}{3}} = 3{,}79$

D'où $[e^{\frac{5}{4}}\,; e^{\frac{4}{3}}] \subset [3\,;4]$; donc $\forall x \in [3;4]$, $g(x) \in [3\,;4]$

c. $\forall x \in [3;4]$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2}g(x)$. Or $0 < g(x) \le 4$ et $\frac{1}{x^2} \le \frac{1}{9}$

donc $|g'(x)| \le \frac{4}{9}$. Finalement : $\forall x \in [3;4]$, $|g'(x)| \le \frac{1}{2}$

3\. $\begin{cases} U_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$

a. Démontration par récurrence

Soit (P_n) la proposition suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3;4]$

- Vérifier que (P_0) est vrai.

On a : $U_0 = 3$, d'où $U_0 \in [3;4]$, donc (P_0) est vrai.

- Supposons que pour tout entier naturel n, $U_n \in [3;4]$, c'est-à-dire (P_n) est vrai.

- Démontrons que (P_{n+1}) est vrai, c'est-à-dire $U_{n+1} \in [3;4]$

$U_{n+1} = g(U_n)$; or $\forall x \in [3;4]$, $g(x) \in [3;4]$, donc si $U_n \in [3;4]$ alors $g(U_n) \in [3;4]$ c'est-à-dire $U_{n+1} \in [3;4]$. Donc (P_{n+1}) est vrai.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3;4]$

b. g est dérivable sur $[3;4]$; $\alpha \in [3;4]$, $U_n \in [3;4]$ et $\forall x \in [3;4]$;

$|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|g(U_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$. d'après l'inégalité des accroissements finis.

En utilisant l'équivalence $x = e^{1+\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f(x) = 1$, on a $g(\alpha) = \alpha$.

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

Soit (P_n) la proposition : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

- Vérifions que (P_0) est vrai.

On a : $|U_0 - \alpha| = |3 - \alpha|$.

Or $3 < \alpha < 4 \Leftrightarrow -4 < -\alpha < -3 \Leftrightarrow -1 < 3 - \alpha < 0$ D'où $|3 - \alpha| < 1$

Donc $|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^0}$. Par conséquent (P_0) est vrai.

- Supposons que (P_n) est vrai, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

- Démontrons que (P_{n+1}) est vrai c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

D'après 3°) a. , on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ d'où $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}$

Donc $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Au total (P_{n+1}) est vrai.

En conclusion, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

c. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n - \alpha = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

donc la suite U_n converge vers α

d. Déterminons la Valeur de n

U_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} près si $|U_n - \alpha| < 10^{-2}$

Comme $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$, alors $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow 2^n \geq 10^2 \Leftrightarrow n \ln 2 \geq 2 \ln 10$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{2 \ln 10}{\ln 2} \Leftrightarrow n \geq 6{,}64$$

La plus petite valeur de l'entier naturel n est $n = 7$.

PARTIE C

1. $n \in \mathbb{N}^*$; d'après A. 3°) d- $\beta > 0$ et $f([0;\beta[) = [-\beta;0[$,

donc l'équation $f(x) = n$, n'a pas de solutions dans $[0;\beta[$.

f est une bijection de $[\beta;+\infty[$ sur $[-\beta;+\infty[$ et $n \in [-\beta;+\infty[$, donc l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique réel α_n dans $[\beta;+\infty[$

2. Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \geq e^n$

On a : $f(\alpha_n) = n$.

Or $f(e^n) = \frac{ne^n}{e^n+1}$ et $\frac{e^n}{e^n+1} \leq 1$ donc $\frac{ne^n}{e^n+1} \leq n$ d'où $f(e^n) \leq n$

C'est-à-dire que $f(e^n) \leq f(\alpha_n)$. f est strictement croissante sur $]\beta;+\infty[$

Donc $e^n \leq \alpha_n$, car $n \geq 1 \Rightarrow e^n \geq e \Rightarrow e^n \geq \beta$

b. On a : $f(\alpha_n) = \frac{\alpha_n \ln(\alpha_n)}{\alpha_n+1} = n$

$$\frac{\alpha_n \ln(\alpha_n)}{\alpha_n+1} = n \Leftrightarrow \frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n+1} = \frac{n}{\alpha_n} \Leftrightarrow \ln(\alpha_n) = \frac{n}{\alpha_n}(1+\alpha_n) \Leftrightarrow \alpha_n = e^{\frac{n}{\alpha_n}(1+\alpha_n)}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n = e^{\frac{n}{\alpha_n}} \times e^n \Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{e^n} = e^{\frac{n}{\alpha_n}} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$$

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \geq e^n > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\alpha_n} \leq \frac{1}{e^n} \Leftrightarrow 0 < \frac{n}{\alpha_n} \leq \frac{n}{e^n}$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$, d'où d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{\alpha_n} = 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\alpha_n}{e^n} = e^0 = 1$

La suite $\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc vers 1

EXERCICE 4 : Bac C 1997 Session de remplacement

PARTIE A

1) $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) = (x-2)\ln x + (x-1)$

$$g'(x) = (x-2)'\ln x + (x-2)(\ln x)' + (x-1)'$$

$$= \ln x + (x-2)\frac{1}{x} + 1$$

$$= \ln x + \frac{(x-2)}{x} + 1$$

$$= \ln x + \frac{2x-2}{x}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{2(x-1)}{x} + \ln x}$$

2°) Sens de variation de g

Pour étudier le signe de $g'(x)$, calculons $g''(x)$

On a : $g''(x) = \frac{2x-2(x-1)}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{2+x}{x^2}$

$\forall x \in]0;+\infty[, g''(x) > 0$ donc g' est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de g'

x	0	$+\infty$
$g''(x)$	‖	$+$
$g'(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{2(x-1)}{x} + \ln x\right)$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}\left(2(x-1) + x\ln x\right)$

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g'(x) = -\infty}$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(2(x-1)\right) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ln x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2(x-1)}{x} + \ln x\right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-2}{x} + \ln x\right)$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = +\infty}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-2}{x} = 2$

Comme $g'(1) = 0$, on conclut que : $\forall x \in$

$]0;1[, g'(x) < 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[, g'(x) > 0$

Par conséquent :

$\forall x \in]0;1[, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0;1[$

$\forall x \in]1;+\infty[, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$

Tableau de variation de g

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[(x-2)\ln x + (x+1)\right] = +\infty$ car

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x-2) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x-1) = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[(x-2)\ln x + (x+1)\right] = +\infty$ car

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x-2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3°) g admet 0 pour minimum absolu ; donc $\forall x \in]0\,;+\infty[\,,\ g(x) \geq 0$

PARTIE B

1) a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1} \ln x$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ *car* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

b- continuité de f à droite en 0.

• $D_f = [0;+\infty[$

$0 \in D_f$ donc f est définie en 0.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x^2}{x-1} \ln x = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x}{x-1} x\ln x$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x^2}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ln x = 0$

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = f(0)$; donc f est continue à droite en 0

- Continuité de f en 1

$D_f = [0\,;+\infty[$; d'où $1 \in D_f$; donc f est définie en 1.

On a : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x^2-1} . \ln x = \lim\limits_{x \to 1} x^2 . \dfrac{\ln x}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$; car $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

On remarque $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$; donc f est continue en 1 c – Nombre derivée de f à droite en 0

$$f_d'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x}{x - 1} \ln x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x - 1} x \ln x$$

$$f_d'(0) = 0 \quad car \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \ln x = 0 \quad et \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x - 1} = -1$$

$f_d'(0) = 0$ donc f est dérivable à droite en 0.

La courbe (C) admet une démi-tangente horizontale au point d'abscisse 0.

d- Equation (T) de la tangente à (C) en 1.

On a : (T) : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ d'où $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$$y = \tfrac{3}{2}(x - 1) + 1 \Rightarrow y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{3}{2} + 1 \text{ donc } (T) : y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

2°) a – Démontrons que $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{x}{(x-1)^2} g(x)$

On a : $f(x) = \frac{x^2}{x-1} \ln x \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' \ln x + \frac{x^2}{x-1} (\ln x)'$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \ln x + \frac{x^2}{x - 1} \times \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{(x-1)^2}[(x - 2)\ln x + (x - 1)]$$

donc $f'(x) = \frac{x}{(x-1)^2} g(x)$ avec $g(x) = (x - 2)\ln x + (x - 1)$

b- Sens de variation de f

x	0		1		$+\infty$
x		+		+	
$(x-1)^2$		+	0	+	
$g(x)$		+		+	
$f'(x)$		+		+	

D'où $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

. Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	$\frac{3}{2}$	+	
$f(x)$	0	↗	$\boxed{1}$	↗	$+\infty$

c- $\forall x \in \left]0;1\right[, f$ est continue et strictement croissante.

on a:

$x \in \left]0;1\right[\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1)$

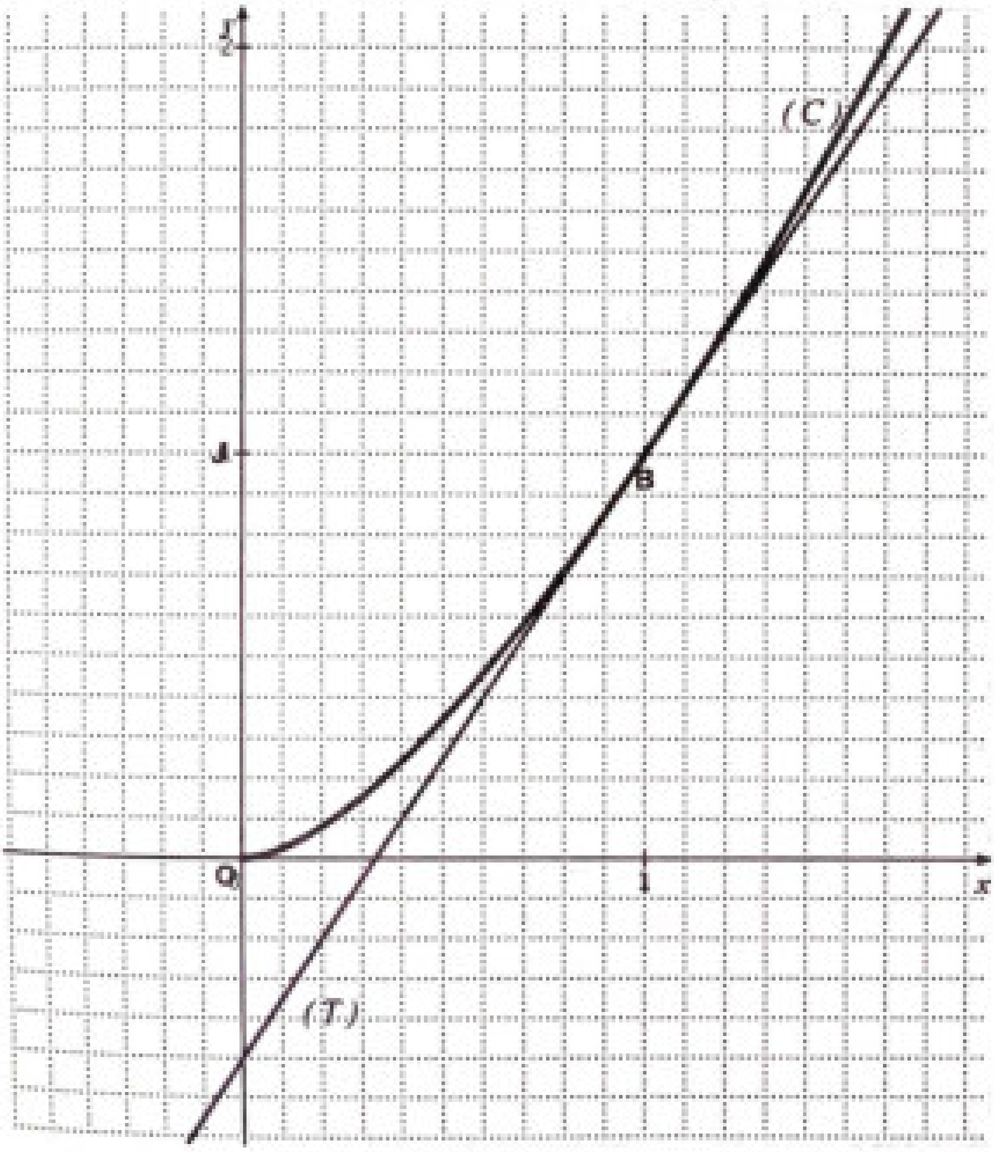
Or $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$ *donc*

$0 \leq f(x) \leq 1$

Pour conséquent

$\forall x \in \left]0;1\right[, 0 \leq f(x) \leq 1$

d- Tracer la démi- tangente à (C) au point 0 (Voir figure)



PARTIE C

1) on a $A(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} \frac{t^2}{t-1}\ln(t)\,dt$

$$A(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} f(t)\,dt$$

on a:

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ >}} \left(\frac{1}{2}+\alpha\right) = 1$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ >}} \left(\frac{1}{2}-\alpha\right) = 0$

donc A est l'aire de la partie du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations

$x = 1$ *et* $x = 0$

2) a- Derivée de H_n

$$H_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}\left(\ln(t) - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$H_n'(t) = \left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)'\left(\ln(t) - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{t^{n+1}}{n+1}\left(\ln(t) - \frac{1}{n+1}\right)'$$

$$= t^n\left(\ln(t) - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{t^{n+1}}{n+1}.\frac{1}{t}$$

$$= t^n \ln t - \frac{t^n}{n+1} + \frac{t^n}{n+1}$$

$\boxed{H_n'(t) = t^n \ln t}$

Donc H_n est une primitive de la fonction $t^n \ln t$ sur

$]0;+\infty[$

b- Calculons $I_n(\alpha)$

$$I_n(\alpha)=\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n \ln t\,dt = \left[H_n(t)\right]_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha}$$

$$I_n(\alpha)=H_n\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)-H_n\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)$$

$$\boxed{I_n(\alpha)=\frac{\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^{n+1}}{n+1}\left[\ln\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)-\frac{1}{n+1}\right]-\frac{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^{n+1}}{n+1}\left[\ln\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)-\frac{1}{n+1}\right]}$$

- En déduire que $I_n=-\frac{1}{(n+1)^2}$

On a : $\lim\limits_{\alpha \to \frac{1}{2}} I_n(\alpha) = I_n$

Or $\lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} I_n(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} H_n\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) - \lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} H_n\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)$

On a : $\lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} H_n\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) = \lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^{n+1}}{n+1}\left[\ln\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)-\frac{1}{n+1}\right]$

Donc $\boxed{\lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} H_n\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) = -\frac{1}{(n+1)^2}}$:(1)

car $\lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}+\alpha\right) = 1$ et $\lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) = 0$

On a aussi : $\lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} H_n\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) = \lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^{n+1}}{n+1}\left[\ln\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)-\frac{1}{n+1}\right]$

$$\lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} H_n\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) = \lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^{n+1}\ln\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}{n+1} - \frac{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^{n+1}}{n+1}$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} H_n\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) = 0}$:(2)

car $\lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-\alpha\right) = 0$ et $\lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^{n+1}\ln\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) = 0$

Par conséquent : d'après la somme des relations (1) et (2), on a :

$\lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} I_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+1)^2}$; donc $\boxed{I_n = -\frac{1}{(n+1)^2}}$

3°) a. $t^2 + t^3 + t^4 + \ldots\ldots + t^{n+1} = t^2\times\left(\frac{1-t^n}{1-t}\right)$

$$t^2 + t^3 + t^4 + \dots\dots + t^{n+1} = \frac{t^2 - t^{n+2}}{1-t}$$

Démontrons que : $\dfrac{t^2}{t-1} = -t^2 - t^3 - t^4 - \dots - t^{n+1} + \dfrac{t^{n+2}}{t-1}$

On a : $t^2 + t^3 + t^4 + \dots\dots + t^{n+1} = \dfrac{t^2 - t^{n+2}}{1-t}$

$$t^2 + t^3 + t^4 + \dots\dots + t^{n+1} = \frac{t^2}{1-t} - \frac{t^{n+2}}{1-t}$$

$$t^2 + t^3 + t^4 + \dots\dots + t^{n+1} = -\frac{t^2}{t-1} + \frac{t^{n+2}}{t-1}$$

$$\frac{t^2}{t-1} = -(t^2 + t^3 + t^4 + \dots\dots + t^{n+1}) + \frac{t^{n+2}}{t-1}$$

En conclusion : $\dfrac{t^2}{t-1} = -t^2 - t^3 - t^4 - \dots\dots - t^{n+1} + \dfrac{t^{n+2}}{t-1}$

Or $A(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} \frac{t^2}{t-1}\ln(t)\,dt$

$$A(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} \left(-t^2 - t^3 - t^4 - \cdots, -t^{n+1} + \frac{t^{n+2}}{t-1}\right) \ln t\,dt$$

$A(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} -t^2\ln t\,dt + \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} -t^3\ln t\,dt + \cdots + \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} -t^{n+1}\ln t\,dt + \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} \frac{t^{n+2}}{t-1}\ln t\,dt$

Donc $A(\alpha) = -I_2(\alpha) - I_3(\alpha) - \dots\dots - I_{n+1}(\alpha) + \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(t)\,dt$

b- D'après question B2. on a : $0 \leq f(t) \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq t^n f(t) \leq 1,\ \forall t \in]0;1[.$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(t)\,dt \leq \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n\,dt} \quad (1)$$

• Soit F une primitive de la fonction $t \to t^n$ sur $]0;+\infty[$,

alors $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n\,dt = F\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) - F\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)$

Posons pour $\alpha \in \left]0;\frac{1}{2}\right[, G(\alpha) = F\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) - F\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)$

On a : $G'(\alpha) = F'\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) - F'\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)$

$$G'(\alpha) = \left(\tfrac{1}{2}+\alpha\right)^n + \left(\tfrac{1}{2}-\alpha\right)^n.$$

$\alpha \in [0;\frac{1}{2}]$, d'où $\frac{1}{2}+\alpha > 0$ et $\frac{1}{2}-\alpha \geq 0$

Par conséquent : $G'(\alpha) > 0$; donc G est strictement croissante sur $[0;\frac{1}{2}]$.

Alors : $\forall\alpha \in [0;\frac{1}{2}]$, $G(\alpha) \leq G(\frac{1}{2}) \Rightarrow F(\frac{1}{2}+\alpha) - F\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) \leq G(\frac{1}{2})$

$\Rightarrow F(\frac{1}{2}+\alpha) - F\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) \leq F(1) - F(0) \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n\,dt \leq \int_0^1 t^n dt$:(2)

D'après les relation (1) et (2) de la question

on a: $\boxed{0 \leq \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(t)\,dt \leq \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n\,dt \leq \int_0^1 t^n\,dt}$

c- D'après la question C.3.a, on a:

$$A(\alpha)+I_2(\alpha)+\ldots+I_{n+1}(\alpha)=\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(t)\,dt$$

d'où $0 \leq A(\alpha)+I_2(\alpha)+\ldots+I_n(\alpha) \leq \int_0^1 t^n\,dt$

$Or\ \int_0^1 t^n\,dt = \left|\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1}$

on obtient donc

$$\boxed{0 \leq A(\alpha)+I_2(\alpha)+\ldots+I_n(\alpha) \leq \frac{1}{n+1}}$$

$$0 \leq \lim_{\alpha \to \frac{1}{2}} \left(A(\alpha) + I_2(\alpha) + \ldots + I_{n+1}(\alpha) \right) \leq \frac{1}{n+1}$$

D'où $0 \leq A - \left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^2}\right) \leq \frac{1}{n+1}$

d – On a : $\lim_{n \to +\infty} \left(A - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^2} \right) \right) = 0$, d'apès le théorème des gendarmes .

D'où $A = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^2} \right)$: (3)

Or $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$

Par conséquent : $1 + \frac{1}{2^2} + \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^2} \right) = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{2^2}$

D'apès la relation (3), on a donc $A = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{2^2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}}$

EXERCICE 5 : Bac E 2001 Session normale

PARTIE A

1. a- On a : $\forall x \in \left]-1;+\infty\right[, g'(x)=(1+x)f'(x)+f(x)$

$$g'(x)=1+\ln(1+x)\ car\ f \in J.$$

D'où $g'(x) = h(x)$. On en déduit que g est une primitive de h sur $\left]-1;+\infty\right[$.

b- $\forall x \in \left]-1;+\infty\right[$

$$f_1'(x) = \frac{g_1'(x)(1+x) - g_1(x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(1+x)h(x) - g_1(x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(1+x)h(x) - (1+x)f_1(x)}{(1+x)^2}$$

$$f_1'(x) = \frac{h(x) - f_1(x)}{1+x}$$

D'où $(1+x)f_1'(x) + f_1(x) = h(x)$

On en déduit que f_1 est un élément de J

2. a. $\forall x \in]-1;+\infty[, \frac{x}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$

On en déduit que $a=1$ et $b=-1.$

b. Soit H la primitive sur $]-1;+\infty[$ de h qui s'annule en 0.

On a : $\forall x \in]-1;+\infty[, H(x) = \int_0^x h(t)\,dt$

$$= \int_0^x [1+\ln(1+t)]\,dt$$

$$= x + \int_0^x \ln(1+t)\,dt$$

Calculons l'intégrale $\int_0^x \ln(1+t)\,dt$ par une intégration par parties.

Posons $u(t) = \ln(1+t)$ et $v'(t) = 1$

On a : $u'(t) = \frac{1}{1+t}$; choisissons $v(t) = t$

On a : $\int_0^x \ln(1+t)\,dt = [t\ln(1+t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt$

$$= x\ln(1+x) - \int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt$$

D'après la question 2.a, on a :

$\forall t \in]-1;+\infty[, \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}.$

Donc $\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^x dt - \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$

$$= x - [\ln(1+t)]_0^x = x - \ln(1+x).$$

On en déduit que : $\forall x \in]-1;+\infty[,$

$H(x) = x + x\ln(1+x) - x + \ln(1+x)$

$=(1+x)\ln(1+x)$.

Les primitives sur $]-1;+\infty[$ de la fonction h sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto (1+x)\ln(1+x)+c$ où c est un nombre réel.

3) De l'étude qui précède, on en déduit que J est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)+\dfrac{c}{1+x}$ où c est un nombre réel car les éléments de J sont de la forme $x \mapsto \dfrac{H(x)}{1+x}$ où H est une primitive de h

PARTIE B

1. a. Déterminons la limite de f_k en $+\infty$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{k}{x+1}=0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1)=+\infty$; Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x)=+\infty$.

Déterminons la limite de f_k en -1 suivant les valeurs de k

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \ln(x+1)=-\infty$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{k}{x+1}=\begin{cases}+\infty \ si \ k>0 \\ -\infty \ si \ k<0\end{cases}$$

On en déduit que : Pour $k<0$, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f_k(x)=-\infty$.

Supposons que : $k=0$.

On a : $\forall x \in]-1;+\infty[, f_k(x)=\ln(x+1)$; Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f_k(x)=-\infty$.

Supposons que $k>0$. On a : $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f_k(x)=\dfrac{(x+1)\ln(x+1)+k}{(x+1)}$;

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x+1)\ln(x+1)=0$ car $\lim\limits_{x \to 0} u\ln u=0$ en posant $u=x+1$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x+1)\ln(x+1)+k=k$ et par suite $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f_k(x)=+\infty$.

b- $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f_k(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{k}{(1+x)^2}=\dfrac{1+x-k}{(1+x)^2}$;

$$f_k(x)=\frac{x-(k-1)}{(1+x)^2}.$$

On déduit que f'_k a le même signe que $x-(k-1)$

$\forall x \in]-1;+\infty[, \left(f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = k-1 \right)$.

$\forall x \in]-1;+\infty[, \left(f'_k(x) > 0 \Leftrightarrow x > k-1 \right)$.

$\forall x \in]-1;+\infty[, \left(f'_k(x) < 0 \Leftrightarrow x < k-1 \right)$.

Donc :

Pour $k \leq 0$, on a : $x-(k-1)>0$

Pour $k>0$, on a : $\forall x \in]-1;k-1[,\ x-(k-1)<0$

$$\forall x \in]k-1;+\infty[,\ \ x-(k-1)>0.$$

On déduit que :

Pour $k \leq 0$, $f'_k(x)>0$ pour tout x élément de $]-1;+\infty[$ d'où f_k est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$;

Pour $k>0$, on a :

$\forall x \in]-1;k-1[,\ f'_k(x) < 0$;

$\forall x \in]k-1;+\infty[,\ f'_k(x) > 0$;

D'où f_k est strictement décroissante sur $]-1;k-1[$ et strictement croissante sur $]k-1;+\infty[$.

On déduit de cette étude le tableau de variation de f_k suivant les valeurs de k.

1er cas : $k \leq 0$

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2ème Cas : $k > 0$

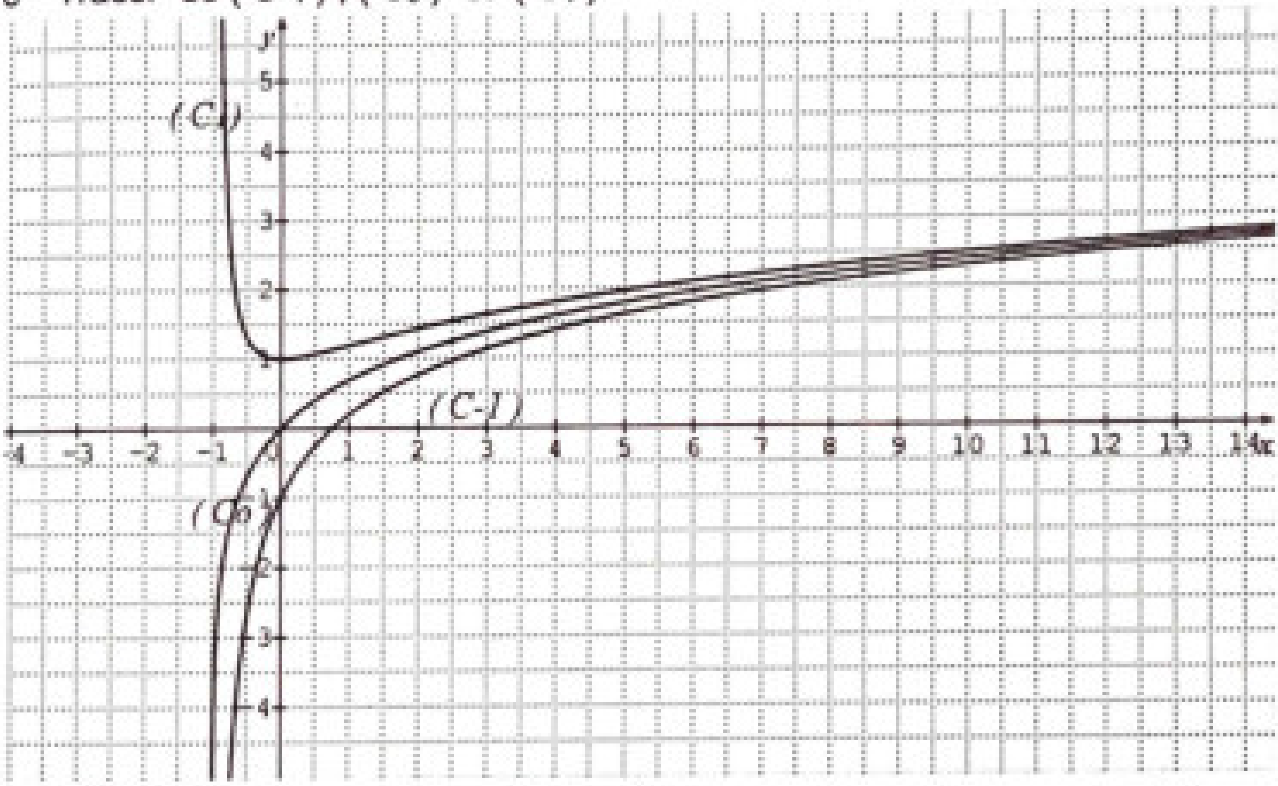
x	-1		$k-1$		$+\infty$
$f_k'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_k(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$1+\ln k$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f_{-1}(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f_0(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f_1(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x=-1$ est asymptote à (C_{-1}); (C_0) et (C_1)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_k(x)}{x} = 0$ donc les courbes (C_{-1}); (C_0) et (C_1) admettent une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$

f_{-1} et f_0 sont strictement croissantes sur $]-1;+\infty[$. f_1 est strictement décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$

c – Tracer de (C₋₁) , (C₀) et (C₁)



2) a- $Q_{n-2}(t)$ est la somme des $(n-1)$ premiers termes de la suite géométrique de raison $-t$ et de premier terme 1, avec $t \neq -1$

Donc $Q_{n-2}(t) = \dfrac{1-(-t)^{n-1}}{1+t} = \dfrac{1-(-1)^{n-1} \times t^{n-1}}{1+t}$.

b- On déduit de la question précédente que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, 1 - t + t^2 + ... + (-1)^{n-2} t^{n-2} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{n-1} \times t^{n-1}}{1+t}$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + ... + (-1)^{n-2} t^{n-2} + \frac{(-1)^{n-1} \times t^{n-1}}{1+t}.$$

c- Soit x un élément de [0;1].

D'après la question b-, on a :

$$\forall t\in[0;x], \frac{1}{1+t}=1-t+t^2+...+(-1)^{n-2}t^{n-2}+(-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{1+t}.$$

En intégrant chacun des deux membres, on a :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\left(1-t+t^2+...+(-1)^{n-2}t^{n-2}\right)dt+(-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt.$$

$$\left[\ln(1+t)\right]_0^x=\left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+...+(-1)^{n-2}\times\frac{t^{n-1}}{n-1}\right]_0^x+(-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n-2}\times\frac{x^{n-1}}{n-1}+(-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt.$$

$$f_0(x)=P_{n-1}(x)+(-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt.$$

3. $\begin{cases}\varphi(x)=\frac{f_0(x)}{x} & si\ x\in]0;1]\\ \varphi(0)=1\end{cases}$

a. Soit x un élément de [0 ;1]

On a : $\forall t\in[0,x]$

$$0\leq t$$
$$\Leftrightarrow 1\leq 1+t$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+t}\leq 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{t^{n-1}}{1+t}\leq t^{n-1};$$

On en déduit que : $\forall t\in[0,x], \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt\leq\int_0^x t^{n-1}dt.$

b- on a : $\int_0^x t^{n-1}dt=\left[\frac{t^n}{n}\right]_0^x=\frac{x^n}{n}$; or $0\leq x\leq 1$; donc $0\leq x^n\leq 1$ et par conséquent

$0\leq\frac{x^n}{n}\leq\frac{1}{n}$ on déduit que : $\forall x\in[0;1], \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt\leq\frac{1}{n}.$

c- D'après 2)c-, on a :

$$\forall x\in[0;1], f_0(x)=P_{n-1}(x)+(-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt.$$

$$f_0(x)-P_{n-1}(x)=(-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt$$

$$\left|f_0(x)-P_{n-1}(x)\right|=\left|\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt\right|=\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt \text{ car } \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt\geq 0$$

$$\left|f_0(x)-P_{n-1}(x)\right|\leq\frac{1}{n} \quad \text{d'après 3)b-} \quad -\frac{1}{n}\leq f_0(x)-P_{n-1}(x)\leq\frac{1}{n}$$

Pour x élément de]0 ;1], on a :

$$-\frac{1}{nx}\leq\frac{f_0(x)}{x}-\frac{P_{n-1}(x)}{x}\leq\frac{1}{nx};$$

$$-\frac{1}{nx}\leq\varphi(x)-\frac{P_{n-1}(x)}{x}\leq\frac{1}{nx}.$$

d- On a : $\forall x\in\left]0;1\right]$

$$-\frac{1}{nx}\leq\varphi(x)-(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\ldots\ldots+(-1)^{n-2}\times\frac{x^{n-2}}{n-1}\leq\frac{1}{nx}$$

en intégrant sur $\left[\frac{1}{n};1\right]$, on obtient :

$$-\int_{1/n}^1\frac{1}{nx}dx\leq\int_{1/n}^1\varphi(x)dx-\int_{1/n}^1\left(1-\frac{x}{2}+\ldots.+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-2}}{n-1}\right)dx\leq\frac{1}{n}\int_{1/n}^1\frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{1}{n}\left|\ln x\right|_{1/n}^1\leq\int_{1/n}^1\varphi(x)dx-\left|x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+\ldots+(-1)^{n-2}\times\frac{x^{n-1}}{(n-1)^2}\right|_{1/n}^1\leq\frac{1}{n}\left|\ln x\right|_{1/n}^1$$

$$\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}\leq\int_{1/n}^1\varphi(x)dx-\left(S_n(1)-S_n\left(\frac{1}{n}\right)\right)\leq-\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$$

$$\int_{1/n}^1\varphi(x)dx+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+S_n\left(\frac{1}{n}\right)\leq S_n(1) \quad \text{et}$$

$$S_n(1)\leq\int_{1/n}^1\varphi(x)dx-\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+S_n\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit que :

$$\int_{1/n}^1\varphi(x)dx+\frac{1}{n}ln\frac{1}{n}+S_n\left(\frac{1}{n}\right)\leq S_n(1)\leq\int_{1/n}^1\varphi(x)dx-\frac{1}{n}ln\frac{1}{n}+S_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

PARTIE C

1. On a : $\forall x\in\left]1;+\infty\right[\; g_1(x)+\frac{x^2}{1+x}=1-x+\frac{x^2}{1+x}$

$$=\frac{1-x^2+x^2}{1+x}$$
$$=\frac{1}{1+x}$$
$$=f_0'(x)$$

Supposons que $\forall t\in\mathbb{N}^*$, on a : $\forall x\in\left]1;+\infty\right[, g_n(x)+\frac{x^{2n}}{1+x}=\frac{1}{1+x}$

et démontrons que : $\forall x\in\left]1;+\infty\right[, g_{n+1}(x)+\frac{x^{2n+2}}{1+x}=\frac{1}{1+x}$.

On a : $\forall x\in\left]1;+\infty\right[, g_{n+1}(x)=g_n(x)+(-1)^{2n}x^{2n}+(-1)^{2n+1}x^{2n+1}$

$$g_{n+1}(x)+\frac{x^{2(n+1)}}{1+x}=g_n(x)+(-1)^{2n}x^{2n}+\frac{x^{2n+2}}{1+x}+(-1)^{2n+1}x^{2n+1}$$
$$=g_n(x)+x^{2n}-x^{2n+1}+\frac{x^{2n+2}}{1+x}$$

Or $g_n(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{x^{2n}}{1+x}$ d'après l'hypothèse de récurrence ; donc

$$g_{n+1}(x)+\frac{x^{2(n+1)}}{1+x}=\frac{1}{1+x}-\frac{x^{2n}}{1+x}+x^{2n}-x^{2n+1}+\frac{x^{2n+2}}{1+x}$$
$$=\frac{1}{1+x}+\frac{x^{2n}+(1+x)x^{2n}-(1+x)x^{2n+1}+x^{2n+2}}{1+x}$$
$$=\frac{1}{1+x}+\frac{-x^{2n}+x^{2n}+x^{2n+1}-x^{2n+1}-x^{2n+2}+x^{2n+2}}{1+x}$$

$$g_{n+1}(x)+\frac{x^{2(n+1)}}{1+x}=\frac{1}{1+x}+\frac{0}{1+x}=\frac{1}{1+x}=f_0'(x).$$

On en déduit que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\left]1;+\infty\right[, f_0'(x)=g_n(x)+\frac{x^{2n}}{1+x}$.

2. a. On a : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\left]0;1\right[$,

$0\leq x \Rightarrow 1\leq 1+x \Rightarrow \frac{1}{1+x}\leq 1$ d'où $\frac{x^{2n}}{(1+x)}\leq x^{2n}$ car $x^{2n}\geq 0$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0;1], \frac{x^{2n}}{1+x}\leq x^{2n}$;

b- On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0;1], 0\leq\frac{x^{2n}}{1+x}\leq x^{2n}$;

Donc : $0\leq\int_0^1\frac{x^{2n}}{x+1}\,dx\leq\int_0^1 x^{2n}\,dx$

$$0\leq\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx\leq\left[\frac{x^{2n+1}}{1+x}\right]_0^1$$

$$0\leq\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx\leq\frac{1}{2n+1}$$

3. D'après la question 1) on a :

a- $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in]1;+\infty[, f_0'(x)=g_n(x)+\frac{x^{2n}}{1+x};$

donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, \int_0^1 f_0'(x)\,dx=\int_0^1 g_n(x)\,dx+\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx$

$$f_0(1)-f_0(0)=\int_0^1\left|1-x+x^2+\ldots+(-1)^{2n-1}x^{2n-1}\right|dx+\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx$$

$$f_0(1)=\left|x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{2n-1}\frac{x^{2n}}{2n}\right|_0^1+\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx$$

$$f_0(1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\left(-\frac{1}{2n}\right)+\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx \Rightarrow f_0(1)=\mathrm{U}_n+\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx.$$

b. On a : $0\leq\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx\leq\frac{1}{2n+1}$ d'après 2)b- ; donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx = 0$

On déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{U}_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|f_0(1) - \int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx\right| = f_0(1) = \ln 2$

Car $\forall n\in\mathbb{N}^*, \mathrm{U}_n = f_0(1)-\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx$

EXERCICE 6

Partie A

1°) $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x(1-x^2)+1-2\ln x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0}(x(1-x^2)+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}-2\ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x(1-x^2)+1-2\ln x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-x^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-2\ln x = -\infty$

2°) Pour tout nombre réel x strictement positif, $g(x)=x(1-x^2)+1-2\ln x$

$g'(x)=(1-x^2)-2x^2-\frac{2}{x} = 1-3x^2-\frac{2}{x} \Rightarrow g'(x)=\frac{x(1-3x^2)-2}{x}$

On a : $x(1-3x^2)-2 = (x+1)(-3x^2+3x-2)$ donc $g'(x)=\frac{(x+1)(-3x^2+3x-2)}{x}$

3°) Démontrons que g est strictement décroissante .

$\forall x\in]0;+\infty[,\ x>0;\ x+1>0$; donc le signe de $g'(x)$ est celui de $-3x^2+3x-2$.

$\Delta=3^2-4\times(-3)\times(-2) = -13$. D'où $-3x^2+3x-2 < 0$.

On en déduit que : $g'(x) < 0$

Au total, la fonction g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

4°) La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$,

donc sur $]1;+\infty[$; Par suite , $g(]1;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty}g(x);g(1)[=]-\infty;1[$.

Comme $0\in]-\infty;1[$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1;+\infty[$.

5°) g est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

D' où $0 < x < \alpha \Rightarrow g(x) > g(\alpha)$ Donc $g(x) > 0$

Par ailleurs, $x > \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha)$ donc $g(x) < 0$

Au total, $\forall x \in]0 ; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha ; +\infty[, g(x) < 0$

Partie B

1°) Calculons la limite de f en 0

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}\left(\frac{\ln x}{x} - (x-1)^2\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\ln x - (x-1)^2\right) = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty, \ \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}(-(x-1)^2) = -1$$

Calculons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{\ln x}{x} - (x-1)^2\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2} - \frac{(x-1)^2}{x}\right) = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} -\frac{(x-1)^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$$

2°) Vérifions que $\forall x \in]0 ; +\infty[, f(x) = -x + 2 + \frac{\ln x - x}{x^2}$

$$\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\ln x}{x} - (x-1)^2\right) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{x(x-1)^2}{x}$$

$$= \frac{\ln x}{x^2} - \frac{x(x^2 - 2x + 1)}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{x^3 - 2x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}$$

$$= \frac{\ln x}{x^2} - x + 2 - \frac{x}{x^2} \text{ donc } f(x) = -x + 2 + \frac{\ln x - x}{x^2}$$

3°) On a $f(x) - (x-2) = -x + 2 + \frac{\ln x - x}{x^2} - (-x+2) = \frac{\ln x - x}{x^2}$; d'où

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (-x+2)) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x - x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2} - \frac{x}{x^2}\right) = 0$$

$$\text{car } \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Par conséquent, la droite (Δ) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

4°) Calculons $f'(x)$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{(x-1)^2}{x} \quad \text{donc} \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln x}{x^4} - \frac{2(x-1)x - (x-1)^2}{x^2}$$

$$= \frac{1 - 2\ln x}{x^3} - \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{1 - 2\ln x - x^3 + x^2}{x^3} = \frac{x(1-x^2) + 1 - 2\ln x}{x^3}$$

donc $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

5°) $\forall x \in]0\,;+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ car $x^3 > 0$.

D'après la question 5 Partie A), on en déduit que : $\begin{cases} \forall x \in]0\,;\alpha[,\ f'(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha\,;+\infty[,\ f'(x) < 0 \\ f'(\alpha) = 0 \end{cases}$

Tableau de variation de f :

x	0		α		+∞
f '(x)		+	0	-	
f(x)	-∞	↗	f(α)	↘	-∞

6°) Calculons f(1)

$f(1) = \frac{1}{1}\left(\frac{\ln 1}{1} - (1-1)^2\right) = 0$ donc 1 est une solution de l'équation $f(x) = 0$

Justifions que $f(\alpha) > 0$

f est strictement croissante sur $]0\,;\alpha[$; on a : $\alpha > 1 \Rightarrow f(\alpha) > f(1)$ puisque $f(1) = 0$ alors $f(\alpha) > 0$

7°) f est continue et strictement décroissante sur $]\alpha\,;+\infty[$, donc f réalise une bijection de $]\alpha\,;+\infty[$ sur $f(]\alpha\,;+\infty[) =]-\infty\,;f(\alpha)[$. Puisque $f(\alpha) > 0$, on a $0 \in]-\infty; f(\alpha)[$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]\alpha\,;+\infty[$.

Partie C

1°) Tableau de variation de h.

Dérivée de h

$\forall x \in]0;+\infty[$ par $h(x) = \ln x - x$

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

Signe de h' : $\forall x \in]0;1[$, $h'(x) > 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[$, $h'(x) < 0$

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	-1	$\searrow$	

2°) - 1 est le minimum de h sur $]0;+\infty[$; donc $\forall x \in]0;+\infty[$, $h(x) \leq -1$.

On en déduit que $h(x) < 0$.

3°) Position relative de (C) et (Δ)

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) - (-x+2) = \frac{h(x)}{x^2}$$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $x^2 > 0$ et $h(x) < 0$, donc $\dfrac{h(x)}{x^2} < 0$

Par conséquent, $f(x) - (-x+2) < 0$, donc la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) sur $]0;+\infty[$

4°) Voir courbe à la fin de l'exercice

Partie D

1°) La coube (C) est en dessous de (Δ) donc $A(\lambda) = \int_1^\lambda (y - f(t))dt$

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda (-t+2-f(t))dt = \int_1^\lambda \frac{t - \ln t}{t^2}dt$$

2°) Dérivée de la fonction k

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ k(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow k'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

3°) $A(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{t-\ln t}{t^2}dt = \int_1^\lambda \frac{t-1+1-\ln t}{t^2}dt = \int_1^\lambda \frac{t-1}{t^2}dt + \int_1^\lambda \frac{1-\ln t}{t^2}dt$

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt + \int_1^\lambda \frac{1-\ln t}{t^2}dt$$

En considérant la réponse de la question précédente , on a : $\int_1^\lambda \frac{1-\ln t}{t^2}dt = \left[\frac{\ln t}{t}\right]_1^\lambda$ donc

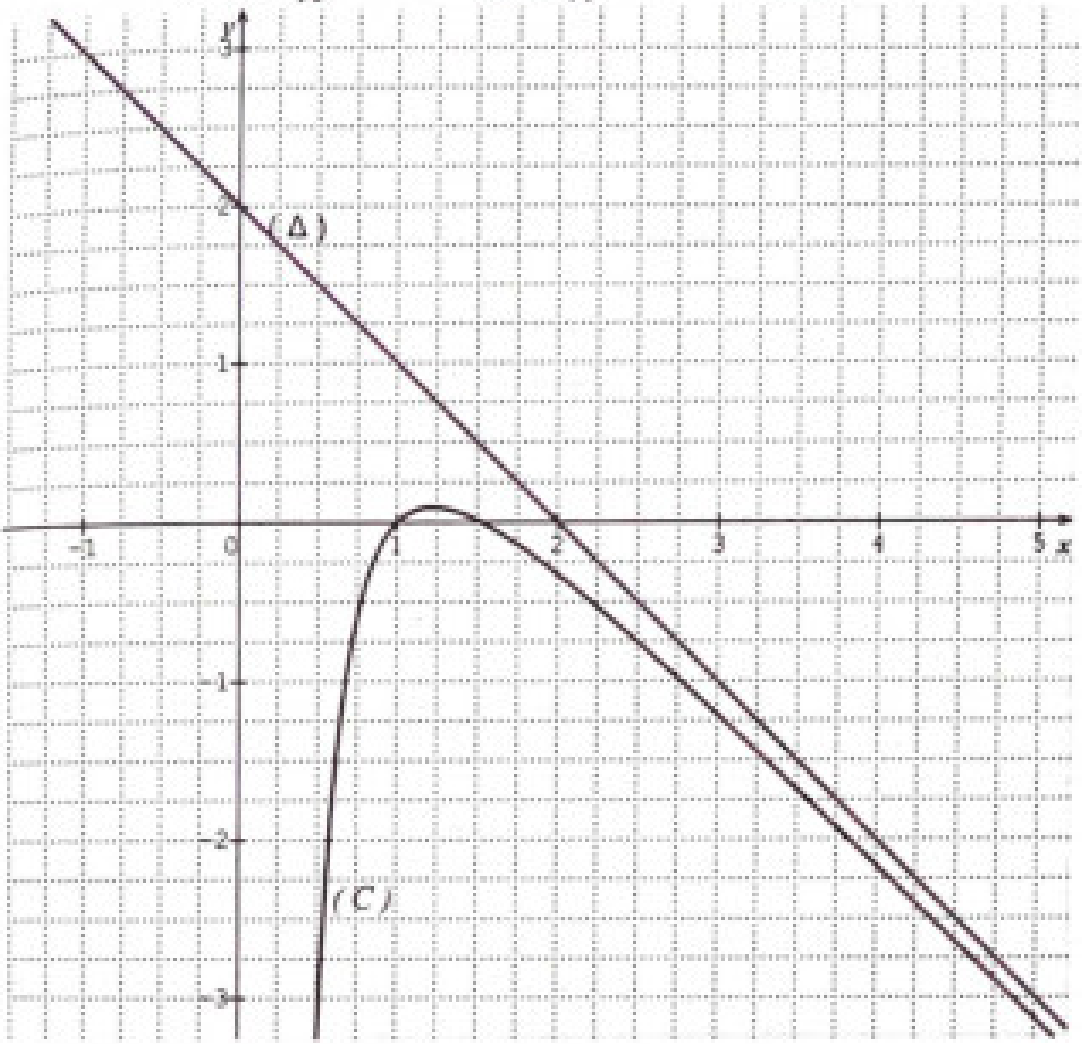
$$A(\lambda) = \left[\ln t + \frac{1}{t}\right]_1^\lambda + \left[\frac{\ln t}{t}\right]_1^\lambda = \ln\lambda + \frac{1}{\lambda} + \frac{\ln\lambda}{\lambda} - 1$$

$$A(\lambda) = \frac{\ln\lambda}{\lambda} + \ln\lambda + \frac{1}{\lambda} - 1$$

4°) On a :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty}\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda} + \ln\lambda + \frac{1}{\lambda} - 1\right) = +\infty$$

car $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{\ln \lambda}{\lambda} = 0$; $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} = 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} (\ln \lambda - 1) = +\infty$



CHAPITRE X : FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES

FICHE DE COURS

Définition

On appelle exponentielle népérienne, notée exp(x) ou e^x, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien ln x.

Propriété

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : e^x est définie ; $e^x > 0$; $\ln e^x = x$

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln y = x \Leftrightarrow y = e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln x} = x$

Propriétés algébriques

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, on a :

$e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{na} = \left(e^a\right)^n$; $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

NB : $e^0 = 1$; $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

Etude de fonction comportant exp

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, on a : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Propriété

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Dérivée de e^u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K.

La fonction e^u est dérivable sur K et on a : $\left(e^u\right)' = u' \times e^u$.

Primitive de $u' e^u$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K.

La fonction $u'e^u$ admet pour primitive sur K la fonction e^u.

Fonctions puissances

Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle fonction puissance d'exposant δ la fonction $x \longmapsto x^\delta$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $x^\delta = e^{\delta \ln x}$

Croissance comparée de $\ln x$, e^x , x^α

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1 : Bac C 2004 Session normale

On considère, pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n définie sur [0 ; +∞[par $f_n(x) = e^{-nx^2}$.

On désigne par (c_n) la représentation graphique de f_n dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 5 cm).

Dans tout le problème, les fonctions sont supposées dérivables sur leur ensemble de définition.

Partie A

1. Calculer $f_n(0)$ et la limite de f_n en +∞.
2. Calculer $f'_n(x)$ puis dresser le tableau de variation de f_n.
3. Encadrer $f_n(x)$ par deux entiers consécutifs.
4. Démontrer que la dérivée seconde f_n'' de f_n s'annule pour une unique valeur positive a_n égale à $\frac{1}{\sqrt{2n}}$.
5. Soit A_n le point de (c) d'abscisse a_n.

a. Démontrer qu'une équation de la tangente (T_n) à la courbe (c_n) au point d'abscisse a_n est : $y = -\sqrt{\frac{2n}{e}}x + \frac{2}{\sqrt{e}}$.

b. Démontrer que toutes les droites (T_n) passent par un point fixe dont on donnera les coordonnées.

6. Soit h la fonction définie sur [0 ; +∞[par : $h(x) = e^{-nx^2} + \sqrt{\frac{2n}{e}}x - \frac{2}{\sqrt{e}}$.

a. Calculer $h(a_n)$.

b. Utiliser la dérivée seconde de h pour trouver le signe de h'(x) et dresser le tableau de variation de h.

c. En déduire la position de (c_n) par rapport à (T_n).

7. Construire (c_1) et (c_3).

Partie B

Soit $(U_n)_{n\in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

1. Etudier le sens de variation de la suite (U_n).
2. Démontrer que la suite (U_n) est convergente.

Dans la suite de l'énoncé, on suppose n supérieur ou égal à 2.

3. Démontrer que : $\int_0^{\frac{1}{\ln(n)}} e^{-nx^2}dx \le \frac{1}{\ln(n)}$.

4. Démontrer que : $\forall x \in \left[\frac{1}{\ln(n)};1\right]$, $0 < e^{-nx^2} \leq e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}$.

5. Démontrer que : $0 < \int_{\frac{1}{\ln(n)}}^{1} e^{-nx^2}dx \leq \left(1-\frac{1}{\ln(n)}\right)e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}$.

6. Calculer la limite de la suite (U_n).

EXERCICE 2 : Bac C 2003 Session normale

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x)=(1-x)e^{-2x+4}$

Soit (Γ) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

L'unité graphique est 2 cm.

Le but du problème est la recherche d'une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x)=-1$.

I. Etude de la fonction f

1. a. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b. Calculer $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c. Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2. a. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

b. Démontrer que l'équation $f(x)=-1$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1\,;\frac{5}{4}[$.

c. Démontrer que : $\alpha=1+e^{2\alpha-4}$.

3. Soient A et B les points de (Γ) d'abscisses respectives 1 et 2.

a. Donner une équation de la tangente (D) à (Γ) en B.

b. Tracer (D) et (Γ) sur l'intervalle $[0,5\,;+\infty[$.

4. Soit F la fonction définie sur par $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

a. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $F(x)=\frac{2x-1}{4}e^{-2x+4}-\frac{e^2}{4}$.

b. Calculer en cm² l'aire de la partie du plan comprise entre le segment [AB] et (Γ).

II. Recherche d'une valeur approchée de α.

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $g(x)=e^{2x-4}+1$.

On note I l'intervalle $[1;\frac{5}{4}]$.

1. a. Calculer $g'(x)$ et préciser le sens de variation de g.

b. Démontrer que $g(I)\subset I$.

c. Démontrer que pour tout élément x de I, on a : $0\leq g'(x)\leq\frac{1}{2}$.

(On pourra étudier le sens de variation de g' sur I.)

d. En déduire, en utilisant l'inégalité des accroissements finis et le résultat de la question I.2.c), que pour tout élément x de I, on a: $|g(x)-\alpha|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$.

2. On considère la suite u définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=g(u_n) \end{cases}$

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est élément de I.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}$.

b. En déduire que la suite u est une suite convergente. Quelle est sa limite ?

4. Déterminer n pour que u_n soit une valeur approchée de α au centimètre près.

EXERCICE 3 : Bac C 2002 Session normale

Le plan est muni du repère (O, I, J) ; l'unité graphique est 4 cm.

Partie A

On considère la fonction numérique f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto\frac{1}{1+e^{-x}}$$

On note (Γ) la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J).

1. a. Justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

2. Justifier que (Γ) admet pour asymptotes la droite (OI) et la droite (δ) d'équation y = 1.

3. a. Démontrer que le point K $(0\,;\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de (Γ).

b. Démontrer que la droite (Δ) d'équation : $x-4y+2=0$ est tangente à (Γ) en K.

4. On se propose d'étudier la position de (Γ) par rapport à (Δ).

Soit h et φ les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x)=f(x)-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x$ et $\varphi(x)=4e^{-x}-(1+e^{-x})^2$.

a. Démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x)=\frac{\phi(x)}{4(1+e^{-x})^2}$.

b. Etudier le sens de variation de φ et dresser le tableau de variation de φ.

(On ne demande de calculer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$).

c. En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi(x)\leq 0$.

d. Démontrer que h est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

e. En vous aidant des questions précédentes, démontrer que :

$\forall x \in \left]-\infty ; 0\right[$, $h(x) \geq 0$,

$\forall x \in \left]0 ; +\infty\right[$, $h(x) \leq 0$.

f. En déduire la position relative de (Γ) et (Δ).

g. Tracer la courbe (Γ) et (Δ) dans le repère (O, I, J).

Partie B

On définit la fonction g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to \frac{1}{1+e^{x}}$$

(G) est la représentation graphique de g dans le repère (O,I,J) et (Δ') est la tangente à (G) en K.

1. Démontrer que (Γ) et (G) sont symétriques par rapport à la droite (OJ).
2. En déduire les constructions de (Δ') et de (G) dans le repère (O, I, J). (Utiliser une couleur différente de la précédente).
3. a. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})}$.

b.Calculer en cm², l'aire A de la partie du plan délimitée par la droite d'équation x = 1, la droite (O, J), la courbe (G) et la droite des abscisses.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g_n par :

$$g_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$

Soit (G_n) la courbe représentative de g_n dans le repère (O, I, J).

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq g_n(x) \leq e^{-nx}$.
2. On désigne par A_n, l'aire de la partie du plan délimitée par les droites (OI), (OJ), la droite d'équation x = 1 et la courbe (G_n).

a.Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}(1-e^{-n})$.

(Un pourra utiliser la question C1).

b.En déduire la limite de A_n lorsque n tend vers + ∞.

EXERCICE 4 : Bac C 2000 Session normale

Dans tout le problème le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) *(unité : 2cm).*

PARTIE A

1.On considère f la fonction numérique, de courbe représentative $\left(C_f\right)$, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x}$

a. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

b. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c. Tracer la courbe $\left(C_f\right)$ en prenant soin de tracer la tangente à l'origine.

2. On considère g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = |x|e^{|1-x|}$

a. Ecrire sans le symbole de la valeur absolue.

b. En déduire une méthode pour obtenir la courbe représentative (C_g) de g sur

] - ∞ ; 1] à partir de (C_f)

c. Etudier sur l'intervalle $[1;+\infty[$ le sens de variation de la fonction $h: x \mapsto xe^{1-x}$

d. Etudier la dérivabilité de g en 0 et en 1.

e. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de g.

f. Tracer (C_g) ainsi que les demi- tangentes à (C_g) aux points d'abscisses 0 et 1.

PARTIE B

Soit n un entier naturel non nul. On considère la famille de fonctions f_n définies par : $f_n(x) = xe^{n(1-x)}$

On note la courbe (C_n) représentative de f_n

1. Calculer la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$

2. Calculer la limite de $f_n(x)$ et de $\dfrac{f_n(x)}{x}$ quand x tend vers $-\infty$

   En donner une interprétation graphique .

3. On admet que, ∀n∈ ℕ* , la fonction f_n est dérivable sur ℝ

a. Déterminer la dérivée f'_n de f_n

b. Etudier le signe de $f'_n(x)$ et dresser le tableau de variation de f_n

c. Résoudre dans ℝ , l'équation : $f_n(x) = x$

d. En déduire que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que l'on précisera.

4. Etudier la position de (C_n) par rapport à (C_{n+1})

5. Tracer (C_2) dans le repère (O, I, J).

6. α étant un nombre réel, on pose : $I_n(\alpha) = \int_0^{\alpha} f_n(x)\,dx$

a. Calculer $I_n(\alpha)$ à l'aide d'une intégration par parties.

b. Calculer la limite de $I_n(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$

EXERCICE 5 : Bac E 2000 Session noramle

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) ; unité graphique 2 cm.

L'objet du problème est l'étude de la fonction f défini sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$. On note (C) sa courbe représentative dans le repère (O, I, J).

1. Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction dérivable sur [0 ; + ∞ [et définie par : $g(t) = 1 - t - e^{-2t}$

a. Etudier le sens de variation de g et déterminer la limite de g en $+\infty$

(On ne te demande pas de construire la courbe de g)

b. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha)=0$ et prouver que $\frac{\ln 2}{2} < \alpha < 1$

c. Etudier le signe de $g(t)$.

d. Etablir que $0,79 \leq \alpha \leq 0,8$

Sens de variation de f.

2. a. On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Démontrer que pour tout $x > 0$: $f'(x) = \left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{x}} g\left(\frac{1}{x}\right)$

b. Déduire de la question précédente le sens de variation de f.
Ainsi que limite de f en 0.

3. a. Démontrer que pour tout $x > 0$: $\ln[f(x)] = \frac{1}{x}(1 + x\ln x) + \frac{1}{2}\ln\left(1 - e^{-\frac{2}{x}}\right)$

b. En déduire la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$

4. a. Etablir pour tout élément t de $[0;1]$: $0 \leq e^t - 1 \leq te$

b. En déduire à l'aide d'une intégration, que pour tout u de $[0;1]$:

$$1 + u \leq e^u \leq 1 + u + \frac{e}{2}u^2$$

c. Utiliser cet encadrement pour démontrer que pour tout $x \geq 2$:
$0 \leq [f(x)]^2 - 2x \leq 2e$

d. Démontrer que pour tout $x \geq 2$: $f(x) \geq \sqrt{2x}$
En déduire la limite de f en $+\infty$

5. a. Dresser le tableau de variation de f
b. Tracer (C).

EXERCICE 6 : Bac E 1998 Session normale

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f_n(x) = x^n e^{-x}$.

On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité 3 cm).

PARTIE A

1. a. Calculer les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Etudier le sens de variation de la fonction f_1 et dresser son tableau de variation

c. Tracer la tangente à l'origine à (C_1), puis tracer (C_1).

2. a. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, étudier le sens de variation de f_n.

b. Calculer les limites de f_3 en en $+\infty$ et en $-\infty$ et dresser son tableau de variation.

c. Sur une autre figure, tracer la tangente à l'origine à (C_3), puis tracer (C_3).

3. On note S_n la symétrie orthogonal d'axe la droite d'équation : $x = n$ *et* (C'_n) l'image de (C_n) par S_n.

a. M étant le point du plan de coordonnées (x, y), calculer les coordonnées (x', y') de son image M' par S_n.

b. Démontrer que (C'_n) est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient : $y = f_n(2n - x)$.

c. Tracer (C'_3) dans le même repère que (C_3).

d. Pour $x \leq 2n$, on pose : $g_n(x) = f_n(2n - x)$

En interprétant géométriquement les intégrales, justifier l'égalité :

$\int_n^{2n} f_n(t)dt = \int_0^n g_n(t)dt$

4. Pour tout x élément de $]0; n]$, on pose $h_n(x) = \ln(g_n(x)) - \ln(f_n(x))$.

a. De l'étude des variations de h_n, déduire le signe de $h_n(x)$.

b. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; n]$, on a $f_n(x) \leq g_n(x)$

c. Déduire de ce qui précède, l'inégalité : $\int_0^n f_n(t)dt \leq \int_0^{2n} f_n(t)dt$.

PARTIE B

Pour tout réel positif x, on pose : $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

1. Démontrer que la fonction F_n est croissante sur $[0; +\infty[$.

2. A l'aide d'une intégration par parties :

a. Calculer $F_1(x)$

b. Démontrer que, pour tout réel positif x et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$.

3. En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout réel positif x et pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$F_n(x) = n!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)\right]$

4. a. Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) = n!$

b. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, on a $F_n(x) \leq n!$

PARTIE C

1. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $F_n(n)+\int_n^{2n} f_n(t)\,dt \le n!$

2. Déduire des résultats des parties A et B que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$0 \le F_n(n) \le \frac{n!}{2}$.

$\frac{1}{2}e^n \le 1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\dots+\frac{n^n}{n!} \le e^n$

EXERCICE 7 : Bac C 1998 Session de remplacement

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$

On désigne par (C) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 4 cm.

PARTIE A

1. a. calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x puis étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x. En déduire le sens de variation de la fonction f.

b. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et donner le tableau de variation de f.

2. Démontrer que le point A de coordonnées $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C).

3. Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point A.

4. Soit φ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $\varphi(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x-f(x)$

a. Démontrer que :

$\forall x\in\left]-\infty;0\right[,\ \varphi(x)>0,$

$\forall x\in\left]0;+\infty\right[,\ \varphi(x)<0.$

b. En déduire la position de (T) par rapport à (C).

c. Tracer (T) et (C).

PARTIE B

Pour tout réel non nul m, on considère les fonctions f_m dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies par :

$f_m(x)=f\left(\frac{x}{m}\right)$

(C_m) désigne la courbe représentative de f_m dans le repère (O, I, J).

Soit T_m la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{HM'}=m\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté orthogonal de M sur (OJ).

1. a. Donner la nature de T_{-1}.

b. Démontrer que $(\mathcal{C}_m)$ est l'image par T_m de $(\mathcal{C})$.

c. Tracer $(\mathcal{C}_{-1})$.

2. Soit λ un nombre réel. On pose $I_m(\lambda)=\int_{-\lambda}^{\lambda} f_m(x)\,dx$

calculer $I_m(\lambda)$ et en déduire que $I_m(\lambda)$ est indépendant de m.

PARTIE C

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $g(x)=x-f(x)$

1. a. Etudier le sens de variation de g.

b. Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α et que $\frac{1}{4}\leq \alpha \leq \frac{1}{2}$

2. a. Démontrer que : $\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right], f(x) \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$

b. Calculer $f'(x)$. En déduire que : $\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right], |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

c. En déduire que : $\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right], |f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{4}|x-\alpha|$

3. Soit (U_n) la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$U_0 = \frac{1}{4}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

a. Démontrer par la récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$

b. Démontrer par la récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$

c. Démontrer par la récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

4. a. Déterminer la limite de (U_n).

b. Trouver le plus petit entier naturel p tel que : $|U_p - \alpha| \leq 10^{-2}$.

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES

EXERCICE 8 : Bac E 1996 Session de remplacement

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$\begin{cases} pour\ \ n=0, & f_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ pour\ \ n\geq 1, & f_n(x)=\dfrac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

On désignera par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ ayant pour unité graphique 4 cm.

PARTIE A

1. Etudier la parité des fonctions f_n.
2. Déterminer les limites de f_0 aux bornes de son ensemble de définition.

Etudier le sens de variation de f_0 et construire (C_0).

3. Démontrer que toutes les courbes $(C_n)(n \in \mathbb{N})$ ont deux points communs.
4. Dans cette question, on suppose que n est non nul.

Pour tout réel x, calculer $f_n'(x)$ où f_n' est la fonction dérivée de f_n.

5. a. Déterminer les limites de f_1 et f_2 en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Etudier le sens de variation de chacune des fonctions f_1 et f_2 et dresser leurs tableaux de variation.

c. Démontrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à (C_1) en $+\infty$ et préciser la position de (C_1) par rapport à cette asymptote. Tracer (C1) et (C_2) dans le même repère que (C_0)

PARTIE B

Soit (I_n) la suite réelle définie par : $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$; $n \in \mathbb{N}$

1. Pour tout entier naturel n, démontrer que : $I_n \geq 0$
2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $\frac{1}{\sqrt{2}(2n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$
3. En déduire la limite de (I_n) quand n tend vers $+\infty$.
4. On partage l'intervalle [0 ; 1] en cinq segment de même longueur 0,2 par les points $a_0 = 0$; $a_1 = 0{,}2$; $a_2 = 0{,}4$; $a_3 = 0{,}6$; $a_4 = 0{,}8$; $a_5 = 1$;

a.Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel i tel que $0 \leq i \leq 4$.

$0{,}2 f_0(a_i + 1) \leq \int_{a_i}^{a_i+1} f_0(x)\,dx \leq 0{,}2 f_0(a_i)$

b. Pour tout entier naturel i tel que $1 \leq i \leq 5$, calculer $f_0(a_i)$ à 10^{-2} par défaut et par excès. En déduire un encadrement de I_0.

5. a. A l'aide d'une intégration par parties de I_n, démontrer que, pour n de $\mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)(I_n + I_{n+1})$,

b. Exprimer I_1 en fonction de I_0 et donner un encadrement de I_1.

EXERCICE 9 : Bac C 1998 Session normale

Ce problème comporte trois parties A, B et C. Les parties B et C sont indépendantes.

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'unité mesurant 1 cm.

PARTIE A

On considère la fonction f définie, sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x-4\sqrt{x}+4$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1. a. Démontrer que f est continue à droite en 0.

   b. Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0.

En déduire une interprétation géométrique.

2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

   c. Tracer (C).

3. a. Soit g la restriction de f à $[4;+\infty[$.

Démontrer que g est une bijection de $[4;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$ et que son application réciproque g^{-1} est définie sur $[0;+\infty[$ par : $g^{-1}(x)=x+4\sqrt{x}+4$

   b. Tracer la courbe représentative (C') de g^{-1}, dans le même repère que (C).

On appellera (H) la courbe $(C)\cup(C')$

4. Soit (E) la courbe d'équation : $x^2+y^2-2xy-8x-8y+16=0$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

a. Démontrer que pour tous réel x et y positifs, on a :

$x^2+y^2-2xy-8x-8y+16=0 \Leftrightarrow [y-f(x)][y-g^{-1}(x)]=0$

En déduire que (H) = (E).

b. Démontrer que un point $M(b;a)$ est un point de (E) si, et seulement si, le point $M'(b;a)$ est aussi un point de (E).

En déduire que la courbe (E) admet un axe de symétrie. Préciser cet axe.

5. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=4$

PARTIE B

1. Soit m un réel appartenant à $]-2;2[$

a. Soit les points A_m de coordonnées $(2+m;0)$ et B_m de coordonnées $(0;2-m)$.

Ecrire une équation de la droite (D_m) passant par les points A_m et B_m.

b. Soit (Δ_m) la droite d'équation : $x-y-2m=0$. Démontrer que le point d'intersection T_m des droites (D_m) et (Δ_m) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}(2+m)^2;\frac{1}{4}(2-m)^2\right)$.

c. Démontrer que (D_m) est tangente à (C) en T_m

2. a. Soit H_m le projeté orthogonal de T_m sur la droite (δ) d'équation $y = -x$

Démontrer que H_m a pour coordonnées $(m; -m)$.

b. Soit F le point de coordonnées $(2;2)$. Démontrer que le quadrilatère $A_mH_mB_mF$ est un carré pour tout m appartenant à $]-2;2[$

3. Pour $m=\frac{1}{2}$, placer le point T_m tracer les droites (D_m), (Δ_m) et le carré $A_mH_mB_mF$.

PARTIE C

1. Soit M un point du plan d'affixe z.

a. Démontrer que le point H d'affixe $\frac{z-i\bar{z}}{2}$ est le projeté orthogonal de M sur la droite (δ)

b. Démontrer que la distance de M à (δ) est égale à $\left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right|$

2. a. Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right| = |z-(2+2i)|$ est la courbe (E)

b. Interpréter géométriquement ce résultat.

En déduire la nature de la courbe (E).

En donner deux éléments caractéristiques.

EXERCICE 10 : Bac C 2005 Session Normale

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\frac{x}{1+xe^x}$.

On désigne par (c) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Partie I : Etude de f

1. Soit ψ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $\psi(x)=1+xe^x$.

a. Etudier les variations de ψ puis dresser son tableau de variation.

(On ne demande pas de calculer les limites).

b. Démontrer que pour tout nombre réel x, $\psi(x)>0$.

c. En déduire l'ensemble de définition de f.

2. Soit φ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $\varphi(x)=1-x^2e^x$.

a. Calculer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Etudier les variations de φ puis dresser son tableau de variation.

c. Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une solution unique α comprise entre 0,7 et 0,71.

d. En déduire : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;\alpha[, & \varphi(x)>0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, & \varphi(x)<0 \end{cases}$

3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\left(1+xe^x\right)^2}$.

b. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4. Soit (D) la droite d'équation y = x.

a. Démontrer que (D) est asymptote à (c) en $-\infty$.

b. Etudier la position de (c) par rapport à (D). ***(On pourra utiliser la question I.1.b).***

c. Démontrer que la droite (D) est tangente à (c) au point d'abscisse 0.

d. Tracer (D) et (c) dans la fenêtre définie par :

$X_{min} = -4,5$; $X_{max} = 4$

$Y_{min} = -5$; $Y_{max} = 0,4$.

On prendra : OI = 2 cm ; OJ = 5 cm et α = 0,7.

<u>Partie II : Etude d'une suite</u>

Pour tout entier n, on pose $I_n = \int_0^1 \dfrac{t^n}{1+te^t}\,dt$.

1. a. Sans calculer I_1, en donner une interprétation graphique.

   b. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   c. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. a. Démontrer que : $\forall t \in [0;1]$, $\dfrac{1}{1+e} \le \dfrac{1}{1+te^t} \le 1$.

(On pourra utiliser les variations de ψ sur [0 ; 1]).

   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{(1+e)(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{(n+1)}$.

   c. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1: Bac C 2004 Session normale

Partie A

1. Calculons $f_n(0)$ et la limite de f_n en $+\infty$.

• $f_n(0) = e^{-n0^2} = e^0 = 1$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-nx^2} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (-nx^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

2. Calculons $f_n'(x)$ puis dressons le tableau de variation de f_n.

Dérivée de $f_n(x)$: $f_n(x) = e^{-nx^2} \Rightarrow f_n'(x) = -2nxe^{-nx^2}$.

Signe de $f_n'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-2nx$		$+$	0	$-$	
e^{-nx^2}		$+$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	

Tableau de variation de f_n

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3. Encadrons $f_n(x)$ par deux entiers consécutifs.

D'après le tableau de variation, fn admet un maximum relatif qui est 1 et un minimum relatif 0, donc on a : $\mathbf{0 \leq f_n(x) \leq 1}$.

4. Démontrons que f_n'' s'annule pour une unique valeur positive a_n égale à $\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

$f_n'(x) = -2nxe^{-nx^2} \Rightarrow f_n''(x) = -2ne^{-nx^2} - 2nx(-2nxe^{-nx^2}) \Rightarrow f_n''(x) = 2ne^{-nx^2}(-1+2nx^2)$

$f_n''(x) = 0 \Rightarrow -1 + 2nx^2 = 0$ d'où $x^2 = \frac{1}{2n} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2n}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{1}{2n}}$ car $2ne^{-nx^2} > 0$

$-\sqrt{\frac{1}{2n}} \notin [0\,;+\infty[$ donc $x = \sqrt{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$

Conclusion : la dérivée seconde f_n'' de f_n s'annule pour $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Soit A_n le point de (c) d'abscisse a_n.

a) Equation de la tangente (T_n) à la courbe (c_n) au point d'abscisse a_n

Pour (T_n), on a : $y = f_n'(a_n)(x - a_n) + f_n(a_n)$

$$y = f_n'\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

$$\text{On a : } \begin{cases} f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = e^{-n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}} \\ f_n'(a_n) = f_n'\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = -2n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)e^{-n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2} = -2n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\text{Donc, on a : } \begin{cases} y = -2n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)e^{-\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + e^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{4n^2}{2ne}}x + \sqrt{\frac{4n^2}{4n^2e}} + e^{-\frac{1}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{2n}{e}}x + \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow y = -\sqrt{\frac{2n}{e}}x + \frac{2}{\sqrt{e}} \end{cases}$$

b) Coordonnées du point fixe.

(T_n) : $y_1 = -\sqrt{\frac{2n}{e}}x + \frac{2}{\sqrt{e}}$ $\qquad$ (T_{n+1}) : $y_2 = -\sqrt{\frac{2n+2}{e}}x + \frac{2}{\sqrt{e}}$

On a : $y_1 = y_2$ donc $x = 0$ et $y = \frac{2}{\sqrt{e}}$ donc $A\left(0 ; \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$ est le point fixe.

5. Soit h la fonction définie sur [0 ; +∞[par : $h(x) = e^{-nx^2} + \sqrt{\frac{2n}{e}}x - \frac{2}{\sqrt{e}}$.

a) Calculons $h(a_n)$.

$$h(a_n) = h\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = e^{-n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2} + \sqrt{\frac{2n}{e}} \times \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{2}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{2}{\sqrt{e}} \Rightarrow h(a_n) = 0$$

b)Trouvons le signe de h'(x) et dressons le tableau de variation de h.

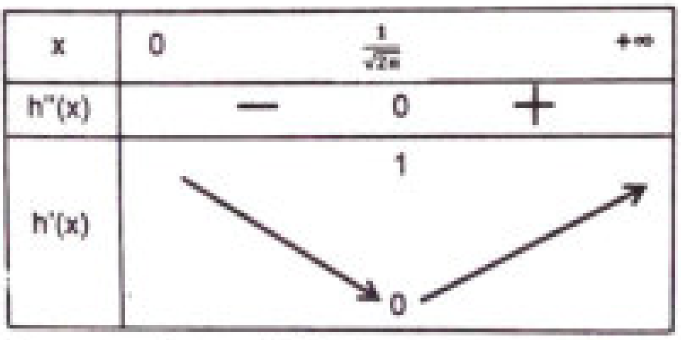
Signe de h'(x)

Dérivée h'(x) de h : $h'(x) = -2nxe^{-nx^2} + \sqrt{\frac{2n}{e}}$

Dérivée h''(x) de h : $h''(x) = -2ne^{-nx^2} - 2nx\left(-2nxe^{-nx^2}\right) = 2ne^{-nx^2}\left(-1 + 2nx^2\right)$

On remarque que : $h''(x) = f_n''(x)$

Tableau de variation de h'



Donc $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $h'(x) > 0$

Tableau de variation de h

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2n}}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$	$1-\frac{2}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c) Position relative de $(\mathscr{C}_n)$ par rapport à (T_n).

$$h(x)=e^{-nx^2}+\sqrt{\frac{2n}{e}}x-\frac{2}{\sqrt{e}}=h_n(x)-y$$

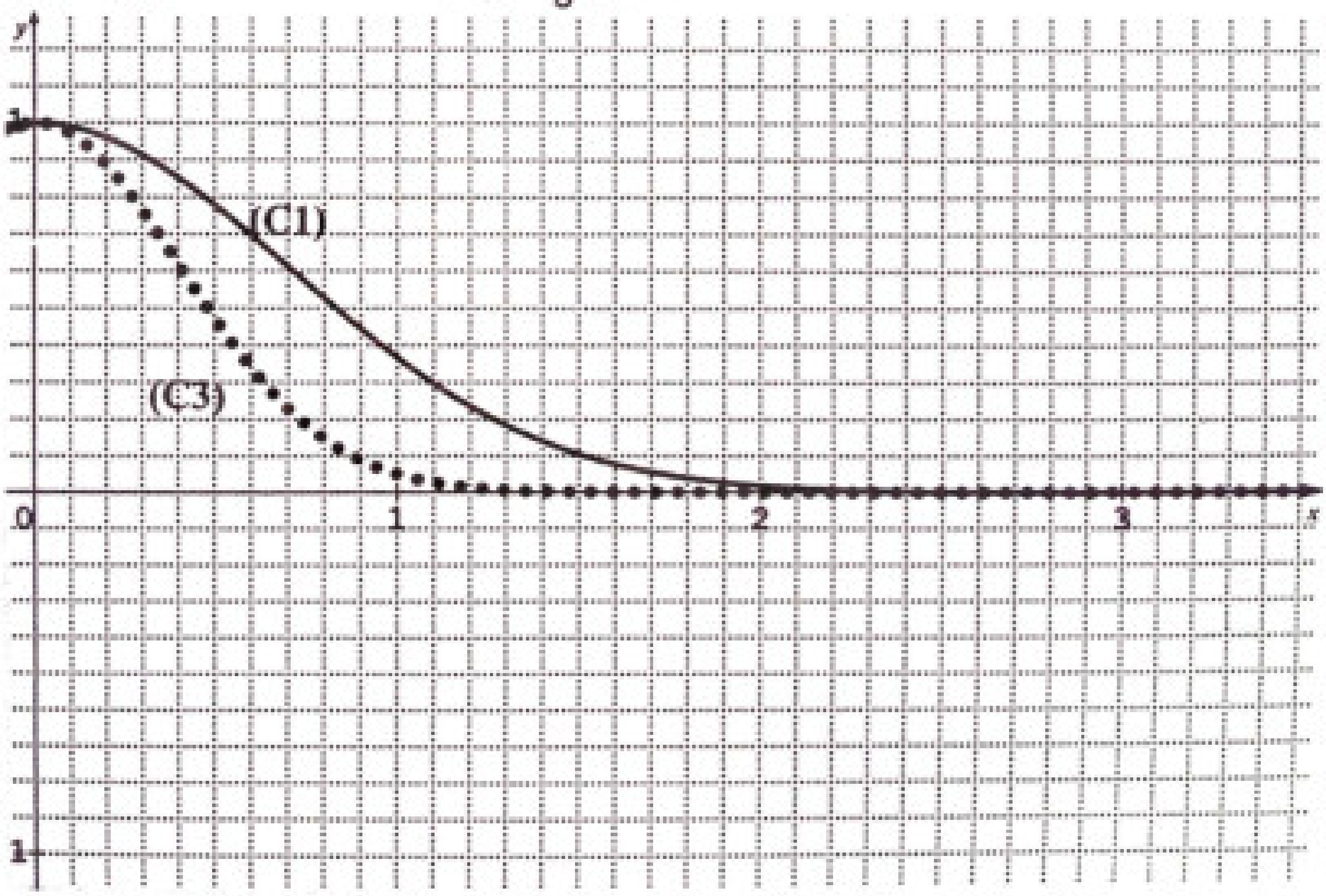
$\forall x \in \left[1-\frac{2}{\sqrt{e}};\frac{1}{\sqrt{2n}}\right[$, $h(x)<0$ d'où $f_n(x) < y$ donc $(\mathscr{C}_n)$ est en dessous de (T_n).

$\forall x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2n}};+\infty\right[$, $h(x)>0$ d'où $f_n(x) > y$ donc $(\mathscr{C}_n)$ est au dessus de (T_n).

Pour $x=\frac{1}{\sqrt{2n}}$, $h(x)=0$ d'où $f_n(x) = y$ donc $(\mathscr{C}_n)$ coupe (T_n) au point $B\left(\frac{1}{\sqrt{2n}};0\right)$

6. Construction de $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$.

$(\mathscr{C}_1)$: $f_1(x)=e^{-x^2}$. $(\mathscr{C}_3)$: $f_3(x)=e^{-3x^2}$



Partie B

1. Etudions le sens de variation de la suite (U_n).

On a : $U_{n+1} = \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx$, donc $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right) dx$

Or $f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^{-(n+1)x^2} - e^{-nx^2} = e^{-nx^2}\left(e^{-x^2} - 1\right)$

Signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$:

On a : $e^{-nx^2} > 0$ d'où $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est du signe de $e^{-x^2} - 1$

On a : $e^{-x^2} - 1 > 0 \Rightarrow e^{-x^2} > e^{\ln 1} \Rightarrow -x^2 > \ln 1 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow x < 0$

Donc $\forall x \in]-\infty ; 0[$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$

Au total, $U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow U_{n+1} < U_n$ donc la suite (U_n) est décroissante

2. Démontrons que la suite (U_n) est convergente.

On a : $0 \leq f_n(x) \leq 1$, d'où (U_n) est décroissante et minorée par 0 donc (U_n) est convergente.

3. Démontrons que : $\int_0^{\frac{1}{\ln(n)}} e^{-nx^2} dx \leq \frac{1}{\ln(n)}$.

On a : $0 \leq f_n(x) \leq 1$.

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{\ln(n)}} f_n(x)dx \leq \int_0^{\frac{1}{\ln(n)}} 1\,dx \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{\ln(n)}} e^{-nx^2} dx \leq [x]_0^{\frac{1}{\ln(n)}} \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{\ln(n)}} e^{-nx^2} dx \leq \frac{1}{\ln(n)}.$$

4. Démontrons que : $\forall x \in \left[\frac{1}{\ln(n)} ; 1\right], 0 < e^{-nx^2} \leq e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}$.

$$x \in \left[\frac{1}{\ln(n)} ; 1\right] \Rightarrow \frac{1}{\ln(n)} \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{(\ln(n))^2} \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{n}{(\ln(n))^2} \leq nx^2 \leq n$$

$$\Rightarrow -n \leq -nx^2 \leq -\frac{n}{(\ln(n))^2} \Rightarrow 0 \leq e^{-n} < e^{-nx^2} \leq e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}} \Rightarrow 0 < e^{-nx^2} \leq e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}$$

5. Démontrons que : $0 < \int_{\frac{1}{\ln(n)}}^1 e^{-nx^2} dx \leq \left(1 - \frac{1}{\ln(n)}\right) e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}$.

$$0 < e^{-nx^2} \leq e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}} \Rightarrow 0 < \int_{\frac{1}{\ln(n)}}^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_{\frac{1}{\ln(n)}}^1 e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}} dx \Rightarrow 0 < \int_{\frac{1}{\ln(n)}}^1 e^{-nx^2} dx \leq \left[e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}} x\right]_{\frac{1}{\ln(n)}}^1$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{\ln(n)}}^1 e^{-nx^2} dx \leq e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}\left(1 - \frac{1}{\ln(n)}\right) \Rightarrow 0 < \int_{\frac{1}{\ln(n)}}^1 e^{-nx^2} dx \leq \left(1 - \frac{1}{\ln(n)}\right) e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}.$$

6. Calculons la limite de la suite (U_n).

$$\lim_{x \to +\infty} U_n = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{\ln(n)}\right) e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}} = 0 \text{ car } \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}} = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

EXERCICE 2 : Bac C 2003 Session normale

I. Etude de la fonction f

1) a) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)e^{-2x+4}$

Posons $X = -2x + 4$ donc $x = -\frac{1}{2}X + 2$. Ainsi quand $x \to +\infty$ alors $X \to -\infty$.

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} (-1+\frac{1}{2}X)e^X = \lim\limits_{X\to-\infty} (-e^X + \frac{1}{2}Xe^X) \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \\ \text{Car } \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 \text{ et } \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (1-x)e^{-2x+4} = \lim\limits_{x\to-\infty} (1-x) \times \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x+4} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Car : $\begin{cases} \bullet \lim\limits_{x\to-\infty} (1-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty \\ \bullet \lim\limits_{x\to-\infty} (-2x+4) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-2x) = +\infty \\ \bullet \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty \end{cases}$

b) Calculons : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(1-x)e^{-2x+4}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-x}{x} \times \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x+4} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-x}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x+4} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

c) Interprétons graphiquement les résultats précédents.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ donc la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction (OJ).

2.a) Calculons f'(x) et dressons le tableau de variation de f.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1-x)e^{-2x+4}$

On a : $f'(x) = e^{-2x+4} - 2e^{-2x+4}(1-x) = e^{-2x+4}(-1-2+2x) = e^{-2x+4}(-3+2x)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f'(x) = e^{-2x+4}(-3+2x)}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-2x+4} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-3+2x)$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$-\frac{439}{323}$	↗	0

b) Démontrons que l'équation f(x) = - 1 admet une solution unique α dans $]1;\frac{5}{4}[$.

$\forall x \in]1;\frac{5}{4}[\subset]-\infty;\frac{3}{2}[$, f est continue et strictement décroissante ; elle réalise une bijection de $]1;\frac{5}{4}[$ dans $f\left(]1;\frac{5}{4}[\right) =]-\frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}};0[$.

Or $-1 \in]-\frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}};0[$ donc l'équation f(x) = - 1 admet une solution unique $\alpha \in]1;\frac{5}{4}[$.

c) Démontrons que : $\alpha = 1 + e^{2\alpha-4}$.

On a : $f(\alpha) = (1-\alpha)e^{-2\alpha+4}$

Or $f(\alpha) = -1$ d'où on a : $(1-\alpha)e^{-2\alpha+4} = -1$

$\Leftrightarrow e^{-2\alpha+4} - \alpha e^{-2\alpha+4} = -1 \Leftrightarrow -\alpha e^{-2\alpha+4} = -1 - e^{-2\alpha+4}$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{-1-e^{-2\alpha+4}}{-e^{-2\alpha+4}} = \frac{1}{e^{-2\alpha+4}} + \frac{e^{-2\alpha+4}}{e^{-2\alpha+4}} = e^{-(-2\alpha+4)} + 1 \Rightarrow \alpha = 1 + e^{2\alpha-4)}$$

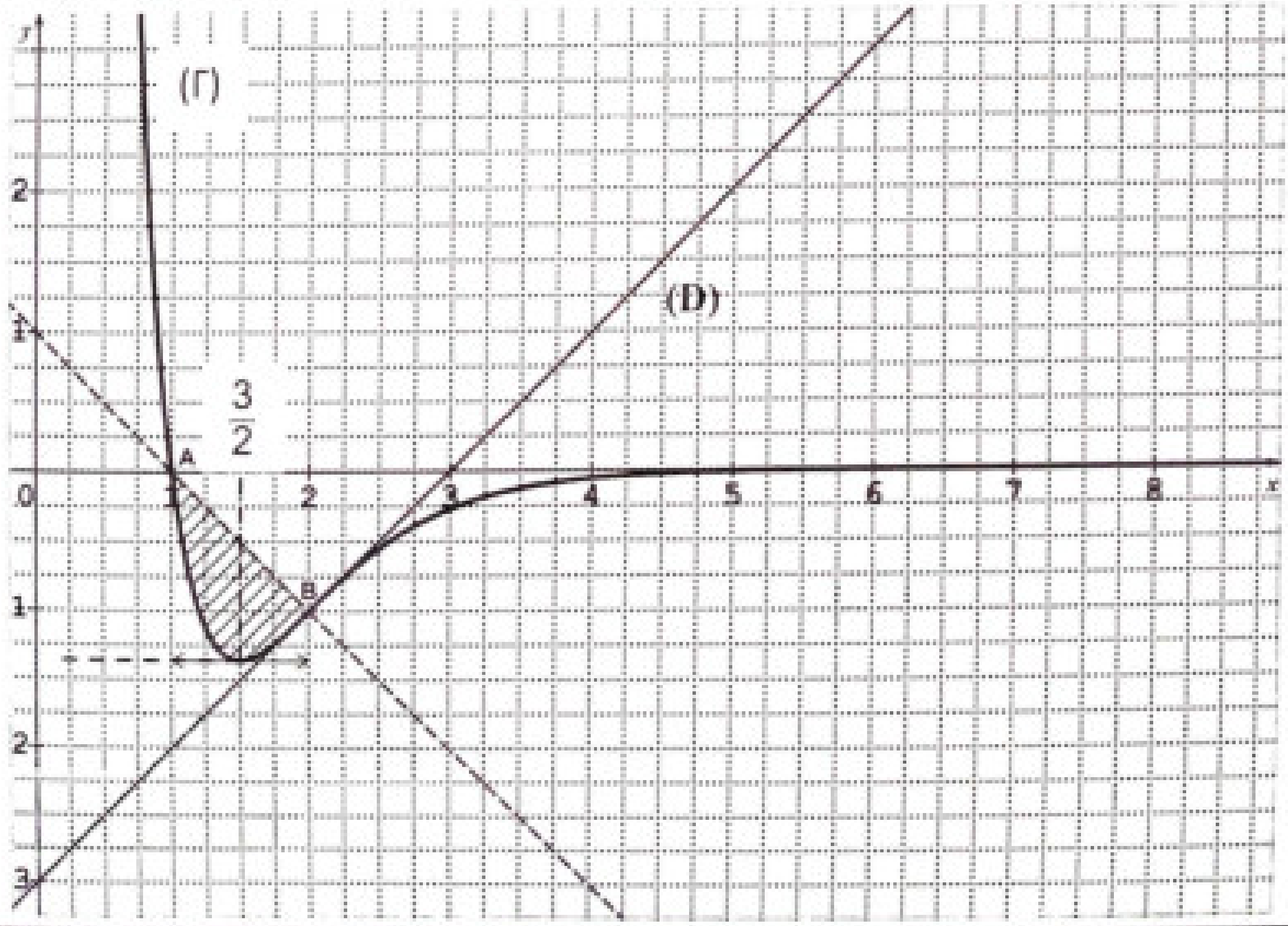
3) Soient A et B les points de (Γ) d'abscisses respectives 1 et 2.

a) Donnons une équation de la tangente (D) à (Γ) en B.

$y = f'(2)(x-2) + f(2)$ avec $f(2) = (1-2)e^{-2\times2+4} = -1$ et $f'(2) = (-3+2\times2)e^{-2\times2+4} = 1$

donc (D) : $y = x - 2 - 1 \Rightarrow y = x - 3$.

b) Traçons (D) et (Γ) sur l'intervalle [0,5 ; +∞ [.



4. Soit F la fonction définie sur R par.

a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrons que : $F(x)=\frac{2x-1}{4}e^{-2x+4}-\frac{e^2}{4}$.

$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x (1-t)e^{-2t+4}dt$

Posons : $U=1-t$ $\qquad V'=e^{-2t+4}$

$U'=-1$ $\qquad V=-\frac{1}{2}e^{-2t+4}$

$\Rightarrow F(x)=\left[-\frac{1}{2}(1-t)e^{-2t+4}\right]_1^x-\int_1^x\left(-1\times(-\frac{1}{2})e^{-2t+4}\right)dt=\left[\frac{1}{2}(1-t)e^{-2t+4}\right]_1^x-\int_1^x\left(\frac{1}{2}e^{-2t-4}\right)dt$

$F(x)=\left[-\frac{1}{2}(1-t)e^{-2t+4}\right]_1^x-\left[-\frac{1}{4}e^{-2t+4}\right]_1^x=\left[-\frac{1}{2}(1-t)e^{-2t+4}+\frac{1}{4}e^{-2t+4}\right]_1^x$

$F(x)=\left(-\frac{1}{2}(1-x)e^{-2x+4}+\frac{1}{4}e^{-2x+4}\right)-\left(-\frac{1}{2}(1-1)e^{-2+4}+\frac{1}{4}e^{-2+4}\right)$

$F(x)=-\frac{1}{2}(1-x)e^{-2x+4}+\frac{1}{4}e^{-2x+4}-\frac{1}{4}e^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)e^{-2x+4}-\frac{1}{4}e^2$

$F(x)=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\right)e^{-2x+4}-\frac{1}{4}e^2\Rightarrow F(x)=\frac{2x-1}{4}e^{-2x+4}-\frac{e^2}{4}$

b) Calculer en cm² l'aire de la partie du plan comprise entre le segment [AB] et (Γ).

Déterminons une équations de la droite (AB) avec $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\overline{AB}\Rightarrow\overline{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\end{pmatrix}$ et $\overline{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires

d'où $\det(\overline{AM},\overline{AB})=0\Rightarrow-(x-1)-1\times(y-0)=0\Rightarrow-x+1-y=0\Rightarrow y=-x+1$

donc $A=\int_1^2(y-f(x)dx)\times 4\text{ cm}^2=\int_1^2\left(-x+1-(1-x)e^{-2x+4}dx\right)\times 4\text{ cm}^2$

$\Rightarrow A=\int_1^2(-x+1)dx)-\int_1^2(1-x)e^{-2x+4}dx=\left[\frac{-x^2}{2}+x\right]_1^2-\left[\frac{2\times2-1}{4}e^{-2\times2+4}-\frac{e^2}{4}\right]$

$\Rightarrow A=\left(-(-2+2)-(-\frac{1}{2}+1)\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{e^2}{4}\right)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{e^2}{4}\right)\times 4\text{ cm}^2$

$\Rightarrow A=\left(-\frac{5}{4}+\frac{e^2}{4}\right)\times 4\text{ cm}^2\quad\Rightarrow\quad A=\left(-5+e^2\right)\times\text{cm}^2$

II. Recherche d'une valeur approchée de α.

1) a) Calculons g'(x) et précisons le sens de variation de g.

$g(x)=e^{2x-4}+1\quad\Rightarrow\quad g'(x)=2e^{2x-4}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)\geq 0$ donc g est strictement croissante.

b) Démontrons que $g(I)\subset I$.

On a $I=[1;\frac{5}{4}]$ $x\in[1;\frac{5}{4}]\Rightarrow 1\leq x\leq\frac{5}{4}\Rightarrow 2\leq 2x\leq\frac{5}{2}\Rightarrow -2\leq 2x-4\leq-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow e^{-2} \leq e^{2x-4} \leq e^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow 1+e^{-2} \leq e^{2x-4}+1 \leq e^{-\frac{3}{2}}+1 \leq \frac{5}{4} \Rightarrow 1 \leq g(x) \leq \frac{5}{4}$

Donc $g(I) \subset [1;\frac{5}{4}] \Rightarrow g(I) \subset I$

c) Démontrons que pour tout élément x de I, on a : $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$.

$g'(x) = 2e^{2x-4}$ or $x \in I \Rightarrow x \in [1;\frac{5}{4}] \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{5}{4} \Rightarrow 2 \leq 2x \leq \frac{5}{2}$

$\Rightarrow -2 \leq 2x-4 \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow e^{-2} \leq e^{2x-4} \leq e^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow 2e^{-2} \leq 2e^{2x-4} \leq 2e^{-\frac{3}{2}}$

Or $0 \leq 2e^{-2} \leq 2e^{2x-4} \leq 2e^{-\frac{3}{2}} \leq \frac{1}{2}$ donc $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$.

d) Déduisons que pour tout élément x de I, on : $| g(x) - \alpha | \leq \frac{1}{2} | x - \alpha |$.

$\forall x \in [1;\frac{5}{4}]$, $g'(x) \leq \frac{1}{2}$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[\alpha; x]$, on a :

$| g(x) - g(\alpha) | \leq \frac{1}{2} | x - \alpha |$. Or $g(\alpha) = e^{2\alpha-4}+1 = \alpha$ donc $| g(x) - \alpha | \leq \frac{1}{2} | x - \alpha |$

2) a) Démontons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est élément de I.

On a : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall x \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{2u_n-4}+1 \end{cases}$

Vérifions que P_0 est vraie : on a $u_0 = 1$ d'où $u_0 \in [1;\frac{5}{4}]$ donc P_0 est vraie.

Supposons que P_n est vraie c'est-à-dire $U_0 \in I$ et démontrons que P_{n+1} est vraie.

On a : $\Rightarrow 1 \leq U_n \leq \frac{5}{4} \Rightarrow 2 \leq 2U_n \leq \frac{5}{2} \Rightarrow -2 \leq 2U_n - 4 \leq -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow e^{-2} \leq e^{2U_n-4} \leq e^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow 1+e^{-2} \leq e^{2U_n-4}+1 \leq e^{-\frac{3}{2}}+1 \Rightarrow 1+e^{-2} \leq U_{n+1} \leq e^{-\frac{3}{2}}+1$

$\Rightarrow 1 \leq 1+e^{-2} \leq U_{n+1} \leq e^{-\frac{3}{2}}+1 < \frac{5}{4}$. Donc $U_{n+1} \in [1;\frac{5}{4}]$.

En conclusion, pour tout entier naturel n, U_n est élément de I.

b) Démontrons que pour tout entier naturel n, $| U_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{2} | U_n - \alpha |$.

On a : $| g(x) - \alpha | \leq \frac{1}{2} | x - \alpha |$ donc $| g(U_n) - \alpha | \leq \frac{1}{2} | U_n - \alpha |$ si $x = U_n$.

Or $g(U_n) = U_{n+1}$ donc $| U_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{2} | U_n - \alpha |$.

3) a) Démontrons que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

Considérons que $| U_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{2} | U_n - \alpha |$.

Donc on a : $| U_1 - \alpha | \leq \frac{1}{2} | U_0 - \alpha |$.

$| U_2 - \alpha | \leq \frac{1}{2} | U_1 - \alpha |$.

$$| U_3 - \alpha | \leq \frac{1}{2} | U_2 - \alpha |.$$

$$| U_n - \alpha | \leq \frac{1}{2} | U_{n-1} - \alpha |.$$

La multiplication membre à membre donne : $| U_n - \alpha | \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n | U_0 - \alpha |$.

Or $| U_0 - \alpha | \leq 1$ donc $| U_n - \alpha | \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ d'où $| U_n - \alpha | \leq \frac{1}{2^n}$.

b) Déduisons que la suite u est une suite convergente et calculons sa limite.

On a : $\lim_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

En conclusion, la suite converge vers α.

4) Déterminons n pour que u_n soit une valeur approchée de α au centimètre près.

On a : $| U_n - \alpha | \leq 10^{-2}$ et $| U_n - \alpha | \leq \frac{1}{2^n}$ donc $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-2}$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \ln(10^{-2}) \Rightarrow n\ln\frac{1}{2} \leq -2\ln10 \Rightarrow -n\ln2 \leq -2\ln10 \Rightarrow n \geq \frac{2\ln10}{\ln2} \Rightarrow n \geq 6{,}64$

Par conséquent : $n = 7$.

EXERCICE 3 : Bac C 2002 Session normale

Partie A

1. a) Justifions que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{(1+e^{-x})'}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

On a : $e^{-x} > 0$ et $(1+e^{-x})^2 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

Au total, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1 \text{ car } \lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x}) = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 0 \text{ ; car } \lim_{x\to-\infty}(1+e^{-x}) = +\infty$$

c) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	0 ↗	1

2. Justifions que (Γ) admet pour asymptotes la droite (OI) et la droite (δ) d'équation y=1.

On a : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation y = 0 c'est-à-dire (OI) est asymptote horizontale à (Γ) en $-\infty$.

On a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation y = 1 c'est-à-dire (δ) est asymptote horizontale à (Γ) en $+\infty$.

3. a) Démontrons que le point K $(0\ ;\ \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de (Γ).

Calculons $\frac{f(0-x)+f(0+x)}{2}$

On a : $f(0-x) = \frac{1}{1+e^{x}}$ et $f(0+x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

$$\frac{f(0-x)+f(0+x)}{2} = \frac{\frac{1}{1+e^{x}} + \frac{1}{1+e^{-x}}}{2} = \frac{1+e^{-x}+1+e^{x}}{2(1+e^{x})(1+e^{-x})} = \frac{2+e^{-x}+e^{x}}{2(1+e^{-x}+e^{x}+e^{0})}$$

$$\frac{f(0-x)+f(0+x)}{2} = \frac{2+e^{-x}+e^{x}}{2(1+e^{-x}+e^{x}+1)} = \frac{2+e^{-x}+e^{x}}{2(2+e^{-x}+e^{x})} = \frac{1}{2} \times \frac{2+e^{-x}+e^{x}}{2+e^{-x}+e^{x}} = \frac{1}{2}$$

$\frac{f(0-x)+f(0+x)}{2} = \frac{1}{2}$ donc le point $K(0\ ;\ \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de (Γ).

b) Démontrons que la droite (Δ) d'équation : x – 4y + 2 = 0 est tangente à (Γ) en K.

On a : $(\Delta) :\ y = f'(0)(x-0) + f(0)$

Or : $f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{e^{0}}{(1+e^{0})^2} = \frac{1}{4}$ et $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{1+e^{0}} = \frac{1}{2}$

Donc $y = \frac{1}{4}(x-0) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4y = x+2 \Leftrightarrow x - 4y + 2 = 0.$

Conclusion : la droite (Δ) d'équation : x – 4y + 2 = 0 est tangente à (Γ) en K.

4. On se propose d'étudier la position de (Γ) par rapport à (Δ).

a) Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \frac{\varphi(x)}{4(1+e^{-x})^2}$.

$h(x) = f(x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x \Rightarrow h'(x) = f'(x) - \frac{1}{4}$

$\Rightarrow h'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} - \frac{1}{4} = \frac{4e^{-x}-(1+e^{-x})^2}{4(1+e^{-x})^2} = \frac{\varphi(x)}{4(1+e^{-x})^2}$ où $\varphi(x) = 4e^{-x} - (1+e^{-x})^2$.

b) Etudions le sens de variation de φ et dressons le tableau de variation de φ.

- Sens de variation de φ(x)

$\varphi(x) = 4e^{-x} - (1+e^{-x})^2 \Rightarrow \varphi'(x) = -4e^{-x} - 2(-e^{-x})(1+e^{-x})$

$\Rightarrow \varphi'(x) = -4e^{-x} + 2e^{-x}(1+e^{-x}) = 2e^{-x}(-2+1+e^{-x}) = 2e^{-x}(-1+e^{-x})$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$2e^{-x}$		$+$	0	$+$	
$-1+e^{-x}$		$+$		$-$	
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	

$\forall x \in]-\infty\,;0[$, $\varphi'(x) > 0$ donc φ est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $\varphi'(x) < 0$ donc φ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$

Tableau de variation de φ

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \leq 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, φ admet un maximum qui est 0 ; donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \leq 0$

d) Démontrons que h est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$h'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{4(1+e^{-x})^2}$ or $\varphi(x) \leq 0$ et $4(1+e^{-x})^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) < 0$.

Donc h est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

e) Démontrons que : $\forall x \in]-\infty\,;0]$, $h(x) \geq 0$ et $\forall x \in [0;+\infty[$, $h(x) \leq 0$.

Dressons le tableau de variation de h.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}x\right) = +\infty$

  car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}x\right) = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}x\right) = -\infty$

  car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}x\right) = -\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

On a : $\forall x \in]-\infty; 0]$, h est strictement décroissante ;

et $h(]-\infty ; 0]) = [0 ; +\infty[$ donc $h(x) \geq 0$

$\forall x \in [0; +\infty[$, h est strictement décroissante ;

et $h([0 ; +\infty[) =]-\infty ; 0]$,donc $h(x) \leq 0$

En conclusion : $\forall x \in]-\infty ; 0]$, $h(x) \geq 0$ et $\forall x \in [0; +\infty[$, $h(x) \leq 0$

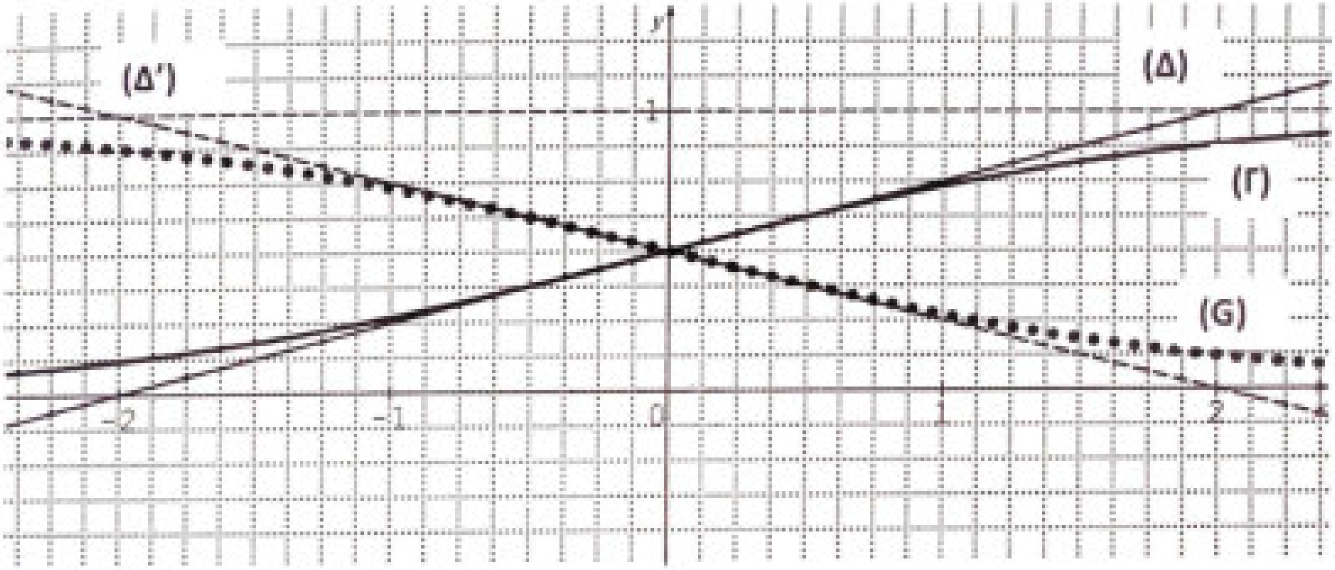
Déduisons la position relative de (Γ) et (Δ).

$\forall x \in]-\infty ; 0[$, $h(x) > 0 \Rightarrow f(x) - y > 0$ donc (Γ) est au dessus de (Δ).

$\forall x \in]0; +\infty[$, $h(x) < 0 \Rightarrow f(x) - y < 0$ donc (Γ) est en dessus de (Δ).

Au point O(0,0), $h(x) = 0 \Rightarrow f(x) - y = 0$ donc (Γ) coïncide avec (Δ).

Traçons la courbe (Γ) et (Δ) dans le repère (O, I, J).



Partie B

1. Démontrons que (Γ) et (G) sont symétriques par rapport à la droite (OJ).

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall -x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{1}{1+e^{x}} = g(x)$

$f(-x) = g(x)$ donc (Γ) et (G) sont symétriques par rapport à la droite (OJ)

2. Déduisons les constructions de (Δ') et de (G) dans le repère (O, I, J).

$y = g'(0)(x-0) + g(0)$

Or $g(0) = \dfrac{1}{1+e^{0}} = \dfrac{1}{2}$ et $g'(x) = \dfrac{-e^{x}}{(1+e^{x})^2} \Rightarrow g'(0) = \dfrac{-e^{0}}{(1+e^{0})^2} = -\dfrac{1}{4}$

Donc : $y = -\dfrac{1}{4}(x-0) + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$ (Pour la construction, voir figure ci-dessus).

3.a) Vérifions que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})}$.

$$g(x) = \frac{1}{1+e^{x}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{e^{-x}}} = \frac{1}{\dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

b) Calculons en cm², l'aire $\mathscr{A}$.

$$\mathscr{A} = \int_0^1 g(x)dx \times 16\ cm^2 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx \times 16\ cm^2 = \left[-\ln\left|1+e^{-x}\right|\right]_0^1 \times 16\ cm^2$$

$$\mathscr{A} = \left(\left[-\ln\left|1+e^{-1}\right|\right] + \ln 2\right) \times 16\ cm^2 = 16{,}10\ cm^2$$

Partie C

1. Démontrons que : $\forall\ x \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le g_n(x) \le e^{-nx}$.

$$g_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}} = \frac{1}{e^{nx} + e^{nx}\ e^{-x}} = \frac{1}{e^{nx}(1+e^{-x})} = \frac{f(x)}{e^{nx}} = f(x).e^{-nx}$$

Or $0 \le f(x) \le 1 \Rightarrow 0 \le f(x).e^{-nx} \le e^{-nx} \Rightarrow 0 \le g_n(x) \le e^{-nx}$

2. a) Démontrons que : $\forall\ x \in \mathbb{N}^*, 0 \le A_n \le \frac{1}{n}(1-e^{-n})$

$$A_n = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 e^{-nx}dx = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = -\frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n}e^0 = \frac{1}{n}(1-e^{-n})$$

$\Rightarrow A_n = \frac{1}{n}(1-e^{-n})$ donc $\forall\ x \in \mathbb{N}^*, 0 \le A_n \le \frac{1}{n}(1-e^{-n})$

b) En déduire la limite de A_n lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(1 - e^{-n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{ne^n}$$

$\lim_{n\to+\infty} A_n = 0$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} ne^n = +\infty$

EXERCICE 4 : Bac C 2000 Session normale

PARTIE A

1) a- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \times e = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\,e^{1-x} = -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$

b- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$.

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $1-x$ car $e^{1-x} > 0$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

c- Tracé de (C_f) voir figure.

2) a- $g(x)=|x|e^{|1-x|}$

En utilisant le tableau suivant on a :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	0 +	+	
|x|	- x	x	x	
1 - x	+	+ 0	-	
|1 – x|	1 - x	1 - x	x - 1	
g(x)	- x e^{1-x}	x e^{1-x}	x e^{x-1}	

Si $x\in\left]-\infty;0\right]$ alors $g(x)=-xe^{1-x}$

Si $x\in\left[0;1\right]$ alors $g(x)=xe^{1-x}$

Si $x\in\left[1;+\infty\right[$ alors $g(x)=xe^{x-1}$

b- Sur l'intervalle $\left[0;1\right],\left(C_g\right)=\left(C_f\right)$ car $g(x)=f(x)$.

Sur l'intervalle $\left]-\infty;0\right]$, $\left(C_g\right)$ est symétrique de $\left(C_f\right)$ par rapport à l'axe des abscisses car $g(x)=-f(x)$.

c- $\forall x\in\left[1,+\infty\right[,h'(x)=(1+x)e^{x-1}$.

Alors $\forall x\in[1;+\infty[, h'(x)>0$,donc h est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

d-

- $g(0)=0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}-e^{1-x}=-e,$$

d'où g est dérivable à gauche en 0 et on a : $g_g'(0)=-e$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}e^{1-x}=e$$

d'où g est dérivable à droite en 0 on a $g_d'(0)=e$ donc g n'est pas dérivable en 0 car $g_g'(0)\neq g_d'(0)$

- $g(1)=1$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{xe^{1-x}-1}{x-1}$$

Posons $u = x-1$, alors on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ >}} \dfrac{(u+1)e^u - 1}{u}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ >}} \left(e^u + \dfrac{e^u - 1}{u} \right) = 2$ car $\lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ >}} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$

g est donc dérivable à droite en 1 et $g'_d(1) = 2$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{xe^{1-x} - 1}{x-1}$

Posons $u = 1-x$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ >}} \dfrac{(1-u)e^u - 1}{-u} = \lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ >}} \left(e^u - \dfrac{e^u - 1}{u} \right) = 0$

Car $\lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ >}} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ >}} e^u = e^0 = 1$

g est donc dérivable à gauche en 1 et $g'_g(1) = 0$

En conclusion : $g'_g(1) \neq g'_d(1)$ donc g n'est pas dérivable en 1.

e- D'après les questions 2)b et 2)c :

Sur $]-\infty ; 0]$, $g = -f$ donc g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

Sur $[0;1]$, $g = f$ donc g est strictement croissante sur $[0;1]$

Sur $[1;+\infty[$, $g = h$ donc g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

f- Equation des demi- tangentes (voir figure)

Au point O(0, 0), on a : $y = g'_g(0)(x-0) + g(0) = -ex$ et

$y = g'_d(0)(x-0) + g(0) = ex$

Au point A(1, 1), on a : $y = g'_g(1)(x-1) + g(1) = 1$ et

$y = g'_d(1)(x-1) + g(1) = 2x - 1$

PARTIE B

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^n}{n} nxe^{-nx} = 0$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} nxe^{-nx} = \lim\limits_{u\to+\infty} ue^{-u} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} n(1-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{n(1-x)} = +\infty$

Donc (C_n) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$

3) a- $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = e^{n(1-x)} - nxe^{n(1-x)} = (1-nx)e^{n(1-x)}$

b- Le signe de $f_n'(x)$ dépend du signe de $1-nx$ car $\forall x \in \mathbb{R}, e^{n(1-x)} > 0$

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x = \frac{1}{n}$,

$f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow \forall x < \frac{1}{n}$,

$f_n'(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x > \frac{1}{n}$,

d'où le tableau de variation de f_n

x	$-\infty$		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		+	0	-	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{n}e^{n-1}$	$\searrow$	0

c- $f_n(x) = x \Leftrightarrow x(1-e^{n(1-x)}) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{n(1-x)} = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $n(1-x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

$S = \{0, 1\}$

d- D'après 3)c-, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$ donc les courbes (C_n) passent par les points O(0,0) et A(1,1)

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=xe^{n(1-x)}\left(e^{1-x}-1\right)$$

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad e^{1-x}-1=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad e^{1-x}=1$$
$$\Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad 1-x=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad x=1$$

$$e^{1-x}-1>0 \Leftrightarrow e^{1-x}>1$$
$$\Leftrightarrow 1-x>0$$
$$\Leftrightarrow x<1$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		-	0	+		+	
$e^{1-x}-1$		+		+	0	-	
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$		-	0	+	0	-	

Sur $\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$, $\left(C_{n+1}\right)$ est en dessous de $\left(C_n\right)$.

Sur $\left]0;1\right[$, $\left(C_{n+1}\right)$ est au dessus de $\left(C_n\right)$.

$\left(C_{n+1}\right)$ et $\left(C_n\right)$ se coupent en O(0,0) et A(1,1).

5) Tracé de (C_2) : voir fin

6) a- $I_n(\alpha)=\int_0^{\alpha} f_n(x)dx=\int_0^{\alpha} xe^{n(1-x)}dx$

Posons $u(x)=x$ et $v'(x)=e^{n(1-x)}$

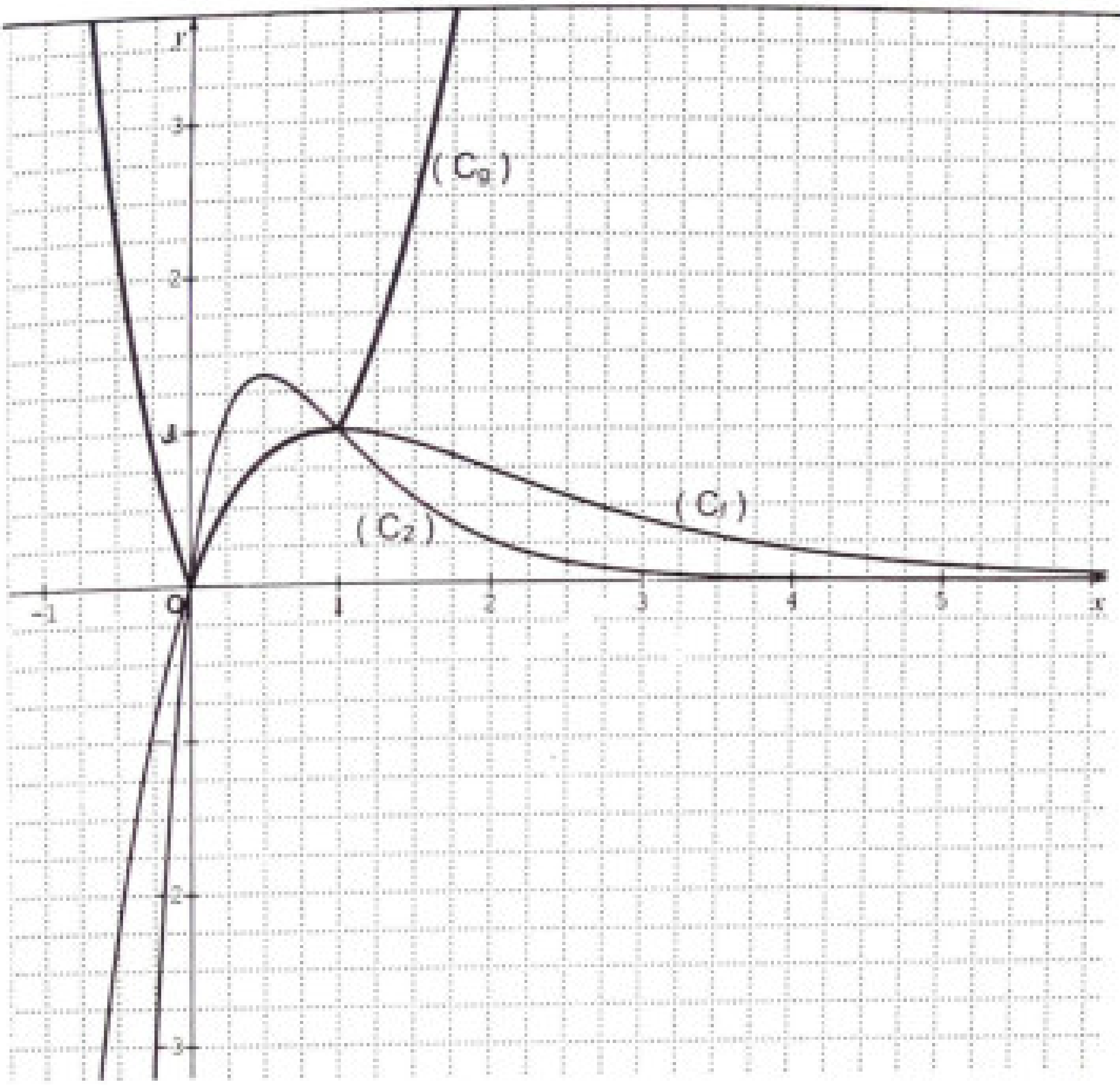
On a $u'(x)=1$; choisissons $v(x)=-\frac{1}{n}e^{n(1-x)}$.

$$I_n(\alpha)=\left[-\frac{x}{n}e^{n(1-x)}\right]_0^{\alpha}+\frac{1}{n}\int_0^{\alpha} e^{n(1-x)}dx$$

$$I_n(\alpha)=\left[-\frac{x}{n}e^{n(1-x)}-\frac{1}{n^2}e^{n(1-x)}\right]_0^{\alpha}$$

$$I_n(\alpha)=-\frac{\alpha}{n}e^{n(1-\alpha)}-\frac{1}{n^2}e^{n(1-\alpha)}+\frac{1}{n^2}e^{n}.$$

b- $\lim_{\alpha\to+\infty} I_n(\alpha)=\frac{1}{n^2}e^n$ car $\lim_{\alpha\to+\infty} e^{n(1-\alpha)}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{e^{n\alpha}}e^n=0$



EXERCICE 5 : Bac E 2000 Session normale

1) Etude d'une fonction auxiliaire

a- $\forall t \in [0;+\infty[, g'(t) = -1 + 2e^{-2t}$

Signe de g'(t)

t	0		$\frac{1}{2}\ln 2$		$+\infty$
g'(t)		+	0	-	

$\forall t \in]0 ; \frac{1}{2}\ln 2[$ g'(t) > 0 donc g est strictement croissante sur $]0 ; \frac{1}{2}\ln 2[$

$\forall t \in]\frac{1}{2}\ln 2 ; +\infty[$ g'(t) < 0 donc g strictement décroissante sur $]\frac{1}{2}\ln 2 ; +\infty[$

$\lim_{t\to+\infty} g(t) = -\infty$ car $\lim_{t\to+\infty}(1-t) = -\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0$

b- g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\ln 2\right]$

$$g\left(\left[0;\frac{1}{2}\ln 2\right]\right) = \left[0;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right]$$

0 n'appartient pas à l'intervalle $\left]0;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right]$ l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $\left]0;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right]$.

g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right[$, g réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right[$ sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right]$

0 appartient à l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right]$ donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right[$

$$g\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2, g(1)=-e^{-2}, g\left(\frac{\ln 2}{2}\right)\times g(1)<0$$

Donc $\frac{\ln 2}{2}<\alpha\leq 1$

c. $\forall t\in\left[0,+\infty\right[, \left(g(t)=0\Leftrightarrow t=0\ ou\ t=\alpha\right)$

$\forall t\in\left[0,+\infty\right[, \left(g(t)>0\Leftrightarrow t\in\left]0;\alpha\right[\right)$

$\forall t\in\left[0,+\infty\right[, \left(g(t)<0\Leftrightarrow t\in\left]\alpha;+\infty\right[\right)$

d. g(0,79) = 1 – 0,79 – $e^{-2(0,79)}$ = 0,004

g(0,8) = 1 – 0,8 – $e^{-2(0,8)}$ = - 0,0019

On a g(0,79)× g(0,8) < 0 donc 0,79 ≤ α ≤ 0,8

2) Sens de variation de f

a. Montrons que $f'(x) = \left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{2}{x}}g\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\forall x\in\left]0,+\infty\right[, f'(x)=\left(e^{2/x}-1\right)^{1/2}-\frac{1}{x}\left(e^{2/x}-1\right)^{-1/2}e^{2/x}$$

$$=\left(e^{2/x}-1\right)^{-1/2}\left(e^{2/x}-1-\frac{1}{x}e^{2/x}\right)$$

$$=\left(e^{2/x}-1\right)^{-1/2}e^{2/x}\left(1-e^{-2/x}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left(e^{2/x}-1\right)^{-1/2}e^{2/x}g\left(\frac{1}{x}\right)$$

b. sens de variation de f

$$\forall x \in]0,+\infty[, f'(x)=0 \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}=\alpha$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{\alpha}$$
$$f'(x)>0 \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)>0$$
$$\Leftrightarrow 0<\frac{1}{x}<\alpha$$
$$\Leftrightarrow x>\frac{1}{\alpha}$$
$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}>\alpha$$
$$\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{\alpha}$$

$\forall x \in]\frac{1}{\alpha} ; +\infty[$ $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]\frac{1}{\alpha} ; +\infty[$

$\forall x \in]0 ; \frac{1}{\alpha}[$ $f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $]0 ; \frac{1}{\alpha}[$

3) Limite de f en 0

a- Demontrons que pour tout $x>0$: $\ln[f(x)] = \frac{1}{x}(1 + x\ln x) + \frac{1}{2}\ln(1 - e^{-\frac{2}{x}})$

$\forall x>0$, $\ln(f(x)) = \ln x + \frac{1}{2}\ln(e^{\frac{2}{x}} - 1) = \ln x + \frac{1}{2}\ln[e^{\frac{2}{x}}(1 - e^{-\frac{2}{x}})]$

$= \ln x + \frac{1}{2}\ln(e^{\frac{2}{x}}) + \frac{1}{2}\ln(1 - e^{-\frac{2}{x}}) = \ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(1 - e^{-\frac{2}{x}})$

$x>0$, $\ln(f(x)) = \frac{1}{x}(x\ln x + 1) + \frac{1}{2}\ln(1 - e^{-\frac{2}{x}})$

b- limite de f en 0

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(x\ln x+1)=1$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(x\ln x+1)=+\infty$

On a également $\lim\limits_{x\to 0}(1 - e^{\frac{-2}{x}}) = 1$ car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to -\infty} e^{y} = 0$

D'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\ln\left(1-e^{-2/x}\right)\right)=0.$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln f(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$

4) Etude de f en $+\infty$

a- Soit $\varphi:[0;1]\to\mathbb{R}$

$$t\to e^t-et-1$$

$\forall t\in[0;1], \varphi'(t)=e^t-e$

$\forall t\leq 1, e^t\leq e$ d'où $\varphi'(t)\leq 0$, il s'ensuit que φ est décroissante sur [0;1]

$\varphi(0)=0$; donc $\forall t\in[0;1]$, $\varphi(t)\leq\varphi(0)=0$ car $\varphi(0)$ est la maximum de f sur [0;1]

Il vient que : $\forall t\in[0;1], e^t-1\leq te$

$\forall t\in[0;1], e^t\geq 1$ donc $e^t-1\geq 0$. On déduit que : $\forall t\in[0;1], 0\leq e^t-1\leq te$

b- $\forall u\in[0;1], 0\leq \int_0^u (e^t-1)dt\leq \int_0^u te\,dt$ or $\int_0^u (e^t-1)dt=[e^t-1]_0^u=e^u-(u+1)$

$\int_0^u te\,dt=e\frac{u^2}{2}$ d'où $\forall u\in[0;1], 0\leq e^u-(u+1)\leq e\frac{u^2}{2}$

on a alors : $\forall u\in[0;1], u+1\leq e^u\leq u+1+e\frac{u^2}{2}$

c- $\forall x\geq 2, [f(x)]^2-2x=x^2(e^{2/x}-1)-2x$

$\forall x\geq 2, 0\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{2}$ donc $\frac{2}{x}\in[0,1]$ d'après ce qui précède :

$1+\frac{2}{x}\leq e^{2/x}\leq 1+\frac{2}{x}+\frac{2e}{x^2}$

soit $\frac{2}{x}\leq e^{2/x}-1\leq\frac{2}{x}+\frac{2e}{x^2}$ et donc $2x\leq x^2(e^{2/x}-1)\leq 2x+2e$ et alors

$0\leq x^2(e^{2/x}-1)-2x\leq 2e$ on en conclut que : $\forall x\geq 2$, $0\leq (f(x))^2-2x\leq 2e$

d- $\forall x\geq 2$, $f(x)-\varphi(x)=\frac{[f(x)]^2-2x}{f(x)+2x}$

on a : $\forall x\in[0;+\infty[, f(x)\geq 0$ Donc on conclut que d'après 4)c-

$\forall x\geq 2, f(x)\geq\varphi(x)$

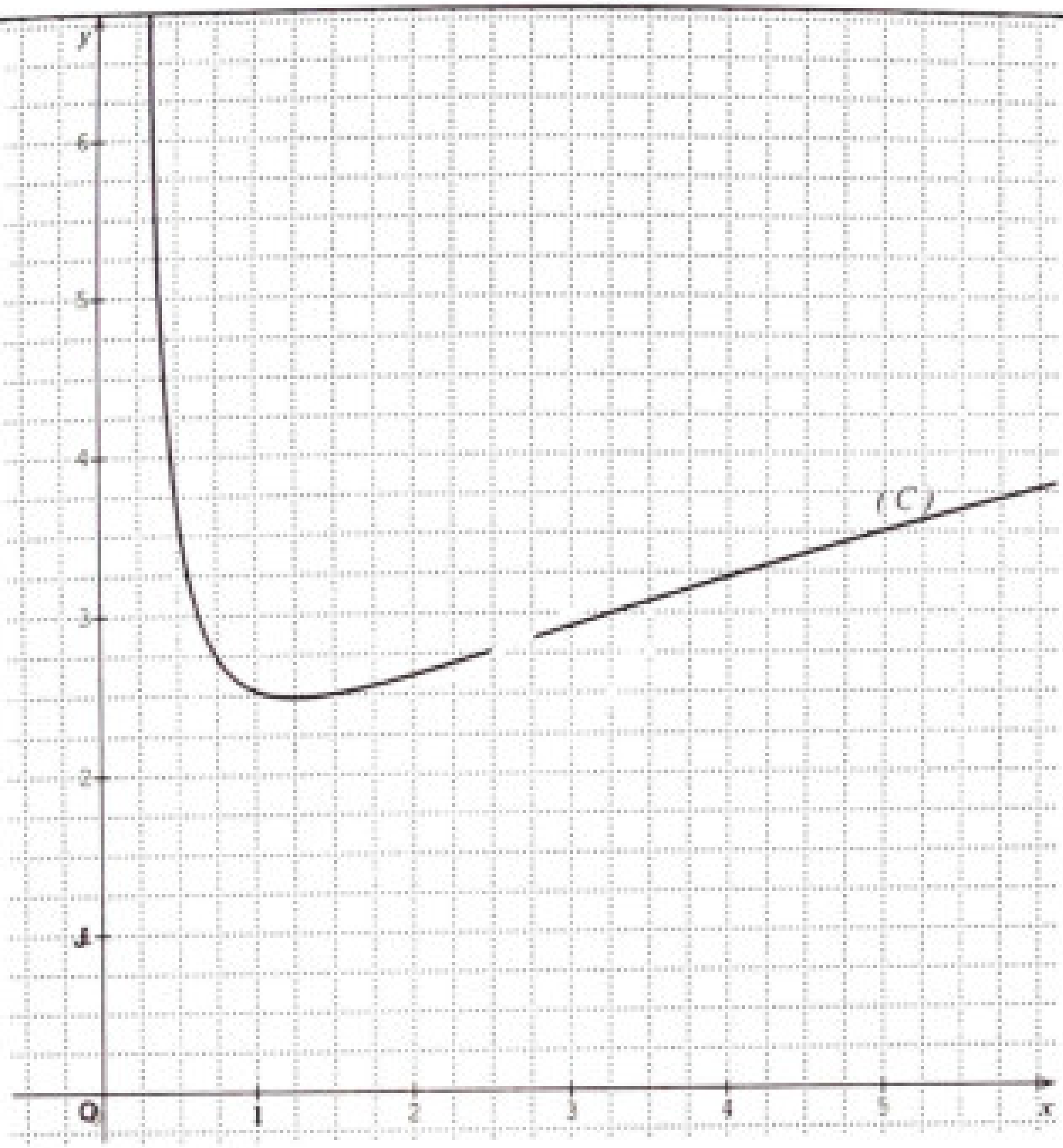
De $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x}=+\infty$, on déduit que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (limite de comparaison)

5) a- Tableau de variation de f

x	0		$1/\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{\alpha}\sqrt{e^{2/\alpha}-1}$	↗ $+\infty$	

$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\simeq 2,485.$

b- courbe de f



EXERCICE 6 : Bac E 1998 Session normale

PARTIE A

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = xe^{-x}$

a- $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{y \to +\infty} -ye^{y} = -\infty$;

Car $\lim\limits_{y \to +\infty} e^{y} = +\infty$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} -y = -\infty$

b- Dérivée de f(x)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = xe^{-x}$

$f_1'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

Sens de variation de f.

Signe de f '(x)

x	- ∞	1	+ ∞
(1 - x)	+	0	-
e^{-x}	+	|	+
f '(x)	+	0	-

$\forall x \in]-\infty; 1[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty ; 1[$

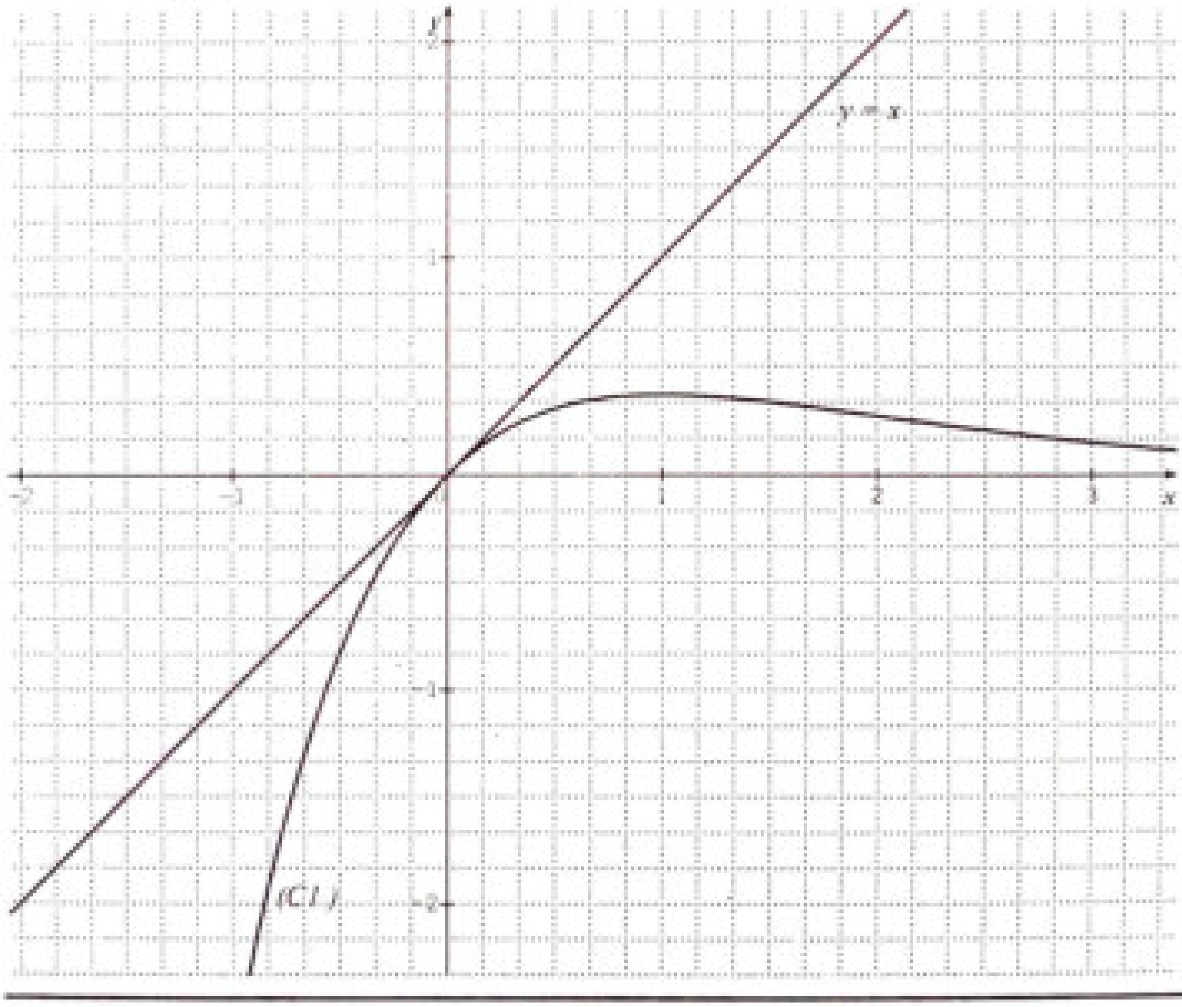
$\forall x \in]1; +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]1 ; +\infty[$

Tableau de variation de f.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	-
$f_1(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{e}$	↘ 0

c- La tangente à l'origine est la droite d'équation $y = x$

Tracé de (C_1)



2) a- $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$

Le signe de f_n' dépend du signe de $x^{n-1}(n-x)$

Le signe de x^{n-1} dépend de la parité de n.

- **Si n est pair**, $n-1$ est impair et le signe de x^{n-1} est celui de x.

On obtient le signe de $f_n'(x)$ dans le tableau :

x	$-\infty$		0		n		$-\infty$
x^{n-1}		-	0	+	|	+	
$n-x$		+	|	+	0	-	
$f_n'(x)$		-	0	+	0	-	

$\forall x \in]-\infty;0[\cup]n;+\infty[$, $f_n'(x) < 0$, donc f_n est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]n;+\infty[$

$\forall x \in]0;n[$, $f_n'(x) > 0$, donc f_n est strictement croissante sur $]0;n[$

- **Si n est impair,** $n-1$ est pair donc x^{n-1} est toujours positif.

On peut donner le signe de $f_n'(x)$ dans le tableau.

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
x^{n-1}		+	|	+	|	+	
$n-x$		+	|	+	0	-	
$f_n'(x)$		+	|	+	0	-	

$\forall x \in]-\infty;n[$, $f_n'(x) > 0$, donc f_n est strictement croissante sur $]-\infty;n[$

$\forall x \in]n;+\infty[$, donc f_n est strictement décroissante sur $]n;+\infty[$.

b- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_3(x) = x^3e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^{-x} = -\infty$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{y\to+\infty} e^{y} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^3}} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$$

Tableau de variation de $f_3(x)$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f_3'(x)$		+	0	+	0	-	
$f_3(x)$	$-\infty$	↗	$\boxed{0}$	↗	$\frac{27}{e^3}$	↘	0

c- La tangente à l'origine est la droite des abscisses (x = 0).

Courbe de (C_3), voir figure ci dessous.

3) a- La droite d'équation $x=n$ est une droite parallèle à (OJ). M et M' ont la même ordonnée et le milieu de $[MM']$ se trouve sur la droite d'équation $x=n$ d'où

$$\frac{x'+x}{2}=n \Rightarrow x'=2n-x$$

On a : $\begin{cases} x'=2n-x \\ y'=y \end{cases}$ M' a pour coordonnées $(2n-x, y)$.

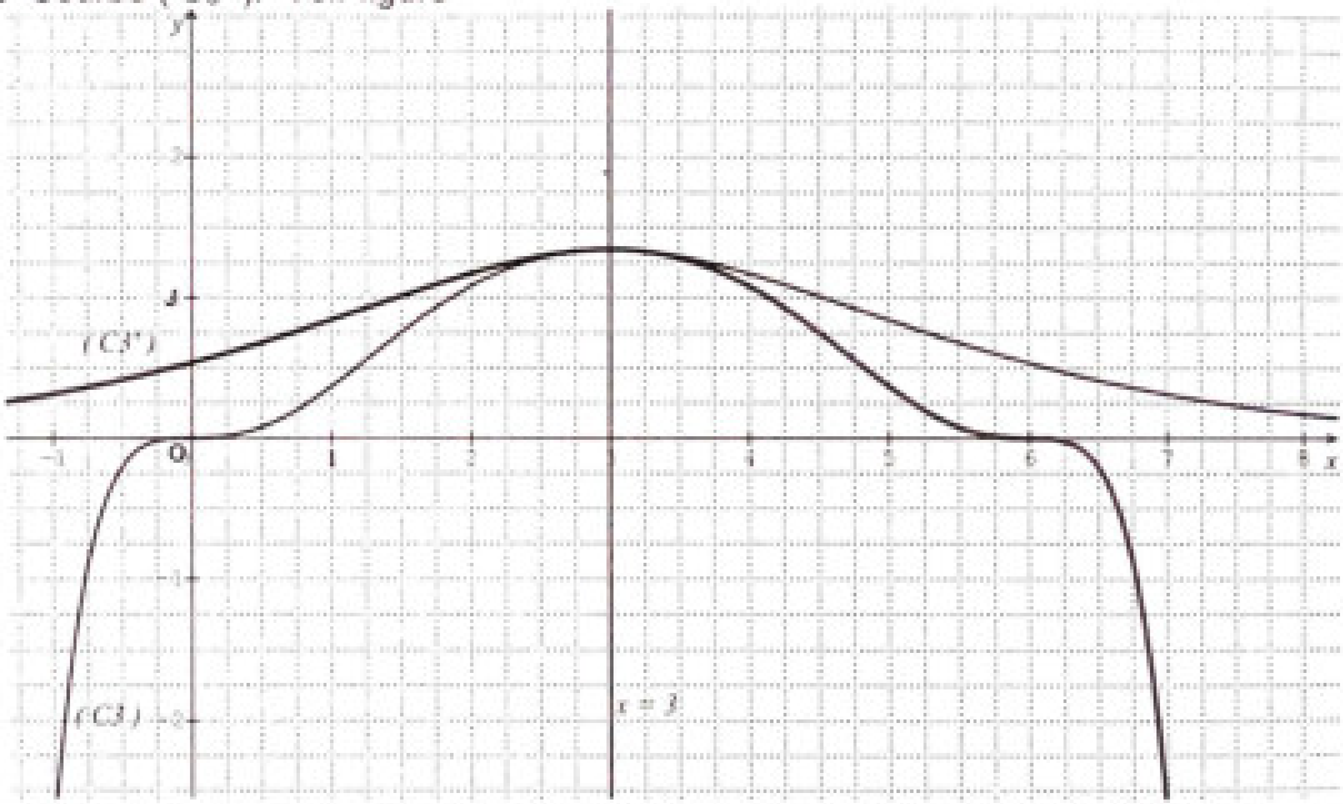
b- M'(x' ; y') ∈ (C_n') ⇔ ∃ M(x ; y) ∈ (C_n) tel que S_n(M) = M '

$$\Leftrightarrow x'=2n-x \text{ et } y'=f_n(x)$$

$$\Leftrightarrow y'=f_n(2n-x')$$

Donc (C'_n) est l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant $y=f_n(2n-x)$

c- Courbe (C_3'). Voir figure



d- $\forall t \in [n;2n], f_n(t)>0$ donc $\int_n^{2n} f_n(t)dt$ est l'aire de la partie D du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C_n) et les droites d'équations $x=n$ et $x=2n$.

Si $n \leq x \leq 2n$ alors $0 \leq 2n-x \leq n$

$\int_0^n g_n(t)dt$ est l'aire de la partie D' du plan telle que : $D'=S_n(D)$ donc

$\int_0^n g_n(t)dt = \int_0^{2n} f_n(t)dt$ car une symétrie orthogonale conserve les aires.

4) a- $x \in]0;n]$, $h_n(x) = \ln\left(g_n(x)\right) - \ln\left(f_n(x)\right)$

- Comme $x \in]0;n]$ alors $f_n'(x) \geq 0$. Donc f_n est croissante sur $]0;n]$

$0 < x < n \Leftrightarrow f_n(0) < f_n(x) < f_n(n) \Leftrightarrow 0 < f_n(x) < n^n e^{-n}$

Par conséquent $f_n(n)$ est strictement positif sur $]0;n]$.

La fonction $x \mapsto \ln\left(f_n(x)\right)$ est bien définie et dérivable sur $]0;n]$

- Comme $x \in]0;n]$ alors $2n - x \in [n,2n[$. Donc f_n est décroissante sur $[n,2n[$.

$$\begin{aligned} 0 < x \leq n \Leftrightarrow \quad & n \leq 2n - x < 2n \\ & \Leftrightarrow f_n(2n) \leq f_n(2n-x) < f_n(x) \\ & \Leftrightarrow (2n)^n e^{-2n} < g_n(x) \leq n^n e^{-n} \end{aligned}$$

g_n est strictement positif sur $]0;n]$.

Alors la fonction $x \mapsto \ln\left(g_n(x)\right)$ est définie et dérivable sur $]0;n]$

Par conséquent, h_n est définie et dérivable sur $]0;n]$

On a : $\ln(f_n(x)) = \ln(x^n e^{-x}) = -x + n\ln x$

$$\ln\left(g_n(x)\right) = \ln(2n-x)^n e^{-|2n-x|} = -(2n-x) + n\ln(2n-x)$$

D'où $h_n(x) = 2x - 2n + n\ln(2n-x) - n\ln x$

$$h_n'(x) = 2 - \frac{n}{2n-x} - \frac{n}{x} = \frac{-2x^2 + 4nx - 2n^2}{x(2n-x)}$$

$$h_n'(x) = \frac{-2(x-n)^2}{x(2n-x)}$$

Si $x \in]0;n]$ alors $x(2n-x) > 0$ d'où $h_n'(x) \leq 0$

x	0		n
$h_n'(x)$	||	$-$	
$h_n(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0

h_n admet pour minimum 0, par conséquent $\forall x \in]0;n]$ $h_n(x) \geq 0$

b- $\forall x \in [0;n]$ $h_n(x) \geq 0 \Rightarrow \ln(g_n(x)) \geq \ln(f_n(x))$

$$\Rightarrow g_n(x) \geq f_n(x)$$

D'où $\forall x \in [0;n]$, $\quad f_n(x) \leq g_n(x)$

c- $\forall x \in [0;n]$, $f_n(x) \leq g_n(x)$

$$\int_0^n f_n(t)dt \leq \int_0^n g_n(t)dt$$

Or $\int_0^n g_n(t)dt = \int_0^{2n} f_n(t)dt$, d'où le résultat :

$\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \int_0^n f_n(t)dt \leq \int_0^{2n} f_n(t)dt$

PARTIE B

On a : $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$

1) $F'_n(x) = f_n(x)$ sur $[0;+\infty[$ or $f_n(x) \geq 0$ pour $x \in [0;+\infty[$.

par conséquent F_n est croissante sur $[0;+\infty[$.

2) a- $F_1(x) = \int_0^x t\, e^{-t}\, dt$

Posons $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$

On a : $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$

On obtient $F_1(x) = \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt = \left[-te^{-t}\right]_0^x - \left[e^{-t}\right]_0^x$

$$F_1(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

b- $F_{n+1}(x) = \int_0^x f_{n+1}(t)dt = \int_0^x t^{n+1}e^{-t}dt$

Posons $u(t) = t^{n+1}$ et $v'(t) = e^{-t}$

On a : $u'(t) = (n+1)t^n$ et $v(t) = -e^{-t}$

On obtient : $F_{n+1}(x) = \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^x + (n+1)\int_0^x t^n e^{-t}dt$

$$F_{n+1}(x) = -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)F_n(x)$$

Au total, on a : $F_{n+1}(x) = -f_{n+1}(x) + (n+1)F_n(x)$

3°) On a : $F_n(x) = n!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)\right]$

Vérifions que le premier terme F_1 est vrai

Pour $n=1$, $F_1(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = 1 - (1+x)e^{-x} = 1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!}\right)$

Donc La relation est vérifiée pour $F_1(x)$

Supposons que pour tout entier n, $F_n(x) = n!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)\right]$.

Démontrons que $F_{n+1}(x)$ est vraie c'est-à-dire $\forall n \geq 1$, on a :

$$F_{n+1}(x) = (n+1)!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)\right]$$

On sait que : $F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$.

$$F_{n+1}(x) = (n+1)\,n!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)\right] - x^{n+1}e^{-x}$$

$$F_{n+1}(x) = (n+1)\,n!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) - \frac{x^{n+1}e^{-x}}{(n+1)n!}\right]$$

$$F_{n+1}(x) = (n+1)\,n!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)n!}\right)\right]$$

$$F_{n+1}(x) = (n+1)!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)\right]$$

Donc $F_{n+1}(x)$ est vraie

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = n!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)\right]$.

4.a - $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} n!\left|\, 1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)\right| = n!$

Car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{n!}e^{-x} = 0$

b- On sait que : $F_n(x) = n!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)\right]$

On a : $1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) \leq 1$

$n!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)\right] \leq 1 \times n!$ donc $F_n(x) \leq n!$

PARTIE C

1) $F_n(n) + \int_n^{2n} f_n(t)dt = \int_0^{2n} f_n(t)dt = F_n(2n)$ or $F_n(2n) \leq n!$ d'après B.4)b-

d'où $F_n(n) + \int_n^{2n} f_n(t)dt \leq n!$

2) On a $0 \leq \int_0^n f_n(t)dt \leq \int_n^{2n} f_n(t)dt$

$0 \leq F_n(n) \leq 2F_n(n) \leq F_n(n) + \int_n^{2n} f_n(t)dt \leq n!$

D'où $0 \leq 2F_n(n) \leq n!$ alors $0 \leq F_n(n) \leq \frac{n!}{2}$.

Remplaçons $F_n(n)$ par $n!\left[1 - e^{-n}\left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!}\right)\right]$, on obtient :

$$0 \leq n!\left[1 - e^{-n}\left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!}\right)\right] \leq \frac{n!}{2}$$

$$0 \leq 1 - e^{-n}\left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^n \leq 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \leq e^n.$$

EXERCICE 7 : Bac C 1998 Session de remplacement

PARTIE A

1) a- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$ car $e^x > 0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

b- $\lim\limits_{x \to -\infty} (1+e^x) = 1$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1+e^x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

2)

- $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(0-x) + f(0+x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} + \dfrac{1}{1+e^x}$

$$= \frac{1+e^x+1+e^{-x}}{(1+e^{-x})(1+e^x)}$$

$$= \frac{1+e^x+1+e^{-x}}{1+e^x+e^{-x}+1}$$

$$=1$$

$$=2\times\frac{1}{2}$$

Le point A est donc centre de symétrie de (C).

3) Une équation de (T) est : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

On a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = -\frac{1}{4}$. D'où une équation de (T) est : $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

4) a- Calculons la dérivée de φ

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -\frac{1}{4} - f'(x)$$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{4} + \frac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}$$

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^{x}}\right)^{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^{x}}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^{x}}\right)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -\dfrac{\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^{2}\left(e^{\frac{x}{2}}+2\right)^{2}}{4(1+e^{x})^{2}}$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) < 0$ et φ' s'annule en 0

Conclusion : *φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$*

Puisque $\varphi(x) = 0$, on a :

$\forall x \in \left]-\infty;0\right], \varphi(x) > \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) > 0.$

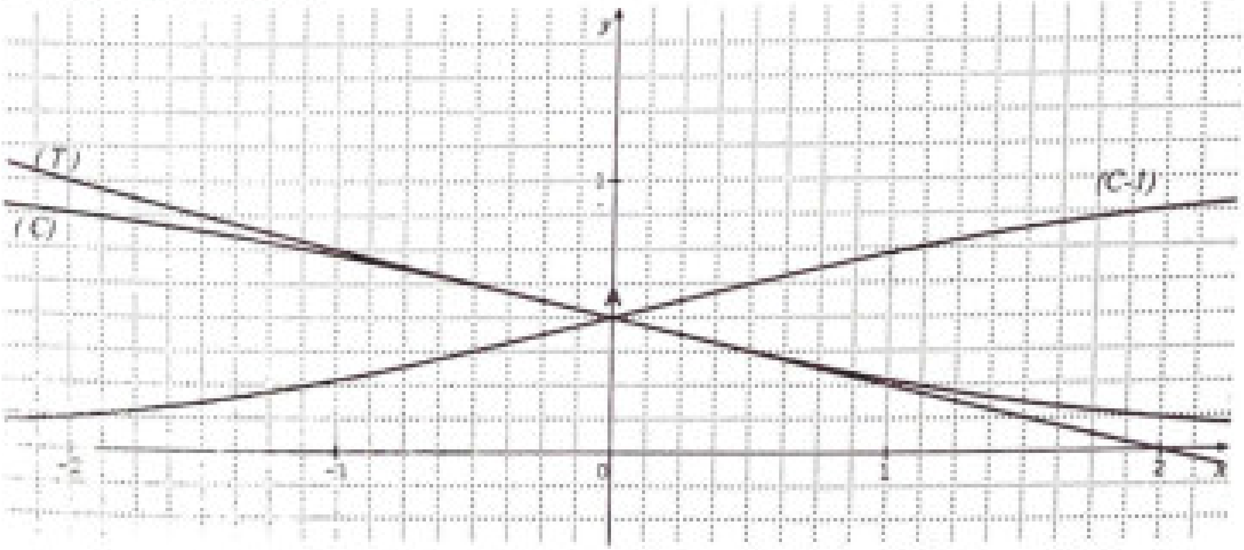
$\forall x \in \left[0;+\infty\right[, \varphi(x) < \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) < 0.$

b- Sur $\left]-\infty;0\right]$, (T) est au – dessus de (C) car $\varphi(x) > 0.$

Sur $\left[0;+\infty\right[$, (T) est en dessous de (C) car $\varphi(x) < 0.$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc l'axe des abscisses (y = 0) est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$

c- Tracé de (T) et (C)



PARTIE B

1) a- $T_{-1} : P \to P$

$$M \mapsto M' \;/\; \overline{HM'} = -\overline{HM}$$

T_{-1} est la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

b- Déterminons l'expression analytique de T_m

Soit (x, y) et (x', y') les coordonnées respectives de M et M'.

Le point H est donc de coordonnées $(0, y)$.

On a : $\begin{cases} x' = mx \\ y' = y \end{cases} (*)$

Démontrons que $T_m(C) \subset (C_m)$

Soit M un point de (C) et M' son image par T_m.

$f_m(x') = f\left(\frac{x'}{m}\right)$ par définition

$= f(x)$ d'après *

$= y$ car $M \in (C)$

$= y'$ d'après $(*)$

D'où M' appartient à (C_m). Par suite $T_m(C) \subset (C_m)$

Démontrons réciproquement que $(C_m) \subset T_m(C)$

Soit M' un point de (C_m).

Il s'agit de démontrer qu'il existe un point M de (C) tel que $M' = T_m(M)$

Par hypothèse, T_m est une transformation (donc bijective), il existe un point M du plan tel que $T_m(M) = M'$

Il reste à démontrer que M appartient à (C). On a :

$f_m(x) = f\left(\frac{x'}{m}\right)$ d'après $(*)$

$= f_m(x')$ par définition

$= y'$ car $M' \in (C_m)$

$= y$ d'après $(*)$

Par conséquent, M appartient à (C). On en déduit que $(C_m) \subset T_m(C_m)$

Conclusion : $T_m(C)=(C_m)$

Remarque : On peut raisonner par équivalence car T_m est bijective.

c- $(C_{-1})=T_{-1}(C)$

(C_{-1}) est donc l'image de (C) par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

Tracé de (C_{-1}) (voir figure).

2) Pour tout $(\lambda,m)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$,

$$I_m(\lambda)=\int_{-\lambda}^{\lambda} f_m(x)\,dx$$

$$=2\lambda-\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{e^{x/m}}{1+e^{x/m}}dx \text{ car } \frac{1}{1+e^{x/m}}=1+\frac{e^{x/m}}{1+e^{x/m}}$$

$$I_m(\lambda)=2\lambda-m\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{\frac{1}{m}e^{x/m}}{1+e^{x/m}}dx$$

$$=2\lambda-m\left[\ln\left(1+e^{x/m}\right)\right]_{-\lambda}^{\lambda}$$

$$=2\lambda-m\left[\ln\left(1+e^{\lambda/m}\right)-\ln\left(1+e^{-\lambda/m}\right)\right]_{-\lambda}^{\lambda}$$

$$=2\lambda-m\left[\ln\left(e^{\lambda/m}\left(1+e^{-\lambda/m}\right)\right)-\ln\left(1+e^{-\lambda/m}\right)\right]_{-\lambda}^{\lambda}$$

$$=2\lambda-m\ln e^{\lambda/m}$$

$$=2\lambda-m\frac{\lambda}{m}=\lambda$$

$I_m(\lambda)$ est indépendant m

PARTIE C

1) a- $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=1-f'(x)$

$$=1+\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}>0$$

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

c- g est continue et strictement croissant sur $\mathbb{R}$, g réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R})$ qui est $\mathbb{R}$. $0 \in \mathbb{R}$, donc L'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α.
Il s'en suit que l'équation $f(x)=x$ admet la solution unique α.

$g\left(\frac{1}{4}\right) \simeq 0{,}19 > 0,\ g\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -0{,}12 < 0$ Donc α appartient alors à l'intervalle $\left]\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right[$

2°) a - f est continue et strictement décroissante sur ℝ, en particulier sur $\left[\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right]$.

On a : $f\left(\left[\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right) ; f\left(\frac{1}{4}\right)\right]$; Or $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+\sqrt{e}}$ et $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{4}}}$

On sait que : $e < 9 \Rightarrow \sqrt{e} < 3 \Rightarrow 1+\sqrt{e} < 4 \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{e}} > \frac{1}{4}$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{4}$

On sait aussi que : $\frac{1}{4} > 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{4}} > e^0 \Rightarrow 1 + e^{\frac{1}{4}} > e^0 + 1 \Rightarrow 1 + e^{\frac{1}{4}} > 2$

$\Rightarrow \frac{1}{1+e^{\frac{1}{4}}} < \frac{1}{2}$ Donc $f\left(\frac{1}{4}\right) < \frac{1}{2}$

Par conséquent : $f\left(\left[\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right]$

b - $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \frac{-e^x(1+e^x)^2 + 2e^{2x}(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{-e^x(1+e^x)+2e^{2x}}{(1+e^x)^3}$

$f''(x) = \frac{e^x(-1+e^x)}{(1+e^x)^3}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, précisement $\forall x \in \left[\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right]$, $e^x > 0$, $(-1+e^x) \geq 0$ et $(1+e^x)^3 > 0$,
par conséquent : $f''(x) \geq 0$

x	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$	$f'\left(\frac{1}{4}\right)$	↗	$f'\left(\frac{1}{2}\right)$

$\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]; f'\left(\frac{1}{4}\right) \leq f'(x) \leq f'\left(\frac{1}{2}\right)$

$\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]; -f'\left(\frac{1}{2}\right) \leq -f'(x) \leq -f'\left(\frac{1}{4}\right)$

D'où: $\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right], \left|f'(x)\right| \leq \frac{e^{1/4}}{\left(1+e^{1/4}\right)^2}$

Avec la calculatrice, on a : $\frac{e^{1/4}}{\left(1+e^{1/4}\right)^2} < 0{,}246 < \frac{1}{4}$

D'où : $\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right], |f'(x)| < \frac{1}{4}$

Autre méthode (sans calculatrice)

On peut étudier la fonction a définie sur $[1;+\infty[$ par : $a(x)=\frac{x^{1/4}}{(1+x^{1/4})^2}$

$$\forall x\in[1;+\infty[, a'(x)=\frac{1}{4}\frac{x^{-1/4}(1-x^{1/4})}{(1+x^{1/4})^3}$$

$\forall x\in[1;+\infty[, a'(x)\leq 0$. a est donc décroissante sur $[1;+\infty[$

D'où $a(e)\leq a(1)=\frac{1}{4}$

Conclusion : $\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right], |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

c- D'après ce qui précède et l'inégalité des accroissements finis, on a :

$\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right], |f(x)-f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|x-\alpha|$

comme $f(\alpha)=\alpha$ d'après 1)c-, on a le résultat demandé.

3°)a- Vérifions que U_0 est vraie.

On a : $U_0 = \frac{1}{4}$; $U_0 \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$

Supposons que pour un entier naturel n, $U_n \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$.

Démontrons que $U_{n+1} \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$

On a : $f(U_n) \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$ d'après 2)a. D'où $U_{n+1} \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$

Conclusion :: $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$

b- En utilisant 2.c, et ce qui précède, on a : $|f(U_n)-\alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n-\alpha|$

$\forall n \in \mathbb{N}, |f(U_n)-\alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n-\alpha|$ D'où $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n-\alpha|$

c- Vérifions que U_0 est vraie

On a $|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{4}$

$|U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{0+1}$ car $U_0 \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$

Supposons que pour un entier naturel n, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

Démontrons que $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}$

On a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$ d'après 3)b-

D'où $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ $|U_{n+1} - \alpha| < \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

4. a. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$ car $0 < \frac{1}{4} < 1$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ et $|U_p - \alpha| \leq 10^{-2}$

Donc $\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \leq 10^{-2} \Rightarrow (n+1)\ln\left(\frac{1}{4}\right) \geq -2\ln(10) \Rightarrow (n+1) \geq \frac{-2\ln(10)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$

$\Rightarrow n \geq \frac{-2\ln(10)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} - 1 \Rightarrow n \geq 2,32$

Donc le plus petit entier naturel p est p = 3

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES

EXERCICE 8 : Bac E 1996 Session de Remplacement

PARTIE A

1°) Parité de f

$D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in R$ et $\forall -x \in R$, on a $f_n(-x) = f_n(x)$, donc f_n est paire.

2°) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$.

Sens de variation de $f_0(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_0'(x) = \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	+	0	-
$1+x^2$	+		+
$\sqrt{1+x^2}$	+		+
$f_0'(x)$	+	0	-

$\forall x \in]-\infty; 0[$, $f_0'(x) > 0$, donc f_0 est strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$.

$\forall x \in]0; +\infty[$, $f_0'(x) < 0$, donc f_0 est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$

Construction de (C_0). (voir figure)

3°) Cherchons les solutions de l'équation : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0 \iff \frac{x^{2n+2}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \iff \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}(x^2-1) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

- $n \geq 1$, $f_n(0) = 0$; $f_0(0) = 1$
- $n \geq 1$, $f_n(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f_0(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $n \geq 1$, $f_n(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f_0(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc toutes les courbes (C_n) passent par les points $A(1 ; \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $A'(-1 ; \frac{\sqrt{2}}{2})$

4°) Calculons $f_n'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^{2n} f_0(x)$

$$f_n'(x) = 2nx^{2n-1}f_0(x) + x^{2n}f_0'(x) = 2nx^{2n-1}.\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + x^{2n}.\frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$f_n'(x) = \frac{2nx^{2n-1}(1+x^2) - x^{2n+1}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^{2n-1}(2n + 2nx^2 - x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = \frac{x^{2n-1}[2n + (2n-1)x^2]}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

5°) a – Calculons la limite de f_1 et f_2 en $-\infty$ et en $+\infty$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty, \text{ car } \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty \text{, car } \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1$$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^3}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = +\infty \text{, car } \lim_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty \text{, car } \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1$$

b – Sens de variation de f_1

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ donc $f_1'(x) = \frac{(x^2+2)x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$, d'après question 4°)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2+2	+	|	+
x	-	0	+
$1+x^2$	+	|	+
$\sqrt{1+x^2}$	+	|	+
$f_1'(x)$	-	0	+

$\forall x \in]-\infty; 0[\ f_1'(x) < 0$, donc f_1 est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$

$\forall x \in]0; +\infty[\ f_1'(x) > 0$, donc f_1 est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de f_1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		-	0	+	
$f_1(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Sens de variation de f_2

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad f_2'(x) = \frac{(3x^2+4)x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

Signe de $f_2'(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$3x^2+4$	$+$		$+$
x^3	$-$	0	$+$
$1+x^2$	$+$		$+$
$\sqrt{1+x^2}$	$+$		$+$
$f_2'(x)$	$-$	0	$+$

$\forall x \in]-\infty;0[$, $f_2'(x) < 0$, donc f_2 est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f_2'(x) > 0$, donc f_2 est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de f_2

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_2'(x)$	$-$	0	$+$
$f_2'(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

c. Montrons que (Δ) : $y = x$ et une asymptote à (C_1)

On a : $f_1(x) - y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - x = \dfrac{x^2 - x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x(x-\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$

$$f_1(x) - y = \frac{x(x-\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})} = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f_1(x)-y) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f_1(x)-y) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}(x+\sqrt{1+x^2})} = 0, \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1$$

et $\quad \lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2}) = +\infty$

On a : $\lim_{x\to+\infty}(f_1(x)-y) = 0$ donc (Δ) : $y = x$ est une asymptote oblique à (C_1) en $+\infty$.

- Position relative de (C_1) par rapport à (Δ).

  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) - y = \dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$

Signe de $f_1(x) - y$

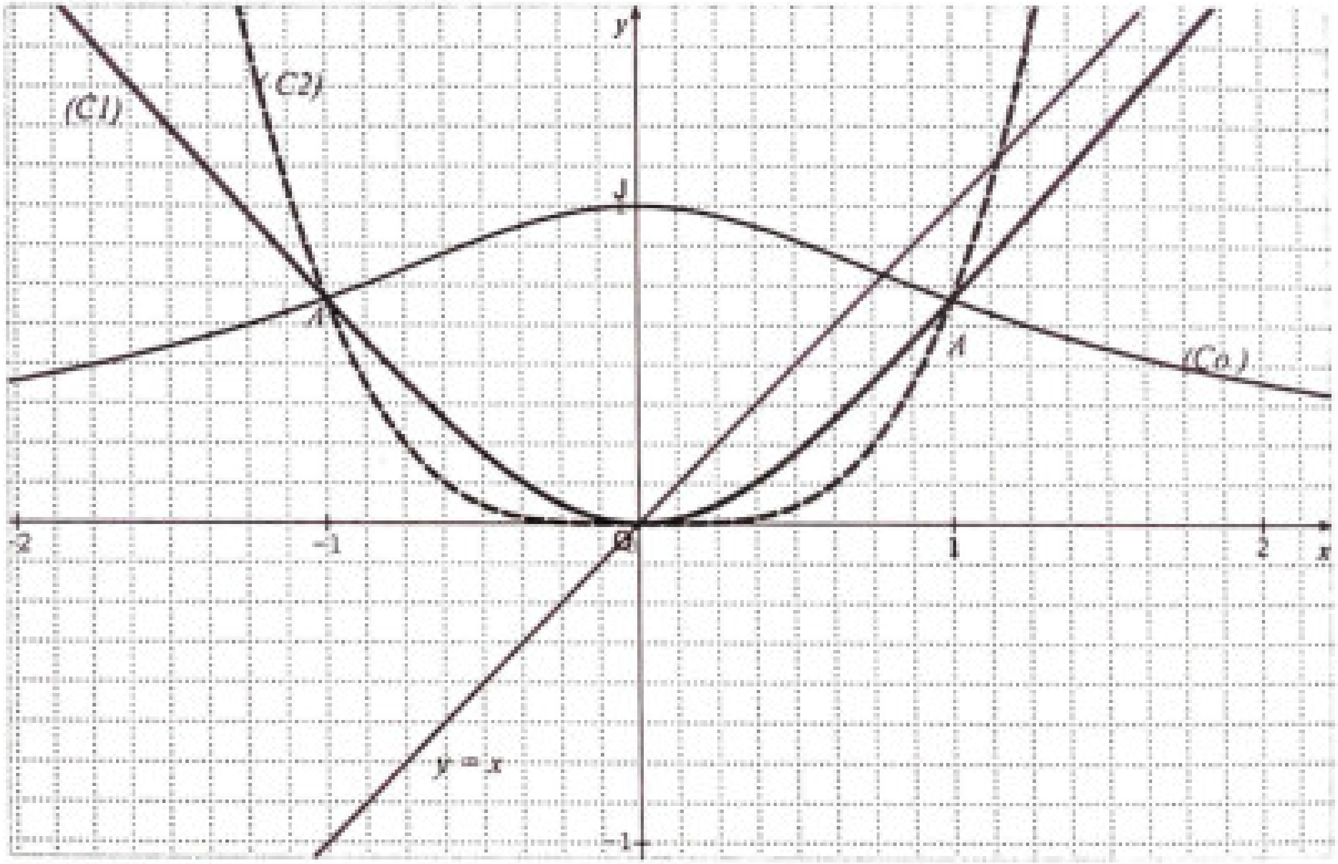
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	+	0	-
$\sqrt{1+x^2}$	+		+
$x + \sqrt{1+x^2}$	+		+
$f_1(x) - y$	+	0	-

$\forall x \in]-\infty ; 0[$, $f_1(x) - y > 0$, donc (C_1) est au dessus de (Δ)

$\forall x \in]0 ;+\infty[$, $f_1(x) - y < 0$, donc (C_1) est en dessous de (Δ)

Au point d'abscisse 0, (C_1) et (Δ) se coupent.

Construction de (C_1) et (C_2).



PARTIE B

On a : $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

1°) Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geq 0$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) \geq 0$, d'où $\forall x \in [0;1],\ f_n(x) \geq 0$. Par conséquent, $I_n \geq 0$

2°) $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

On a : $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + x^2 \leq 2$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^{2n}}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^{2n} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{2}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \int_0^1 x^{2n}\,dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{2}}\right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 \Rightarrow \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2}} \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$$

3°) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

4°) a. f_0 est décroissante sur $[0;1]$; d'où $\forall x \in [a_i ; a_{i+1}]$,

$f_0(a_{i+1}) \leq f_0(x) \leq f_0(a_i)$

$\Rightarrow \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(a_{i+1})\,dx \leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(x)\,dx \leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(a_i)\,dx$

$\Rightarrow [a_{i+1} - a_i]f_0(a_{i+1}) \leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(x)\,dx \leq [a_{i+1} - a_i]f_0(a_i)$

Or $a_{i+1} - a_i = 0{,}2$ donc on obtient : $0{,}2\, f_0(a_{i+1}) \leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(x)\,dx \leq 0{,}2\, f_0(a_i)$

b – Calculons $f_0(a_i)$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$0{,}98 < f_0(0{,}2) < 0{,}99$

$0{,}92 < f_0(0{,}4) < 0{,}93$

$0{,}85 < f_0(0{,}6) < 0{,}86$

$0{,}78 < f_0(0{,}8) < 0{,}79$

$0{,}70 < f_0(1) < 0{,}71$

Encadrement de I_0

$I_0 = \int_0^1 f_0(x)\,dx$

$I_0 = \int_0^{0,2} f_0(x)\,dx + \int_{0,2}^{0,4} f_0(x)\,dx + \int_{0,4}^{0,6} f_0(x)\,dx + \int_{0,6}^{0,8} f_0(x)\,dx + \int_{0,8}^{1} f_0(x)\,dx$

$0{,}2\,[f_0(1) + f_0(0{,}8) + f_0(0{,}6) + f_0(0{,}4) + f_0(0{,}2)] \leq I_0 \leq 0{,}2\,[f_0(0{,}8) + f_0(0{,}6) + f_0(0{,}4) + f_0(0{,}2)$
$+ f_0(0)]$

On obtient : $0{,}2 \times 4{,}23 \leq I_0 \leq 0{,}2 \times 4{,}57$

$0{,}846 \leq I_0 \leq 0{,}914$

5°) a – Intégration par parties de I_n

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ donc $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

Posons $U(x) = x^{2n+1}$ et $V'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

On a : $U'(x) = (2n+1)x^{2n}$ et $V(x) = \sqrt{1+x^2}$

$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left[x^{2n+1}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 (2n+1)x^{2n}\sqrt{1+x^2}\,dx$

$= \sqrt{2} - \int_0^1 (2n+1)x^{2n} \times \frac{(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$= \sqrt{2} - (2n+1)\left[\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\right] = \sqrt{2} - (2n+1)(I_n + I_{n+1})$

En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)(I_n + I_{n+1})$

b - Exprimons I_1 en fonction de I_0

D'après 5°) a -, on a : $I_1 = \sqrt{2} - (1)(I_0 + I_1) \Rightarrow I_1 = \sqrt{2} - I_0 - I_1 \Rightarrow 2I_1 = \sqrt{2} - I_0$

donc $I_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - I_0)$.

Encadrement de I_1

On sait que : $0,846 \leq I_0 \leq 0,914$ d'où $-0,914 \leq -I_0 \leq -0,846$

Et $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$

$0,500 \leq \sqrt{2} - I_0 \leq 0,569$

D'où $0,25 \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - I_0) \leq 0,2845$ Donc $0,25 \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - I_0) \leq 0,29$.

Au total : $0,25 \leq I_1 \leq 0,29$

EXERCICE 9 : Bac C 1998 Session normale

PARTIE A

1°) a – Etudions la continuité de f en 0

$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 4$; $D_f = [0 ; +\infty[$ $0 \in D_f$, donc f est définie en 0.

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}(x - 4\sqrt{x} + 4) = 0 - 4\sqrt{0} + 4 = 4$; $f(0) = 4$

D'où $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

b – Dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 4\sqrt{x} + 4 - 4}{x} = \lim_{x \to 0}\left(1 - \frac{4\sqrt{x}}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0}\left(1 - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) = -\infty \text{ ; car } \lim_{x \to 0} -\frac{4}{\sqrt{x}} = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0

Interprétation graphique : On a : $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$ donc la courbe (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

2°) a – Limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[x - 4\sqrt{x} + 4\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[(\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} + 4\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left[\sqrt{x} - 4 + \frac{4}{\sqrt{x}}\right]$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$

b – Sens de variation de f

- Dérivée de f : $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $f'(x) = 1 - 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$

- Signe de $f'(x)$: $f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow x = 4$

x	0		4		$+\infty$
$\sqrt{x}-2$		-	0	+	
$\sqrt{x}$		+		+	
$f'(x)$		-	0	+	

Tableau de variation de f

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c) Tracer (C) (voir courbe à la fin)

3°) a - g est continue et strictement croissante sur $]4\,;+\infty[$;

On a : $g([4\,;+\infty[) = [0\,;+\infty[$. Donc g est une bijection de $[4\,;+\infty[$ sur $[0\,;+\infty[$

$\forall x \in [4;+\infty[$ et $\forall y \in [0;+\infty[$, $g(x) = y \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 = y$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} + 2 = y \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x} - 2)^2 = y$

$\Leftrightarrow \quad y = \sqrt{x} - 2$ car $\sqrt{x} - 2 > 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} + 2 \Leftrightarrow x = (\sqrt{y} + 2)^2 \Leftrightarrow x = y + 4\sqrt{y} + 4$

Donc l'application réciproque g^{-1} de g est définie par : $g^{-1}(x) = x + 4\sqrt{x} + 4$

ou bien : $g^{-1} : [0\,;+\infty[\longrightarrow [4\,;+\infty[$

$x \longmapsto x + 4\sqrt{x} + 4$

b – (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x dans le repère

$(O, \vec{u}, \vec{v})$. Tracer de (C'). (voir figure)

4°) a – On a :

$[y - f(x)][y - g^{-1}(x)] = 0 \quad \Leftrightarrow [y - x + 4\sqrt{x} - 4][y - x - 4\sqrt{x} - 4] = 0$

$\Leftrightarrow y^2 + x^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$

On a ainsi établi l'équivalence demandée.

$M\binom{x}{y} \in (E) \quad \Leftrightarrow \quad [y - f(x)][y - g^{-1}(x)] = 0 \Leftrightarrow \quad y = f(x) \quad$ ou $y = g^{-1}(x)$

$\Leftrightarrow \quad M \in (C) \cup (C') \Leftrightarrow M \in (H)$

b - $M\binom{a}{b} \in (E) \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab - 8a - 8b + 16 = 0$

$\Leftrightarrow b^2 + a^2 - 2ab - 8b - 8a + 16 = 0 \Leftrightarrow M'\binom{b}{a} \in (E)$

La droite d'équation $y = x$ est donc un axe de symétrie de (E).

5 °) Calculons l'aire A cette partie du plan.

$A = \int_0^4 f(x)\,dx.ua = \int_0^4 (x - 4\sqrt{x} + 4)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{8x}{3}\sqrt{x} + 4x\right]_0^4$

$A = \left(\frac{4^2}{2} - \frac{32}{3}\sqrt{4} + 4 \times 4\right).ua = \frac{8}{3}.$ Ua

PARTIE B

1°) a – Equation de la droite (D_m)

Soit $m \in]-2;2[$ et $M\binom{x}{y}$ On a : $\overrightarrow{A_mB_m}\binom{-m-2}{2-m}$ et $\overrightarrow{A_mM}\binom{x-y-2}{y}$

Les vecteurs $\overrightarrow{A_mB_m}$ et $\overrightarrow{A_mM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{A_mB_m}, \overrightarrow{A_mM}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2-m & -m-2 \\ y & 2-m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-2-m)(2-m) + y(m+2) = 0$

$\Leftrightarrow y(m+2) = -(x-2-m)(2-m) \Leftrightarrow y(m+2) = -x(2-m) + (2+m)(2-m)$

$\Leftrightarrow y = \frac{m-2}{m+2}x + 2 - m$

Donc l'équation de la droite (D_m) est : $y = \frac{m-2}{m+2}x + 2 - m$

b - Point d'intersection de (D_m) et (Δ_m)

(D_m) : $y = \frac{m-2}{m+2}x + 2 - m$ et (Δ_m) : $y = x - 2m$

$(D_m) \cap (\Delta_m) = \{T_m\} \Leftrightarrow \frac{m-2}{m+2}x + 2 - m = x - 2m$

$\Leftrightarrow \frac{m-2}{m+2}x - x = -2 + m - 2m$

$\Leftrightarrow \left(\frac{m-2}{m+2} - 1\right)x = -2 - m$

$\Leftrightarrow \frac{-4}{m+2}x = -2 - m$

$\Leftrightarrow x = \frac{(2+m)^2}{4}$

Or $y = x - 2m$ donc $y = \frac{(2+m)^2}{4} - 2m = \frac{4 + 4m + m^2 - 8m}{4}$

$y = \frac{4 - 4m + m^2}{4} = \frac{(2-m)^2}{4}$ donc $T_m\left(\frac{(2+m)^2}{4} ; \frac{(2-m)^2}{4}\right)$

c - Démontrons que (D_m) est tangente à (C) en T_m

(D_m) est tangente à (C) en $T_m \Leftrightarrow T_m \in (C)$ et $f'\left(\frac{(2+m)^2}{4}\right) = \frac{m-2}{m+2}$

On a : $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 4 \Leftrightarrow f(x) = (\sqrt{x} - 2)^2$

Calculons $f\left(\frac{(2+m)^2}{4}\right)$.

On a : $f\left(\frac{(2+m)^2}{4}\right) = \left(\sqrt{\frac{(2+m)^2}{4}} - 2\right)^2 = \left(\frac{2+m}{2} - 2\right)^2$

$$f\left(\frac{(2+m)^2}{4}\right) = \left(\frac{m-2}{2}\right)^2$$

d'où : $f\left(\frac{(2+m)^2}{4}\right) = \frac{(m-2)^2}{4}$ donc $T_m \in (C)$: (1)

Calculons $f'\left(\frac{(2+m)^2}{4}\right)$.

On sait que : $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

On a : $f'\left(\frac{(2+m)^2}{4}\right) = \frac{\sqrt{\frac{(2+m)^2}{4}}-2}{\sqrt{\frac{(2+m)^2}{4}}} = \frac{\frac{2+m}{2}-2}{\frac{2+m}{2}}$

$$f'\left(\frac{(2+m)^2}{4}\right) = \frac{m-2}{m+2} \qquad : (2)$$

Les relations (1) et (2) montrent que (D_m) est tangente à (C) au point T_m

2 °) a – Démontrons que H_m à pour coordonnées (m ; - m)

On a : (δ) : $y = -x$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite (δ).

$H_m\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est le projeté orthogonal de T_m sur (δ) si et seulement si $H_m \in (\delta)$ et $\overrightarrow{T_mH_m}.\vec{u} = 0$.

On a : $\overrightarrow{T_mH_m}\begin{pmatrix}a-\frac{1}{4}(m+2)^2\\b-\frac{1}{4}(m-2)^2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

D'où $\begin{cases}H_m \in (\delta)\\\overrightarrow{T_mH_m}.\vec{u} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b-a\\a-\frac{1}{4}(m+2)^2-b+\frac{1}{4}(m-2)^2 = 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}b=-a\\a-b=2m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-a\\a=m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-m\\a=m\end{cases}$ Donc $H_m\begin{pmatrix}m\\-m\end{pmatrix}$

b - $F(2;2)$; $A_m\begin{pmatrix}2+m\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}0\\2+m\end{pmatrix}$ et $H_m\begin{pmatrix}m\\-m\end{pmatrix}$

On a : $\overrightarrow{FA_m}\begin{pmatrix}m\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{FB_m}\begin{pmatrix}-2\\-m\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{H_mA_m}\begin{pmatrix}2\\m\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{H_mB_m}\begin{pmatrix}-m\\2\end{pmatrix}$

On a aussi : $FA_m = \sqrt{m^2+(-2)^2} = \sqrt{m^2+4}$

$FB_m = \sqrt{(-2)^2+(-m)^2} = \sqrt{4+m^2}$

$H_mA_m = \sqrt{2^2+m^2}$

$H_mB_m = \sqrt{(-m)^2+(2)^2} = \sqrt{m^2+4}$

Et on a : $\overrightarrow{FA_m}.\overrightarrow{FA_m} = (-2m)+(2m) = 0$

Par conséquent le quadrilatère $A_mH_mB_mF$ est un carré.

3) Pour $m = \frac{1}{2}$, $F\left|2\ ;\ 2\right|$;$A_{1/2}\left|\frac{5}{2}\ ;\ 0\right|$;$B_{1/2}\left|0;\frac{3}{2}\right|$.

$\left|D_{1/2}\right|: y = -\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$

(Voir figure)

VOIR FEUILLE ANNEXE

PARTIE C

1) a- Démontrons H d'affixe $\frac{z-i\bar{z}}{2}$ est le projeté orthogonal de M sur la droite (δ).

Puisque $H\binom{a}{b}$ est le projeté orthogonal de $M\binom{x}{y}$ sur la droite (δ) on a :

$\begin{cases} H \in (\delta) \\ \overrightarrow{HM}.\vec{u} = 0 \end{cases}$ avec $\vec{u}\binom{1}{-1}$ vecteur directeur de (δ).

On a : $\begin{cases} H \in (\delta) \\ \overrightarrow{HM}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ (x-a)-(y-b) = 0 \end{cases}$ car $\overrightarrow{HM}\binom{x-a}{y-b}$

$\begin{cases} H \in (\delta) \\ \overrightarrow{HM}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ b-a = y-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ 2b = y-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2}(y-x) \\ a = \frac{1}{2}(x-y) \end{cases}$

$\Leftrightarrow a + bi = \frac{1}{2}(x-y) + \frac{1}{2}(y-x) \Leftrightarrow a + bi = \frac{1}{2}(x+yi) + \frac{1}{2}(-y-xi)$

$\Leftrightarrow a + bi = \frac{1}{2}(x+yi) - \frac{1}{2}i(x-yi) \Leftrightarrow a+bi = \frac{z-i\bar{z}}{2}$

Donc le point H d'affixe $\frac{z-i\bar{z}}{2}$ est le projeté orthonormé de H sur (δ).

b. Calculons la distance.

$d(M,(\delta)) = MH = |z - z_0| = \left|z - \frac{z-i\bar{z}}{2}\right| = \left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right|$

2. a. Déterminons l'ensemble (E)

$\left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right| = |z-(2+2i)| \Leftrightarrow |z + i\bar{z}| = 2|z - (2+2i)|$

Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$|x + iy + i(x - iy)| = 2|x + iy - 2 - 2i| \Leftrightarrow$

$|(x+y) + i(x+y)| = 2|(x-2) + i(y-2)| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x+y)^2 + (x+y)^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow$

$(x+y)^2 + (x+y)^2 = 4[(x-2)^2 + (y-2)^2] \Leftrightarrow$

$x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 4x^2 - 8x + 16 + 4y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow$

$2x^2 + 2y^2 + 4xy = 4x^2 + 4y^2 - 8x - 8y + 32 \Leftrightarrow$

$2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8x - 8y + 32 = 0 \Leftrightarrow$

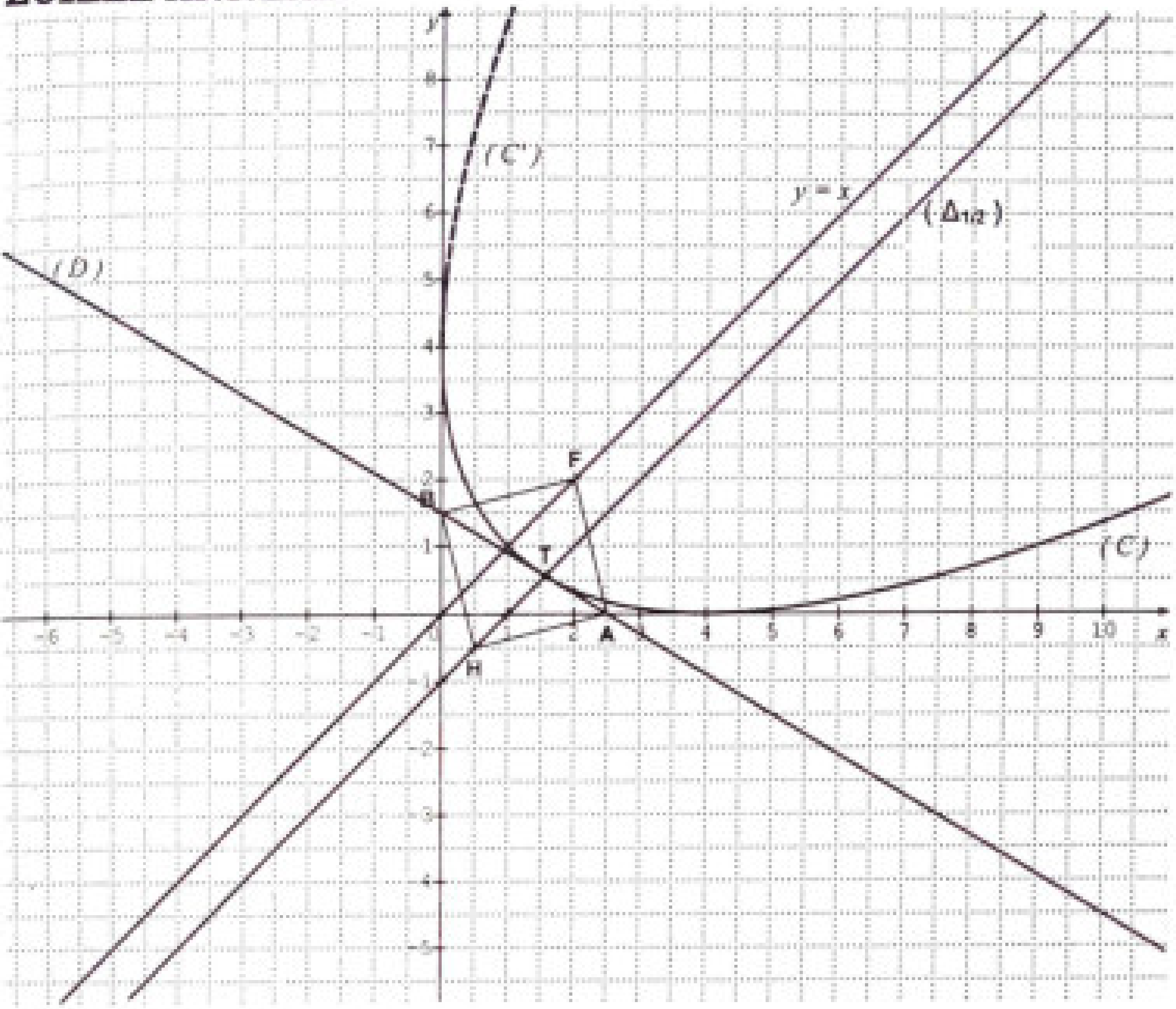
$x^2 + y^2 - 2xy - 4x - 4y + 16 = 0 \Leftrightarrow M\binom{x}{y} \in (E)$. Donc l'ensemble (E) est bien une courbe vérifiant : $\left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right| = |z-(2+2i)|$

b. Interprétation géométrique ; nature et élements caracteristiques.

$\left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right| = |z-(2+2i)| \Leftrightarrow d(M,(\delta)) = d(M,F) \Leftrightarrow \frac{d(M,(\delta))}{d(M,F)} = 1$

Donc l'ensemble (E) est la parabole de foyer $F\binom{2}{2}$ et de directrice (δ) d'équation y=x

FEUILLE ANNEXE



EXERCICE 10 : Bac C 2005 Session Normale

Partie I : Etude de f

1. Soit Ψ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $\Psi(x) = 1 + xe^x$.

   a) Etudions les variations de puis dressons son tableau de variation.

Dérivée de $\Psi(x)$: $\Psi'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\Psi'(x)$ est du signe de $1 + x$ car $e^x > 0$, donc on a :

$\forall x \in]-\infty ; -1[$, $\Psi'(x) < 0$ donc Ψ est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$.

$\forall x \in]-1 ; +\infty[$, $\Psi'(x) > 0$ donc Ψ est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\Psi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\Psi(x)$	↘		$1 - e^{-1}$		↗

b) Démontrons que pour tout nombre réel x, $\Psi(x) > 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\Psi(x)$ admet un minimum relatif qui est $1 - e^{-1} > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Psi(x) > 0$

c) Déduisons l'ensemble de définition de f.

$f(x) = \dfrac{x}{1 + xe^{x}} = \dfrac{x}{\Psi(x)}$ Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Psi(x) > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$.

2. Soit φ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $\varphi(x) = 1 - x^2e^x$.

a) Calculons les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to -\infty} (1 - x^2e^x) = 1 \text{ car } \lim_{x \to -\infty} x^2e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - x^2e^x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \to +\infty} x^2e^x = +\infty$$

b) Etudions les variations de φ puis dressons son tableau de variation.

$\varphi(x) = 1 - x^2e^x \Rightarrow \varphi'(x) = -(2xe^x + x^2e^x) = -2xe^x - x^2e^x) = xe^x(-2 - x)$

Tableau de signe de φ'

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
e^x		$-$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$-2-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\forall x \in]-\infty ; -2[\cup]0 ; +\infty[$ $\varphi'(x) < 0$ donc φ est strictement décroissante sur $]-\infty ; -2[$ et sur $]0 ; +\infty[$

$\forall x \in]-2 ; 0[$, $\varphi'(x) > 0$ donc φ est strictement croissante sur $]-2 ; 0[$.

Tableau de variation de φ

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	$1 - \frac{4}{e^2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

c) Démontrons que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution comprise entre 0,7 et 0,71.

$\forall x \in]0 ; +\infty[$ φ est continue strictement décroissante.

Elle réalise une bijection de $]0 ; +\infty[$ dans $f(]0 ; +\infty[) =]-\infty ; 1[$

Or $0 \in]-\infty ; 1[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

$\varphi(0,7) = 1 - (0,7)^2e^{0,7} = 0,01326$

$\varphi(0,71) = 1 - (0,71)^2e^{0,71} = -0,02533$

On a : $\varphi(0,71)\times\varphi(0,7) < 0$ donc $\alpha\in]0,7\ ;\ 0,71[$

c) Signe de φ.

On a $\varphi(\alpha) = 0$, comme φ est strictement décroissante sur $]0\ ;+\infty[$ alors :

Si $x \in]\,0\ ;\alpha[$, $\varphi(0) > \varphi(\alpha)$ donc $\varphi(x) > 0$

Si $x \in]\alpha\ ;+\infty[$, $\varphi(x) < 0$

En conclusion :

- $\forall\, x \in]-\infty\ ;\alpha[$, $\varphi(x) > 0$,
- $\forall\, x \in]\alpha;+\infty[$, $\varphi(x) < 0$,

3 . On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrons que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(1+xe^x)^2}$.

$$f(x) = \frac{x}{1+xe^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1+xe^x)-(e^x+xe^x)x}{(1+xe^x)^2} = \frac{1+xe^x-xe^x-x^2e^x}{(1+xe^x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1-x^2e^x}{(1+xe^x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(1+xe^x)^2}$$

b) Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+xe^x} = -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to-\infty}(1+xe^x) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+xe^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\frac{1}{x}+e^x\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+e^x} = 0$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

c) Etudions les variations de f puis dressons son tableau de variation.

$f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$ car $(1+xe^x)^2 > 0$ donc :

- $\forall\, x \in]-\infty\ ;\alpha[$ $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha[$.
- $\forall\, x \in]\,\alpha\ ;+\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]\,\alpha\ ;+\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

4. Soit (D) la droite d'équation y = x.

a) Démontrons que (D) est asymptote à ($\mathscr{C}$) en - ∞.

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{1+xe^x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x-x-x^2e^x}{1+xe^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^2e^x}{1+xe^x}=0$$

car $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0$

Donc la droite (D) d'équation y = x est une asymptote oblique à ($\mathscr{C}$) en - ∞

b) Etudions la position relative de ($\mathscr{C}$) par rapport à (D).

$$f(x)-y=\frac{1-x^2e^x}{1+xe^x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + xe^x = \Psi(x) > 0$ donc $f(x) - y$ est du signe de $-x^2e^x$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - y < 0 \Rightarrow f(x) < y$ donc ($\mathscr{C}$) en dessous de (D)

c) Démontrons que la droite (D) est tangente à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 0.

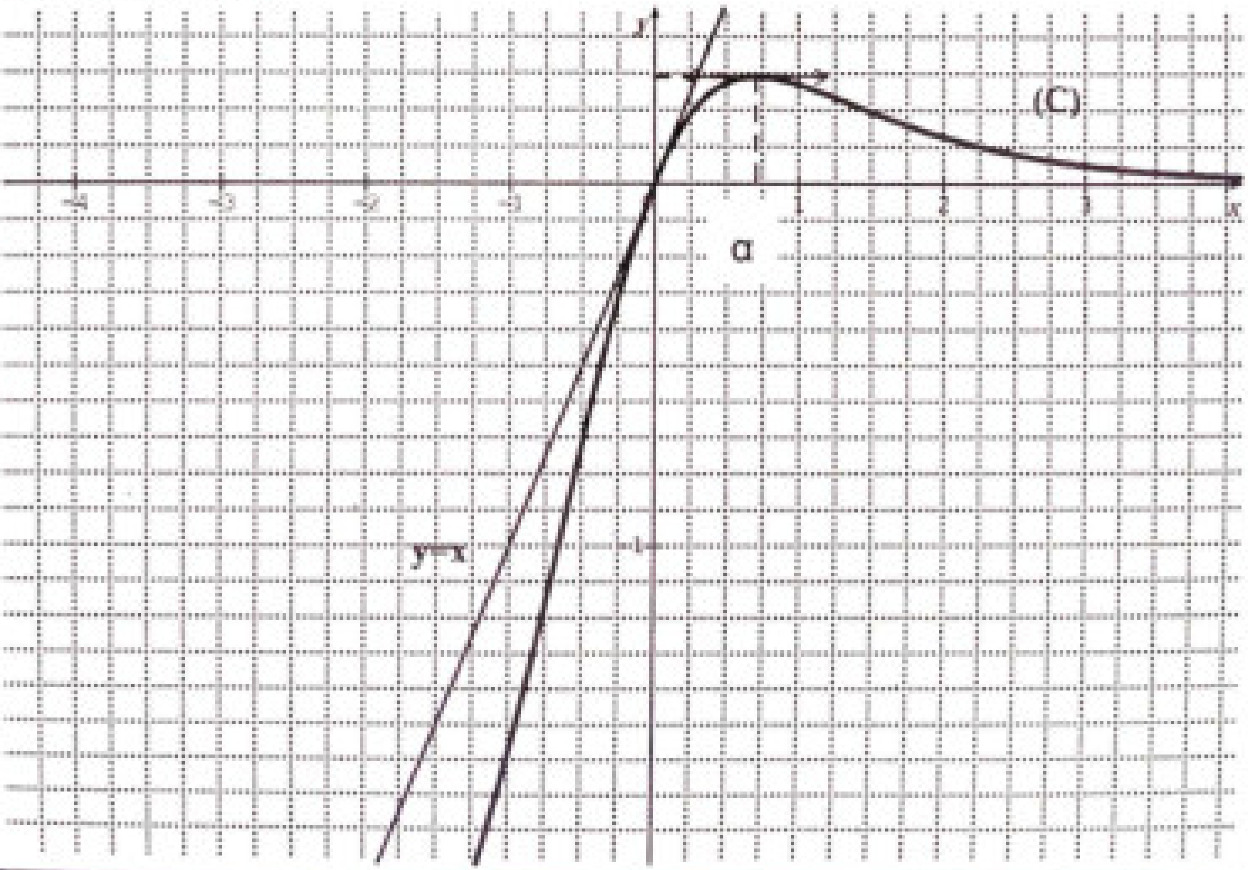
$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$$\text{or}\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+xe^x} & \Rightarrow\quad f(0)=\dfrac{0}{1+0\times e^0}=0\\[2ex] f'(x)=\dfrac{1-x^2e^x}{(1+xe^x)^2} & \Rightarrow\quad f'(0)=\dfrac{1-0^2\times e^0}{(1+0\times e^0)^2}=1\end{cases}$$

Donc $y = 1(x-0) + 0 \quad\Rightarrow\quad y = x$.

En conclusion, la droite (D) est tangente à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 0

d) Traçons (D) et ($\mathscr{C}$)



Partie II : Etude d'une suite

1. a) Donnons une interprétation graphique sans calculer I_1.

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+te^t}dt \Rightarrow I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+te^t}dt = \int_0^1 f(t)dt \quad \text{avec} \quad f(t) = \frac{t}{1+te^t}$$

Or f est continue et positive sur [0 ; 1] donc I_1 est l'aire de la partie du plan délimitée par ($\mathscr{C}$), l'axe (OI) et les droites d'équation x = 0 et x = 1

b) Démontrons que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+te^t}dt \Rightarrow I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+te^t}dt$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+te^t}dt - \int_0^1 \frac{t^n}{1+te^t}dt = \int_0^1 \left(\frac{t^{n+1}}{1+te^t} - \frac{t^n}{1+te^t}\right)dt = \int_0^1 \frac{t^n(t-1)}{1+te^t}dt$$

On a $t\in[0\ ;\ 1] \Leftrightarrow 0 \le t \le 1$ et $\frac{t^n}{1+te^t} > 0$ donc $\frac{t^n(t-1)}{1+te^t} \le 0$

On a $I_{n+1} - I_n \le 0 \Leftrightarrow I_{n+1} \le I_n$ donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) Démontrons que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On a f(0) d'où I_n est décroissante et minorée par 0 donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. a) Démontrons que : $\forall\ x \in [0\ ;\ 1]$, $\frac{1}{1+e} \le \frac{1}{1+te^t} \le 1$.

$\Psi(x) = 1 + xe^x$ donc Ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$0 \le t \le 1 \Rightarrow e^0 \le e^t \le e^1 \Rightarrow 1 \le e^t \le e \Rightarrow 0\times 1 \le te^t \le 1\times e \Rightarrow 0 \le te^t \le e$

$\Rightarrow 0+1 \le 1+te^t \le 1+e \Rightarrow 1 \le 1+te^t \le 1+e \Rightarrow 1 \ge \frac{1}{1+te^t} \ge \frac{1}{1+e} \Leftrightarrow \frac{1}{1+e} \le \frac{1}{1+te^t} \le 1$

$\Rightarrow$ b) Déduisons que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{(1+e)(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{(n+1)}$.

On a : $\frac{1}{1+e} \le \frac{1}{1+te^t} \le 1$ et $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+te^t}dt$

Donc $\frac{t^n}{1+e} \le \frac{t^n}{1+te^t} \le t^n$ car $t^n \ge 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{t^n}{1+e}dt \le \int_0^1 \frac{t^n}{1+te^t}dt \le \int_0^1 t^n dt \Rightarrow \left[\frac{1}{1+e}\times\frac{t^{n+1}}{1+n}\right]_0^1 \le I_n \le \left[\frac{t^{n+1}}{1+n}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+e}\times\frac{1}{1+n} \le I_n \le \frac{1}{1+n} \Rightarrow \frac{1}{(1+e)(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{(n+1)}$$

c) Déterminons la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\lim_{x\to+\infty} I_n = \lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+te^t}dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+n} = 0 \quad \text{car} \quad \frac{1}{(1+e)(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{(n+1)}$$

CHAPITRE XI : CALCUL INTEGRAL

FICHE DE COURS

INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle K.

On appelle intégrale de a à b de f, le nombre réel F(b) - F(a), où F est une primitive de f sur K.

On note: $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$

Propriétés

f et g sont des fonctions continues sur [a ; b] , on a :

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$; $\int_a^a f(x)dx = 0$

$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ (Relation de Chasles)

La primitive de f sur K qui s'annule en a est la fonction F définie par :

F(x) = $\int_a^x f(t)dt$ $\int_a^b \beta \cdot f(x)dx = \beta \cdot \int_a^b f(x)dx$;

$\int_b^a (f+g)(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_b^a g(x)dx$

Si f est positive sur [a ; b] alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Si f $\geq$ g sur [a ; b], alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Inégalité de la moyenne

Si m et M sont deux nombres réels tels que pour tout

x élément de [a ; b], et m $\leq$ f(x) $\leq$ M alors m(b – a) $\leq \int_a^b f(x)dx \leq$ M(b – a)

Si $|f(x)| \geq M$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq M\,|b - a|$

Si f est fonction paire alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$ et $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Si f est une fonction impaire alors : $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$ et $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Si f est une périodique de période T, alors $\int_{b+T}^{a+T} f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$ et

$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

Intégration par parties

Soit U et V deux fonctions dérivables sur un intervalle K telles que les dérivées U' et V' sont continues sur K ; a et b deux éléments de K ; On a :

$\int_a^b U(x) \cdot V'(x)dx = \left[U(x)V(x) \right]_a^b - \int_a^b U'(x) \cdot V(x)dx$

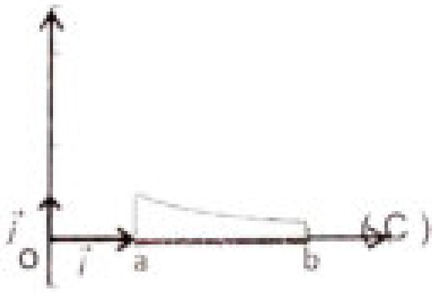
Applications du Calcul intégral

1° Calculs d'aires

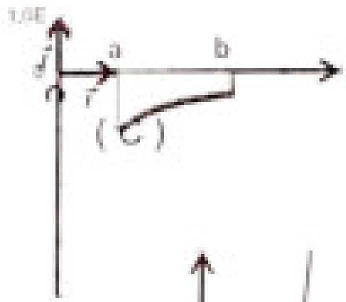
Soit f une fonction dérivable sur [a ; b], avec $a < b$; (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie délimitée par (C), l'axe (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

a. f est positive sur [a ; b]

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx$$



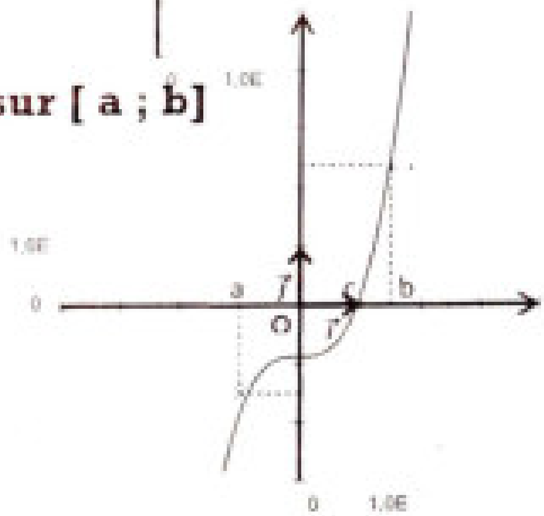
b. f est négative sur [a ; b]



$$\mathcal{A} = \int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

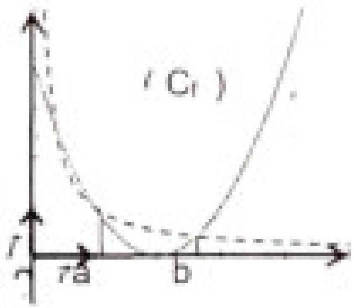
c. Si f s'annule et change de signe sur [a ; b]

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|dx = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



d. Portion délimitée par deux courbes

Si pour tout $x \in [a ; b]$, $f(x) > g(x)$ alors $\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$



EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1 : Bac C 1997 Session normale

On considère les intégrales I_n et J_n définies par :

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx$, et, pour tout entier naturel n non nul, par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x}\,dx$,

$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$ et pour tout entier naturel n non nul, par $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x\,dx$

1. a. Calculer J_0 et J_n pour tout entier naturel n non nul.

   b. Calculer $I_2 - I_0$ et démontrer que pour tout entier naturel n,

$$I_{n+2} - I_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

2. a. Calculer I_1

   b. En déduire I_3

3. Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

a. Démontrer que, pour tout réel x : $\cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

b. On pose, pour tout x élément de $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$: $u(x) = \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

Calculer $\frac{u'(x)}{u(x)}$. En déduire une primitive de f sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

c. Calculer I_0 puis I_2 et I_4 .

EXERCICE 2 : Bac E 1999 Session normale

On considère la fonction f suivante :

$$f : \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \tan x$$

1. Démontrer que f est une bijection.

On notera g la bijection réciproque de l'application f.

2. On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

3. Calculer les intégrales suivantes : $I = \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{1+x}\,dx$; $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

EXERCICE 3

On considère les intégrales $A = \int_0^x e^t \cos(2t)\,dt$; $B = \int_0^x e^t \sin(2t)\,dt$

1. A l'aide d'intégrations par parties appliquées à A et B, établir deux relations entre A et B.
2. En déduire les expressions de A et de B

EXERCICE 4

On considère les intégrales $I = \int_0^1 e^x \cos^2 x\,dx$ et $J = \int_0^1 e^x \sin^2 x\,dx$

1. Calculer $I+J$, puis $I-J$
2. En déduire les expressions de I et J.

EXERCICE 5

On considère l'expression $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$, avec $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer J_0
2. a. A l'aide d'intégration par parties, calculer J_1

   b. Exprimer J_{n+1} en fonction J_n

   c. Calculer J_2

EXERCICE 6

On donne l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x\,dx$, avec $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer I_0
2. A l'aide d'intégration par parties, calculer I_1 et I_2
3. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} à l'aide d'intégration par parties

EXERCICE 7

Soit la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x-1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1. Etudier la dérivabilité de f en 1; puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Etudier le sens de variation de f; puis dresser son tableau de variation.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$; puis donner une interprétation graphique de ce résultat.
4. Représenter graphiquement la courbe (C) de f.
5. Calculer l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C), l'axe (OI) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1 : Bac C 1997 Session normale

1. a. Calculons J_0 et J_n

$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} cosx\, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (sinx)^n cosx\, dx$

Posons $u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$

Alors $(sinx)^n \cos x = u^n(x).u'(x)$

Donc une primitive de la fonction $u^n(x).u'(x)$ est la fonction $\frac{1}{n+1} u^{n+1}(x)$.

On a : $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (sinx)^n cosx\, dx$

$J_n = \frac{1}{n+1} [(sinx)^{n+1}]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$J_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

b. Calculons $I_2 - I_0$

$I_2 - I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sin^2x}{cosx} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{cosx} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sin^2x - 1}{cosx} dx$

$I_2 - I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-cos^2x}{cosx} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} - cosx\, dx$

$I_2 - I_0 = [-sinx]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\sin\frac{\pi}{3} + \sin 0$

$I_2 - I_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\forall n \geq 1$, $I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(sinx)^{n+2}}{cosx} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{cosx} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{(sinx)^{n+2}}{cosx} - \frac{(\sin x)^n}{cosx}\right) dx$

$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{(sinx)^n}{cosx}(sin^2x - 1\right) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{(sinx)^n}{cosx}(-co\ ^2x\right) dx$

$I_{n+2} - I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} (sinx)^n cosx\, dx$

$I_{n+2} - I_n = -J_n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} - I_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

2. a. Calculons I_1

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinx}{cosx} dx$

On pose $u(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = -\sin x$ donc $\frac{sinx}{cosx} = -\frac{u'(x)}{u(x)}$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinx}{cosx} dx = -[\ln| cosx |]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln\left|cos\frac{\pi}{3}\right| + \ln|\cos 0|$

$I_1 = -ln\frac{1}{2}$ d'où $I_1 = \ln 2$

b. En déduire I_3

D'après 1. b. $I_3 - I_1 = -\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{8} \Rightarrow I_3 = -\frac{3}{8} + I_1$ d'où $I_3 = -\frac{3}{8} + \ln 2$

3. a. On a : $2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left[2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Donc $2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos x$

b. Calculons $\frac{u'(x)}{u(x)}$

$\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{3}]$, $u'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

On a : $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\times\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\times\frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\times\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{\cos x}$ d'après 3°) a -

D'où $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Par conséquent, une primitive de f sur $[0 ; \frac{\pi}{3}]$ est : $F(x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

c. Calculons I_0 ; puis I_2 et I_4

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}\,dx$

$I_0 = \left[\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right) - \ln\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)$

$I_0 = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$ et car $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$I_0 = \ln(\sqrt{3}+2)$

On a : $I_2 - I_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'après 1°) b –

$I_2 = I_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $I_2 = \ln(\sqrt{3}+2) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

On a aussi : $I_4 - I_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ d'après 1°) b –

$I_4 - I_2 = -\frac{\sqrt{3}}{8}$ d'où $I_4 = I_2 - \frac{\sqrt{3}}{8} \Rightarrow I_4 = \ln(\sqrt{3}+2) - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

Donc $I_4 = \ln(\sqrt{3}+2) - \frac{5\sqrt{3}}{8}$

EXERCICE 2: Bac E 1999 Session normale

1. Montrons que f est une bijection

L'ensemble de définition de f est : $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et on a : $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) > 0$, donc f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

Elle réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ vers $f\left(\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\right)$ avec $f\left(\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$

2. Montrons que $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on sait que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' o f^{-1}(x)}$. Or $f^{-1}(x) = g(x)$ donc

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{1}{f' o g(x)} \Leftrightarrow g'(x) = \frac{1}{1+(f o g(x))^2} \Leftrightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

3. Calculons $I = \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

D'où $I = \int_{-1}^{0}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int_{-1}^{0}(1 - g'(x))dx$

$I = [x - g(x)]_{-1}^{0} = (0 - g(0)) - (-1 - g(-1))$

$I = 1 - \frac{\pi}{4}$

Calculons $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

$\forall x \in \mathbb{R}$, On sait que $(g\ o\ \sin)'(x) = g'(\sin x) \times \cos x = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

Par conséquent, on a : $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (g\ o\sin)'(x)\,dx$

$K = [g\ o\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = (g\ o\sin)(\frac{\pi}{2}) - (g\ o\sin)(0)$

$K = g(1) - g(0) = \frac{\pi}{4}$

EXERCICE 3

1. $A = \int_0^x e^t \cos 2t\,dt$.

Posons $u = \cos 2t$ et $v' = e^t$

$u' = -2\sin 2t$ et $v = e^t$

d'où :

$A = \left[e^t\cos 2t\right]_0^x - \int_0^x -2e^t\sin 2t\,dt = \left[e^t\cos 2t\right]_0^x + 2B$

$A = e^x\cos 2x - 1 + 2B$

$B = \int_0^x e^t\sin 2t\,dt$.

Posons $u = \sin 2t$ et $v' = e^t$

$u' = 2\cos 2t$ et $v = e^t$

$B = \left[e^t\sin 2t\right]_0^x - \int_0^x 2e^t\cos 2t\,dt = \left[e^t\sin 2t\right]_0^x - 2A$

$B = e^x\sin 2x - 2A$

2. Les expressions de A et B sont :

On résoud le système suivant : $A - 2B = e^x\cos 2x - 1$

$2A + B = e^x\sin 2x$

Et on obtient $B = \frac{e^x(-2\cos 2x + \sin 2x) + 2}{5}$ et $A = \frac{e^x(\cos 2x + 2\sin 2x) - 1}{5}$

EXERCICE 4

1. $I + J = \int_0^t e^x cos^2x\,dx + \int_0^t e^x sin^2x\,dx$

$I + J = \int_0^t e^x(\,cos^2x + \sin^2x\,)\,dx = \int_0^t e^x\,dx$ Car $\cos^2x + \sin^2x = 1$

$I + J = \left[e^x\right]_0^t = e^t - 1$

$I - J = \int_0^t e^x cos^2x dx - \int_0^t e^x sin^2x dx$

$I - J = \int_0^t e^x(co\ ^2x - \sin^2 x)dx = \int_0^t e^x\,cos2x\,dx$

Posons $u = \cos 2x$ et $v' = e^x$

$u' = -2\sin 2x$ et $v = e^x$

$I - J = \left[e^x\cos 2x\right]_0^t - \int_0^t -2e^x\sin 2x\,dx = \left[e^x\cos 2x\right]_0^t + \int_0^t 2e^x\sin 2x\,dx$

Intégrons $\int_0^t 2e^x\sin 2x\,dx$.

Posons $u = \sin 2x$ et $v' = 2e^x$

$u' = 2\cos 2x$ et $v = 2e^x$

$\int_0^t 2e^x\sin 2x\,dx = \left[2e^x\sin 2x\right]_0^t - \int_0^t 4e^x\cos 2x\,dx = \left[2e^x\sin 2x\right]_0^t - 4(\,I - J\,)$

Donc $I - J = \left[e^x\cos 2x\right]_0^t + \left[2e^x\sin 2x\right]_0^t - 4(\,I - J\,)$

$5(\,I - J\,) = e^t\cos 2t - 1 + 2e^t\sin 2t$

$I - J = \dfrac{e^t\cos 2t + 2e^t\sin 2t - 1}{5}$

2. On a $I + J = e^t - 1$ et $I - J = \dfrac{e^t\cos 2t + 2e^t\sin 2t - 1}{5}$

Donc $2I = \dfrac{e^t\cos 2t + 2e^t\sin 2t - 5 + 5e^t}{5}$ d'où $I = \dfrac{e^t\cos 2t + 2e^t\sin 2t - 5 + 5e^t}{10}$

$2J = \dfrac{-e^t\cos 2t - 2e^t\sin 2t - 4 + 5e^t}{5}$ d'où $J = \dfrac{-e^t\cos 2t - 2e^t\sin 2t - 4 + 5e^t}{10}$

EXERCICE 5

1. $J_0 = \int_1^e x(\ln x)^0 dx = \int_1^e x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

2. a.

$J_1 = \int_1^e x\ln x\,dx$. Posons $u = \ln x$ et $v' = x$

$u' = \dfrac{1}{x}$ et $v = \dfrac{1}{2}x^2$

$J_1 = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$

b.

$J_{n+1} = \int_1^e x(\ln x)^{n+1}\,dx$. Posons $u = (\ln x)^{n+1}$ et $v' = x$

$u' = (n+1)\dfrac{(\ln x)^n}{x}$ et $v = \dfrac{1}{2}x^2$

$$J_{n+1} = \left[\frac{1}{2}x^2(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{n+1}{2}x(\ln x)^n\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{n+1}{2}\int_1^e x(\ln x)^n dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{n+1}{2}J_n \text{, donc}$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2}e^2 - \frac{n+1}{2}J_n$$

c. $J_2 = \dfrac{1}{2}e^2 - J_1 = \dfrac{1}{4}(e^2 - 1)$

EXERCICE 6

1.

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x\,dx.$

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

2.

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

Posons $u = x$ et $v' = \cos x$

$u' = 1$ et $v = \sin x$

$$I_1 = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$.

Posons $u = x^2$ et $v' = \cos x$

$u' = 2x$ et $v = \sin x$

$$I_2 = [x^2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\,dx$$

Intégrons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\,dx.$

Posons $u = 2x$ et $v' = \sin x$

$u' = 2$ et $v = -\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\,dx = [-2x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\cos x\,dx = [-2x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

donc $I_2 = [x^2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-2x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2$$

3. Relation entre I_n et I_{n-2}

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx.$

Posons $u = x^n$ et $v' = \cos x$

$u' = nx^{n+1}$ et $v = \sin x$

$I_n = \left[x^n \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} nx^{n-1} \sin x \, dx$

Intégrons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} nx^{n-1} \sin x \, dx$.

Posons $u = nx^{n-1}$ et $v' = \sin x$

$u' = n(n-1)x^{n-2}$ et $v = -\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} nx^{n-1} \sin x \, dx = \left[-nx^{n-1}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n(n-1)x^{n-2} \cos x \, dx$$

$$= \left[-nx^{n-1}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + n(n-1)\, I_{n-2}$$

Donc , on obtient :

$$I_n = \left[x^n \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-nx^{n-1}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - n(n-1)\, I_{n-2}$$

$$I_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)\, I_{n-2}$$

EXERCICE 7

1. $f(x) = \sqrt{x-1}$ $D_f = [\,1\,;\,+\infty\,[$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 1} \sqrt{x-1} = 0$$

Donc f n'est pas dérivable en 1.

Interprétation : la courbe (C) de f admet une tangente verticale au point A(1, 0)

2. Sens de variation de f

Pour tout $x \in\ ]\,1\,,+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$\forall x \in\ ]\,1\,,+\infty\,[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]\,1\,,+\infty\,[$

Tableau de variation de f

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

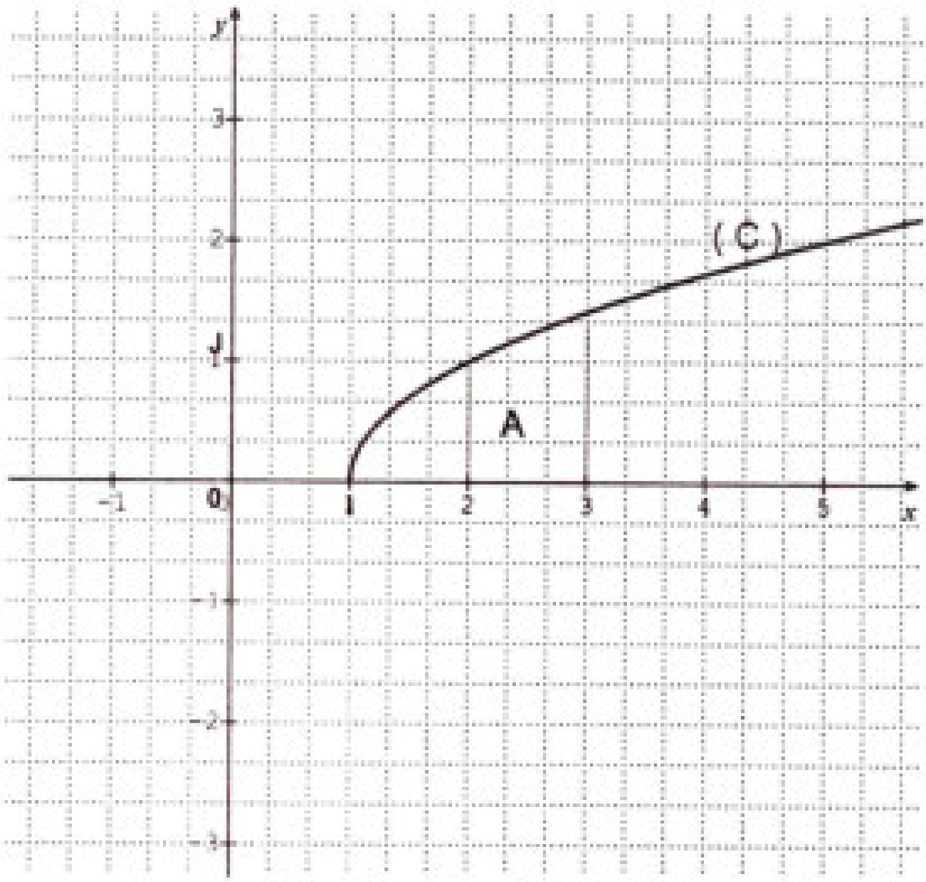
3. On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{x-1}} = 0$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$ donc la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe (OI)

4. Courbe (C) de f



5. L'aire du domaine est : $A = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \sqrt{x-1}\,dx = \left[\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3 = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$ u.a

CHAPITRE XII : SUITES NUMERIQUES

FICHE DE COURS

Définition

Une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

L'image de l'entier n par l'application U se note U_n.

L'ensemble des termes de la suite se note $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On note aussi U_n « le terme de rang n de la suite U ».

Sens de variation d'une suite

On dit qu'une suite U, définie dans $\mathbb{N}$ est :

- Strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} > U_n$
- Strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} < U_n$
- Constante (ou stationnaire) si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = U_n$

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une suite U, on peut :

- Etudier le signe de $U_{n+1} - U_n$
- Comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1, si tous les termes de U sont positifs
- Faire un raisonnement par récurrence

Suites majorées, minorées, bornées

On dit qu'une suite numérique U est :

- minorée s'il existe un nombre réel m, tel que : $U_n > m$
- Majorée s'il existe un nombre réel M tel que : $U_n < M$
- Bornée si U_n est à la fois majorée et minorée. ($m < U_n < M$)

EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1 : Bac C 1995 Session normale

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}dx.$

1. a. Démontrer que U_n est défini pour tout entier naturel non nul n.

   b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \geq 0.$

2. a. Etudier le sens de variation de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b. En déduire la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \int_0^1 x^n dx.$

a. Démontrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

b. En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

EXERCICE 2 : Bac C 1996 Session normale

Soit la suite réelle U de premier terme U_0 égal à 5 et définie par la relation de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \frac{2u_n + 4}{u_n + 5}$

1. a. Démontrer que pour tout entier n : $u_n > 0$

b. Démontrer que pour tout entier n : $u_n \neq 1$

2. Donner dans un repère orthonormé (O, I, J) une représentation graphique de la fonction f définie sur $]-5;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+4}{x+5}$ (unité : 2cm)

Utiliser cette représentation graphique et la droite (D) d'équation y = x pour placer u_0, u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses.

D'après le graphique, quelle hypothèse peut-on faire sur le sens de variation de U et sa limite ?

3. Soit V la suite réelle de terme général v_n tel que : $v_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 4}$

a. Démontrer que V est une suite géométrique et en donner le premier terme et la raison.

b. Démontrer que V est convergente et calculer sa limite.

c. En déduire que la suite U converge et calculer sa limite.

EXERCICE 3 : Bac C 1998 Session normale

Soit a un réel non nul. On considère la suite U définie par :

$$\begin{cases} U_0=0\,,U_1=1 \\ \textit{pour tout entier n non nul, } aU_{n+1}=(a+1)U_n-U_{n-1} \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de a, la suite U est –elle arithmétique ?

Dans la suite de l'exercice, on supposera le réel a différent de 1.

2. Démontrer que la suite V définie pour tout entier naturel n par :

$V_n=U_{n+1}-U_n$ est une suite géométrique dont on précisera le 1er terme et la raison.

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $U_n=V_0+V_1+...+V_{n-1}$

b. Pour tout entier naturel n non nul, calculer U_n en fonction de n et de α.

c. Pour quelles valeurs de α, la suite U est-elle convergente ?

Préciser alors la limite de U en fonction de α.

4. On choisit $\alpha=2$

Trouver le plus petit naturel p tel que $\left|U_p-2\right|<10^{-3}$

On donne : $\ln 2\simeq 0,69$ *et* $\ln 5\simeq 1,61$

EXERCICE 4 : Bac C 1999 Session de remplacement

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On considère les fonctions f_n dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et définies par :

$f_n(x)=x+n\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Calculer la limite de f_n en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout nombre réel x appartenant à $]0;+\infty[$, calculer $f'_n(x)$.
3. Etudier le sens de variation de f_n et dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que l'équation, $x\in\,]0;n[\;f_n(x)=0$, admet une unique solution a_n
5. Démontrer que : $\forall n\geq 3,\ 1\langle a_n\langle e$
6. Démontrer que : $\ln(a_{n+1}) = f_n(a_{n+1})$
7. Démontrer que la suite (a_n) est décroissante.
8. En déduire que la suite (a_n) converge.
9. Démontrer que : $\forall\ n\geq 3,\ \dfrac{1}{n}\langle \ln(a_n)\langle\dfrac{e}{n}$
10. En déduire la limite de la suite (a_n).

EXERCICE 5 : Bac C 2001 Session de remplacement

On considère la suite (J_n) définie : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \int_{-1}^{1}(t^2 - 1)^n dt$

1. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n :

a. J_n est positif si n est pair.

b. J_n est négatif si n est impair.

2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = 2\int_{0}^{1}(t^2 - 1)^n dt$

3. Calculer J_0, J_1 et J_2

4. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = \frac{-2n}{1+2n} J_{n-1}$

5. Retrouver J_1 et J_2 connaissant J_0

6. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = \frac{(-1)^n \times n! \times 2^{n+1}}{3\times5\times7\times\ldots\times(2n+1)}$

EXERCICE 6 : Bac C 2000 Session normale

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé (O, I, J).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_c telles que : $z_A = -3, z_B = 2+2i$ et $z_c = 7i$

1. Construire le triangle ABC.

2. Vérifier que les nombres complexes $z_A - z_B$ et $z_c - z_B$ ont le même module que l'on précisera.

3. Ecrire le nombre complexe $\dfrac{z_A - z_B}{z_c - z_B}$ sous forme trigonométrique.

4. Déduire des questions 2) et 3) que ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

5. Soit S la similitude directe de centre A qui applique B en C.

a. Déterminer l'angle et le rapport de S.

b. Construire, après justification, les points E et F images de C et E par la similitude S. (*on ne demande pas de chercher les coordonnées, ni les affixes de E et F.*)

6. On pose : $A_0 = S(A);\ A_1 = B;\ A_2 = S(B);\ A_3 = S(C);\ A_4 = S(E);$ $A_5 = S(F);\ A_6 = S(A_5);\ldots;$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2: $A_n = S(A_{n-1})$; et pour tout entier naturel n : $R_n = \left|z_{A_{n+1}} - z_{A_n}\right|$

a. Calculer $\left|z_{A_1} - z_{A_0}\right|$ et R_2

b. En déduire la nature précise du triangle AA_2A_3.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le triangle AA_nA_{n+1} est isocèle rectangle en A_n.

d. Démontrer que la suite (R_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$.

e. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = 2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{29}$

EXERCICE 7 : Bac E 2000 Session normale

PARTIE A

Cette partie propose l'étude des intégrales I_n définies par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 (1 - x^n)\sqrt{1-x^2}dx$

On pose $J_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\, dx$

1. En utilisant une considération d'aire, justifier que $J_0 = \frac{\pi}{4}$

2. Calculer J_1, en déduire la valeur de I_1 et donner une interprétation géométrique du résultat trouvé.

3. a. Etudier le sens de variation de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b. En déduire que les suites $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent.

4. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx$

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

PARTIE B

On se propose dans cette partie de déterminer la valeur exacte de J_n en fonction de n

1. Soit v la fonction définie sur $[0;1]$ par $v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$ et soit v' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0;1[$.

a. Démontrer que $v'(x) = x\sqrt{1-x^2}$. On admet que le résultat reste valable sur $[0;1]$

b. A l'aide d'une intégration par partie faisant intervenir v, démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a : $(n+2)J_n = (n-1)J_{n-2}$

Vérifier que cela reste valable pour $n=2$

2. Démontrer que pour tout entier non nul p, on a :

$$J_{2p} = \frac{1\times3\times\ldots\times(2p-1)}{4\times6\times\ldots\times(2p+2)}\times\frac{\pi}{4} \text{ et } J_{2p+1} = \frac{2\times4\times\ldots\times(2p)}{3\times5\times\ldots\times(2p+3)}$$

EXERCICE 8 : Bac E 1999 Session normale

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

PARTIE A

1. On désigne par M_0 l'origine O du repère et par M_1 le point tel que : $\overrightarrow{M_0M_1}=\vec{i}$

On fixe un nombre réel $r>0$ et un réel θ dans $\mathbb{R}-\{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Soit M_2 le point du plan tel que : $\begin{cases} \|\overrightarrow{M_1M_2}\| = r\,\|\overrightarrow{M_0M_1}\| \\ \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_1M_2}}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases}$

Calculer l'affixe v_0 du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ et l'affixe v_1 du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$

2. Les points M_0, M_1, M_2 ayant été définis ci-dessus, pour tout entier naturel non nul n, on définit M_{n+1} à partir des points M_n et M_{n-1} par :

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\| = r\,\|\overrightarrow{M_{n-1}M_n}\| \\ \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \overrightarrow{M_nM_{n+1}}}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases}$$

On obtient ainsi une suite $M_0, M_1, \ldots, M_n$ et la figure obtenue en traçant les segments $[M_0M_1], [M_1M_2], \ldots, [M_nM_{n+1}]$.... est appelée « polygone ».

on note v_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$

a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = re^{i\theta}v_{n-1}$.

En déduire que la suite (V) est une suite géométrique.

b. Déduire de la question précédente, l'expression de v_n en fonction de n, r et θ.

3. Dans cette question, on suppose que $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. Calculer v_n pour

$0 \leq n \leq 3$ et placer M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 en prenant 8 cm pour unité graphique.

PARTIE B

Dans toute la suite du problème on suppose $0<r<1$ et, pour tout $n \geq 0$, on note z_n l'affixe du point M_n

1. Calculer z_0, z_1, z_2

2. Pour tout $n \geq 0$, exprimer v_n en fonction de z_n et z_{n+1}

En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $z_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$

3. On rappelle que pour tout nombre $z \neq 1$, on a $1+z+z^2+\ldots+z^{n-1} = \dfrac{1-z^n}{1-z}$

pour tout $n \geq 0$, calculer z_n en fonction de n, r et θ

4. a. Démontrer que le module du nombre complexe $z_n - \frac{1}{1-re^{i\theta}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

b. On note Ω le point d'affixe ω tel que : $\omega = \dfrac{1}{1-re^{i\theta}}$

Interpréter géométriquement le résultat de la question a. ci-dessus.

5. Pour tout $n \geq 0$, on note z'_n, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$

a. Calculer z'_n en fonction de n, r et θ.

b. Etablir qu'il existe un nombre complexe a non nul tel que pour tout $n \geq 1, z'_n = az'_{n-1}$

c. En interprétant géométriquement la relation précédente, déterminer une similitude directe f telle que, pour tout $n \geq 1$, $f(M_{n-1}) = M_n$; préciser le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

d. Dans cette question, on suppose que $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *et* $\theta = \dfrac{\pi}{4}$; calculer dans ce cas les coordonnées du point Ω et placer ce point sur la figure précédemment tracée.

Indiquer une construction géométrique simple de M_n connaissant Ω et M_{n-1} et placer les points M_5, M_6, M_7 et M_8 sur la figure.

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1 : Bac C 1995 Session normale

1.a. $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx$

Soit $f(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2}$

$f(x)$ existe si $x^2 + x + 1 \neq 0 \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(1) = -3$ donc $D_f = \mathbb{R}$

f est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0;1]$.

En conclusion, U_n est définie pour tout entier n.

b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq 0$

On a : $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx$.

Etudions le signe de $f(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2}$

On sait que, d'après 1°) a- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ (1) :

(car $\Delta < 0$ d'où $x^2 + x + 1$ est du signe de a)

On sait aussi que $x \in [0;1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$: (2)

D'après les relations (1) et (2), on obtient :

$\forall x \in [0;1], \frac{x^n}{x^2+x+1} \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+1}\,dx \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \geq 0$

2.a) Sens de variation de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x+x^2}\,dx$$

On a : $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x+x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x+x^2} - \frac{x^n}{1+x+x^2} \right) dx$$

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2}\,dx$$

Or on sait que : $\frac{x^n}{1+x+x^2} \geq 0$, d'où $U_{n+1} - U_n$ est du signe de $x - 1$.

Sachant que $\forall x \in [0;1] \Rightarrow x - 1 \leq 0$. On a :

$\forall x \in [0;1], \frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2} \leq 0$ donc $U_{n+1} - U_n \leq 0 \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$

Par coséquent la suite (U_n) est strictement décroissante.

b) Convergence de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Nous savons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq 0$, d'où la suite (U_n) est décroissante et minorée pas 0 donc elle converge.

3.a) Converge de la suite V_n

Déterminer l'expression explicite de V_n

$$V_n = \int_0^1 x^n dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$V_n = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}$$

$$\boxed{V_n = \frac{1}{n+1}}$$

Calculons la limite de V_n

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Donc la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0

b) Déterminer la limite de $\left(U_n\right)$

Comparons $\left(U_n\right)$et $\left(V_n\right)$

On a: $0 \le x \le 1 \Rightarrow 1 + x + x^2 \ge 1 \Rightarrow 0 \le \frac{1}{1+x+x^2} \le 1$

$\Rightarrow \quad 0 \le \frac{x^n}{1+x+x^2} \le x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \quad 0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx \le \int_0^1 x^n dx$

$\Rightarrow \quad 0 \le U_n \le V_n$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ (d'après le théorème des gendarmes)

EXERCICE 2 : Bac C 1996 Session normale

1. a- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$

- Méthode de la démonstration par recurrence.

•Soit (P_n) la proposition $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$

•Vérifions que P_0 est vraie.

on a : $U_0=5$ d'où $U_0>0$ donc P_0 est vraie.

•Supposons que P_n est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$

•Démontrons que P_{n+1} est vraie.

on a: $U_{n+1} = \frac{2U_n + 4}{U_n + 5} = 2 - \frac{6}{U_n + 5}$

d'où on a: $U_n > 0$

$U_n + 5 > 5$

$$\frac{1}{U_n+5}<\frac{1}{5}\Rightarrow-\frac{6}{U_n+5}>-\frac{6}{5}\Rightarrow 2-\frac{6}{U_n+5}>2-\frac{6}{5}$$

$$2-\frac{6}{U_n+5}>\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{2U_n+4}{U_n+5}>\frac{4}{5}\Rightarrow U_{n+1}>\frac{4}{5}$$

donc $U_{n+1}>0$, P_{n+1} est donc vraie

En conclusion, $\forall n\in\mathbb{N}, U_n>0$

b- Démontrons que $\forall n\in\mathbb{N}, U_n\neq 1$

-Méthode de la démonstration par récurrence

Soit (P_n) la proposition $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n\neq 1$

- Vérifions que P_0 est vraie

  On a : $U_0=5$; d'où $U_0\neq 1$ donc P_0 est vraie.
- Supposons que P_n est vraie, c'est-à-dire $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n\neq 1$
- Démontrons que P_{n+1} est vraie.

on a: $U_{n+1}=\dfrac{2U_n+4}{U_n+5}=2-\dfrac{6}{U_n+5}$

d'où on a: $U_n\neq 1$

$$U_n+5\neq 1+5$$

$$U_n+5\neq 6$$

$$\frac{1}{U_n+5}\neq\frac{1}{6}\Rightarrow-\frac{6}{U_n+5}\neq-\frac{6}{6}\Rightarrow 2-\frac{6}{U_n+5}\neq 2-1$$

$$\frac{2U_n+4}{U_n+5}\neq 1\ d'où\ U_{n+1}\neq 1$$

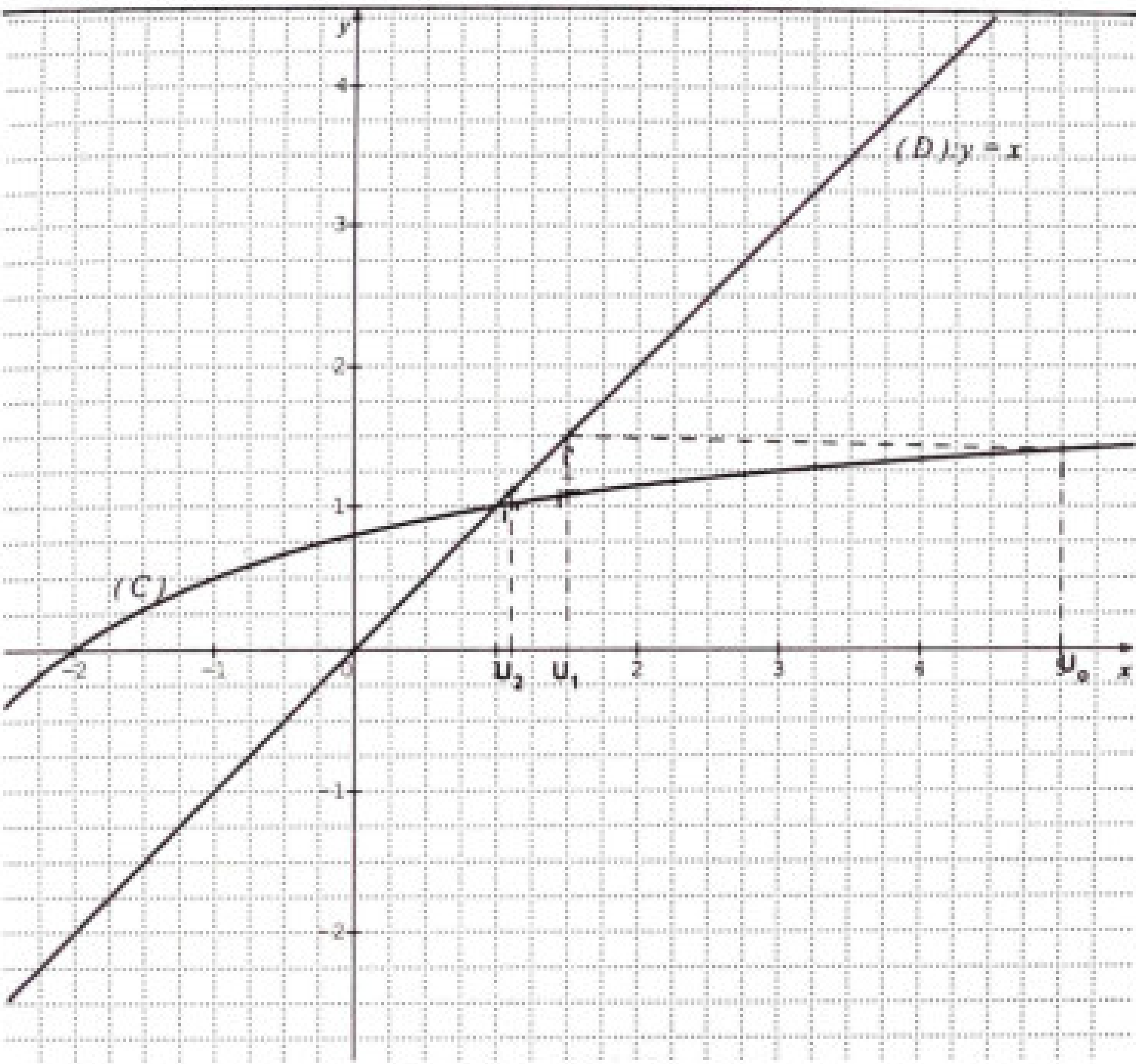
donc $\forall n\in\mathbb{N}, P_{n+1}$ est vraie

En conclusion, $\forall n\in\mathbb{N}, U_n\neq 1$.

2. Représentation graphique de U_0, U_1, et U_2

On a : $U_{n+1}=f(U_n)$ *où* $f(x)=\dfrac{2x+4}{x+5}$ (*voir figure*)

On remarque que (U_n) est strictement décroissante et converge vers 1



3) a- Montrons que (V_n) est une suite géométrique.

on a: $v_{n+2} = \dfrac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+4}$

$$= \frac{\dfrac{2U_n+4}{U_n+5}-1}{\dfrac{2U_n+4}{U_n+5}+4} = \frac{\dfrac{U_n-1}{U_n+5}}{\dfrac{6U_n+24}{U_n+5}} = \frac{U_n-1}{6U_n+24}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{U_n-1}{U_n+4}\right)$$

$V_{n+2} = \frac{1}{6}V_{n+1}$ car $V_{n+1} = \frac{U_n-1}{U_n+4}$

Donc V_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $\mathbf{V_1} = \frac{U_0-1}{U_0+4} = \frac{5-1}{5+4}$

d'où $\mathbf{V_1} = \frac{4}{9}$

b) On a $\frac{V_{n+2}}{V_{n+1}} = \frac{1}{6}$. Or $V_{n+1} = \frac{U_n - 1}{U_n + 4} = \frac{U_n + 4 - 4 - 1}{U_n + 4}$

$$V_{n+1} = 1 - \frac{5}{U_n + 4}$$

- Etudions le signe de (V_n)

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n > 0$

$$U_n + 4 > 4$$

$$\frac{1}{U_n + 4} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-5}{U_n + 4} > -\frac{5}{4} \Rightarrow 1 - \frac{5}{U_n + 4} > 1 - \frac{5}{4} \Rightarrow V_{n+1} > -\frac{1}{4}$$

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}, \; V_n > 0$.

On a : $V_{n+2} = \frac{1}{6} V_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{6} < 1$

La suite (V_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge .

On a : $V_n = V_1 \times q^{n-1} \Rightarrow V_n = \frac{4}{9} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{4}{9} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{4}{9} \times e^{(n-1)\ln\frac{1}{6}} = 0$$

b) Convergence de la suite (U_n) et sa limite

On a : $V_{n+1} = \frac{U_n - 1}{U_n + 4} \Rightarrow (U_n + 4) V_{n+1} = U_n - 1 \Rightarrow$

$U_n V_{n+1} + 4 V_{n+1} = U_n - 1 \Rightarrow U_n (V_{n+1} - 1) = -4 V_{n+1} - 1$

$$U_n = \frac{-4 V_{n+1} - 1}{V_{n+1} - 1}$$

Or $V_n = \frac{4}{9} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \Rightarrow V_{n+1} = \frac{4}{9} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n$

Donc $U_n = \dfrac{-4 \times \frac{4}{9} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n - 1}{\frac{4}{9} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n - 1} \Rightarrow U_n = \dfrac{-4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{9}{4}}{\left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{9}{4}}$

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-4\left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{9}{4}}{\left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{9}{4}} = 1$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{n\ln\frac{1}{6}} = 0$

Donc la suite (U_n) converge vers 1 et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$

EXERCICE 3 : Bac C 1998 Session normale

1°) Déterminons la valeur de a

(U_n) est une suite arithmétique $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = U_n - U_{n-1}$

On a: $aU_{n+1} = (a + 1) U_n - U_{n-1} \Leftrightarrow aU_{n+1} = aU_n + U_n - U_{n-1}$

$$\Leftrightarrow a(U_{n+1} - U_n) = U_n - U_{n-1}$$

Par identification, la suite (U_n) est arithmétique si a = 1.

2°) a – Montrons que (V_n) est une suite géométrique.

$V_n = U_{n+1} - U_n \Leftrightarrow aV_n = aU_{n+1} - aU_n$

Or $aU_{n+1} = (a+1)U_n - U_{n-1}$ d'où $aV_n = (a+1)U_n - U_{n-1} - aU_n$

$\Rightarrow aV_n = aU_n + U_n - U_{n-1} - aU_n \Rightarrow aV_n = U_n - U_{n-1}$

$\Rightarrow aV_n = V_{n-1} \Leftrightarrow V_n = \frac{1}{a}V_{n-1}$ avec $a \neq 1$

(V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{a}$ et de premier terme $V_0 = U_1 - U_0 = 1$

3°) a – On a : $V_n = U_{n+1} - U_n$

$V_0 = U_1 - U_0$

$V_1 = U_2 - U_1$

$V_2 = U_3 - U_2$

....

....

....

$V_{n-1} = U_n - U_{n-1}$

En additionnant membre à membre les égalités, on obtient ;

$V_0 + V_1 + V_2 + \ldots\ldots + V_{n-1} = -U_0 + U_n$

Or $U_0 = 0$ donc $U_n = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots\ldots + V_{n-1}$

b – Calculons U_n en fonction de n et de a

On a : $U_n = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots\ldots + V_{n-1}$ donc U_n est la somme consécutive d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{a}$ d'où, on obtient:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = V_0 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^n}{1-\frac{1}{a}}$ donc $U_n = \dfrac{a}{a-1} \times \left[1 - \left(\frac{1}{a}\right)^n\right]$

c - Convergence de la suite (U_n)

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a}{a-1} \times \left| 1 - \left(\dfrac{1}{a}\right)^n \right| = \dfrac{a}{a-1}$ car $\left|\frac{1}{a}\right| < 1$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\frac{1}{a}} = 0$$

Donc la suite (U_n) converge vers $\frac{a}{a-1}$

4°) Déterminons l'entier naturel p

On a : $a = 2$ d'où $U_n = 2 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \Leftrightarrow U_n = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow U_n - 2 = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow |U_n - 2| = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a : $|U_n - 2| < 10^{-3} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-3} \Rightarrow$

$\ln 2 + n\ln\frac{1}{2} < -3\ln 10 \Rightarrow \ln 2 - n\ln 2 < -3\ln 10 \Rightarrow$

$n > \frac{3\ln 10 + \ln}{\ln} \Leftrightarrow n > 10{,}96$

Donc le plus petit entier naturel p est $p = 11$

EXERCICE 4 : Bac C 1999 Session de remplacement

1) $f_n(x) = x + n\ln\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f_n(x) = x - n\ln x$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_n(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x - n\ln x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{n\ln x}{x}\right) = +\infty \quad car \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2) $\forall x \in]0;+\infty[,\ f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$.

3) $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = n$

$f_n'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < n$

$f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow x > n$

$\forall x \in]0;n[$, $f_n'(x) < 0$ donc f_n est strictement décroissante sur $]0;n[$.

$\forall x \in]n;+\infty[$ $f_n'(x) > 0$ donc f_n est strictement croissante sur $]n;+\infty[$.

Tableau de variation de f

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$n(1-\ln(n))$	$\nearrow$	$+\infty$

4) f_n est continue et strictement décroissante sur $]0;n[$, et

$f_n(]0;n[) =]n(1-\ln(n);+\infty[$

f_n réalise donc une bijection de $]0;n[$ sur $]n(1-\ln(n);+\infty[$.

$0 \in]n(1-\ln(n);+\infty[$ car $n(1-\ln(n)$ est strictement négatif pour tout n supérieur ou égale à 3.

Donc l'équation $x \in]0;n[,\ f_n(x) = 0$ admet une solution unique a_n.

5) $f_n(1) = 1$

$f_n(e) = e - n$ et $e - n < 0$ donc $f_n(1) \times f_n(e) < 0$ par suite $1 < a_n < e$

6) $f_{n+1}\left(a_{n+1}\right)=0$

$$a_{n+1}-(n+1)\ln\left(a_{n+1}\right)=0 \Rightarrow a_{n+1}=(n+1)\ln\left(a_{n+1}\right)$$

$$f_n\left(a_{n+1}\right)=a_{n+1}-n\ln\left(a_{n+1}\right)=(n+1)\ln\left(a_{n+1}\right)-n\ln\left(a_{n+1}\right)$$

$$=(n+1-n)\ln\left(a_{n+1}\right)=\ln\left(a_{n+1}\right)$$

$$\ln\left(a_{n+1}\right)=f_n\left(a_{n+1}\right)$$

7) $f_n\left(a_{n+1}\right)-f_n(a_n)=f_n\left(a_{n+1}\right)$

D'après 5), $a_{n+1}\in\left]1;e\right[$ d'où $\ln\left(a_{n+1}\right)>0$ par conséquent $f_n\left(a_{n+1}\right)>f_n(a_n)$ car $f_n\left(a_{n+1}\right)=\ln\left(a_{n+1}\right)$ d'où $a_{n+1}<a_n$

La suite (a_n) est donc décroissante.

8) la suite (a_n) est décroissante et minoré par 1, donc elle est convergente.

9) D'après 5°) $1<a_n<e$ or $f_n(a_n)=0=a_n-n\ln(a_n)$ c'est-à-dire $a_n=n\ln(a_n)$

donc $1<a_n<e$

$1<n\ln(a_n)<e$

$\frac{1}{n}<\ln(a_n)<\frac{e}{n}$

10) $\frac{1}{n}<\ln(a_n)<\frac{e}{n}\Leftrightarrow e^{1/n}<a_n<e^{e/n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{e}{n}} = 1$, car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e}{n} = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ (d'après le théorème des gendarmes).

EXERCICE 5 : Bac C 2001 Session de remplacement

1) a- Pour n pair ; $\left(t^2-1\right)^n\geq 0$;

Donc $\forall t\in[-1;1], J_n\geq 0$

b- Pour n impair

$\left(t^2-1\right)^n$ a le même signe que t^2-1.

Or $\forall t\in[-1;1], t^2-1\leq 0$ Donc $J_n\leq 0$.

2) $\int_{-1}^{1}\left(t^2-1\right)^n dt=\int_{-1}^{0}\left(t^2-1\right)^n dt+\int_{0}^{1}\left(t^2-1\right)^n dt$

Posons $u=-t$ alors $du=-dt$

On a : $\int_{-1}^{0}\left(t^2-1\right)^n dt = -\int_{1}^{0}\left(u^2-1\right)du = \int_{0}^{1}\left(u^2-1\right)du$

Donc $J_n = 2\int_0^1\left(t^2-1\right)^n dt.$

Autre méthode

Soit $g: t \mapsto \left(t^2-1\right)^n, \forall t \in [-1;1], -t \in [-1;1]$ et $g(-t) = g(t)$

Donc la fonction g est paire et par suite

$\int_{-1}^{1} g(t)dt = 2\int_0^1 g(t)dt$ c'est-à-dire

$\int_{-1}^{1}\left(t^2-1\right)^n dt = 2\int_0^1\left(t^2-1\right)^n dt$

3) D'après 2),

$$J_0 = 2\int_0^1 dt = 2[t]_0^1 = 2(1-0) = 2$$

$$J_1 = 2\int_0^1\left(t^2-1\right)dt = 2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}-1-0\right) = -\frac{4}{3}$$

$J_2 = 2\int_0^1(t^2-1)^2dt = 2\int_0^1(t^4-2t^2+1)\,dt = 2\left[\frac{t^5}{5}-\frac{2}{3}t^3+t\right]_0^1$

$J_2 = 2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1-0\right) = \frac{16}{15}$

4) $n \in \mathbb{N}^*$

Posons $u(t) = \left(t^2-1\right)^n$ et $v'(t) = 1;$

On a $u'(t) = 2n\left(t^2-1\right)^{n-1}t$ choisissons $v(t) = t$

Ainsi, $\frac{1}{2}J_n = \int_0^1\left(t^2-1\right)^n dt$

$$\frac{1}{2}I_n = [t(t^2-1)^n]_0^1 - 2n\int_0^1(t^2-1)^{n-1}t^2\,dt$$

$$= 0 - 2n\int_0^1(t^2-1)^{n-1}(t^2-1+1)dt$$

$$= -2n\int_0^1\left[\left(t^2-1\right)^{n-1}\left(t^2-1\right)+\left(t^2-1\right)^{n-1}\right]dt$$

$$= -2n\left[\int_0^1\left(t^2-1\right)^n dt + \int_0^1\left(t^2-1\right)^{n-1}dt\right]$$

$$= -2n\left(\frac{1}{2}J_n + \frac{1}{2}J_{n-1}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}J_n = -nJ_n - nJ_{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}+n\right)J_n = -nJ_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+2n}{2}J_n = -nJ_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow J_n = \frac{-2n}{1+2n}J_{n-1}$$

5) D'après 4), on a :

$$J_1 = -\frac{2}{3}J_0 = -\frac{4}{3} \quad car\ J_0 = 2$$

$$J_2 = -\frac{4}{5}J_1 = -\frac{4}{5}\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{15}$$

6) D'après 4), on a successivement

$$J_n = \frac{-2n}{1+2n}J_{n-1}$$

$$J_{n-1} = \frac{-2(n-1)}{2n-1}J_{n-2}$$

$$J_{n-2} = \frac{-2(n-2)}{2n-3}J_{n-1}$$

....

....

$$J_2 = (-2)\times\frac{2}{5}\,J_1$$

$$J_1 = (-2)\times\frac{1}{3}\,J_0$$

En multipliant membre à membre ces n égalités, on obtient après simplification :

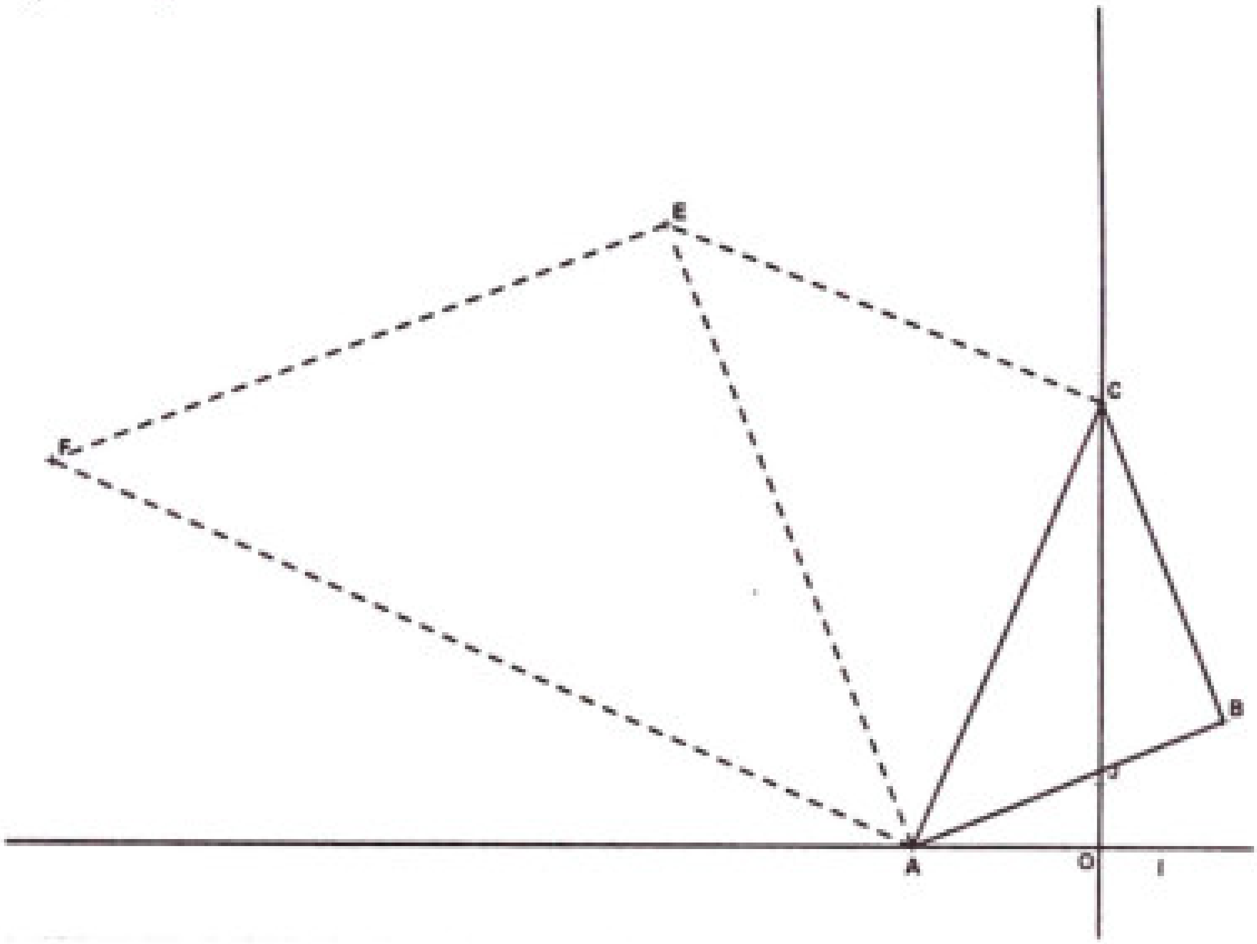
$$J_n = \frac{(-2)^n \times n \times (n-1) \times \ldots \times 1 \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \ldots \times 5 \times 3}$$

Avec $J_0 = 2$ et $(-2)^n = (-1)^n \times 2$. Or $n(n-1) \times \ldots \times 1 = n!$

D'où $J_n = \dfrac{(-1)^n \times n! \times 2^{n+1}}{3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times (2n+1)}$

EXERCICE 6 : Bac C 2000 Session normale

1) Voir figure.



6)

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{S} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline A_0 & A_0 \\ \hline A_1 & A_2 \\ \hline A_2 & A_3 \\ \hline A_3 & A_4 \\ \hline A_4 & A_5 \\ \hline A_{n-1} & A_n \\ \hline A_n & A_{n+1} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

a- $\left|z_{A_2} - z_{A_0}\right| = \left|z_C - z_A\right| = AC = \sqrt{58}$

$$R_2 = \left|z_{A_3} - z_{A_2}\right| = \left|z_E - z_C\right| = EC = AC = \sqrt{58}$$

b- AA_2A_3 est un triangle ACE. On a montré qu'il est isocèle rectangle en C.

c- D'après la similitude directe S :

$$z_{A_{n+1}} - z_A = \left(z_{A_n} - z_A\right)\sqrt{2}e^{i\pi/4} = (1+i)\left(z_{A_n} - z_A\right)$$

d'où $z_{A_{n+1}} - z_{A_n} + z_{A_n} - z_A = (1+i)\left(z_{A_n} - z_A\right)$

$$z_{A_{n+1}} - z_{A_n} = i\left(z_{A_n} - z_A\right)$$

alors $\left|z_{A_{n+1}} - z_{A_n}\right| = \left|z_{A_n} - z_A\right|$ *et* $mes\left(\overline{\overrightarrow{A_nA}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}}\right) = -\frac{\pi}{2}$

ce qui démontre que $AA_n = A_nA_{n+1}$ et $(AA_n) \perp (A_nA_{n+1})$

AA_nA_{n+1} est un triangle isocèle et rectangle en A_n.

d- $R_n = \left|z_{A_{n+1}} - z_{A_n}\right| = A_nA_{n+1} = AA_n = \sqrt{2}AA_{n-1} = \sqrt{2}A_{n-1}A_n$ car $AA_{n-1}A_n$ est un triangle isocèle en A_{n-1} c'est-à-dire que

$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sqrt{2}R_{n-1}$

Par suite, $R_n = \sqrt{2}R_{n-1}$ d'où $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est suite géométrique de raison $\sqrt{2}$.

e- $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ dont le premier terme R_1 vaut $\sqrt{29}$ d'où $R_n = R_1\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} = R_1\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{n-1} = R_1(2)^{\frac{n-1}{2}}$

$$R_n = \sqrt{29}(2)^{\frac{n-1}{2}}$$

EXERCICE 7 : Bac E 2000 Session normale

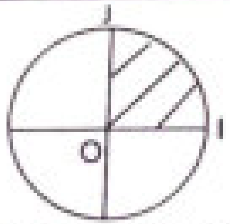
PARTIE A

1) Rapportons le plan P à un repère orthonormé (O,I,J) d'unité 1 cm.

Soit $D = \left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in P / 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$.

D est l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de la fonction définie par $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow \begin{cases}0 \le x \le 1\\0 \le y\\y^2 \le 1 - x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0 \le x \le 1\\0 \le y\\x^2 + y^2 \le 1\end{cases}$$



J_0 est l'aire d'un quart du disque unité. $J_0 = \frac{\pi}{4}$

2) Soit u la fonction définie sur [0;1] par $u(x)=1-x^2$

On a : $\forall x \in [0;1], x\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2}(-2x)\sqrt{1-x^2}$

$$= -\frac{1}{2}u'(x)[u(x)]^{\frac{1}{2}}$$

Une primitive sur [0;1] de la fonction $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ est donc la fonction

$x \mapsto -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$

On a donc $J_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\left[\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

$I_1 = \int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$= J_0 - J_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$

Posons $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$ et (C_f) sa représentation graphique dans le repère orthonormé (O,I,J).

f est positive sur [0;1] donc I_1 est l'aire de la partie du plan comprise entre (C_f); l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

3) a- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n+1} - J_n = \int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}\,dx$

$\forall x \in [0;1]$, $x^n(x-1)\sqrt{1-x^2} \leq 0$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_{n+1} \leq J_n$ (positivité de l'intégrale).

Donc la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

b- $\forall x \in [0;1], x^n\sqrt{1-x^2} \geq 0$ donc $J_n \geq 0$

La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante et minorée par 0, converge

$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx = J_0 - J_n$.

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente car $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

4) a- Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ;1] et pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$$
$$\Rightarrow -1 \leq -x^2 \leq 0$$
$$\Rightarrow 0 \leq 1-x^2 \leq 1$$
$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \text{ or } x^n \geq 0$$

Donc $0 \leq x^n\sqrt{1-x^2} \leq x^n$;

Par conséquent $0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx$

b- $\int_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{n+1}$ donc $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

de plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0$

Sachant que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = J_0 - J_n$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = J_0 = \dfrac{\pi}{4}$

PARTIE B

1) a- $\forall x \in [0;1], v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$.

$v'(x) = x\sqrt{1-x^2}$ (voir I.1)

b- $\forall n \geq 3,\ J_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 x^{n-1} \times x\sqrt{1-x^2}dx$

Posons $u(x) = x^{n-1}$; et $v'(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

on a : $u'(x) = (n-1)x^{n-2}$ choisissons $v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$.

$$J_n = \left[-\frac{1}{3}x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right] + \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx$$

$$= \frac{n-1}{3}\left[\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\right]$$

$$= \frac{n-1}{3}\left[J_{n-2} - J_n\right] \text{ donc } 3J_n = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n$$

$(3+n-1)J_n = (n-1)J_n$

d'où $\forall n \geq 3, (n+2)J_n = (n-1)J_{n-2}$

$n = 2, J_2 = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

On a : $u'(x) = 1$ choisissons $v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$.

$$J_2=\left[-\frac{1}{3}x\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}\right]_0^1+\frac{1}{3}\int_0^1\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\left(\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx-\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(J_0-J_2\right)$$

$3J_2=J_0-J_2$

$4J_2=J_0$. Par conséquent la formule est vraie pour $n=2$

2) $\forall n\geq 2,\ J_n=\dfrac{n-1}{n+2}J_{n-2}$

On a donc $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ J_{2p}=\dfrac{2p-1}{2p+2}J_{2p-2}$

$$J_{2p-2}=\frac{2p-3}{2p}J_{2p-4}$$
$$J_{2p-4}=\frac{2p-5}{2p-2}J_{2p-6}$$

....

....

$$J_4=\frac{3}{6}J_2$$
$$J_2=\frac{1}{4}J_0$$

En multipliant membre à membre ces égalités, puis en simplifiant, on obtient :

$$J_{2p}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{6}\times\ldots\ldots\times\frac{2p-3}{2p}\times\frac{2p-1}{2p+2}J_0\ ;\ \text{or}\quad J_0=\frac{\pi}{4}\quad;\ \text{donc}$$

$$J_{2p}=\frac{1\times3\times\ldots\ldots\times(2p-3)\times(2p-1)}{4\times6\times\ldots\ldots\times(2p)\times(2p+2)}\times\frac{\pi}{4}$$

On démontre de même que : $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ J_{2p}=\dfrac{2\times4\times6\times\ldots\times(2p)}{3\times5\times7\times\ldots\times(2p+3)}$

EXERCICE 8 : Bac E 1999 Session normale

PARTIE A

1) On désigne par z_M l'affixe d'un point M et par $z_{\vec{v}}$ celle d'un vecteur $\vec{v}$.

$v_0=z_{\overrightarrow{M_0M_1}}=z_{M_0}-z_{M_1}=1$

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{M_0M_1},\overrightarrow{M_1M_2}}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_{M_2}-z_{M_1}}{z_{M_1}-z_{M_0}}\right)[2\pi]\equiv\arg\left(\frac{v_1}{v_0}\right)[2\pi]$$

D'où $\arg\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right)\equiv\theta\quad[2\pi]\quad(1)$

$\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = r\|\overrightarrow{M_0M_1}\| \Leftrightarrow |v_1| = r|v_0|$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{v_1}{v_0}\right| = r \quad (2)$$

Des relations (1) et (2), on déduit que : $\dfrac{v_1}{v_0} = re^{i\theta}$

Donc $v_1 = v_0 re^{i\theta}$ par conséquent $v_1 = re^{i\theta}$ car $v_0 = 1$

2) a. $mes\left(\overline{\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \overrightarrow{M_nM_{n+1}}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_{M_{n+1}} - z_{M_n}}{z_{M_n} - z_{M_{n-1}}}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\dfrac{v_n}{v_{n-1}}\right)[2\pi]$

$$mes\left(\overline{\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \overrightarrow{M_nM_{n+1}}}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$$

D'où $\arg\left(\dfrac{v_n}{v_{n-1}}\right) = \theta\,[2\pi] \quad (3)$

Or $\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\| = r\|\overrightarrow{M_{n-1}M_n}\|$, donc $|v_n| = r|v_{n-1}|$ et par suite $\left|\dfrac{v_n}{v_{n-1}}\right| = r \quad (4)$

Des relations (3) et (4) on déduit que : $\dfrac{v_n}{v_{n-1}} = re^{i\theta}$

On conclue que $v_n = re^{i\theta}v_{n-1}$.

la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $re^{i\theta}$

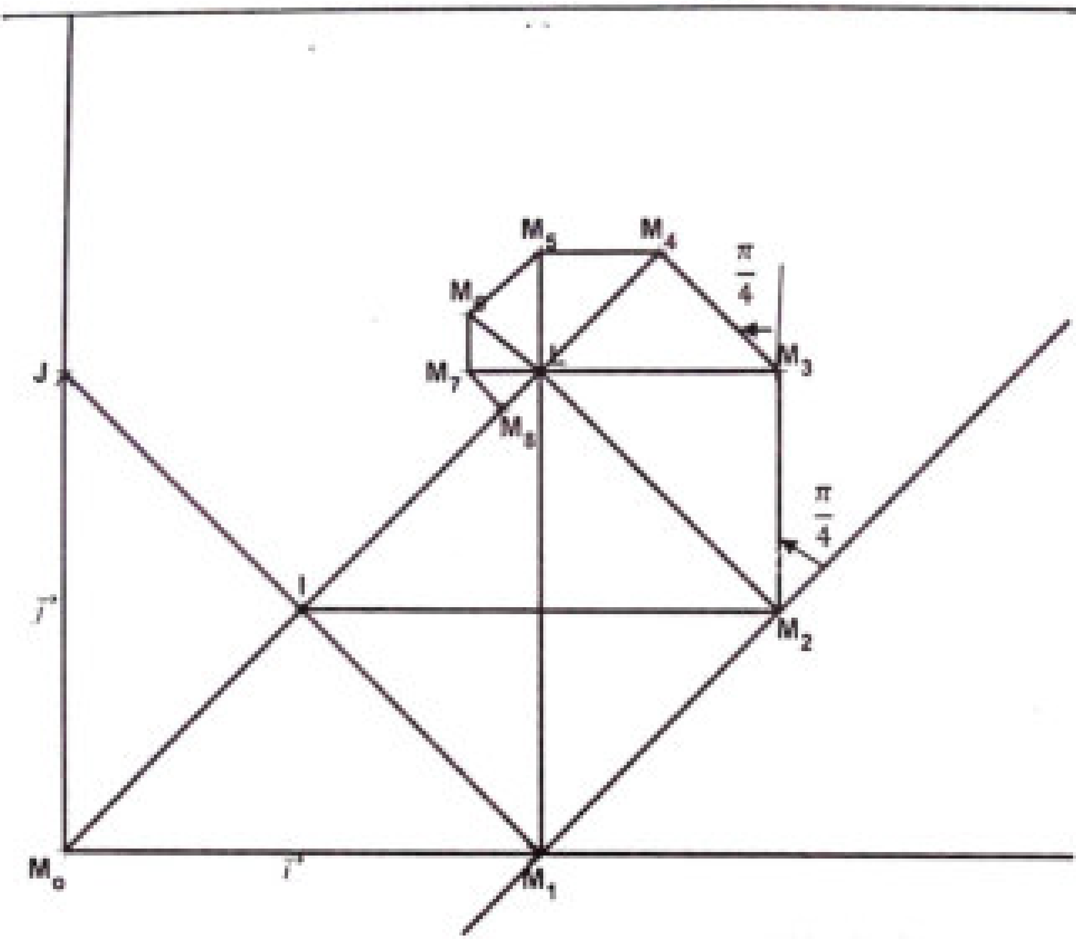
b- On a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (re^{i\theta})^n v_0 = r^n e^{in\theta} v_0 = r^n e^{in\theta}$ $car\ v_0 = 1$

$v_0 = 1,\ v_1 = re^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$v_2 = r^2 e^{i\frac{2\pi}{4}} = r^2 e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}i.$

$v_3 = r^3 e^{i\frac{3\pi}{4}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}i$

3) Voir figure.



PARTIE B

1) $z_0 = 0$ car $M_0 = 0$

$v_0 = 1$ donc $z_1 - z_0 = 1$ par conséquent $z_1 = 1$

$V_1 = re^{i\theta} = z_2 - z_1$ d'où $z_2 = z_1 + re^{i\theta}$ donc $z_2 = 1 + re^{i\theta}$

2) $v_n = z_{\overline{M_nM_{n+1}}} = z_{M_{n+1}} - z_{M_n} = z_{n+1} - z_n$

$v_{n-1} = z_n - z_{n-1}$
$v_{n-2} = z_{n-1} - z_{n-2}$
$v_{n-3} = z_{n-2} - z_{n-3}$

....

....

$v_1 = z_2 - z_1$
$v_0 = z_1 - z_0$

En ajoutant membre à membre les égalités ci-dessus, on obtient :

$z_n = v_0 + v_1 + \dots\dots + v_{n-1}$; $\forall n \geq 1$

3) z_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $re^{i\theta}$, on a donc :

$$\forall n \geq 1,\ z_n = \frac{1-\left(re^{i\theta}\right)^n}{1-re^{i\theta}}\ car\ \theta \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \frac{1-r^n e^{in\theta}}{1-re^{i\theta}}.$$

4) a- $z_n = \dfrac{1-r^n e^{in\theta}}{1-re^{i\theta}} = \dfrac{1}{1-re^{i\theta}} - \dfrac{r^n e^{in\theta}}{1-re^{i\theta}}$

D'où $z_n - \dfrac{1}{1-re^{i\theta}} = -\dfrac{r^n e^{in\theta}}{1-re^{i\theta}}$

Par conséquent $\left|z_n - \dfrac{1}{1-re^{i\theta}}\right| = \dfrac{r^n}{\left|1-re^{i\theta}\right|}$.

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} r^n = 0$, car $0 < r < 1$ d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| z_n - \dfrac{1}{1-re^{i\theta}} \right| = 0$

b- On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} | z_n - \omega | = 0$ d'après 4) a- c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} \|\Omega M_n\| = 0$

5) a- $\forall n \in \mathbb{N}^*, z'_n = z_n - \omega = -\dfrac{r^n e^{in\theta}}{1-re^{i\theta}}$

b- $z'_n = re^{i\theta}\left(-\dfrac{r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = re^{i\theta} z'_{n-1}$.

Posons $a = re^{i\theta}$, a est non nul.

Il existe donc un nombre complexe non nul a tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, z'_n = az'_{n-1}$

c- De l'égalité $z'_n = az'_{n-1}$ on a : $z_n - \omega = re^{i\theta}\left(z_{n-1} - \omega\right)$ d'où f est la similitude directe de centre Ω, de rapport r et d'angle θ.

Cette similitude transforme M_{n-1} en M_n.

d- $\omega = \dfrac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}} = 1+i$

$\omega = 1+i$; donc $\Omega(1,1)$.

f est la similitude directe de centre Ω d'affixe $1+i$, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

De l'égalité $f\left(M_{n-1}\right) = M_n$, on déduit que le triangle $\Omega M_{n-1} M_n$ est rectangle isocèle en M et de sens direct.

CHAPITRE XIII : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

FICHE DE COURS

1. Equation différentielle du type : $y' - ay = 0$.

Les solutions de l'équation différentielle(E) : $y' - ay = 0$ sont les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ $x \mapsto ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$.

2. Equation différentielle du type : $y'' + ay' + by = 0$.

a. Equation caractéristique

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = 0 \quad (a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{Z})$.

On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle (E), l'équation d'inconnue r suivante : $r^2 + ar + b = 0$.

b. Solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

Soit Δ le discriminant associé à l'équation : $r^2 + ar + b = 0$.

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une seule solution : $r = -\frac{a}{2}$.

Les solution de (E) sont les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: $x \mapsto (\mathrm{A}x + \mathrm{B})e^{rx}, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes : $r_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$.

Les solutions de (E) sont les fonctions $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ où α et β sont des nombres réels.

Les solutions de (E) sont les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

$x \mapsto (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$; avec $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1

Soit λ un réel et y la solution de l'équation différentielle $y'+\lambda y=0$ telle que $y(1)=1$.

Exprimer $y\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ en fonction de λ.

EXERCICE 2

On note Q(t) la quantité d'une substance médicamenteuse encore présente dans le sang, t heures après l'injection intraveineuse de 1,8 unités du produit.

1. A cause d'un processus d'élimination, Q(t) diminue au cours du temps en suivant une loi d'évolution : $Q'(t)=-\lambda Q(t)$.

Déterminer λ sachant qu'au bout d'une heure la quantité de produit présente dans le sang a diminué de $30\ \%$. Donner la valeur exacte et la valeur approchée à 10^{-4}.

2. Par injection intra musculaire, la quantité résente dans le sang au bout d'un temps t (en heures) aurait été : $S(t)=6,6te^{-t}$.

(a) Déterminer une équation différentielle entre les fonctions S et S'.

(b) Déterminer une équation différentielle liant S(t), S'(t), S''(t).

EXERCICE 3

On cherche les fonctions u définies sur $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, et à valeurs strictement positives telles que $u'=u\ln u$ (ε). On pose $f=\ln\circ u$.

1. (a) Calculer la dérivée de f et montrer que f est la solution d'une équation diff érentielle du premier ordre que l'on notera (ε').

(b) Montrer que réciproquement, si f est une solution de (ε') alors $u=e^f$ est une solution de (ε).

2. (a) Déterminer toutes les solutions de (ε').

(b) En déduire toutes les solutions de (ε).

EXERCICE 4

On étudie le refroidissement d'un objet. On note $\theta(t)$ la différence, à la date t, entre la température de l'objet et celle du milieu ambiant. t est exprimé en minutes et $\theta(t)$ en degrés celsius. L'étude du phénomène physique conduit à l'équation différentielle $(E): \theta' = -k\theta$ (k réel positif donné).

1. Résolvez l'équation différentielle (E).

2. Sachant que pour l'objet étudié k = ln3, vérifiez que la solution de (E) telle que $\theta(0) = 90^{\circ}C$ est la fonction θ définie par $\theta(t) = 90e^{-t\ln 3}$

3. La température du milieu ambiant est 10ºC. Calculez $\theta(2)$.

Déduisez-en la température de l'objet après deux minutes de refroidissement.

EXERCICE 5

1. Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle $y''+ay'+by=0$ dans chacun des cas suivants :

a) $a = 2$ et $b = -3$

b) $a = 1$ et $b = 1$.

2. On considère l'équation différentielle suivante : $y''-2y'+y=4e^{x}$ (1).

a. On pose $u(x) = 2x^2e^x$.

Vérifier que la fonction u est une solution particulière de l'équation (1).

b. On pose $z = y - u$. Montrer que y est une solution de (1) si, et seulement si, z est une solution de l'équation différentielle (2) : $z''-2z'+z=0$.

c. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (2) et en déduire la solution générale de l'équation (1).

d. Déterminer la solution f de (1) qui vérifie $f(0)=0$ et $f'(0)=-3$

EXERCICE 6

1. Résoudre l'équation différentielle: $y''+16y=0$.

2. Trouver la solution f de cette équation vérifiant $f(0)=1$ *et* $f'(0)=4$.

3. Trouver deux réels positifs ω *et* φ tels que pour tout réel t, $f(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$.

4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{8}\right]$.

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1

Les solutions de l'équation différentielle $y'+\lambda y=0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{-\lambda x}$

où k est une constante. La condition initiale $y(1)=1$ équivaut donc à $ke^{-\lambda}=1$, soit $k=e^{\lambda}$.

Donc $y(x)=e^{\lambda(1-x)}$ et $y\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)=e^{\lambda-1}$.

EXERCICE 2

1. La fonction Q est une exponentielle décroissante. De façon précise : $Q(t)=Q_0e^{-\lambda t}$.

On a classiquement : $Q_0=Q(0)$.

L'énoncé nous donne sa valeur : $Q_0=1,8$ mais nous ne l'utiliserons pas.

D'autre part, d'après l'énoncé : $Q(1)=\left(1-\dfrac{30}{100}\right)Q(0)=0,70Q(0)$.

D'où, en simplifiant les deux membres par Q_0 : $e^{-\lambda}=0,70$. Alors : $\lambda=-\ln 0,70\approx 0,3566$.

2. (a) On calcule : $S'(t)=6,6e^{-t}-6,6te^{-t}=6,6e^{-t}-S(t)$ d'où $S'(t)+S(t)=6,6e^{-t}$.

3. Ainsi, la fonction S est solution de l'équation différentielle avec second membre

$y'+y=6,6e^{-t}$.

(b) Le plus astucieux est de dériver dans l'équation différentielle obtenue ci-dessus.

Il vient : $S''(t)+S'(t)=-6,6e^{-t}=-[S'(t)+S(t)]$. D'où $S''(t)+2S'(t)+S(t)=0$.

Finalement, on obtient l'équation différentielle suivante, du deuxième ordre mais sans second membre : $y''+2y'+y=0$.

EXERCICE 3

1. (a) La fonction f est dérivable en tant que composée de deux fonctions dérivables et pour tout x ∈ R $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Donc pour tout x ∈ R, $f'(x)-f(x)=0$. L'équation (ε') est donc $y'-y=0$.

(b)Soit f une fonction de (ε') et soit $u=e^{f}$.

Alors, pur tout x ∈ R, $u'(x)=f'(x)e^{f(x)}=f(x)u(x)$ car $f'=f$.

Donc pour tout $x, u'(x)=u(x)\ln(u(x))$, donc si f est une fonction de (ε'), alors $u=e^{f}$ est une solution de (ε).

2. (a) On sait que les solutions de (ε') sont de la forme : $f(x)=\lambda e^{x}$ où $\lambda \in$ R

(b) D'après 1, les solutions de (ε) sont donc les fonctions de la forme

où λ est une constante réelle arbitraire.

EXERCICE 4

1. Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions θ_α définies sur $[0;+\infty[$ par $\theta_\alpha(t) = \alpha e^{-kt}$, $\alpha \in$ R.

2. k = ln3 donc $\theta_\alpha(t) = \alpha e^{-t\ln 3}, \alpha \in$ R, ; $\theta_\alpha(0) = 90^0C \Rightarrow \alpha = 90$.

La fonction cherchée est alors la fonction θ définie par $\theta(t) = 90e^{-t\ln 3}$.

3. $\theta(2) = 90e^{-2\ln 3} = \dfrac{90}{e^{\ln 9}} = \dfrac{90}{9} = 10$. Après deux minutes de refroidissement la température de lobjet est donc : $(10^0 + 10^0)C = 20^0C$

EXERCICE 5

1. a) L'équation caractéristique dans ce cas est $r^2+2r-3=0$.
Ses racines sont $r_1=1$ *et* $r_2=-3$.
Les solutions de l'équation différentielle $y''+2y'-3=0$ sont les fonctions $f_{\alpha,\beta}$ définies sur R par $f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha e^x + \beta e^{-3x}$.

b) L'équation caractéristique dans ce cas est $r^2+2r+1=0$.
Cette équation a une seule racine $r=-1$.
Les solutions de l'équation différentielle $y''+2y'+y=0$ sont les fonctions $f_{\alpha,\beta}$ définies sur R par $f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha e^{-x} + \beta x e^{-x}$.

c) L'équation caractéristique dans ce cas est $r^2+r+1=0$.
Cette équation a deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ *et* $z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
Les solutions de l'équation différentielle $y''+y'+1=0$ sont les fonctions $f_{\alpha,\beta}$ définies sur R par $f_{\alpha,\beta}(x) = \left[\alpha\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]e^{-\frac{1}{2}x}$.

2) a) La fonction u définie sur R, par $u(x) = 2x^2e^x$ est deux fois dérivable sur R, et,
$\forall x \in$ R, $u'(x) = 4xe^x + 2x^2e^x$, et $u''(x) = 4e^x + 8xe^x + 2x^2e^x$.
$\forall x \in$ R, $u''(x) - 2u'(x) + u(x) = 4e^x$, donc u est une solution de l'équation (1).

b) Si z et y désignent deux fonctions deux fois dérivables sur R, et si $z = y - u$, on a $z' = y' - u'$ et $z'' = y'' - u''$, donc $z'' - 2z' + z = y'' - 2y' + y - (u'' - 2u' + u)$; u étant une solution particulière de (1), y est une solution de (1) si, et seulement si, $y'' - 2y' + y = u'' - 2u' + u$, donc si et seulement si, z est solution de (2) : $z'' - 2z' + z = 0$.

c) L'équation caractéristique de l'équation (2) $r^2 - 2r + 1 = 0$ ayant une seule solution réelle $(r=1)$, les solutions de l'équation (2) sont les fonctions $g_{\alpha,\beta}$ définies sur R.
par $g_{\alpha,\beta}(x) = \alpha e^x + \beta x e^x$.

Les solutions de l'équation (1) sont les fonctions $f_{\alpha,\beta}$ définies sur R par $f_{\alpha,\beta}(x)=g_{\alpha,\beta}(x)+u(x)$ soit $f_{\alpha,\beta}(x)=\alpha e^{x}+\beta xe^{x}+2x^{2}e^{x}$.

d) Pour tous réels α,β et tout réel x, $f'_{\alpha,\beta}(x)=\alpha e^{x}+\beta e^{x}+\beta xe^{x}+4xe^{x}+2x^{2}e^{x}$, donc $f'_{\alpha,\beta}(x)=(\alpha+\beta)e^{x}+(\beta+4)xe^{x}+2x^{2}e^{x}$. $\begin{cases}f_{\alpha,\beta}(0)=0\\ f'_{\alpha,\beta}(0)=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \alpha+\beta=-3\end{cases}$ $donc$ $\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=-3\end{cases}$

La fonction f de (1) qui verifie $f(0)=0$ et $f'(0)=-3$ est définie sur R,

par $f(x)=-3xe^{x}+2x^{2}e^{x}$.

EXERCICE 6

1. L'équation caractéristique de l'équation différentielle $y''+16y=0$ est $r^{2}+16=0$.

Les solutions de $r^{2}+16=0$ sont les deux nombres complexes $z_1=-4i$ et $z_2=4i$.

Les solutions de $y''+16y=0$ sont donc les fonctions $f_{A,B}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f_{A,B}(x)=A\cos 4x+B\sin 4x,\quad (A,B)\in\mathbb{R}^{2}$

2. $f_{A,B}(0)=1\Rightarrow A\cos 0+B\sin 0=1\Rightarrow A=1$ et alors $f_{A,B}(x)=\cos 4x+B\sin 4x$.

$f'_{A,B}(x)=-4\sin 4x+4B\cos 4x$. $f'_{AB}(0)=4\Rightarrow -4\sin 0+4B\cos 0=4\Rightarrow B=1$

d'où la fonction cherchée est la fonction f définie sur R, par $f(x)=\cos 4x+\sin 4x$.

3. On a doit avoir : $f(t)=\sqrt{2}\cos(\omega t-\varphi)=\sqrt{2}\cos\omega t\cos\varphi+\sqrt{2}\sin\omega t\sin\varphi$.

$f(t)=\cos 4t+\sin 4t$: Ceci donne $\sqrt{2}\cos\varphi=\sqrt{2}\sin\varphi=1\Rightarrow\cos\varphi=\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

donc $\omega=4$ et $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. Pour tout réel t, $f(t)=\sqrt{2}\cos(4t-\dfrac{\pi}{4})$.

4. La valeur moyenne de f sur $\left[0;\dfrac{\pi}{8}\right]$ est

$$M=\frac{1}{\frac{\pi}{8}-0}\int_0^{\frac{\pi}{8}}f(t)dt=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sqrt{2}\cos(4t-\frac{\pi}{4})dt=\frac{8\sqrt{2}}{\pi 4}\left[\sin(4t-\frac{\pi}{4})\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$M=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}(\sin\frac{\pi}{4}-\sin(-\frac{\pi}{4}))=\frac{4}{\pi}$$

CHAPITRE XIV : PROBABILITES

FICHE DE COURS

I. OUTILS DE DENOMBREMENT

P-uplet d'un ensemble

Soit E un ensemble ayant n éléments et p un nombre entier naturel non nul.

On appelle p-uplet de E tout élément de l'ensemble E^p. Leur nombre est n^p

Arrangement de p éléments d'un ensemble

Soit E un ensemble ayant n éléments et p un nombre entier naturel non nul tel que $p \leq n$.

On appelle arrangement de p éléments de E, tous p-uplets d'éléments de E deux à deux distincts. Leur nombre est $A_n^p = n(n-1)(n-2)......(n-p+1)$

Permutation

Soit E un ensemble ayant n éléments.

On appelle permutation de E, tout arrangement des n éléments de E.

Leur nombre est $n! = n(n-1)(n-2).....2.1$

Combinaison

Soit E un ensemble ayant n éléments et p un entier naturel non nul tel que $n \geq p$.

On appelle Combinaison de p éléments de E tout sous-ensemble de E ayant p éléments.

Leur nombre est $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

NB : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ et $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Echantillonnage classique

Soit E un ensemble ayant n éléments. On tire p éléments de E.

Modélisation	Les p éléments sont ordonnés	Les p éléments sont distincts	Nombre total de tirages
Tirage successif avec remise	oui	non	P – uplet: n^p
Tirage successif sans remise	oui	oui	Arrangement: A_n^p
Tirage simultané	non	oui	Combinaison: C_n^p

II. PROBABILITE

On appelle probabilité, un nombre réel compris entre 0 et 1, qui évalue les chances de réalisation d'une expérience.

Propriétés

Pour chaque évènement A, $0 \leq P(A) \leq 1$

$P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$

La somme des probabilités de tous les évènements élémentaires est égale à 1

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Soient A et B deux événements :

- Si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- S'ils sont quelconques : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Deux événements A et B sont indépendants lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Equiprobabilité

Dans une épreuve où tous les évènements élémentaires d'un univers Ω sont équiprobables, la probabilité de l'évènement A est :

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre total de cas possiles}}$$

III. EPREUVE DE BERNOULLI - LOI BINOMIALE

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve ne conduisant qu'à 2 éventualités :

l'une de ces éventualités est appelée Succès, de probabilité P et l'autre Echec de probabilité $q = 1 - p$.

Soit une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Soit p la probabilité du succès et $q = 1 - p$ celle de l'échec.

La probabilité d'avoir exactement k succès est : $P(X = k) = C_n^k p^k q^{(n-k)}$

Cette expression est la Loi Binomiale de paramètre n et p.

Remarque : $E(x) = np$; $V(x) = npq$; et $\sigma(x) = \sqrt{npq}$

EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1 : Bac C 1997 Session de remplacement

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher.
On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
1. On tire au hasard une boule de l'urne.
Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.
2. On tire simultanément deux boules de l'urne.
Calculer la probabilité de tirer deux boules de même couleur.
3. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne.
On fait cette expérience 4 fois.
a. Calculer la probabilité de tirer exactement deux boules rouges
b. Calculer la probabilité de tirer au moins une boule blanche.

EXERCICE 2 : Bac C 1999 Session de normale

On considère un dé cubique dont quatre faces sont blanches et deux sont noires. L'expérience consiste à lancer ce dé et à noter la couleur de sa face supérieure.
1. Calculer la probabilité d'avoir :
a. Une face blanche.
b. Une face noire.
2. On jette le dé quatre fois de suite.
a. Calculer la probabilité d'avoir dans l'ordre: une face blanche; une face noire; une face blanche; une face blanche.
b. Calculer la probabilité d'avoir une seule face noire au cours des quatre lancers.
c. Calculer la probabilité d'avoir une face noire au 4ᵉ lancer (une face noire pouvant apparaître au cours des autres lancers).
3. Soit n un entier naturel non nul.
a. Calculer la probabilité P_n d'avoir au moins une face blanche au cours des n lancers.
b. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $P_n \geq 0{,}99$.

EXERCICE 3 : Bac E 1999 Session normale

Dans une urne, il y a n boules rouges et $2n$ boules blanches.
On tire simultanément p boules de l'urne avec $p < n$.
1. Si $n = 5$ et $p = 4$, calculer les probabilités des événements suivants :
A : Obtenir deux boules rouges et deux boules blanches.
B : Obtenir au moins une boule blanche.
(On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.)
2. On suppose que $p = 2$ et n un entier naturel quelconque tel que $n \geq 2$.
a. Calculer la probabilité P_n d'obtenir deux boules de même couleur.
b. Démontrer que la suite $(P_n)_{n\geq 2}$ est majorée par 1.
Quel est le sens de variation de $(P_n)_{n\geq 2}$?
c. Déduire de la question précédente que $(P_n)_{n\geq 2}$ est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 4 : Bac E 1996 Session de remplacement

Deux personnes, A et B, écrivent chacune au hasard un nombre entier compris 1 et 50. On note a et b les nombres écrits respectivement par A et B.
On suppose que tous les couples (a, b) tels que $1 \leq a \leq 50$ et $1 \leq b \leq 50$ sont équiprobables.
1. Déterminer les probabilités des événements suivants :
a. $a = b$
b. $a + b = 20$
c. $b \geq 15$
d. $b \geq a$
2. Si A et B font cinq fois la même expérience, quelle est la probabilité pour que l'événement " $b \geq a$" soit réalisé au moins deux fois ?
Le résultat sera arrondi à l'ordre 2.

EXERCICE 5 : Bac E 1996 Session normale

Un carré ABCD, de côté 35 cm, est divisé en 1225 (soit 35^2) petits carré de 1 cm de côté par les segments régulièrement espacés et parallèles soit au segment [AB], soit au segment [AD].
1. On appelle " nœud " tout point d'intersection de deux segments de ce quadrillage qui n'est pas situé sur les côtés du carré ABCD.
a. Combien y-t-il de nœuds dans le quadrillage ?
b. On choisit au hasard un de ces nœuds et on le note M, soit I le projeté orthogonal de M sur (AB) et J le projeté orthogonal de M sur (AD).
Déterminer la probabilité de chacun des événements :
b-1 : le quadrilatère AIMJ est un carré,
b-2 : le quadrilatère AIMJ a un périmètre de 24 cm.
2. n étant un entier naturel non nul, on note S_n la somme des n premiers entiers naturels non nuls.
a. Démontrer que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
b. Combien y a-t-il d'entiers naturels non nuls n tels que $S_n \leq 1225$?
3. Les petits carrés du quadrillage sont numérotés de 1 à 1225.
a. On choisit au hasard un des petits carrés, et on note son numéro k.
Quelle est la probabilité pour qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $S_n = k$?
Un tel événement est appelé "succès"
b. On réalise 5 fois l'épreuve précédente.
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois "succès" ?

EXERCICE 6 : Bac C 2003 Session normale

On dispose d'un damier de 5 cases sur 5 placés dans une position fixe.
On place au hasard sur ce damier 4 jetons portant les lettres du mot **MATH** (voir figure ci-dessous).
Les jetons sont posés sur des cases différentes.
(Les résultats des calculs seront donnés sous forme de fractions irréductibles).
1. Justifier que le nombre de dispositions possibles des 4 jetons est égal à 303 600.
2. a. Calculer la probabilité pour que les 4 jetons soient disposés sur une même ligne.

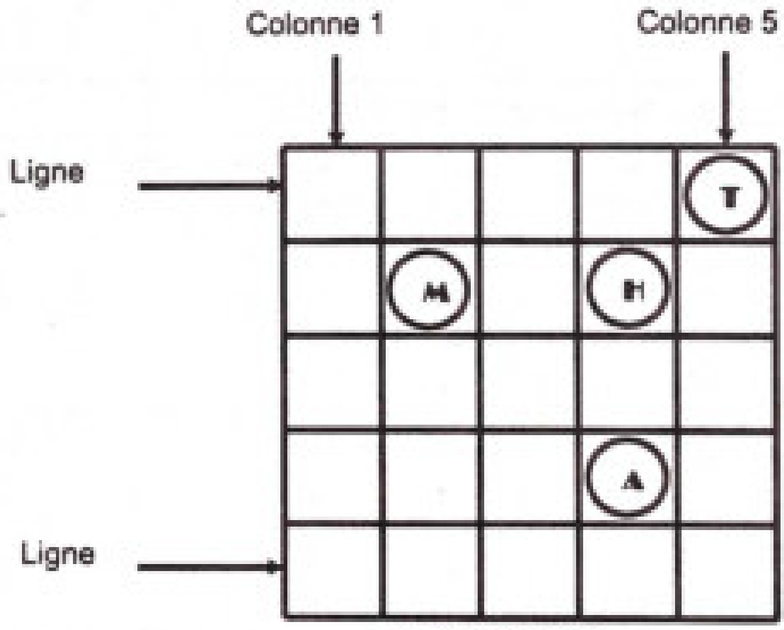
b. Calculer la probabilité pour qu'on puisse lire le mot MATH sur une ligne ou une colonne. ***(On convient que la lecture se fait de gauche à droite sur une ligne, de bas en haut sur une colonne et que deux lettres consécutives du mot MATH peuvent être séparés par un espace).***

3. Démontrer que la probabilité pour que deux jetons ne soient jamais placés sur une même ligne est égale à $\frac{125}{506}$.

4. Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de jetons placés sur la première ligne.

a. Etablir la loi de probabilité de X.

b. Démontrer que l'espérance mathématique de X est égale à 0,8.



Damier 5 sur 5

EXERCICE 7 : Bac C 2004 Session normale

Lors d'une kermesse on organise un jeu d'adresse dénommé « jeu du triangle » qui a pour support trois petits T_1, T_2, T_3 creusés dans le sol et formant un triangle équilatéral.
Pour engager une partie, le joueur achète trois billes à l'organisateur.
Il prend position au trou T_1 et lance une bille en vue de la loger dans le trouT_2.
Il fait ensuite un deuxième lancer à partir du trou T_2 en visant le trou T_3 puis un troisième et dernier lancer à partir du trou T_3 en visant T_1.
A chacun de ces trois lancers, si le joueur réussit à loger la bile dans le trou visé, il la reprend et il reçoit une bile supplémentaire ; s'il ne réussit pas à loger la bille dans le trou visé, il la perd.
Konaté est un inconditionnel du jeu triangle.

La probabilité pour qu'il réussisse un lancer donné est égale à $\frac{2}{3}$.

On suppose que les trois lancers sont indépendants.

1. Démontrer que la probabilité pour que Konaté rate le premier lancer et qu'il réussisse les deux derniers est égale à $\frac{4}{27}$.
2. Calculer la probabilité pour que Konaté réussisse deux sur les trois.
3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de billes que Konaté à la fin de la partie.
   Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

4. Calculer la loi de probabilité X.
5. Démontrer que l'espérance mathématique de X est égale à 4.

EXERCICE 8 : Bac C 2005 Session Normale

On sait par expérience qu'un tireur professionnel touche sa cible avec la probabilité 0,7. Les tirs sont supposés indépendants.

Tous les résultats demandés seront donnés sous forme décimale exacte.

1. Le tireur effectue cinq tirs successifs. Calculer la probabilité pour qu'il touche sa cible :
a. cinq fois ?
b. exactement deux fois ?
c. au moins une fois ?
2. Il tire n fois de suite ($n \geq 1$). Démontrer que la probabilité pour qu'il touche la cible au moins une fois est égale à $1-(0{,}3)^n$.
3. Combien faut-il de tirs au minimum pour que la cible soit touchée au moins une fois avec une probabilité supérieure ou égale à 0,995 ?

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1 : Bac C 1997 Session de remplacement

1) la probabilité d'obtenir une boule blanche :

$$P = \frac{C_4^1}{C_{10}^1} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

2) La probabilité de tirer 2 boules de même couleur est :

$$P(M) = \frac{card\, M}{card\, \Omega} = \frac{C_6^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{15+6}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

$$\boxed{P(M) = \frac{7}{15}}$$

3) a- La probabilité de tirer exactement deux boules rouges est :

- Soit S l'événement " Obtenir une boule rouge" de probabilité $P(S) = \frac{2}{5}$ et $\overline{S}$ l'événement contraire c'est-à-dire "obtenir une boule rouge" de probabilité $P(\overline{S}) = \frac{3}{5}$.

Nous sommes en présence d'un schéma de Bernoulli. On utilise la loi binomiale.
La probabilité de tirer exactement 2 boules rouges est :

$$P(2R) = C_4^2 P(s)^2 P(\overline{S})^2 = C_4^2 P\left(\frac{3}{5}\right)^2 P\left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$= \frac{6 \times 9 \times 4}{625}$$

$$\boxed{P(2R) = \frac{216}{625}}$$

b- La probabilité de tirer au moins une boule blanche est :
• L'événement contraire est celui de ne tirer aucune boule blanche ;
Sa probabilité est

$$P_1 = \left(\frac{3}{5}\right)^4.$$

• La probabilité de tirer au moins une boule blanche est :

$$P = 1 - P_1 = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^4$$

$$\boxed{P = \frac{544}{625}}$$

EXERCICE 2 : Bac C 1999 Session de normale

1) Soit Ω l'ensemble des résultats. Ω est l'ensemble des 6 faces du dé.

a. Soit P(B) la probabilité d'avoir une face blanche. $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

b. Soit P(N) la probabilité d'avoir une face noire. $P(N) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2) Soit E l'ensemble de résultats. $E = \Omega^4$; donc card $E = 6^4$

a. Soit P_1 la probabilité d'avoir dans l'ordre B, N, B et B. $P_1 = \frac{4\times2\times4\times4}{6^4} = \frac{8}{81}$

b. Soit P_2 la probabilité d'avoir une seule face noire au cours des 4 lancers. Cette face noire peut s'obtenir au 1^{er}, 2^e, 3^e ou au 4^e lancer. $P_2 = 4\times\frac{8}{81} = \frac{32}{81}$.

c. Soit P_3 la probabilité d'avoir une face noire au 4^e lancer. $P_3 = \frac{6\times6\times6\times2}{6^4} = \frac{1}{3}$

3) $n\in\mathbb{N}^*$. Soit F l'ensemble des résultats ; $F=\Omega^n$ donc Card F $= 6^n$

a. La négation de "au moins une face blanche" est "aucune face blanche", c'est-à-dire "quatre face noires". La probabilité de cet évènement est : $\left(\frac{2}{6}\right)^n$

$P_n = 1-\left(\frac{2}{6}\right)^n \Rightarrow \quad P_n = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

b- $P_n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$

$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{3}\right) \leq -2\ln 10$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{-2\ln 10}{-\ln}$

$\Leftrightarrow n \geq 4{,}19$

Le plus petit entier naturel non nul n tel $P_n \geq 0{,}99$ est $n_0 = 5$

EXERCICE 3 : Bac E 1999 Session normale

1) Il y a dans une urne, 5 boules rouges et 10 boules blanches.

Le nombre de cas possible est donc C_{15}^4 car l'ordre n'est pas important et les éléments de tirage sont deux à deux distinctes : $C_{15}^4 = 1365$

L'évènement A réalisé si on tire 2 boules rouges parmi 5 et 2 boules blanches parmi 10.

Le nombre de cas favorables à la réalisation de l'évènement A est donc $C_5^2 \times C_{10}^2$

$C_5^2 \times C_{10}^2 = 450$. $\quad P(A) = \frac{450}{1365} = \frac{30}{91}$

Il est aisé de calculer la probabilité de B en passant par celle de $\overline{B}$.

$\overline{B}$ est l'événement : "n'obtient aucune boule blanche" ; c'est-à-dire "obtenir 4 boules rouges".

Le nombre de cas favorables à $\overline{B}$ est C_5^4

$C_5^4 = 5 \quad P(\overline{B}) = \frac{5}{1365} = \frac{1}{273}$

$P(A) = 1-P(\overline{B}) = 1-\frac{1}{273} = \frac{272}{273}$.

2) a- le nombre de cas possibles est C_{3n}^2

$C_{3n}^2 = \frac{3n!}{2!(3n-2)!} = \frac{3n(3n-1)}{2}$

On obtient deux boules de même couleur en obtenant soit 2 boules rouges parmi n soit 2 boules blanches parmi $2n$.

Le nombre de cas favorables à la réalisation de cet évènement est $C_n^2 + C_{2n}^2$

$C_n^2 + C_{2n}^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n(2n-1)}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$

D'où $P_n = \frac{C_n^2 + C_{2n}^2}{C_{3n}^2} = \frac{n(5n-3)}{2} \times \frac{2}{3n(3n-1)} = \frac{5n-3}{3(3n-1)}$

b- P_n étant une probabilité, alors elle est inférieure ou égale à 1.

La suite $(P_n)_{n \geq 2}$ est donc majorée par 1.

Sens de variation de $(P_n)_{n \geq 2}$

Considérons la fonction f dérivable sur $]2;+\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{5x-3}{3(3x-1)}$

$\forall x \in]2;+\infty[, f'(x) = \frac{12}{9(3x-1)^2} = \frac{4}{3(3x-1)^2}$

$\forall x \in]2;+\infty[, f'(x) > 0.$

f est donc strictement croissante. Par conséquent,

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, f(n+1) > f(n)$; c'est-à-dire $P_{n+1} > P_n$

La suite $(P_n)_{n \geq 2}$ est donc strictement croissante.

Autre méthode : on peut étudier le signe de $P_{n+1} - P_n$

$$P_{n+1} - P_n = \frac{5n+5-3}{3(3n+3-1)} - \frac{5n-3}{3(3n-1)} = \frac{5n+2}{3(3n+2)} - \frac{5n-3}{3(3n-1)}$$
$$= \frac{(5n+2)(3n-1) - (5n-3)(3n+2)}{3(3n-1)} = \frac{4}{3(3n+2)(3n-1)} > 0$$

On a $n \geq 2$, $3n - 1 > 0$ d'où

$P_{n+1} - P_n > 0$ c'est-à-dire $P_{n+1} > P_n$ donc la suite (P_n) est strictement croissante.

c- La suite $(P_n)_{n \geq 2}$ est croissante et majorée donc elle converge.

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = \lim_{n \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x-3}{3(3x-1)} = \frac{5}{9}$$

EXERCICE 4 : Bac E 1996 Session de remplacement

Posons E = { 1 ; 2 ; 3 ; .... ; 49 ; 50 }

Soit Ω l-ensemble des resultats. Ω = E × E. Donc Card Ω = 50× 50 = 2500

1°) a. On a : {(1 ;1) ; (2 ; 2) ; (3 ; 3) ;......; (50 ; 50) } donc $P(a = b) = \frac{50}{2500} = \frac{1}{50}$

b. {(a, b) / a + b = 20 } = {(1;19); (2; 18); (3; 17); (4;16); (5;15); (6;14); (7;13); (8;12); (9;11); (10 ;10); (11; 9); (12; 8); (13; 7); (14; 6); (15; 5); (16; 4); (17; 3); (18; 2); (19 ;1)}

Il y a 19 cas favorables. Donc la probabilité est : $P(a + b = 20) = \frac{19}{2500}$

c ' Il y a 36 nombres entiers compris entre 15 et 50.

Pour chacun de ces entiers, il y a 50 couples solutions.

Par conséquent, le nombre de couples (a, b) tels que b ≥ 15 est 36 × 50

$P(b \geq 15) = \frac{36 \times 50}{2500} = \frac{36}{50}$ $\qquad$ $P(b \geq 15) = \frac{18}{25}$

d - { (a, b) / b ≥ a }
Si a = 1, on a 50 couples solutions
Si a = 2, on a 49 couples solutions
....
....
Si a = 49, on a 2 couples solutions
Si a = 50, on a 1 couple solution
Le nombre de cas favorables est :
$50 + 49 + 48 + 47 + \ldots\ldots + 2 + 1 = \frac{50(1+50)}{2} = 25 \times 51$
$P(b \geq a) = \frac{25 \times 51}{2500} = \frac{51}{100} = 0{,}51$
2°) Soit E l'évènement : " b ≥ a " est réalisé au moins 2 fois.
$\overline{E}$ est l'évènement : " b ≥ a " est réalisé au plus 1 fois.
$P(\overline{E}) = C_5^0(0{,}49)^5 + C_5^1(0{,}51) \times (0{,}49)^4 = 0{,}18$
On sait que : $P(E) + P(\overline{E}) = 1 \Rightarrow P(E) = 1 - P(\overline{E}) \Rightarrow P(E) = 1 - 0{,}18 \Rightarrow P(E) = 0{,}82$

EXERCICE 5 : Bac E 1996 Session normale

1°) a. Sur une ligne, il y a 34 nœuds ; or, il y a 34 lignes qui contiennent les nœuds. Donc le nombre de nœuds est $34 \times 34 = 1156$
b.1. Le quadrilatère AIMJ est un carré. Donc M est sur la diagonale [AC].
Or sur cette diagonale, il y a 34 nœuds.
Soit P_1 cette probabilité : $P_1 = \frac{34}{34 \times 34} = \frac{1}{34}$
b.2. Si le périmètre est 24 cm, alors le demi- périmètre est 12 cm.
Les nœuds concernés ont donc pour couple de coordonnées :
(1;11) ; (11;1) / (2 ;10) ; (10 ; 2) / (3 ; 9) ; (9 ; 3) / (4 ; 8) ; (8 ; 4) / (5 ; 7) ; (7; 5) / (6 ; 6)
Il y a donc 11 nœuds. Soit P_2 cette probabilité. On a : $P_2 = \frac{11}{1156}$
2°) $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + (n-1) + n$
a. S_n est la somme des n premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1. $S_n = n\left(\frac{1+n}{2}\right)$
b. $S_n \leq 1225 \Leftrightarrow n\left(\frac{1+n}{2}\right) \leq 1225 \Leftrightarrow n^2 + n - 2450 \leq 0$
$\Delta = 99^2$ On a : $n_1 = -50$ et $n_2 = 49$. Or $n \in \mathbb{N}$.
Il y a donc 49 entiers naturels non nuls n tels que $S_n \leq 1225$
3°) a. D'aprés 2., il y a 49 valeurs de k pour que $S_n = k$.
Appelons P_3 la probabilité du succès. $P_3 = \frac{49}{1225} = \frac{1}{25}$
b. Appelons P_4 cette probabilité
$P_4 = C_5^3\left(\frac{1}{25}\right)^3\left(\frac{24}{25}\right)^2 + C_5^4\left(\frac{1}{25}\right)^4\left(\frac{24}{25}\right) + C_5^5\left(\frac{1}{25}\right)^5 = \frac{10 \times 24^2 + 5 \times 24 + 1}{25^5} = \frac{5881}{9765625}$

EXERCICE 6 : Bac C 2003 Session normale

1. Justifions que le nombre de dispositions possibles des 4 jetons est égal à 303 600.
Placer les 4 lettres du mot **MATH** sur ce damier de 25 cases est un arrangement des 4 parmi 25. Donc le nombre de dispositions possibles est :
$N = A_{25}^{4} = 25 \times 24 \times 23 \times 22$ **N = 303 600.**
2. a) Probabilité pour que les 4 jetons soient disposés sur une même ligne.
Soit A l'évènement : $p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{5 \times A_5^4}{A_{25}^4} \Rightarrow p(A) = \frac{1}{506}$
b) Probabilité pour qu'on puisse lire le mot MATH sur une ligne ou une colonne.

Soit B l'événement :

$$p(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{C_5^1\times C_5^1+C_5^1\times C_5^1}{A_{25}^4}=\frac{5\times5+5\times5}{303\,600}\Rightarrow p(B)=\frac{1}{6072}$$

3. Probabilité pour que deux jetons ne soient jamais placés sur une même ligne.

Soit C l'événement : $p(C)=\frac{25\times20+15\times10}{303\,600}\Rightarrow p(C)=\frac{125}{506}$

4. Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de jetons placés sur la première ligne. X = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4}.

a) Etablissons la loi de probabilité de X.

$$p(X=k)=\frac{C_4^k\times A_{20}^{4-k}\times A_5^k}{A_{25}^4}$$

x_i	0	1	2	3	4	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{969}{2530}$	$\frac{114}{253}$	$\frac{38}{253}$	$\frac{4}{253}$	$\frac{1}{2530}$	1

b) Démontrons que l'espérance mathématique de X est égale à 0,8.

$$E(X)=\sum_{i=0}^{4}x_ip(X=x_i)$$

$$E(X)=0\times\frac{969}{2530}+1\times\frac{1140}{2530}+2\times\frac{380}{2530}+3\times\frac{40}{2530}+4\times\frac{1}{2530}$$

$$E(X)=\frac{2024}{2530}=\frac{4}{5}\quad\Rightarrow\quad E(X)=0{,}8$$

EXERCICE 7 : Bac C 2004 Session normale

1. Démontrons que la probabilité pour que Konaté rate le premier lancer et qu'il réussisse les deux derniers est égale à $\frac{4}{27}$.

La probabilité pour qu'il réussisse un lancer donnée est $P_1=\frac{2}{3}$.

La probabilité pour qu'il échoue un lancer donnée est $Q=\frac{1}{3}$.

La probabilité pour que Konaté rate le premier lancer et qu'il réussisse les deux derniers est : $p=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$.

2. Calculons la probabilité pour que Konaté réussisse deux sur les trois.

La probabilité pour que Konaté réussisse deux lancers sur les trois est :

$$p=C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=3\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$$

3. Déterminons l'ensemble des variables aléatoires X.

Soit G le gain et P la perte

situation	GGG	PPP	GPG	GPP	GGP	PGP	PGG	PPG
gain	6	0	4	2	4	2	4	2

Donc X = {0 ; 2 ; 4 ; 6}.

4. Calculons la loi de probabilité X.

$$p(X=0)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27} \quad ; \quad p(X=2)=C_3^1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2=3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{9}=\frac{6}{27}$$

$$p(X=4)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=3\times\frac{4}{27}=\frac{12}{27} \quad ; \quad p(X=6)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

Donc la loi de probabilité de X est :

X_i	0	2	4	6	Total
$p(x = x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{8}{27}$	1

5. Démontrons que l'espérance mathématique de X est égale à 4.

$$E(X)=0\times\frac{1}{27}+2\times\frac{6}{27}+4\times\frac{12}{27}+6\times\frac{8}{27}=\frac{108}{27}=4$$

Donc, l'espérance mathématique de X est égale à **4.**

EXERCICE 8 Bac C 2005 Session Normale

1. Calculons la probabilité pour qu'il touche sa cible :

a) cinq fois ?

La probabilité pour que le tireur touche sa cible est 0,7.

La probabilité pour que le tireur ne touche pas sa cible est **1 - 0,7 = 0,3**.

Epreuve de Bernoulli et loi binomiale

La probabilité pour qu'il touche sa cible cinq fois est $\mathbf{p_1 = (0,7)^5 = 0,16807}$.

b) exactement deux fois ?

La probabilité pour qu'il touche sa cible exactement deux fois est :

$$p_2=C_5^2(0,7)^2(0,3)^3=10\times(0,7)^2\times(0,3)^3=0,343$$

c) au moins une fois ?

La probabilité pour qu'il touche sa cible au moins une fois est :

$$p_3=C_5^1(0,7)^1(0,3)^4+C_5^2(0,7)^2(0,3)^3+C_5^3(0,7)^3(0,3)^2+C_5^4(0,7)^4(0,3)^1+C_5^5(0,7)^5$$

Ou bien on détermine la probabilité de ne pas toucher la cible : $p' = (0,3)^5$.

Puis la probabilité de toucher au moins une fois est : $\mathbf{p = 1 - p' = 1 - (0,3)^5 = 0,99757}$.

2. Probabilité pour qu'il touche la cible au moins une fois est $1-(0,3)^n$.

La probabilité qu'il ne touche pas la cible n fois est : $\mathbf{p' = (0,3)^n}$.

La probabilité pour qu'il touche la cible au moins un fois est : $\mathbf{p = 1 - p' = 1 - (0,3)^n}$.

3. Le nombre de tirs au minimum pour que la cible soit touchée au moins une fois

$$1-(0,3)^n=0,995 \Rightarrow (0,3)^n=1-0,995=0,005 \Rightarrow \ln(0,3)^n=\ln(0,005)$$

$$\Rightarrow \quad n\ln(0,3)=\ln(0,005) \quad \Rightarrow \quad n=\frac{\ln(0,005)}{\ln(0,3)}=4,4$$

Conclusion : le nombre de tirs au minimum est 4

DEUXIEME PARTIE

10 DERNIERS SUJETS DU BAC ENTIÈREMENT RÉSOLUS

SUJET 1 : BAC C 2016 SESSION NORMALE

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n+1) + \ln(n+2) + \ldots + \ln(n+n) - n\ln(n)}{n}$$

1 - Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right)\right]$$

2 – a) Démontrer que pour tout entier naturel k tel que $0 \le k \le n-1$,

$$\frac{1}{n}\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)\,dx \le \frac{1}{n}\ln\left(1 + \frac{k+1}{n}\right).$$

(On pourra utiliser un encadrement de ln(x) sur l'intervalle $\left[1 + \frac{k}{n}, 1 + \frac{k+1}{n}\right]$*)*

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n - \frac{1}{n}\ln(2) \le \int_1^2 \ln(x)\,dx \le u_n$$

3 – Sachant que $\int_1^2 \ln(x)\,dx = 2\ln(2) - 1$, déduire de ce qui précède la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. L'unité graphique est 2 cm.

1 – On note (⁄)l'ensemble des points M du plan d'affixe z ($z = x + iy$) avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $14z\bar{z} + 16i(z - \bar{z}) = z^2 + \bar{z}^2$.

Démontrer que M appartient à (⁄) si et seulement si : $3x^2 + 4y^2 - 8y = 0$

2 – a) Justifier que (⁄) est une ellipse. On note Ω son centre.

b) Préciser les coordonnées de Ω

c) Déterminer une équation de l'axe focal de (⁄).

d) On note A, A', F et F' les points d'affixes respectives

$$\frac{-2\sqrt{3}}{3} + i,\ \frac{2\sqrt{3}}{3} + i,\ -\frac{\sqrt{3}}{3} + i \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{3} + i.$$

Justifier que A et A' sont les sommets de (⁄) situés sur son axe focal.

Justifier que F et F' sont les foyers de (⁄).

3 – Construire l'ellipse (⁄).

4 – On considère l'hyperbole (H) de foyers A et A' et de sommets F et F'.

a) Démontrer qu'une équation cartésienne de (H) dans le repère $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est : $3x^2 - y^2 = 1$.

b) Tracer les asymptotes de (H).

c) Construire (H).

PROBLEME

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

On considère la fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie par : $f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}\ln|x|$

1 – a) Calculer la limite de f en 0.

b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

c) Démontrer que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[$ et $]0; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{4}; 0\right[$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

2 – Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $3 < \alpha < 4$.

3 – Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; \alpha[, f(x) < 0$;
$\forall x \in]\alpha; +\infty[, \quad f(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2 ln|x| \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

1 – a) Démontrer que h est dérivable en 0.

b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, h'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) Démontrer en utilisant A-3) que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup \left]0; \frac{1}{\alpha}\right[, h'(x) > 0$
$\forall x \in \left]\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[, \quad h'(x) < 0$

2 – On note (Γ) la courbe représentative de la restriction de h à l'intervalle $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ dans le plan muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a)Tracer la tangente à (Γ) en son point d'abscisse 0.

b) Construire la courbe (Γ). (*On prendra* $= 3{,}6$.)

3 – λ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1[$.

a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que :
$\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 ln\lambda$

b) On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en centimètre carré de la partie du plan limitée par la courbe (Γ), la droite de repère $(O, \vec{\imath})$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$
Déduire de la question précédente que :
$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3 \ln(\lambda)\right) cm^3$

c) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers 0 par valeurs supérieures.

Partie C

On se propose de calculer une valeur approchée de α à 0,01 près.

1 – Soit g la fonction dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et définie par :
$g(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln(x)$

a) Etudier les variations de g.

b) Démontrer que l'image de l'intervalle $[3; 4]$ par g est contenue dans l'intervalle $[3; 4]$.

c) Démontrer que α est l'unique solution de l'équation : $x \in]0; +\infty[, g(x) = x$.

2 - On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3 \leq u_n \leq 4$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $(u_n - \alpha)$ et $(u_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires.

c) Démontrer que, pour tout x élément de $[3; 4]$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{12}|u_{n+1} - u_n|$
puis que $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12^n}$.

d) Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$.
En déduire une valeur approchée de α à 0,01 près.

SUJET 2 : BAC C 2015 SESSION NORMALE

EXERCICE 1

Dans un quartier d'affaires d'une ville, la Mairie a créé des parkings payants pour les véhicules. Le prix du stationnement dans ces parkings est de 2 000 F par jour. Par ailleurs le stationnement en tout autre endroit est interdit et l'amende à payer liée à cette infraction est égale à 5 000 F.

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Partie I

Pour encourager les automobilistes à utiliser ses parkings, la Mairie organise, dans le cadre d'une promotion, une loterie. Cette loterie est constituée de dix tickets identiques disposés dans une urne dont deux sont gagnants.

Chaque automobiliste qui désire se garer dans un des parkings, effectue le tirage d'un ticket, note le résultat, le remet dans l'urne puis effectue le deuxième tirage.

- Si les deux tickets tirés sont gagnants alors le client stationne gratuitement.
- Si un seul des deux tickets tirés est gagnant alors le client stationne à 1 000 F.
- Si aucun des deux tickets tirés n'est gagnant alors le client stationne à 2 000 F.

Un automobiliste se présente et effectue les deux tirages.

1. Calculer la probabilité de stationner gratuitement.
2. Justifier que la probabilité de payer la moitié du prix du stationnement est égale à $\frac{8}{25}$.
3. Calculer la probabilité de payer au moins 1 000 F pour le stationnement.

Partie II

La probabilité pour un automobiliste d'etre interpellé par la Police Municipale pour stationnement interdit et d'avoir alors à payer l'amende est égale à $\frac{4}{5}$.

Un automobiliste se gare n fois en stationnement interdit. Les risques d'amende sont indépendants d'un stationnement interdit à l'autre.

1. a) Calculer la probabilité q_n de payer l'amende au plus une fois.

   b) Démontrer que la probabilité P_n qu'il paye au moins une fois l'amende est

   $P_n = 1 - \frac{1}{5^n}$

   c) Déterminer le plus petit entier naturel n pour que $P_n \geq 0,99$.

2. Monsieur Riko, exercant dans ce quartier, paye en moyenne 4800 F pour trois jours de stationnement par semaine dans les parkings payants. Il estime que les stationnements payants lui reviennent trop chers et prend le risque de se garer en stationnement interdit trois fois dans la semaine.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le montant total des amendes qu'il peut payer dans la semaine.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Monsieur Riko a-t-il intérêt à se garer en stationnement interdit ?
   Justifier la réponse.

EXERCICE 2

Partie I

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. L'unité graphique est 2cm.

On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i$; $\sqrt{3}+i$ et $\sqrt{3}+2i$.

1. a) Calculer le module et l'argument principal de $\frac{z_A}{z_B}$ où z_A et z_B sont les affixes respectives des points A et B.

   b) En déduire que le triangle OAB est équilatéral.

2. On note P et Q les milieux respectifs des segments [OB] et [AB].

r est la rotation de centre J d'affixe i et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

On pose : $f = t \circ r$.

a) Déterminer l'image par f du point O.

b) Démontrer que f est une rotation dont on donnera l'angle.

c) Construire le centre K de f.

Partie II

1. Soit M un point du plan d'affixe z. On pose : $z = x + iy$, où x et y des nombres réels

On note H le point d'affixe $x + 3i$.

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $2|z| = |y-3|$.

a) Démontrer que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$

b) Justifier que (Γ) est une ellipse dont on précisera l'excentricité, un foyer et la directrice (D) associée.

c) Démontrer que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

d) Préciser les coordonnées du centre Ω de (Γ) et les coordonnées des sommets de (Γ) dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

e) Tracer (Γ).

2. Soit (Γ') l'image de (Γ) par f.

a) Démontrer que (Γ') est une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$

b) Préciser un foyer et la directrice associée.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 10 cm.

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = (e^{-x^2} - 1)\ln x \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère (O, I, J). *On se propose dans ce problème de trouver un encadrement de* $\int_0^1 f(x)dx$

Partie A

On considère les fonctions h et g dérivables et définies sur] 0 ; + ∞[par :

$h(x) = \ln x + e^x + 1$ et $g(x) = x\ln x + e^x - 1$.

On admet qu'il existe un nombre réel $\alpha \in]0;1[$ tel que : $\begin{cases} \forall x \in]0,\alpha[, h(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha, +\infty[, h(x) > 0 \\ h(\alpha) = 0 \end{cases}$

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Justifier que : $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = h(x)$
3. a) Etudier les variations de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b) Dresser le tableau de variation de g.
4. a) Démontrer que l'équation : $x \in]0;+\infty[$, $g(x) = 0$ admet une solution unique β
   b) Justifier que : $\beta \in]0{,}3;0{,}4[$
   c) Démontrer que : $\forall x \in]0;\beta[, g(x) < 0$; $\forall x \in]\beta;+\infty[, g(x) > 0$

Partie B

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. Justifier que f est dérivable en 0.
3. a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

   c) Donner une interprétation graphique des résultats des limites des questions a) et b)
4. On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
   a) Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = -\dfrac{e^{-x^2}}{x} g(x^2)$
   b) Déterminer les variations de f sur $[0;+\infty[$.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
5. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
   b) Tracer (C) et (T) dans le plan muni du repère (O, I, J). *On prendra* $\beta = 0{,}31$

Partie C

1. Sachant que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$
a) Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, -1 \leq -e^{-x} \leq -1 + x$
b) Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, 1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$
2. Soit t un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1]$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n(t) = \int_t^1 x^n \ln x \, dx$
a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_n(t)$
b) Démontrer que : $\forall t \in]0;1], -I_2(t) + \frac{1}{2} I_4(t) \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -I_2(t)$
3. On pose : $S = \int_0^1 f(x)dx$
a) Donner une interprétation géométrique de S
b) On admet que : $\lim\limits_{t \to 0} \int_t^1 f(x)dx = S$.
Déterminer un encadrement de S.

SUJET 3 : BAC C 2014 SESSION NORMALE

EXERCICE 1

I. 1. Démontrer qu'il existe un couple $(a\,;b)$ d'entiers relatifs tel que $45a - 16b = 1$

2. Soit l'équation (E) : **45x - 16y = 2** où x et y sont des entiers relatifs.

a) Justifier que le couple (10 ; 28) est une solution particulière de (E)

b) Résoudre (E)

II. Deux navires A et B accostent régulièrement et périodiquement dans un port pour décharger et charger des marchandises.

Le navire A accoste tous les 90 jours et B accoste tous les 32 jours.

Le navire A accoste un jour J_0 au port et quatre jours plus tard, B accoste au port à son tour.

On note J_1 le jour de la prochaine entrée simultanée des deux navires au port.

1. Soient u et v le nombre d'entrées au port effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1 (J_0 non compris).

Démontrer que le couple $(u\,;v)$ est une solution de (E).

2. Déterminer le couple $(u\,;v)$.

3. Calculer le nombre de jours qui s'écoulent entre J_0 et J_1 (J_0 non compris).

EXERCICE 2

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que :

$$\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = -\frac{\pi}{6}$$

I. 1. On considère la similitude directe S qui transforme A en B et C en A.

a) Faire une figure en prenant AC = 7. (On complétera la figure au fur et à mesure)

b) Justifier que S n'est pas une translation.

c) Justifier que l'angle de la similitude directe S est $-\frac{\pi}{2}$

d) Déterminer le rapport de S.

2. On note Ω le centre de S.

a) Démontrer que Ω appartient aux cercles (C') et (C) de diamètres respectifs [AB] et [AC].

b) Justifier que Ω est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

3. Soit (Δ) une droite passant par A et ne passant pas par Ω.

(D) est la perpendiculaire à (Δ) passant par C.

On appelle B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur (Δ).

a) Déterminer les images respectives de (D) et (Δ) par S.

b) En déduire l'image du point C' par S.

c) Déduire de ce qui précède que le cercle de diamètre [B'C'] passe par un point fixe lorsque la droite (Δ) varie. Préciser ce point fixe.

II. 1. Placer le point I de la demi – droite [AC) tel que : AB = AI.

2. Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $\left(A\,;\,\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}\right)$

a) Démontrer que l'affixe du point C est $\sqrt{3}$

b) Soit M un point d'affixe z et M ' le point d'affixe z', image de M par S.

Justifier que : $z' = -\,i\frac{\sqrt{3}}{3}z + i$.

c) Déterminer l'affixe du centre Ω de S.

3. a) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tel que | z' | = 1.

b) Tracer (Γ).

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est égale à 2 cm

Partie A

Soit f la fonction dérivable sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [et définie sur [0 ; + ∞ [par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2(1 - 2\ln x), & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C) sa représentation graphique dans le plan muni du repère (O, I, J)

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. Justifier que la courbe (C) admet en son point d'abscisse 0, une tangente horizontale.
3. a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

   b) Interpréter graphiquement les résultats de la question 3. a)
4. a) Démontrer que pour tout x élément de l'intervalle] 0 ; + ∞ [, $f'(x) = -4x\ln x$.

   b) Etudier les variations de f sur [0 ; + ∞ [, puis dresser son tableau de variation.

   c) Calculer $f(\sqrt{e})$ et justifier que : $\begin{cases} \forall x \in [0\,;\sqrt{e}\,],\ 0 \le f(x) \le 1 \\ \forall x \in\,]\sqrt{e}\,, +\infty[,\ f(x) < 0 \end{cases}$
5. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse $\sqrt{e}$

   b) Tracer (T) et (C)

Partie B

a est un élément de $]0\,;\sqrt{e}\,[\cup]\sqrt{e}\,;+\infty[$ et x est un nombre réel strictement positif.

On pose : $S = \int_a^x f(t)\,dt$

1. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$S = \frac{x^3}{3}\left(\frac{5}{3} - 2\ln x\right) - \frac{a^3}{3}\left(\frac{5}{3} - 2\ln a\right)$$

2. On note $A(a)$ l'aire en cm² de la partie du plan limitée par (C) et les droites d'équations : $y = 0$, $x = a$ et $x = \sqrt{e}$

a) Démontrer que $A(a) = \left(4\int_a^{\sqrt{e}} f(t)\,dt\right)$ cm².

(On distinguera les cas $a < \sqrt{e}$ et $a > \sqrt{e}$)

b) On suppose dans cette question que $a > \sqrt{e}$

Déterminer la valeur de α pour laquelle $A(\alpha) = \left(\frac{8}{9}e\sqrt{e}\right)cm^2$

3. Déduire de ce qui précède que l'aire en cm² de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations x = 0 et $x = e^{\frac{5}{6}}$ est égale à $\frac{16}{9}e\sqrt{e}$.

Partie C

n est un entier naturel.Soit f_n la fonction dérivable sur l'intervalle [0 ; + ∞[et définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^2(n - 2\ln x)e^{\frac{1-n}{2}}, \text{ si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C_n) la représentation graphique de f_n dans le plan muni du repère (O, I, J)

1. Démontrer que (C_n) est l'image de (C_1) par l'homothétie de centre O et de rapport $e^{\frac{n-1}{2}}$. On remarquera que (C_1) = (C)

2.

a) Construire la courbe (C_2) et ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et e.

b) Déterminer en cm², l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_2), les droites (OI), (OJ) et la droite d'équation x = e.

3. Déterminer l'aire en cm² de la partie du plan comprise entre la courbe (C_2), la droite (OI) et les droites d'équations x = 0 et $x = e^{\frac{4}{3}}$

SUJET 4 : BAC C 2013 SESSION NORMALE

EXERCICE 1

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1.

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie par : $f(x) = \sqrt{1 + ax^2}$.

On admettra que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$.

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall x \in N,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. On suppose que : $0 < a < 1$

a. Démontrer par récurrence que :

i) pour tout n élément de N, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$

ii) la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite .

2. On suppose que : $a > 1$

Soit la suite (v_n) définie par : $v_n = (u_{n+1})^2 - (u_n)^2$ pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (u_{n+1})^2 - (u_n)^2 = a^n$

c. On pose : $S_0 = 1$ et $S_n = 1 + a + a' \ldots + a^{n-1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$

Justifier que : $S_n = \dfrac{1-a^n}{1-a}$

d. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{S_n}$

EXERCICE 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, d'unité 1cm, on considère les points A(- 1 ; 0) et I(4 ; 0) .

On note (E) l'ellipse de centre I dont un sommet est A et un foyer est le point O.

1. a. Déterminer les coordonnées des trois autres sommets de (E) dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

b. Justifier que l'excentricité de (E) est égale à $\frac{4}{5}$

c. Donner une équation de la directrice (D) de l'ellipse (E) associée au foyer O dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

2.a. Démontrer qu'une équation de (E) dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est : $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

b. Construire (E)

3. On considère l'équation :

$$(E_\alpha): z\in\mathbb{C},\ z^2-2(4+5\cos\alpha)z+(4\cos\alpha+5)^2=0 \ \ avec \ \ \alpha\in]0;\pi[$$

a. Justifier que le discriminant de (E_α) est $\Delta = (6i\sin\alpha)^2$.

b. Résoudre l'équation (E_α). On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et z_2 l'autre solution.

c. On note M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2 dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Démontrer que M_1 et M_2 appartiennent à (E) lorsque α décrit l'intervalle [0 ; π]

PROBLEME

Partie A

On considère la fonction dérivable sur]0 ; + ∞[et définie par : $f(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). Unités : OI = 2 cm et OJ = 4 cm

I. Soit la fonction u dérivable sur]0 ; + ∞[et définie par : $\mathbf{u(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln x}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$

2.a. Etudier les variations de u sur]0 ; + ∞[puis dresser son tableau de variation

b. Démontrer que l'équation : (E) : $x\in]0;+\infty[$, u(x) = 0 admet une solution unique α.

c. Démontrer que : $1,89 < \alpha < 1,9$

d. Justifier que : $\begin{cases} si\ x\in]0;\alpha[\ alors\ u(x)>0 \\ si\ x\in[\alpha;+\infty[\ alors\ u(x)\leq 0\end{cases}$

II-

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. a. Démontrer que pour tout x élément de]0 ; + ∞[; $f'(x)=\frac{u(x)}{x(1+x^2)^2}$

b. Démontrer que $f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha^2}$

c. Etudier les variations de f sur]0 ; + ∞[puis dresser le tableau de variation de f.

3. a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C) et (OI)

b. Déterminer suivant les valeurs de x, le signe de f(x) pour tout x élément de]0 ;+ ∞[.

4.Tracer (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).

Partie B

On note F la fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par : $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$

1. a. Déterminer le signe de F sur $]0\,;+\infty[$.
   b. Calculer $F'(x)$ pour tout nombre réel x élément de $]0\,;+\infty[$

2. On note φ la bijection réciproque de la fonction tangente sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

   a. Démontrer que pour tout x élément de $[0\,;+\infty[$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

   b. Soit h la fonction définie par : $\begin{cases} \forall x \in]0;+\infty[,\ h(x) = \frac{\varphi(x)}{x} \\ h(0) = 1 \end{cases}$

Démontrer que h est continue en 0.

3. a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ F(x) = \varphi(x)\ln x - \int_1^x h(t)dt$

   b. En utilisant la question 2-b) de la partie B, démontrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)\ln x = 0$

4. On admettra que F est prolongeable par continuité en 0 et que :

$\forall x \in]0;+\infty[,\ F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$. Soit G le prolongement par continuité de F en 0.

On pose $G(0) = \ell$ $(\ell \in \mathbb{R})$. G est définie par : $\begin{cases} \forall x \in]0;+\infty[,\ G(x) = F(x) \\ G(0) = \ell \end{cases}$

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans le repère (O, I, J).

a. Démontrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \ell$

b. Etudier les variations de G sur $[0\,;+\infty[$, puis dresser son tableau de variation.

5. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

On admet que : $|\ell - v_n| \le \frac{1}{(2n+3)^2}$

a. Justifier que : $v_2 = \frac{209}{225}$

b. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{1}{(2n+3)^2} \le 25.10^{-3}$

c. En déduire une valeur approchée de ℓ à 25.10^{-3} près.

d. Donner l'allure de (Γ) dans le plan muni du repère (O, I, J).

SUJET 5 : BAC C 2012 SESSION NORMALE

EXERCICE 1

L'ARETI est une association au sein de laquelle les hommes sont plus nombreux que les femmes. Les cotisations mensuelles sont de 900 F CFA pour les hommes et de 700 F CFA pour les femmes.

Pour sa fête annuelle, le parrain de l'ARETI désire offrir des tee-shirts aux hommes et des pagnes aux femmes. Malheureusement, il ne connaît pas le nombre de femmes et d'hommes de cette association. Cependant, il sait que les cotisations de tous les membres s'élèvent à 20000 F CFA.

L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre d'hommes et de femmes de cette association.

1. On considère l'équation (E) : $(x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $9x + 7y = 1$.

a) Soit $(x\ ;\ y)$ un couple solution de (E). Démontrer que $2x \equiv 1[7]$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2x \equiv 1[7]$.

c) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est $\{(4 + 7k\ ;\ -5 - 9k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Résoudre l'équation (E') : $(x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $9x + 7y = 200$.

3. En déduire le nombre d'hommes et de femmes de cette association.

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ tel que $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = 2$ cm.

K est le point de coordonnées $(-1\ ;\ 0)$.

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifiant :

$3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$

1. Justifier que (Γ) est une ellipse.

2. On note :

• F' et F les foyers de (Γ) ;

• A' et A les sommets de (Γ) situés sur l'axe focal.

L'abscisse de A' est négative. B' et B sont les autres sommets de l'ellipse.

a) Justifier que les coordonnées respectives de F et F' dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ sont $(0\ ;\ 0)$ et $(-2\ ;\ 0)$.

b) Déterminer les coordonnées de A', A, B et B' dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

c) Construire (Γ) dans le plan muni du repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

3. Soit M un point quelconque de (Γ).

a) Construire le point N tel que KMN soit un triangle rectangle isocèle en N de sens indirect puis, construire le point P symétrique de K par rapport à N.

b) Justifier que P est l'image de M par une similitude directe S de centre K dont on précisera le rapport et l'angle.

c) On admettra que l'image d'une conique par une similitude directe est une conique de même nature.

Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points P lorsque M décrit (Γ).

4. z est l'affixe d'un point quelconque du plan et z' l'affixe du point M' l'image de M par S.

a) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude directe S est $z' = (1 - i)z - i$;

b) On note G' et G les images respectives par S des foyers F' et F de (Γ).

Déterminer les coordonnées des points G' et G dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

c) Démontrer qu'une équation de (C) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est :

$7x^2 + 7y^2 + 2xy + 14x + 2y - 41 = 0$.

PROBLEME

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Le but de ce problème est de déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

PARTIE A

Soit f la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{3} - \ln x$.

On désigne par (c) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 2 cm

1. a) Démontrer que la droite (OJ) est un asymptote à la courbe (c).

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ces résultats.

2. a) Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$.

   b) En déduire les variations de f .

   c) Dresser le tableau de variation de f .

3. Construire (c) dans le repère (O, I, J).

PARTIE B

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(t)dt$.

2. On pose $A_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$.

   a) Interpréter graphiquement A_n.

   b) Vérifier que $A_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{3n} - \dfrac{1}{12n^4} - \dfrac{\ln(n)}{n}$

   c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

3.a) Soit k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n-1$.

$$\textbf{\textit{Demontrer que}}: \forall t \in \left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right], \textbf{\textit{on a}}: \frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b) En déduire que:

$$\frac{1}{n}\left[f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\right]\leq A_n\leq\frac{1}{n}\left[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n-1}{n})\right]$$

4. On pose : $S_n=\frac{1}{n}\left[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\right]$.

a) Démontrer que : $A_n\leq S_n\leq A_n+\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})$.

b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{3}{4}$

PARTIE C

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

2.a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $\ln(\frac{1}{n})+\ln(\frac{2}{n})+\cdots+\ln(\frac{n}{n})=\ln(\frac{n!}{n^n})$

b) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$S_n=\frac{1}{12n^2}\left[n(n+1)\right]^2-\frac{1}{n}\ln(\frac{n!}{n^n})-\frac{1}{3}.$$

c) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(\frac{n!}{n})=-1$

3.a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $\ln(u_n)=\frac{1}{n}\ln(\frac{n!}{n^n})$.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

SUJET 6 : BAC C 2011 SESSION NORMALE

EXERCICE 1

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

A tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$.

1. Calculer les coordonnées (x' ; y') du point M' en fonction des coordonnées (x ; y) du point M.

2.a) Démontrer que l'ensemble (H) des points M du plan tels que z' soit un nombre imaginaire pur est une hyperbole.

b) Préciser dans le repère $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$, les coordonnées du centre Ω, celles des sommets et les équations des asymptotes de (H).

c) Construire (H).

3. Soit P le point d'affixe $-\frac{5}{2} - 2i$.

Déterminer les points M du plan tels que le quadrilatère OMM'P soit un parallélogramme.

EXERCICE 2

Un livreur de pain qui fait son service à moto, doit servir tous les jours un client à 20 heures précises.

La livraison de pain chez ce client est indépendante d'un jour à l'autre.

Habituellement, le livreur met 10 minutes de la boulangerie au domicile de ce client ; mais la mairie a fait installer sur son trajet deux feux tricolores non synchronisés et indépendants.

- S'il arrive à un feu orange, il s'arrête 60 secondes et repart.
- S'il arrive à un feu rouge, il s'arrête 30 secondes et repart.

Pour chaque feu :

- la probabilité d'être vert à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{2}$
- la probabilité d'être orange à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{4}$

On note X la variable aléatoire égale au temps mis en minutes par le livreur pour arriver au domicile du client.

1- a) Justifier que l'ensemble des valeurs prises par X est {10 ; 10,5 ; 11 ; 11,5 ; 12}.

b) Justifier que $P(X = 11) = \frac{5}{16}$.

c) Déterminer la loi de probabilité de X.

2- Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter ce résultat.

3 - Le livreur part à 19 h 49 min de la boulangerie.

a) Calculer la probabilité qu'il arrive à 20 heures précises chez le client.

b) Calculer la probabilité qu'il arrive en retard chez le client.

4 - *Pour cette question, on donnera l'arrondi d'ordre 3 de chaque résultat.*

a) Calculer la probabilité pour que le pain soit livré exactement trois fois à 20 heures précises au cours d'une semaine.

b) Calculer la probabilité pour que le pain soit livré au moins une fois à 20 heures précises au cours d'une semaine.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.
Soit k un nombre réel non nul.
On considère la fonction f_k dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$f_k(x)=(2x+4k)e^{\frac{-x}{2k}}-x.$$

On note (c_k) la courbe représentative de la fonction f_k.

Le but du problème est d'étudier les fonctions f_k, de construire la courbe (c_1) et de donner un programme de construction de la courbe (c_k) pour k différent de 1.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit h la fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x)=x+e^{\frac{x}{2}}$.

1. Etudier le sens de variations de h.
2. Calculer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. a) Démontrer que l'équation $h(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α tel que : $-0{,}71<\alpha<-0{,}70$.

   b) En déduire que :

$\forall x\in]-\infty;\alpha[, h(x)<0;$

$\forall x\in]\alpha;+\infty[, h(x)>0.$

Partie B : Etude de la fonction f_1.

Pour tout nombre réel x : $f_1(x)=(2x+4)e^{-\frac{x}{2}}-x$.

1.a) Démontrer que $f_1(\alpha)=-2-\alpha-\dfrac{4}{\alpha}$.

b) En déduire un encadrement de $f_1(\alpha)$ d'amplitude 0,1.

2.a) Pour tout réel x, calculer $f_1'(x)$ et démontrer que $f_1'(x)=-h(x)e^{-\frac{x}{2}}$.

b) en déduire les variations de f_1.

3.a) Calculer la limite quand x tend vers $-\infty$ de $f_1(x)$, puis la limite quand x tend vers $-\infty$ de $\dfrac{f_1(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ces résultats.

b) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$.

c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à (c_1) en $+\infty$

4.a) Dresser le tableau de variation de f_1.

b) Construire la droite (D) et la courbe (c_1) dans le plan muni du repère (O, I, J).

5.a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour tout nombre réel x :

$$I(x)=\int_0^x (2t+4)e^{\frac{-t}{2}}dt$$

b) En déduire en cm² l'aire a_1 de la partie du plan limitée par :

- la courbe (c_1) ;
- la droite (D) ;
- la droite (OJ) et la droite d'équation : $x = 2$.

Partie C : Etude de la fonction f_k.

1.a) Démontrer que pour tout nombre réel x : $f_k'(x)=-h\left(\frac{1}{k}x\right)e^{-\frac{x}{2k}}$

b) En utilisant la partie A, étudier les variations de f_k suivant le signe de k.

c) Vérifier que : $f_k(k\alpha)=kf_1(\alpha)$.

d) Dresser le tableau de variation de f_k suivant le signe de k.

(On ne demande pas de calculer les limites de f_k)

2.a) Démontrer que (c_k) est l'image de (c_1) par l'homothétie de centre O et de rapport k.

b) En déduire la construction de $(c_{-\frac{1}{2}})$ dans le même repère que (c_1).

3. On note a_k l'aire de la partie du plan limitée par :

- la courbe (c_k) ;
- la droite (D) ;
- la droite (OJ) et la droite d'équation $x=2k$.

Déterminer en cm² a_k en fonction de k.

SUJET 7 : BAC C 2010 SESSION NORMALE

EXERCICE 1

On se propose d'étudier la suite (U_n) de nombres réels, définie par: $U_1 = 1 + \frac{1}{e}$ et pour tout entier naturel non nul n, $U_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right)U_n$.

Dans cet exercice, on admettra que pour tout nombre réel t strictement positif, on a : $t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t \qquad (1)$

Soit f la fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = \ln(1+e^{-x})$

1. En utilisant l'inégalité (1), justifier que: $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$.

2. Démontrer que la suite (U_n) est strictement croissante.

3. Démontrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(U_n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

4. On pose : $a_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \ldots \frac{1}{e^n}$ et $b_n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \ldots \frac{1}{e^{2n}}$

a. À l'aide des questions 1) et 3), démontrer que: $a_n - \frac{1}{2}b_n < \ln(U_n) < a_n$

b. Justifier que: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1-e^{-n}}{e-1}$

c. Démontrer que la suite (U_n) est majorée.

En déduire que la suite (U_n) est convergente.

d. On note ℓ la limite de la suite (U_n). Démontrer que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \le \ln \ell \le \frac{1}{e-1}$ puis en déduire une valeur approchée de ℓ à 0,1 près.

EXERCICE 2

Un jeu consiste à lancer trois fois un dé cubique équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure.

1. Démontrer que la probabilité d'obtenir 3 chiffres identiques est $\frac{1}{36}$.
2. Calculer la probabilité d'obtenir 3 chiffres dont la somme est égale à 6.
3. Démontrer que la probabilité d'obtenir exactement deux chiffres identiques est $\frac{5}{12}$
4. Le droit de participation au jeu est de 3 000 francs.

- si le joueur obtient 3 chiffres identiques, il reçoit 5 000 francs;
- s'il obtient 3 chiffres deux à deux distincts, il reçoit 3 000 francs;

- s'il obtient exactement deux chiffres identiques, il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur au cours d'une partie.
On appelle gain algébrique d'un joueur la différence entre ce qu'il reçoit et sa mise:

a. Déterminer les valeurs prises par X.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Déterminer le gain moyen d'un joueur au cours d'une partie. Le jeu est-il équitable?

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (0, I, J).
L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

Soient f et g les fonctions numériques dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies pour tout réel x par : $f(x)=\frac{1}{3}\left(-5x+4\sqrt{x^2+15}\right)$ et $g(x)=\frac{1}{3}\left(-5x-4\sqrt{x^2+15}\right)$

On note (C) et (C') les courbes représentatives des fonctions f et g.

1. a. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=-\frac{1}{3}x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

c. Justifier que la courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ).

Dans la suite du problème, on admettra que la droite (Δ') d'équation $y=-3x$ est une asymptote à (C) en $-\infty$ et que la courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ').

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

b. Démontrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variation.

3. Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec les droites (OI) et (OJ)

4. a. Construire (Δ), (Δ') et la courbe (C) dans le plan muni du repère (0, I, J).

b. Démontrer que la courbe (C') est l'image de la courbe (C) par la symétrie de centre O.

c. Construire la courbe (C') dans le même repère que (C).

Partie B

Dans cette partie, on admettra que l'image d'une hyperbole (H) de foyers F et F', de sommets A et A' par une similitude directe s, est une hyperbole (H') de foyer s (F) et s(F'), de sommets s(A) et s(A').

On note (H) la courbe d'équation: $3x^2+3y^2+10xy-80=0$

1. Démontrer que $(H)=(C)\cup(C')$.

2. Soit s la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Soit x, x', y et y' des nombres réels.

Pour tout point M du plan d'affixe $z=x+iy$, on note M' le point d'affixe $z'=x'+iy'$ tel que M' = s(M).

a. Déterminer l'écriture complexe de s.

b. Justifier que $x'=\frac{1}{2}(x+y)$ et $y'=\frac{1}{2}(-x+y)$.

c. En déduire que M appartient à (H) si et seulement si M' appartient à la courbe (Γ) d'équation $4x^2-y^2=20$.

3. a. Justifier que (Γ) est une hyperbole puis déterminer les coordonnées de ses foyers et de ses sommets.

b. Déterminer l'excentricité de (Γ).

c. Construire (Γ) et ses asymptotes dans le même repère que (H).

(On utilisera deux couleurs différentes pour (H) et (Γ)).

4. Déduire des questions précédentes que (H) est une hyperbole dont on précisera les foyers et les sommets.

SUJET 8 : BAC C 2009 SESSION NORMALE

EXERCICE 1

On pose : $a=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $b=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $c=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Partie A

1. Exprimer a^6, b^6 et c^6 sous forme algébrique.
2. En déduire une solution de l'équation (E) : $z\in\mathbb{C}$, $z^6=-8i$
3. Soit $j=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$

a. Vérifier que $j^3=1$

b. Démontrer que jb et j^2b sont aussi des solutions de (E).

c. En déduire toutes les solutions de (E). Les écrire sous forme algébrique.

Partie B

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x\equiv 0[6] \\ x\equiv 3[4] \end{cases}$

2. Déterminer tous les entiers naturels n vérifiant à la fois les deux propositions suivantes:

- a^n est un nombre réel
- b^n est un imaginaire pur.

EXERCICE 2

OAB est un triangle rectangle isocèle en O tel que $\text{Mes}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{2}$

On désigne par I le milieu du segment [AB], par (C) le cercle de centre O et de rayon OA et par (Γ) le cercle de diamètre [AB].

Le point D est l'intersection du cercle (C) et de la demi-droite [IO).

On note J le point d'intersection de la demi-droite [DB) et du cercle (Γ).

1. a. Faire une figure.

b. Justifier que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)=\frac{\pi}{4}$.

c. Démontrer que le triangle DAJ est rectangle isocèle en J et de sens direct.
Démontrer que la droite (OJ) est la médiatrice du segment [AD].

2. Soit S la similitude directe de centre A telle que S(I) = O.

a. Déterminer le rapport k et l'angle θ de S.

b. Soit H le milieu du segment [JA] et K le point d'intersection de la droite (OJ) avec la droite (AD). Démontrer que S (H) = K

c. Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KJ}}\right)$

3. Déterminer l'image du cercle (Γ) par S.

PROBLÈME

On considère la fonction f dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et définie par : $f(x)=\frac{1}{2}x-1+\frac{2\ln x}{x}$

(C) est la représentation graphique de f dans le repère orthonormé (0, I, J).
Unité graphique 2 cm.

Partie A

On considère la fonction u dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et définie par : $u(x)=x^2+4-4\ln x$

1. Etudier les variations de u.
2. Justifier que: $\forall x\in]0;+\infty[, u(x)>0$

Partie B

1. Calculer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
2. a. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   b. Démontrer que la droite (D) d'équation $y=\frac{1}{2}x-1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
3. a. Vérifier que: $\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)=\frac{u(x)}{2x^2}$.
   b. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. a. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α tel que $1<\alpha<e$.
   b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α.
5. a. Démontrer qu'il existe un point unique A de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).
   b. Donner les coordonnées du point A.
   a. Etudier la position relative de (D) par rapport à (C).
   b. Construire (T), (D) et (C).

Partie C

On considère la suite numérique (a_n) définie pour tout entier $n\geq 1$ par: $a_n=\int_{e^{n-1}}^{e^n}\frac{2\ln t}{t}dt$

1. a. Hachurer sur le graphique le domaine du plan dont l'aire en unité d'aire est égale à a_1
   b. Interpréter graphiquement le nombre a_n.
   c. Calculer a_n puis étudier la convergence de la suite (a_n).
2. Justifier que: $a_1+a_2+a_3+...+a_n=n^2$.

SUJET 9 : BAC C 2008 SESSION NORMALE

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct.

On désigne par G le barycentre des points pondérés (A ; 1), (8 ; 1) et (C ; -1).

Pour la figure, prendre comme unité de longueur le centimètre et AB = 6.

Cette figure sera complétée au fur et à mesure.

1. Démontrer que le quadrilatère ACBG est un losange.

2. a. On appelle O le centre du losange ACBG.

E est le symétrique de O par rapport à B.

Le point F est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$

Construire les points E et F.

b. Démontrer que F est l'image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.

3. On note: $t = t_{\overrightarrow{BE}} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$

a. Déterminer les images des points A et C par t.

b. K est l'image de B par t.

Démontrer que le point K appartient à la droite (GF). Construire K.

c. Déterminer l'image du triangle ABC par t.

4. On note: $f = t \circ S_{(OC)}$, où $S_{(OC)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OC).

a. Déterminer l'image du triangle ABC par f.

b. Démontrer que f est une symétrie glissée.

c. Soit $S_{(BF)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BF).

Démontrer que: $S_{(OC)} = t_{\overrightarrow{EO}} \circ S_{(BF)}$

d. En déduire les éléments caractéristiques de f.

EXERCICE 2

On considère l'équation (E) définie par: $(x, y) \in \mathbb{Z}^2, \; 35x - 27y = 2$

1. a. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd de 35 et 27.

   b. En déduire une solution de l'équation (E'): $(x, y) \in \mathbb{Z}^2, \; 35x - 27y = 1$

2. a. Vérifier que **(- 20, - 26)** est une solution de (E).

   b. Démontrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) d'entiers relatifs vérifiant: $x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$ où k est un entier relatif.

3. Les habitants d'un village adorent deux génies protecteurs N'Gouan et Moayé.

Le génie N'Gouan est adoré tous les 140 jours et le génie Moayé tous les 108 jours.

Les jours où les cultes coïncident sont considérés comme des jours de grâce appelés "jour des génies".

Un matin, le village a adoré le génie Moayé.

Déterminer le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain « jour des génies » sachant qu'ils avaient adoré le génie N'Gouan 8 jours auparavant.

PROBLEME

On considère la fonction f, dérivable sur $]0,+\infty[$ et définie sur $]0,+\infty[$ par :

$f(x)=-1+x\ln x \quad si \quad x\neq 0 \quad et \quad f(0)=-1$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé (0, I, J). L'unité graphique est 5 cm.

Partie A

1. a) Justifier que f est continue en O.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

3. a. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique s comprise entre 1,7 et 1,8.

Pour la suite on prendra 1,8 pour valeur approchée de s.

b. Justifier que: $\begin{cases}\forall x\in\,]0;s[, & f(x)<0;\\ \forall x\in\,]s;+\infty[, & f(x)>0\end{cases}$

4. a. Justifier que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.

b. Tracer (C).

c. A l'aide d'une intégration par parties, calculer en fonction de s l'intégrale $I=\int_1^s f(x)\,dx$.

d. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire $A(s)$ en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 1 et x = s.

Partie B

On considère la fonction g, dérivable sur $\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$ et définie par: $g(x)=\dfrac{1+x}{1+\ln x}$

1. a. Démontrer que: $\forall x\in\left]\frac{1}{e};+\infty\right[,\ g(x)=x \Leftrightarrow f(x)=0$

b. En déduire le nombre de solutions de l'équation $g(x)=x$ et leur valeur.

2. a. Démontrer que, $\forall x\in\left]\frac{1}{e};+\infty\right[,\ g'(x)=\dfrac{f(x)}{x(1+\ln x)^2}$

b. Justifier que g est strictement croissante sur l'intervalle $[s,2]$.

3. Démontrer que: $g([s,2])\subset[s,2]$

4. a. Démontrer que : $\forall x \in [1;+\infty[,\ \frac{1}{(1+\ln x)^2} \leq 1$

b. Démontrer que pour tout réel x élément de $[s,2]$, $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{2}{3} f(2)$

En déduire que: $\forall x \in [s,2],\ |g'(x)| \leq 0,3$

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $U_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = g(U_n)$.

5. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_n \in [s,2]$

6. a. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour justifier que: $\forall n \in \mathbb{N},\ |U_{n+1} - s| \leq 0,3 \times |U_n - s|$.

b. En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N},\ |U_n - s| \leq \frac{(0,3)^n}{2}$

7. a. Justifier que U_n converge vers s .

b. À partir de quelle valeur de n , U_n est une valeur approchée de s à 10^{-4} près?

SUJET 10 : BAC C 2007 SESSION NORMALE

EXERCICE 1

Dans une ville de Côte d'Ivoire, un sondage a permis de constater que 30% de la population sont gauchers et que 70% sont droitiers.

(Les résultats seront des arrondis d'ordre 4).

1. Justifier que dans un groupe de 6 personnes choisies au hasard dans cette ville, la probabilité pour qu'il y ait un seul gaucher est égale à 0,3025.

2. Calculer la probabilité pour qu'un groupe de 3 personnes choisies au hasard dans cette ville contienne:

a. exactement 2 gauchers;

b. au moins un gaucher.

3. Un atelier de couture de cette ville est équipé de 5 paires de ciseaux pour droitiers et de 2 paires de ciseaux pour gauchers. Cet atelier vient de recevoir 6 stagiaires.

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de stagiaires de l'atelier pouvant trouver une paire de ciseaux à sa convenance.

a. Déterminer les valeurs prises par X.

b. Justifier que la probabilité pour que X prenne la valeur 2 est égale à 0,0007.

c. Calculer la probabilité pour que X prenne la valeur 6.

EXERCICE 2

On considère le triangle ABC rectangle en B tel que AB = 5cm et $Mes\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$

Soit E le milieu du segment [AC].

1. a. Construire le triangle ABC.

b. Démontrer qu'il existe une rotation r transformant B en C et A en E.

c. Déterminer l'angle de la rotation r.

d. Construire son centre O.

2. Soit S la similitude directe de centre O qui transforme B en E.

Soit J le centre du cercle circonscrit au triangle OAE.

a. Déterminer l'angle et le rapport de S.

b. Démontrer que S (A) = J.

3. Soit k un nombre réel non nul, M et M' deux points du plan tels que $\overline{AM} = k\overline{AB}$ et $\overline{EM'} = k\overline{EC}$

a. Construire les points M et M' pour $k = \frac{3}{2}$

b. Démontrer que M est le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs **(k - 1)** et **(-k)**.

c. Démontrer que r(M) = M' et en déduire que le triangle OMM' est équilatéral.

d. Démontrer que les points O, A, M et M' sont cocycliques.

4. Soit N le centre du cercle circonscrit au triangle OMM'.

a. Démontrer que S (M) = N.

b. Déterminer l'ensemble des points N lorsque M décrit la droite (AB).

PROBLEME

On considère la fonction numérique f dérivable et définie sur l'intervalle $]-1;1[$ par :

$f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. On note (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O; I; J). Unité graphique 2 cm.

Partie A

1. Calculer les limites de f en -1 et en 1.

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. a. Démontrer que : $\forall x\in]-1;1[, f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$

 b. En déduire le tableau de variation de f.

 c. Déterminer une équation de la droite (T), tangente à (C) au point d'abscisse 0.

3. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=f(x)-x$

a. Déterminer le sens de variation de g.

b. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

c. Déterminer la position de (C) par rapport à (T).

4. Construire, dans le même repère, (C) et (T).

5. a. Démontrer que f est une bijection de $]-1;1[$ sur $\mathbb{R}$.

 b. On désigne par f^{-1}, la bijection réciproque de f et par (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le repère (O, I, J). Construire (C').

 c. Démontrer que: $\forall y\in\mathbb{R},\ f^{-1}(y)=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

Partie B

1. Soit ϕ une primitive de f^{-1} sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à déterminer $\phi(x)$).

a. Démontrer que $\phi\circ f$ est une primitive de la fonction $x\mapsto xf'(x)$ sur $]-1;1[$.

b. Démontrer que pour tous éléments a et b de $]-1;1[$.

$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt=\phi\circ f(b)-\phi\circ f(a)$

c. En déduire que : $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt=\int_a^b tf'(t)dt$

d. Démontrer que pour tout élément x de $\left]-1;1\right[$: $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x tf'(t)dt$

(On pourra utiliser B1. c)

2. a. Démontrer que pour tout élément x de $\left]-1;1\right[$: $\int_0^x tf'(t)dt = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

(On pourra utiliser A2. a)

b. En déduire que, pour tout élément y de $\mathbb{R}$, $\int_0^y f^{-1}(t)dt = \ln\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$

3. Soit A l'aire de la partie du plan délimitée par : la courbe (C') de f^{-1} et les droites d'équations respectives x =0 et x = 1. Calculer A en unité d'aire.

4. a. Hachurer sur le graphique, l'ensemble D des points dont les cordonnées (x, y) vérifient : $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$ *et* $f^{-1}(x) \le y \le f(x)$

b. Calculer l'aire de D en cm^2.

CORRECTION DU SUJET 1 : BAC C 2016

EXERCICE 1

1 - $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\ln(n+1)+\ln(n+2)+\ldots+\ln(n+n)-n\ln(n)}{n}$

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] + \ln\left[n\left(1+\frac{2}{n}\right)\right] + \ldots + \ln\left[n\left(1+\frac{n}{n}\right)\right] - n\ln(n)\right]$$

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln(n) + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right) - n\ln(n)\right]$$

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\ln(n) + \ln(n) + \cdots + \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right) - n\ln(n)\right]$$

$$u_n = \frac{1}{n}\left[n\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right) - n\ln(n)\right]$$

$$u_n = \frac{1}{n}\left[n\ln(n) - n\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right]$$

On obtient donc : $\quad u_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right]$

2 – a) $\forall k \in \mathbb{N}$, tel que $0 \leq k \leq n-1$

$$\forall x \in \left[1+\frac{k}{n}; 1+\frac{k+1}{n}\right] \Rightarrow 1+\frac{k}{n} \leq x \leq 1+\frac{k+1}{n}$$

$$\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

D'où $\quad \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)dx \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)dx$

$$\left[x\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \left[x\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\right]_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}$$

$$\left(1+\frac{k+1}{n} - 1 - \frac{k}{n}\right)\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq$$

$$\left(1+\frac{k+1}{n} - 1 - \frac{k}{n}\right)\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

On a donc :

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

b) Déduisons que : $u_n - \frac{1}{n}\ln(2) \leq \int_1^2 \ln(x)dx \leq u_n$

On sait que : $\forall k \in \mathbb{N}$, tel que $0 \leq k \leq n-1$;

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

Pour $k = 0$, on a : $\frac{1}{n}\ln(1) \leq \int_1^{1+\frac{1}{n}} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Pour $k = 1$, on a : $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{1}{n}}^{1+\frac{2}{n}} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$

Pour $k = 2$, on a : $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{2}{n}}^{1+\frac{3}{n}} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)$

....

....

....

Pour $k = n-1$, on a : $\frac{1}{n}ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{n-1}{n}}^{2} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}ln\left(1+\frac{n}{n}\right)$

En additionnant membre à membre de part et d'autre de l'inégalité, on obtient : $\frac{1}{n}ln(1) +$
$\frac{1}{n}ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right) \leq \int_1^2 \ln(x)dx \leq u_n$

$\frac{1}{n}ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right) \leq \int_1^2 \ln(x)dx \leq u_n$ avec $\frac{1}{n}\ln(1)=0$

Or $u_n - \frac{1}{n}\ln(2) = \frac{1}{n}ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right)$

Donc $u_n - \frac{1}{n}\ln(2) \leq \int_1^2 \ln(x)dx \leq u_n$

3 – Déduisons la limite de la suite (u_n)

On sait que $u_n - \frac{1}{n}\ln(2) \leq \int_1^2 \ln(x)dx \leq u_n$ d'où

$u_n - \frac{1}{n}\ln(2) \leq \int_1^2 \ln(x)dx$ et $u_n \geq \int_1^2 \ln(x)dx$

$u_n \leq \int_1^2 \ln(x)dx + \frac{1}{n}\ln(2)$ et $u_n \geq \int_1^2 \ln(x)dx$

En encadrant u_n, on obtient : $\int_1^2 \ln(x)dx \leq u_n \leq \int_1^2 \ln(x)dx + \frac{1}{n}\ln(2)$

On sait que : $\int_1^2 \ln(x)dx = 2\ln(2)-1$, on a :

$$2\ln(2)-1 \leq u_n \leq 2\ln(2)-1+\frac{1}{n}\ln(2)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\ln(2)-1+\frac{1}{n}\ln(2)\right) = 2\ln(2)-1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\ln(2)-1$

EXERCICE 2

1 – Démontrer que M appartient à (⁄) si et seulement si $3x^2+4y^2-8y=0$

On a : $z = x+iy$, $M \in (⁄) \Leftrightarrow 14z\bar{z} + 16i(z-\bar{z}) = z^2+\bar{z}^2$

$\Leftrightarrow 14(x^2+y^2)+16i(2iy) = (x^2-y^2+2ixy)+(x^2-y^2-2ixy)$

$\Leftrightarrow 14x^2+14y^2-32y = 2x^2-2y^2$

$\Leftrightarrow 12x^2+16y^2-32y = 0 \Leftrightarrow 3x^2+4y^2-8y = 0$

Au total, $M \in (⁄) \Leftrightarrow 3x^2+4y^2-8y = 0$

2 – a) Justifions que (⁄) est une ellipse.

(⁄) : $3x^2+4y^2-8y = 0 \Leftrightarrow 3x^2+4[y^2-2y]=0$

$\Leftrightarrow 3x^2+4[(y-1)^2-1]=0 \Leftrightarrow 3x^2+4(y-1)^2-4=0$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2}{4}+(y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{(y-1)^2}{1^2} = 1$.

L'équation est de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $b=1$

Donc (⁄) est une ellipse avec $a > b$

b) Les coordonnées de Ω: $\Omega(0;1)$

c) Déterminons une équation de l'axe focal de (⁄).

L'axe $(\Omega, \overrightarrow{e_1})$ est l'axe focal de (⁄). L'axe focal est une droite d'équation $y=1$.

d) Justifions que A et A' sont les sommets de (⁄).

La demi-distance focale est : $c = \sqrt{\frac{4}{3}-1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

- Dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les coordonnées des sommets sont :

$A\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};0\right)$ et $A'\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};0\right)$

- Dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les coordonnées des sommets sont :

$A\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; 1\right)$ et $A'\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 1\right)$. Donc les affixes des sommets A et A' sont respectivement :

$-\frac{2\sqrt{3}}{3} + i$ et $\frac{2\sqrt{3}}{3} + i$.

Ces deux points A et A' sont situés sur l'axe focal car la partie imaginaire de leurs affixes est 1.

- Dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les coordonnées des foyers sont :

$F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$ et $F'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$

- Dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les coordonnées des foyers sont :

$F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$ et $F'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$. Donc les affixes des foyers F et F' de (⁄) sont respectivement : $-\frac{\sqrt{3}}{3} + i$ et $\frac{\sqrt{3}}{3} + i$.

3 - Construction de l'ellipse (⁄) : voir graphique fin exercice 2

4 - a) Déterminons l'équation cartésienne de (H) dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

L'équation cartésienne de l'hyperbole (H) est de la forme : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Déterminons les nombres réels a et b

On a : $a = \frac{1}{2}FF' = \frac{1}{2}|z_{F'} - z_F| = \frac{1}{2}\left|\frac{2\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ donc $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Or $c^2 = a^2 + b^2$. On sait aussi que : $c = \frac{1}{2}AA' = \frac{1}{2}|z_{A'} - z_A| = \frac{1}{2}\left|\frac{4\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Donc $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

On a : $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$b^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$ donc $b^2 = 1$.

Donc l'équation cartésienne de (H) est : $\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1 \Rightarrow 3x^2 - y^2 = 1$

b) Traçons les asymptotes de (H) : Voir graphique fin exercice 2

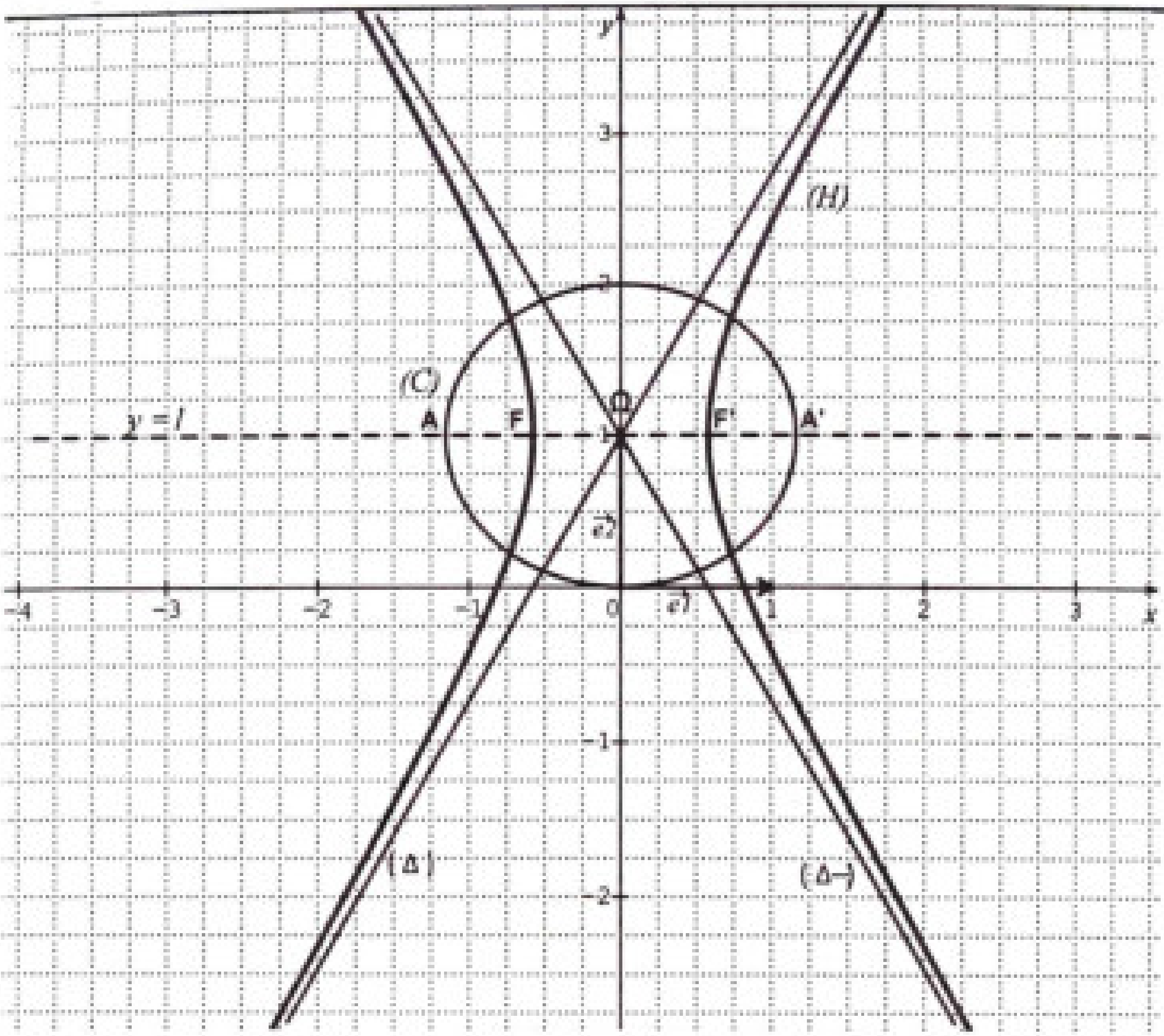
Dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les équations des asymptotes sont :

$(\Delta): y = \sqrt{3}x$ et $(\Delta'): y = -\sqrt{3}x$

Dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les équations des asymptotes sont :

$(\Delta): y = \sqrt{3}x + 1$ et $(\Delta'): y = -\sqrt{3}x + 1$

c) construction de (H). Voir graphique.



PROBLEME

Partie A

1 – a) La limite de f en 0.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x - 4 + \frac{1}{4}ln|x|\right) = -\infty \text{ car } \lim_{x\to 0} x - 4 = 4 \text{ et}$$

$$\lim_{x\to 0} ln|x| = -\infty$$

b) les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 4 + \frac{1}{4}ln|x|\right) = +\infty \quad \text{car}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-4) = +\infty \;\; et \;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}ln|x| = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - 4 + \frac{1}{4}ln|x|\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - 4 + \frac{1}{4}\ln(-x)\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty}\left(-X - 4 + \frac{1}{4}lnX\right) \quad \text{En posant } X = -x$$

quand $x \to -\infty$ alors $X \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} X\left(-1 - \frac{4}{X} + \frac{1}{4}\frac{lnX}{X}\right) = -\infty$$

Car $\lim_{X\to+\infty} X = +\infty$; $\lim_{X\to+\infty}\frac{4}{X} = 0$ *et* $\lim_{X\to+\infty}\frac{lnX}{X} = 0$

c) Dérivée de f

$\forall x \in \mathbb{R}^* ; f'(x) = 1 + \frac{1}{4}\times\frac{1}{x} = \frac{4x+1}{4x}$

Tableau de signe de f'

x	$-\infty$ $\quad -\frac{1}{4}$		0 $\quad +\infty$
$4x+1$	$-$ $\quad 0$	$+$	$+$
$4x$	$-$	$-$ $\quad 0$	$+$
$f'(x)$	$+$ $\quad 0$	$-$	$+$

$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[\cup \left]0; +\infty\right[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[$ et sur $]0; +\infty[$.

$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}\,; 0\right[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{4}\,; 0\right[$.

d) Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{-17-ln4}{4}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↗	$+\infty$

2 - f admet pour maximum le nombre $\frac{-17-l}{4} < 0$ sur l'intervalle $]-\infty; 0[$; donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty; 0[$.

f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$; $f(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$, or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$

De plus $f(3) = -1 + \frac{1}{4}\ln(3)$ et $f(4) = \frac{1}{4}\ln(4)$

On a $f(3) \times f(4) < 0$, donc $3 < \alpha < 4$

3 – Signe de f

Sur l'intervalle $]-\infty; 0[$, f admet pour maximum le nombre $\frac{-17-l}{4} < 0$ d'où

$f(]-\infty; 0[) = \left]-\infty; \frac{-17-l}{4}\right[$ donc $f(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$

Sur l'intervalle $]0; \alpha[$, f est strictement croissante et $f(]0; \alpha[) =]-\infty; 0[$ donc $(x) < 0$.

Sur l'intervalle $]\alpha\,; +\infty[$, f est strictement croissante et $f(]\alpha\,; +\infty[) =]0; +\infty[$ donc $f(x) > 0$.

Au total : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; \alpha[, \; f(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, \; f(x) > 0$

Partie B

1 – a) Dérivabilité de f en 0

$D_h = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2 ln|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 - \frac{31}{16}x - \frac{1}{8}x ln|x|\right)$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} = 1$ car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{31}{16}x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{8}x ln|x| = 0$

Donc h est dérivable en 0 et $h'(0) = 1$

b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \; h'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \; h'(x) = 1 - \frac{31}{8}x - \frac{1}{4}x ln|x| - \frac{1}{8}x^2 \times \frac{1}{x}$

$h'(x) = 1 - \frac{31}{8}x - \frac{1}{4}x ln|x| - \frac{1}{8}x$

$$h'(x) = 1 - 4x - \frac{1}{4}x\ln|x| \Rightarrow h'(x) = x\left(\frac{1}{x} - 4 - \frac{1}{4}\ln|x|\right) \Rightarrow$$

$$h'(x) = x\left(\frac{1}{x} - 4 + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{x}\right|\right). \text{ Or } f(x) = x - 4 + \ln|x|$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, h'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$

c) Signe de $h'(x)$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}$ d'où $x = \frac{1}{\alpha}$

Si $x \in]-\infty; 0[$ alors $\frac{1}{x} \in]-\infty; 0[$ d'où $f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ d'après partie A3

Si $x \in \left]0; \frac{1}{\alpha}\right[$ alors $\frac{1}{x} \in]\alpha; +\infty[$ d'où $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$

Si $x \in \left]\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[$ alors $\frac{1}{x} \in]0; \alpha[$ d'où $f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

Tableau de signe $h'(x)$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$f\left(\frac{1}{x}\right)$	$-$	||	$+$	0	$-$
$h'(x)$	$+$	||	$+$	0	$-$

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup \left]0; \frac{1}{\alpha}\right[,\ h'(x) > 0$

$\forall x \in \left]\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[,\ h'(x) < 0$

2 – a) Traçons la tangente (T)

Tracer la tangente (T) en déterminant son équation cartésienne.

L'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est : $y = h'(0)(x-0) + h(0)$

Donc (T): $y = x + 1$

Autre méthode : Tracer la tangente (T) en utilisant le vecteur directeur $\vec{u}\binom{1}{1}$ et le point A$(0 ; 1)$

b) Construction de la courbe (Γ) : voir papier millimétré.

3 – a) Intégration par parties de $\int_\lambda^1 x^2 \ln(x)\,dx$

Posons $u(x) = \ln(x)$ $\qquad u'(x) = \frac{1}{x}$

$\qquad v'(x) = x^2$ $\qquad v(x) = \frac{1}{3}x^3$

$$\int_\lambda^1 x^2\ln(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 \frac{x^2}{3}dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_\lambda^1$$

$$\int_\lambda^1 x^2\ln(x)\,dx = -\frac{1}{9} - \frac{\lambda^3}{3}\ln\lambda + \frac{\lambda^3}{9} \qquad \text{donc}$$

$$\int_\lambda^1 x^2\ln(x)\,dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3\ln\lambda$$

b) Déterminons l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$

$\forall x \in [\lambda; 1],\ h(x) > 0$ d'où $\mathcal{A}(\lambda) = \left(\int_\lambda^1 h(x)dx\right) \times 4cm^2$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\int_\lambda^1 \left(x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2\ln(x)\right)dx\right) \times 4cm^2$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\left[\frac{x^2}{2} + x - \frac{31}{48}x^3\right]_\lambda^1\right) \times 4cm^2 - \frac{1}{2}\left(\int_\lambda^1 x^2\ln(x)\,dx\right)cm^2$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\frac{41}{48} - \lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{31}{48}\lambda^3\right) \times 4cm^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3\ln\lambda\right)cm^2, \text{ donc}$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3\ln\lambda\right)cm^2$$

c) $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ >}} A(\lambda) = \lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ >}} \left(\frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3 ln\lambda \right) = \frac{125}{36}$

Car $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ >}} \left(4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3 ln\lambda \right) = 0$

Partie C

1 – a) Sen de variation de g.

$\forall x \in]\, 0; +\infty[,\ g'(x) = -\frac{1}{4x}$

$\forall x \in]\, 0; +\infty[,\ g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]\, 0;\ +\infty[$.

b) g est strictement décroissante sur $]\, 0;\ +\infty[$, en particulier sur $[\, 3; 4\,]$.

On a : $g([\, 3; 4\,]) = [\, g(4); g(3)\,] = \left[4 - \frac{ln}{4}; 4 - \frac{ln}{4}\right]$, donc

$g([\, 3; 4\,]) \subset [\, 3; 4\,]$

c) **1ere méthode** :

$\forall x \in]\, 0; +\infty[,\ g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0$

$\Leftrightarrow 4 - \frac{1}{4}\ln(x) - x = 0$

$\Leftrightarrow x - 4 - \frac{1}{4}\ln(x) = 0$

$\forall x \in]\, 0; +\infty[,\ g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$

Donc α est l'unique solution de l'équation : $x \in]\, 0; +\infty[,\ g(x) = x$

2éme méthode :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 4 + \frac{1}{4} ln|x| = 0$

$\forall x \in]\, 0; +\infty[,\ x - 4 + \frac{1}{4}\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4 - \frac{1}{4}\ln(x) \Leftrightarrow x = g(x)$

Donc α étant solution de l'équation $f(x) = 0$ est aussi solution de l'équation $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) = x$.

2 – a) Démonstration par récurrence.

On a : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

Soit P_n la proposition suivante $3 \le u_n \le 4$

Vérifions que P_0 est vraie.

On a $u_0 = 3$, d'où $3 \le u_0 \le 4$ donc P_0 est vraie

Supposons que P_n est vraie, c'est-à-dire pour tout entier naturel n, $3 \le u_n \le 4$

Démontrer que P_{n+1} est vraie.

On sait que $3 \le u_n \le 4 \Rightarrow \ln(3) \le ln(u_n) \le \ln(4)$

$\Rightarrow -\frac{1}{4}\ln(4) \le -\frac{1}{4} ln(u_n) \le -\frac{1}{4}\ln(3)$

$\Rightarrow 4 - \frac{1}{4}\ln(4) \le 4 - \frac{1}{4} ln(u_n) \le 4 - \frac{1}{4}\ln(3)$

$\Rightarrow 4 - \frac{1}{4}\ln(4) \le g(u_n) \le 4 - \frac{1}{4}\ln(3)$

D'où $g(u_n) \subset \left[4 - \frac{1}{4}\ln(4); 4 - \frac{1}{4}\ln(3)\right]$ or $\left[4 - \frac{1}{4}\ln(4); 4 - \frac{1}{4}\ln(3)\right] \subset [3; 4]$

Donc $g(u_n) \subset [3; 4]$ d'où $u_{n+1} \subset [3; 4]$

Au total, on a : $3 \le u_{n+1} \le 4$. P_{n+1} est donc vraie.

En conclusion, pour tout entier naturel n, $3 \le u_n \le 4$.

b) Démontrons que, pour tout entier naturel n, $(u_n - \alpha)$ et $(u_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires.

On sait que g est décroissante sur $[3; 4]$ et $3 < \alpha < 4$.

- Si $u_n < \alpha$ alors $g(u_n) > g(\alpha)$ donc $u_{n+1} > \alpha$ car $u_{n+1} = g(u_n)$ et $g(\alpha) = \alpha$
- Si $u_n > \alpha$ alors $g(u_n) < g(\alpha)$ donc $u_{n+1} < \alpha$

Ainsi si $u_n - \alpha < 0$ alors $u_{n+1} - \alpha > 0$

Si $u_n - \alpha > 0$ alors $u_{n+1} - \alpha < 0$

En conclusion, pour tout entier naturel n, $(u_n - \alpha)$ et $(u_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires.

c) Démontrons que, pour tout x élément de $[3;4]$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$

On sait que $g'(x) = -\frac{1}{4x}$

On a $3 \leq x \leq 4 \Rightarrow 12 \leq 4x \leq 16 \Rightarrow \frac{1}{16} \leq \frac{1}{4x} \leq \frac{1}{12} \Rightarrow$

$-\frac{1}{12} \leq -\frac{1}{4x} \leq -\frac{1}{16} \Rightarrow -\frac{1}{12} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{16}$

$\Rightarrow -\frac{1}{12} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{16} \leq \frac{1}{12}$ donc $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [3;4]$ et $u_{n+1} \in [3;4]$ et $\forall x \in [3;4], |g'(x)| \leq \frac{1}{12}$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis, on a :

$|g(u_{n+1}) - g(u_n)| \leq \frac{1}{12}|u_{n+1} - u_n|$ d'où

$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{12}|u_{n+1} - u_n|$

On a : $|u_2 - u_1| \leq \frac{1}{12}|u_1 - u_0|$

$|u_3 - u_2| \leq \frac{1}{12}|u_2 - u_1|$

$|u_4 - u_3| \leq \frac{1}{12}|u_3 - u_2|$

....

....

$|u_n - u_{n-1}| \leq \frac{1}{12}|u_{n-1} - u_{n-2}|$

$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12}|u_n - u_{n-1}|$

En multipliant membre à membre les inégalités entre elles, puis en simplifiant, on obtient :

$|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n |u_1 - u_0|$

On a $3 \leq u_n \leq 4$ d'où $3 \leq u_1 \leq 4$; or $u_0 = 3$

$3 - 3 \leq u_1 - u_0 \leq 4 - 3 \Leftrightarrow 0 \leq u_1 - u_0 \leq 1 \Rightarrow |u_1 - u_0| < 1$

Au total, on obtient : $|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n \Leftrightarrow |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12^n}$

d) Démontrons que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$

D'après la question 2-b), on a $(u_n - \alpha)$ et $(u_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires ; donc $u_n \leq \alpha \leq u_{n+1}$; ou $u_{n+1} \leq \alpha \leq u_n$

- Si $u_n \leq \alpha \leq u_{n+1} \Rightarrow 0 \leq \alpha - u_n \leq u_{n+1} - u_n$ donc $|u_n - \alpha| \leq |u_{n+1} - u_n|$
- Si $u_{n+1} \leq \alpha \leq u_n \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq \alpha - u_n \leq 0$ donc $|u_n - \alpha| \leq |u_{n+1} - u_n|$

D'où $|u_n - \alpha| \leq |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12^n}$, donc $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$

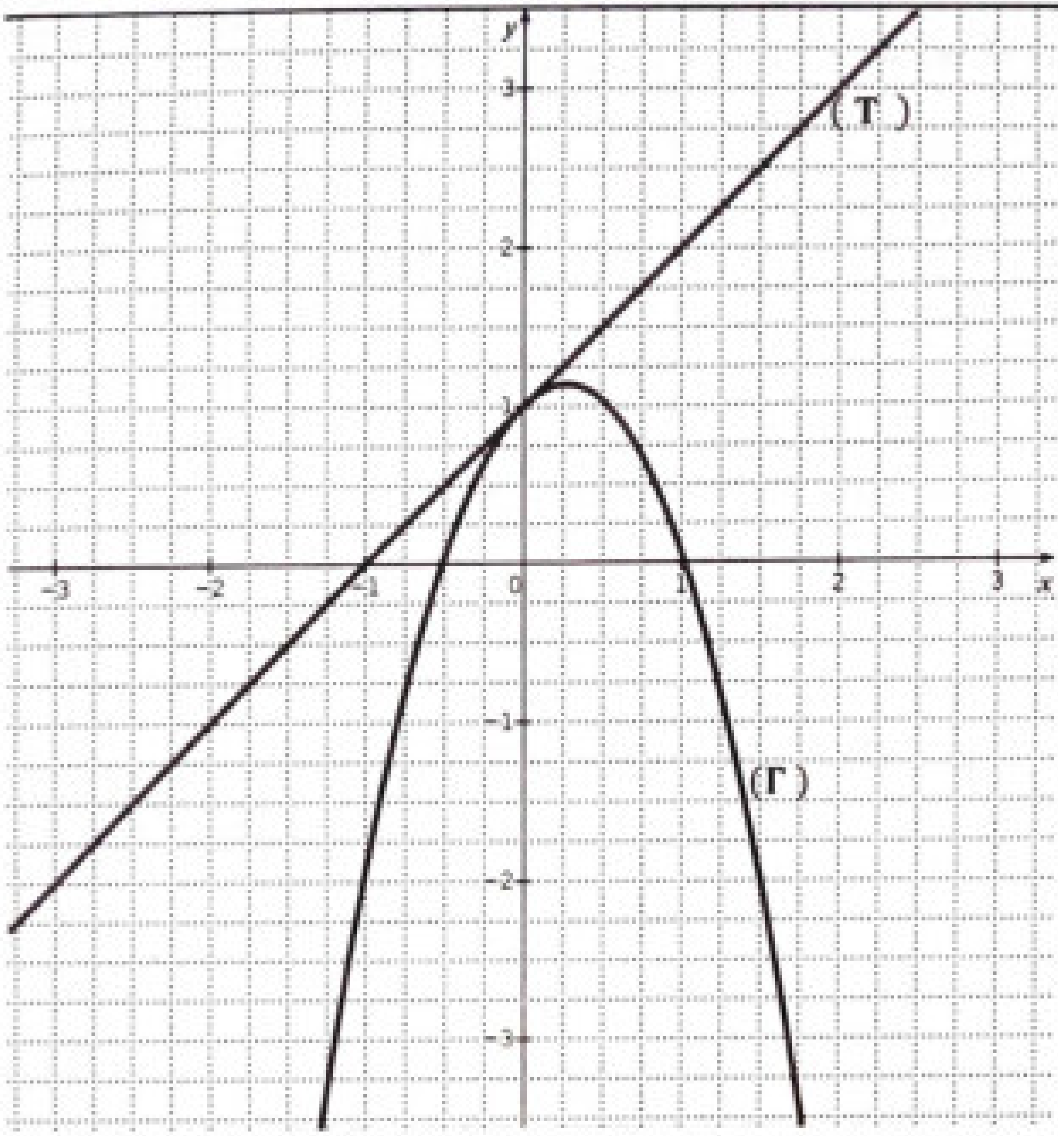
Déterminons une valeur approchée de α à 0,01 près

On a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n} < 0{,}01 \Rightarrow \frac{1}{12^n} < 0{,}01 \Rightarrow 12^n > \frac{1}{0{,}01} \Rightarrow$

$12^n > 100 \Rightarrow n > \frac{\ln 100}{\ln 12} \Rightarrow n > 1{,}853$ Or $n \in \mathbb{N}$

Donc à partir de $n \geq 2$, u_n est une valeur approchée de α à 0,01 près

Le terme u_2 est donc une valeur approchée de α à 0,01 près.


y
3
2
1
0
-1
-2
-3
x
(T)
(Γ)

CORRECTION DU SUJET 2 : BAC C 2015

EXERCICE 1

Partie I

1. Calculons la probabilité de stationner gratuitement

Soit A l'évènement.

Pour stationner gratuitement, il faut que l'automobiliste effectue le tirage de deux tickets gagnants ; d'où $P(A) = \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

2. Justifions que la probabilité de payer la moitié du prix du stationnement est $\frac{8}{25}$:

Soit B cet évènement .

Pour payer la moitié du prix du stationnement, il faut que le premier ticket soit gagnant et le second non gagnant ou bien le premier ticket non gagnant et le second gagnant ;

d'où $P(B) = \frac{2}{10} \times \frac{8}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{32}{100} = \frac{8}{25}$

3. Calculons la probabilité de payer au moins 1000 F pour le stationnement

Soit C cet évènement.

Pour payer au moins 1000 F, il faut qu'un seul des deux tickets tirés soit gagnant ou bien aucun des deux tickets tirés n'est gagnant ;

d'où $P(C) = P(B) + \frac{8}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{8}{25} + \frac{64}{100} = \frac{96}{100} = \frac{24}{25}$

Autre méthode : $P(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$

Partie II

1. a) Calculons la probabilité q_n de payer l'amende au plus une fois

Nous sommes en presence d'une loi binomiale. La probabilité pour un stationnement interdit est $\frac{4}{5}$ et celle pour un stationnement non interdit est $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$$q_n = C_n^0 \left(\frac{4}{5}\right)^0 \left(\frac{1}{5}\right)^n + C_n^1 \left(\frac{4}{5}\right)^1 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$q_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + n \times \frac{4}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$q_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \left[1 + n \times \frac{4}{5} \times 5\right]$$

$$q_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n (1 + 4n)$$

b) Démontrons que la probabilité P_n de payer une fois l'amende est $P_n = 1 - \frac{1}{5^n}$

La probabilité $\overline{P_n}$ de l'évènement contraire (celui de ne pas payer l'amende) est

$$\overline{P_n} = C_n^0 \left(\frac{4}{5}\right)^0 \left(\frac{1}{5}\right)^n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Donc la probabilié démandée est $P_n = 1 - \overline{P_n} = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n$ d'où $P_n = 1 - \frac{1}{5^n}$

c) Déterminons le plus petit entier naturel n pour que $P_n \geq 0,99$

$$P_n \geq 0,99 \iff 1 - \frac{1}{5^n} \geq 0,99 \iff \frac{1}{5^n} \leq 0,01 \iff 5^n \geq \frac{1}{0,01}$$

$$\iff n \geq \frac{ln\left(\frac{1}{0,01}\right)}{ln} \iff n \geq 2,86$$

Donc le plus petit entier naturel est $n_0 = 3$

2. a) L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{0 ; 5\,000 ; 10\,000 ; 15\,000\}$

La probabilité de chaque valeur prise par X est :

$P(X=0) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$; $P(X = 5\,000) = C_3^1\left(\frac{4}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^2 = 3 \times \frac{4}{125} = \frac{12}{125}$

$P(X = 10\,000) = C_3^2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^1 = 3 \times \frac{16}{125} = \frac{48}{125}$; $P(X = 15\,000) = C_3^3\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^0 = \frac{64}{125}$

Donc la loi de probabilité est

x_i	0	5 000	10 000	15 000
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{64}{125}$

b) **Calculons l'esperance mathematique E(X).**

$E(X) = 0 \times \frac{1}{125} + 5\,000 \times \frac{12}{125} + 10\,000 \times \frac{48}{125} + 15\,000 \times \frac{64}{125}$

$E(X) = \frac{1500\,000}{125}$ $\qquad$ $E(X) = 12\,000$.

En prenant le risque de se garer en stationnement interdit 3 fois dans la semaine, RIKO paye en moyenne 12 000 F par semaine ; ce qui est largement superieur au 4800 F ; Donc il n'a pas interet à se garer en stationnement interdit.

EXERCICE 2

Partie I

1. a) Module et argument principal de $\frac{z_A}{z_B}$

$\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = \left|\frac{2i}{\sqrt{3}+i}\right| = \frac{2}{2} = 1$

$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) \equiv \arg(z_A) - \arg(z_B)\ [2\pi]$ $\qquad$ $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$; donc $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{\pi}{3}$

b) Déduisons que le triangle OAB est équilatéral :

On a : $\begin{cases} \left|\frac{z_A}{z_B}\right| = 1 \\ \mathrm{Arg}\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_A| = |z_B| \\ \mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OA}}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OB = OA \\ \mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OA}}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

Donc le triangle OAB est équilatéral

Autre méthode : On a : $\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = \frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc le triangle OAB est équilatéral.

2. **a) L'image de O par f est** :

$f(O) = t_{\overrightarrow{PQ}} \circ r_{(J ; \frac{\pi}{3})}(O) = t_{\overrightarrow{PQ}}(P) = Q$ donc $f(O) = Q$

b) Démontrons que f est une rotation.

f est la composée d'une rotation d'angle non nul et d'une translation, donc f est un deplacement , précisement une rotation.

On a : $f(O) = Q$ et $f(J) = A$, or $\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OJ} ; \overrightarrow{QA}}\right) = \frac{\pi}{3}$;

donc f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

c) **Construction du centre K de f** . (Voir figure à la fin)

K est le point d'intersection des médiatrices des segments [OQ] et [JA].

Partie II

1. a) Démontrons que : M ∈ (Γ) ⇔ $\frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$

M∈(Γ) ⇔ $2|z| = |y-3|$

Or OM = $|z|$ et MH = $|z - z_H| = |x + iy - x - 3i| = |i(y-3)| = |y-3|$

D'où M∈(Γ) ⇔ 2OM = MH Donc M∈(Γ) ⇔ $\frac{OM}{MH} = \frac{1}{2}$

b) Justifions que (Γ) est une ellipse

Dans le repère (O, $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$), M(x ; y) et H(x; 3),

donc H est le projeté orthogonal de M sur la droite (D) d'équation $y = 3$.

M∈(Γ) ⇔ $\frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc (Γ) est une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$

Or O ∉ (D). En conclusion (Γ) est une ellipse de foyer O, de directrice associée (D) d'équation $y = 3$ et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$

c) Démontrons que : M ∈ (Γ) ⇔ $\frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

M∈(Γ) ⇔ $2|z| = |y-3| \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(y-3)^2} \Leftrightarrow 4(x^2+y^2) = (y-3)^2$

M∈(Γ) ⇔ $4x^2 + 4y^2 = y^2 - 6y + 9$

M∈(Γ) ⇔ $4x^2 + 3y^2 + 6y = 9 \Leftrightarrow 4x^2 + 3[(y+1)^2 - 1] = 9$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 3(y+1)^2 = 12$

M∈(Γ) ⇔ $\frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

d) Le centre de (Γ) est $\Omega(0, -1)$

Dans le repère (Ω, $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$), (Γ) a pour équation $\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{4} = 1$.

On a donc $a^2 = 3$ et $b^2 = 4$ ⇔ $a = \sqrt{3}$ et $b = 2$

Dans le repère (Ω, $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$), les coordonnées des sommets de (Γ) sont :

$A_1\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$, $A'_1\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$, $B_1\binom{0}{2}$ et $B'_1\binom{0}{-2}$

Dans le repère (0, $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$), les coordonnées des sommets de (Γ) sont :

$S\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$, $S_1\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$, $J\binom{0}{1}$ et $J'\binom{0}{-3}$

e) **Tracer de (Γ)** (voir figure à la fin).

2. a) Démontrons que (Γ ') est une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$

f est une rotation donc une isométrie. f conserve donc la distance.

On a : f(M) = M' ; f(O) = Q et f(H) = H ' d'où $\frac{MO}{MH} = \frac{M'Q}{M'H'} = \frac{1}{2}$

Donc l'image de l'ellipse (Γ) par f est l'ellipse (Γ ') d'excentricité $e = \frac{1}{2}$

b) **Déterminons le foyer de (Γ ')**

On a f(O) = Q , donc le foyer de (Γ ') est le point Q .

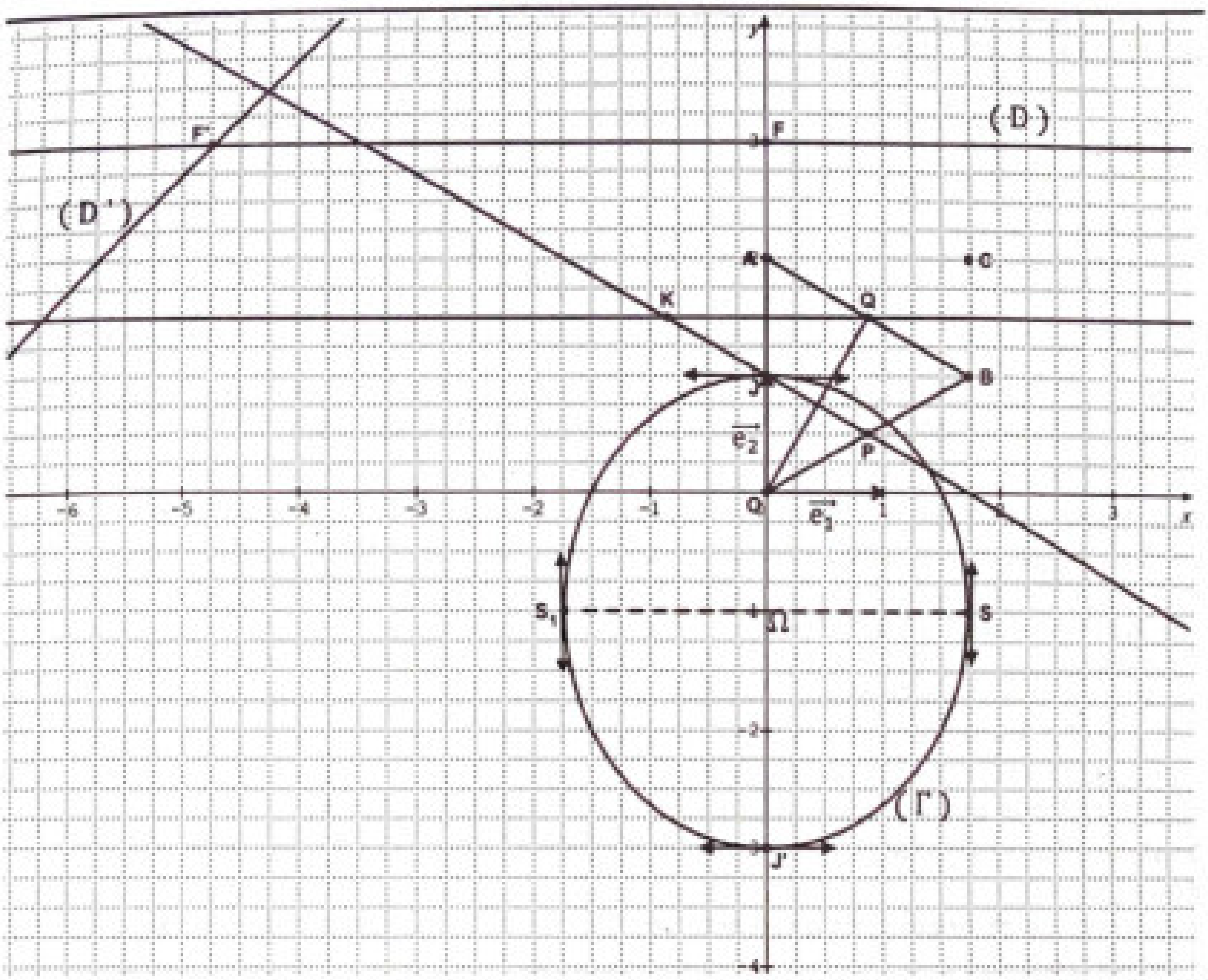
Déterminons la directrice associée à (Γ ')

On a f(J) = A et f(O) = Q donc (AQ) est l'axe focal de l'ellipse (Γ ').

Par ailleurs, F d'affixe $3i$ appartient à la droite (D). Soit F ' image de F par f .

On a : f(D) = (D '), donc la directrice associée à (Γ') est la droite (D') passant par F' et perpendiculaire à (AQ).

Autre méthode : Une équation de la droite (D') est : $y = x\sqrt{3} + 6$



PROBLEME

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to0} g(x) = \lim\limits_{x\to0}(x\ln x + e^x - 1) = \lim\limits_{x\to0} x\ln x + \lim\limits_{x\to0}(e^x - 1)$

$\boxed{\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0}$, car $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0}(e^x - 1) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x + e^x - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x + \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - 1)$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - 1) = +\infty$

2. Justifions que $\forall x \in]0; +\infty[,\ g'(x) = h(x)$

$\forall x \in]0; +\infty[,\ g'(x) = \ln x + 1 + e^x$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[,\ g'(x) = h(x)$

3. a) Sens de variation de g sur $]0; +\infty[$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $h(x)$. Or le signe de $h(x)$ est donné dans le sujet ;

d'où $\forall x \in]0; \alpha[,\ g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0; \alpha[$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[,\ g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$

b) Tableau de variation de g

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ 0	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. a) Démontrons que l'équation $x \in]0;+\infty[$,g(x) = 0 admet une solution unique β

- g est continue et strictement decroissante sur $]0;\alpha[$ et $g(]0;\alpha[) =]g(\alpha);0[$;
Or $0 \notin]g(\alpha);0[$; donc l'équation g(x) = 0 n'admet pas de solution sur $]0;\alpha[$.
- g est continue et strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$ et $g(]\alpha;+\infty[) =]g(\alpha);+\infty[$
Or $0 \in]g(\alpha);+\infty[$, donc l'équation g(x) = 0 admet une solution $\beta \in]\alpha;+\infty[$.
Au total, $x \in]0;+\infty[$, l'équation g(x) = 0 admet une solution unique $\beta \in]\alpha;+\infty[$.

b) Justifier que $\beta \in]0,3;0,4[$

g est continue et strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$, en particulier sur] 0,3 ; 0,4 [.
On a : $g(0,3) = 0,3\ln(0,3) + e^{0,3} - 1 = -0,0113$
$g(0,4) = 0,4\ln(0,4) + e^{0,4} - 1 = 0,1253$
D'où : $g(0,3) \times g(0,4) < 0$, donc $\beta \in]0,3;0,4[$

c) Démontrons que $\forall x \in]0;\beta[, g(x) < 0$; $\forall x \in]\beta;+\infty[, g(x) > 0$

g est continue et strictement décroissante sur] 0; α [et $g(]0;\alpha[) =]g(\alpha);0[$;
d'où g(x) < 0.
g est continue et strictement croissante sur $]\alpha;\beta[$ et $g(]\alpha;\beta[) =]g(\alpha);0[$;
d'où g(x) < 0.
g est continue et strictement croissante sur $]\beta;+\infty[$ et $g(]\beta;+\infty[) =]0;+\infty[$;
d'où g(x) > 0.
En conclusion, $\forall x \in]0;\beta[, g(x) < 0$
$\forall x \in]\beta;+\infty[, g(x) > 0$

Partie B

1.a) Démontrons que f est continue en 0

$D_f = [0;+\infty[$. Or $0 \in [0;+\infty[$,d'où f est définie en 0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(e^{-x^2} - 1\right)\ln x = \lim_{x\to 0} -\left(\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}\right)x^2\ln x$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0} \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0} x^2\ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} -\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2} = \lim_{X\to 0} -\frac{e^X-1}{X} = -1$$

D'où $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, donc f est continue en 0

2. Justifions que f est dérivable en 0

On a : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(e^{-x^2}-1)\ln x}{x} = -\left(\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}\right)x\ln x$

D'où $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} -\left(\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}\right)x\ln x$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0}$, car $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}-\left(\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}\right)=\lim\limits_{X\to 0}-\left(\frac{e^{X}-1}{X}\right)=-1$

Donc f est dérivable en 0.

3. a)**Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x^2}-1\right)\ln x$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x^2}-1\right)=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

b) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{-x^2}-1\right)\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x^2}-1\right)\frac{\ln x}{x}=0$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x^2}-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

c)Interprétation graphique

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$,donc la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe (OI)

4. a) Démontrons que $\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)=-\frac{e^{-x^2}}{x}g(x^2)$

$\forall x\in]0;+\infty[, f(x)=\left(e^{-x^2}-1\right)\ln x$

$$f'(x)=-2xe^{-x^2}\ln x+\left(e^{-x^2}-1\right)\times\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{-2x^2e^{-x^2}\ln x+e^{-x^2}-1}{x}$$

$$f'(x)=-\frac{e^{-x^2}}{x}\left(2x^2\ln x+e^{x^2}-1\right)$$

$$f'(x)=-\frac{e^{-x^2}}{x}\left(x^2\ln x^2+e^{x^2}-1\right)$$

Donc $f'(x)=-\frac{e^{-x^2}}{x}g(x^2)$, avec $g(x^2)=x^2\ln x^2+e^{x^2}-1$

b) Sens de variation de f sur [0 ; + ∞ [

l'équation g(x) = 0 admet pour racine $x=\beta$; d'où l'équation g(x²) = 0 aura pour racine $x=\sqrt{\beta}$.

Tableau de signe de f'

x	0	$\sqrt{\beta}$	+∞
$-\frac{e^{-x^2}}{x}$	−		−
g(x²)	−	0	+
$f'(x)$	+	0	−

$\forall x\in\left]0;\sqrt{\beta}\right[, f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $\left]0;\sqrt{\beta}\right[$.

$\forall x\in\left]\sqrt{\beta};+\infty\right[, f'(x)<0$, donc f est strictement décroissante sur $\left]\sqrt{\beta};+\infty\right[$.

c) Tableau de Variation de f

x	0		$\sqrt{\beta}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\sqrt{\beta})$	$\searrow$	$-\infty$

5 . **a) Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point 1**

L'équation de la tangente (T) est de la forme : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

Or en calculant, on a $f(1) = 0$ et $f'(1) = -1 + \frac{1}{e}$

Donc (T) : $y = \left(-1+\frac{1}{e}\right)(x-1) \Leftrightarrow$ (T) : $y = \left(-1+\frac{1}{e}\right)x + 1 - \frac{1}{e}$

b) Tracons (T) et (C) : voir figure à la fin

Partie C

1. a) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x} \geq 1+x$, d'où $\forall x \in]0;+\infty[,\ e^{-x} \geq 1-x$:(a)

$\forall x \in [0;+\infty[,\ -x \leq 0$ d'où $e^{-x} \leq e^{0} \Rightarrow e^{-x} \leq 1$:(b)

Des relations (a) et (b) , on en tire la relation suivante :

$$1 \geq e^{-x} \geq 1-x \Rightarrow \forall x \in]0;+\infty[,\ -1 \leq -e^{-x} \leq -(1-x)$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0;+\infty[,\ -1 \leq -e^{-x} \leq -1+x$$

b) Démontrons que $\forall x \in]0;+\infty[,\ 1-x \leq e^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}$

Soit $t \in]0;+\infty[$ et $x \in]0;+\infty[$; on a : $-1 \leq -e^{-t} \leq -1+t$

$$\int_0^x -dt \leq \int_0^x -e^{-t}dt \leq \int_0^x(-1+t)dt$$

$$[-t]_0^x \leq [e^{-t}]_0^x \leq \left[-t+\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$-x \leq e^{-x}-1 \leq -x+\frac{x^2}{2}$$

En ajoutant 1 à chaque membre de l'inégalité , on obtient :

$$1-x \leq e^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}.$$

En conclusion : $\forall x \in]0;+\infty[,\ 1-x \leq e^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}$

2. **a) Calculons $I_n(t)$ à l'aide d'une intégration par parties**

$$I_n(t) = \int_t^1 x^n \ln x \, dx$$

Posons : $U = \ln x$ et $V' = x^n$

$U' = \frac{1}{x}$ et $V = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

d'où $I_n(t) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_t^1 - \int_t^1 \frac{1}{x} \times \frac{x^{n+1}}{n+1}dx$

$$I_n(t) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_t^1 - \int_t^1 \frac{x^n}{n+1}dx$$

$$I_n(t) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_t^1 - \left[\frac{1}{n+1} \times \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_t^1$$

$$I_n(t) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_t^1 - \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_t^1$$

$$I_n(t) = \left(\frac{1^{n+1}}{n+1}ln1 - \frac{t^{n+1}}{n+1}lnt\right) - \left(\frac{1^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right)$$

$$I_n(t) = -\frac{t^{n+1}}{n+1}lnt - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Donc $I_n(t) = \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{t^{n+1}}{n+1}lnt - \frac{1}{(n+1)^2}$

b) Démontrons que : $t \in]0;1]$, $-I_2(t) + \frac{1}{2}I_4(t) \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -I_2(t)$

On a : $\forall x \in]0;+\infty[$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$. En ajoutant (-1) à chaque membre de l'inégalité, on obtient : $-x \leq e^{-x} - 1 \leq -x + \frac{x^2}{2}$.

En remplaçant x par x^2, on aura $-x^2 \leq e^{-x^2} - 1 \leq -x^2 + \frac{x^4}{2}$

$\forall x \in]0;1[$, $lnx < 0$. En multipliant par lnx l'inégalité, on obtient :

$$-x^2 \leq e^{-x^2} - 1 \leq -x^2 + \frac{x^4}{2} \Rightarrow$$

$$-x^2lnx \geq (e^{-x^2} - 1)lnx \geq \left(-x^2 + \frac{x^4}{2}\right)lnx \Rightarrow$$

$$-x^2lnx \geq f(x) \geq \left(-x^2 + \frac{x^4}{2}\right)lnx \Leftrightarrow \left(-x^2 + \frac{x^4}{2}\right)lnx \leq f(x) \leq -x^2lnx$$

$\forall t \in]0;1]$, on a: $\int_t^1\left(-x^2 + \frac{x^4}{2}\right)lnxdx \leq \int_t^1 f(x)dx \leq \int_t^1 -x^2lnxdx$

$$-\int_t^1 x^2lnxdx + \frac{1}{2}\int_t^1 x^4lnxdx \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -\int_t^1 x^2lnxdx$$

En utilisant la valeur de $I_n(t) = \int_t^1 x^n lnx\, dx$, on aura :

$I_2(t) = \int_t^1 x^2lnx\, dx$ et $I_4(t) = \int_t^1 x^4lnx\, dx$.

On obtient donc $\forall t \in]0;1]$, $-I_2(t) + \frac{1}{2}I_4(t) \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -I_2(t)$

3. a) Interprétation géométrique de S

$S = \int_0^1 f(x)dx$ est l'aire (en u.a) de la partie du plan délimitée par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

b) Déterminons un encadrement de S

On sait que : $-I_2(t) + \frac{1}{2}I_4(t) \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -I_2(t)$

d'où $\lim_{t\to 0}\left(-I_2(t) + \frac{1}{2}I_4(t)\right) \leq \lim_{t\to 0}\int_t^1 f(x)dx \leq \lim_{t\to 0} -I_2(t) \Leftrightarrow$

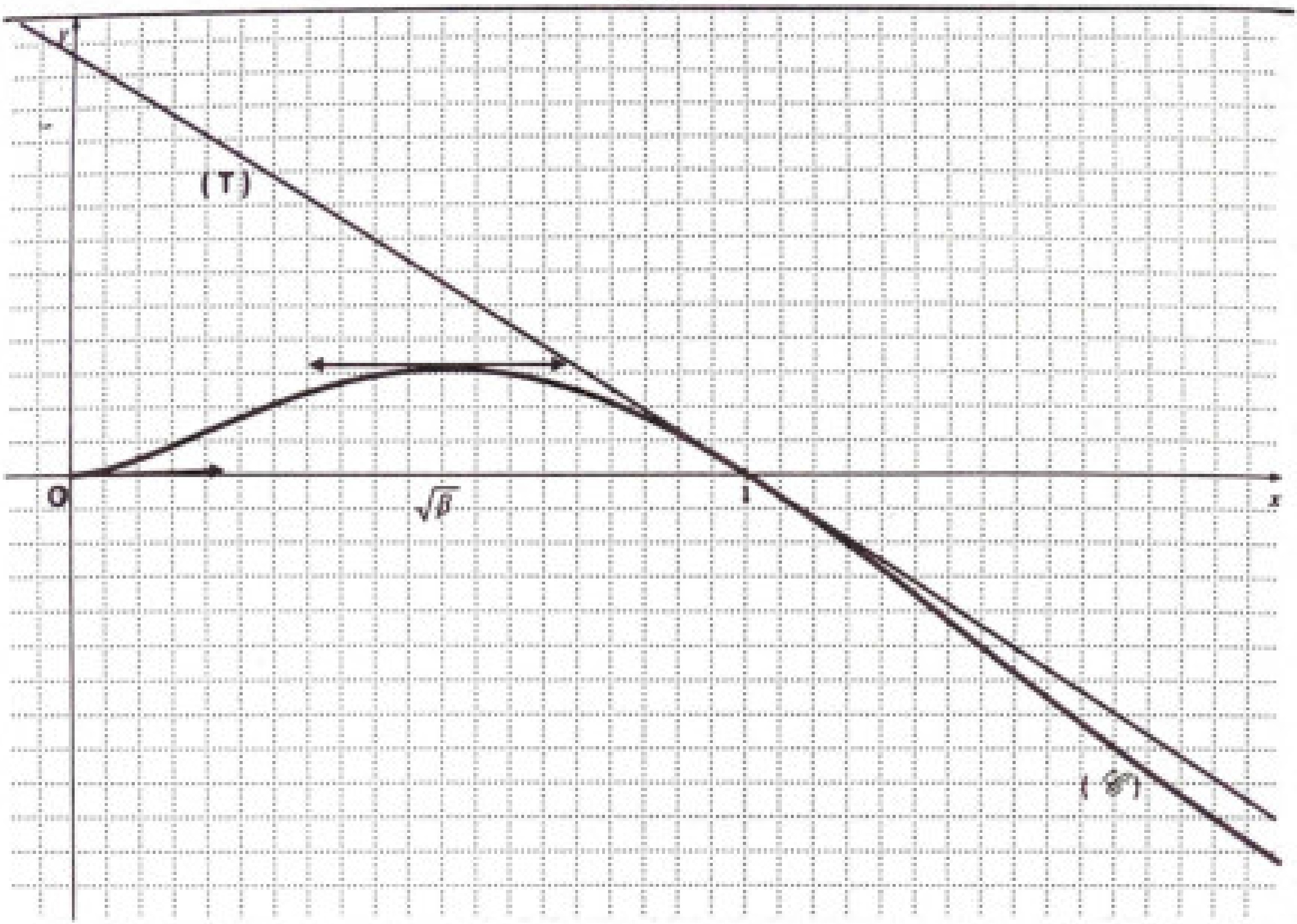
$$\lim_{t\to 0}\left(-I_2(t) + \frac{1}{2}I_4(t)\right) \leq S \leq \lim_{t\to 0} -I_2(t)$$

En partant de la valeur intégrée de $I_n(t)$ de la question 2.a),

on aura : $I_2(t) = \frac{t^3}{9} - \frac{t^3}{3}lnt - \frac{1}{9}$ et $I_4(t) = \frac{t^5}{25} - \frac{t^5}{5}lnt - \frac{1}{25}$

d'où $\lim_{t\to 0}\left(-I_2(t) + \frac{1}{2}I_4(t)\right) = \frac{1}{9} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{25} = \frac{41}{450}$ et $\lim_{t\to 0}(-I_2(t)) = \frac{1}{9}$

Donc $\frac{41}{450} \leq S \leq \frac{1}{9}$



(T)
O
$\sqrt{\beta}$
1
x
y
($\mathscr{C}$)

CORRECTION DU SUJET 3 : BAC C 2014

EXERCICE 1

I. 1 – 1ère **Méthode** : D'après l'algorithme d'Euclide, on a :

dividende	45	16	13	3
diviseur	16	13	3	1
reste	13	3	1	0

On a PGCD (45 ;16) = 1, donc 45 et 16 sont premiers entre eux ; en effet, il existe un couple (a, b) d'entier relatifs tel que $45a - 16b = 1$

2nd **Méthode** :

On a $5(14n + 3) - 14(5n + 1) = 15 - 14 = 1$. (i) ; d'après le théorème de Bézout, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

Pour $n = 3$, on a : $14n + 3 = 45$ et $5n + 1 = 16$.

D'après la relation (i) : $5\times45 - 14\times16 = 1$, donc (a, b) = (5, 14) ; en effet, il existe un couple (a, b) d'entiers relatifs tel que $45a - 16b = 1$.

2 – a) 1ère **Méthode** :

on a : $45\times10 - 16\times28 = 2$, donc le couple (10, 28) est une solution particulière de (E).

2nd **Méthode** :

On a $45\times5 - 16\times14 = 1$.

En multipliant membre à membre par 2 on obtient $45\times 10 - 16\times28 = 2$.

Donc le couple (10; 28) est une solution particulière de (E).

b) On a : $45x - 16y = 2$

$$45\times10 - 16\times28 = 2$$

La soustraction membre à membre donne :

$45(x - 10) - 16(y - 28) = 0$ d'où $45(x - 10) = 16(y - 28)$.

45 divise $16(y - 28)$ et 45 est premier avec 16, donc d'après le théorème de Gauss,

45 divise $y - 28$. Il existe donc $k\in \mathbb{Z}$, tel que $y - 28 = 45k$, d'où $y = 45k + 28$

16 divise $45(x - 10)$ et 16 est premier avec 45, donc d'après le théorème de Gauss ,

16 divise $x - 10$. Il existe donc $k\in \mathbb{Z}$, tel que $x - 10 = 16k$, d'où $x = 16k + 10$.

L'ensemble des solutions est : $S = \{(16k + 10 ; 45k + 28), k\in \mathbb{Z}, \}$

II . 1 – On a $90u$ et $32v + 4$ représentent chacun le nombre de jours écoulés entre J_0 et J_1 (J_0 non compris) par les navires.

Les deux navires A et B entrent au port le même jour si et seulement si on a :

$90u = 32v + 4$ soit $90u - 32v = 4$ c'est-à-dire $45u - 16v = 2$.

On en déduire que le couple (u, v) est solution de (E)

2 – Le couple (u_0 , v_0) est le premier couple d'entiers tous positifs solution de (E) :

$k = 0$, $(u_0, v_0) = (u, v) = (10 ; 28)$

3 – Le nombre de jours qui s'écoulent entre J_0 et J_1 (J_0 non compris) est donné par : $90u = 90 \times 10 = 900$ Jours . Ou bien $32v + 4 = 32\times28 + 4 = 900$ jours.

EXERCICE 2

I . 1 a) ABC est un triangle rectangle en A . Voir figure

b) ABC est un triangle rectangle en A, d'où les points A, B et C ne sont pas alignés, par conséquent $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CA}$ donc la similitude S n'est pas une translation.

c) On a : S(A) = B et S(C) = A , d'où l'angle de S est : $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}}\right)$.

Or $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}}\right) = -\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$, d'où $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = -\frac{\pi}{2}$ donc l'angle de la similitude S est : $-\frac{\pi}{2}$

d) Le rapport de la similitude S est :

$S(A) = B$ et $S(C) = A$ d'où $k = \frac{BA}{AC}$. Or $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Or $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{AB}{AC}$ donc $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Le rapport de la similitude S est : $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2 – a) $S(A) = B \Rightarrow \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}\right) = -\frac{\pi}{2}$, d'où le triangle ΩAB est rectangle en Ω ; donc Ω appartient au cercle de diamètre [AB].

$S(C) = A \Rightarrow \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}}\right) = -\frac{\pi}{2}$, d'où le triangle ΩAC est un triangle rectangle en Ω.

Donc Ω appartient au cercle de diamètre [CA].

b) Le triangle ΩAB est rectangle en Ω, donc (AΩ) ⊥ (BΩ) .

Le triangle ΩAC est rectangle en Ω, donc (AΩ) ⊥ (CΩ)

Par conséquent : (BΩ) = (CΩ) d'où B, Ω et C sont alignés.

Ω ∈ (BC) donc (AΩ) ⊥ (BC).

En conclusion Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).

3 – a) S(C) = A et C ∈ (D), donc S((D)) est perpendiculaire à (D) passant par A, donc S((D)) = (Δ).

S(A) = B et A ∈ (Δ), donc S((Δ)) est la perpendiculaire à (Δ) passant par B.

Au total, $S((\Delta)) = (BB')$

b) On a : $(D) \cap (\Delta) = \{C'\}$ or $S((D)) = (\Delta)$ et $S((\Delta)) = (BB')$

donc $\{S(C')\} = S((D)) \cap S((\Delta))$. De plus $(BB') \cap (\Delta) = \{B'\}$.

Donc $S(C') = B'$.

c) On a : $S(C') = B'$, donc $Mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega C'}, \overrightarrow{\Omega B'}}) = -\frac{\pi}{2}$ donc le point Ω appartient au cercle de diamètre $[B'C']$; donc lorsque (Δ) varie, le cercle de diamètre $[B'C']$ passe par le point fixe Ω.

II . 1 – Placer le point I . Voir figure

2 a) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB})$, on a $z_A = 0$, $z_B = i$ et $z_I = 1$

$Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -ib$ (avec $b > 0$) $\Rightarrow \frac{z_C - 0}{i - 0} = -ib \Rightarrow$

$z_C = b$ donc $z_C = |z_C| = b$ car $b \in \mathbb{R}_+^*$

$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{AB}{AC} = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d' où $\frac{|i-0|}{|z_C - 0|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{|z_C|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

donc $|z_C| = z_C = \sqrt{3}$. En conclusion, l'affixe de C est $\sqrt{3}$

b) L'écriture complexe de la similitude S est de la forme $z' = az + b$.

$S(A) = B \Rightarrow z'_B = az_A + b \Rightarrow i = a(0) + b \Rightarrow b = i$

$S(C) = A \Rightarrow z'_A = az_C + b \Rightarrow 0 = a\sqrt{3} + i \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{3}}{3}i$

Donc l'écriture complexe de S est : $z' = -\frac{\sqrt{3}}{3}iz + i$

c) On a $S(\Omega) = \Omega$, donc $z_\Omega = -\frac{\sqrt{3}}{3}i z_\Omega + i \Rightarrow z_\Omega(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i) = i \Rightarrow$

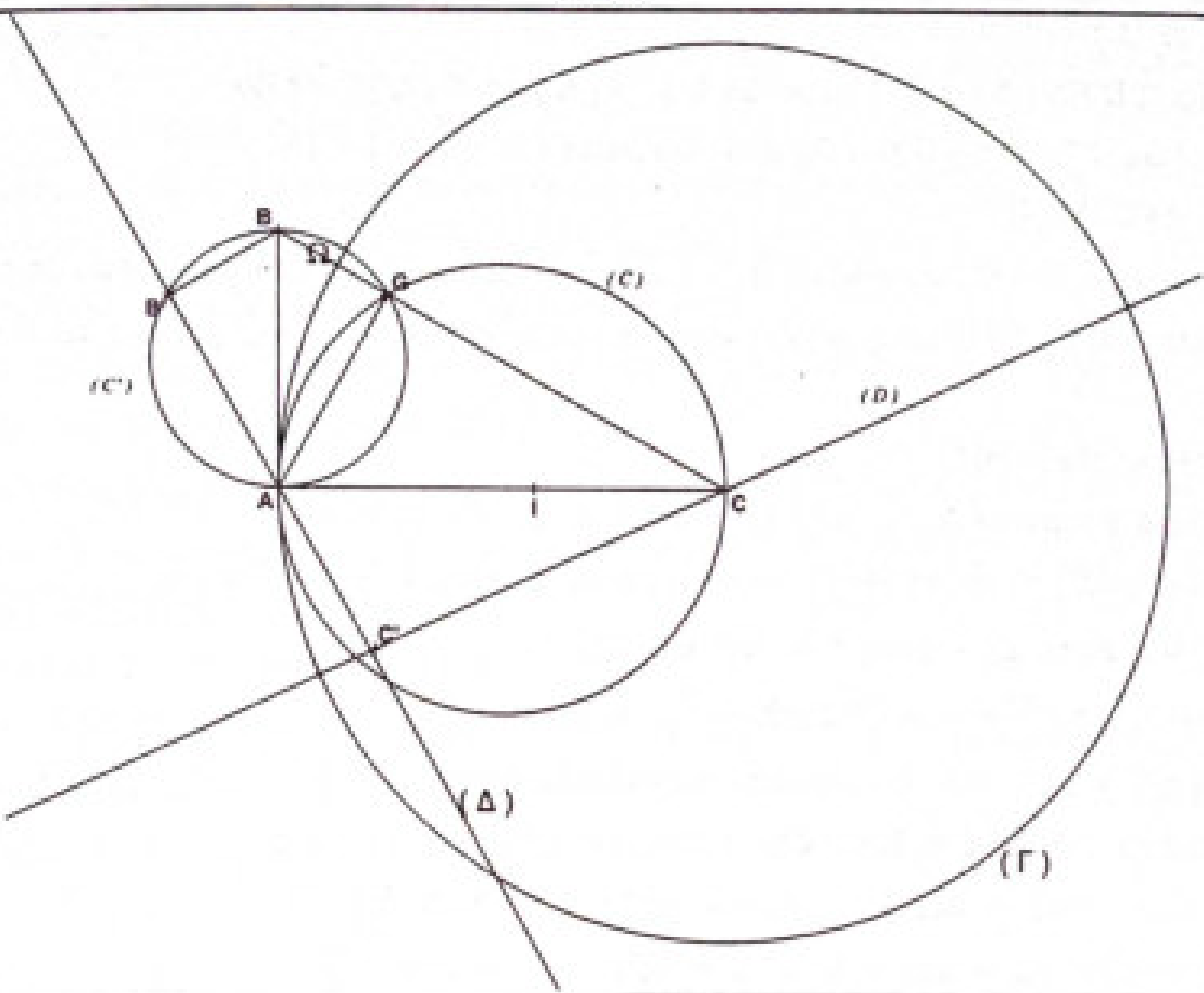
$z_\Omega = \frac{i}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i} \Rightarrow z_\Omega = \frac{3i}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} + 9i}{12}$, donc $z_\Omega = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$

3 – a) Déterminons l'ensemble (Γ).

$|z'| = 1 \Leftrightarrow |-\frac{\sqrt{3}}{3}iz + i| = 1 \Leftrightarrow |-\frac{\sqrt{3}}{3}i(z + \frac{i}{-\frac{\sqrt{3}}{3}i})| = 1 \Leftrightarrow$

$|-\frac{\sqrt{3}}{3}i||z - \sqrt{3}| = 1 \Leftrightarrow |z - \sqrt{3}| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |z_M - z_C| = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow CM = \sqrt{3}$ donc l'ensemble (Γ) est le cercle de centre C et de rayon $\sqrt{3}$.



b) Tracer de (Γ). Voir figure.

PROBLEME

Partie A

1 – On a : $D_f = [0 ; +\infty[$

$0 \in D_f$; donc f est définie en 0.

$$\lim_{x \to 0^>} f(x) = \lim_{x \to 0^>} x^2(1 - 2\ln x) = \lim_{x \to 0^>} (x^2 - 2x^2\ln x) = 0$$

Car $\lim\limits_{x \to 0^>} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^>} x^2\ln x = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to 0^>} f(x) = f(0) = 0$, donc f est continue en 0.

2 – Calculons

$$\lim_{x \to 0^>} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^>} \frac{x^2(1 - 2\ln x)}{x} = \lim_{x \to 0^>} (x - 2x\ln x) = 0$$

car $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$

f est donc dérivable en 0 et f'(0) = 0. Donc ($\mathscr{C}$) admet une tangente horizontale en 0.

3 – a)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2(1 - 2\ln x) = -\infty$; car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - 2\ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - 2\ln x) = -\infty$; car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - 2\ln x = -\infty$

b) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

donc la courbe ($\mathscr{C}$) admet une branche parabolique de direction l'axe (OJ).

4 – a) Démontrons que $f'(x) = -4x\ln x$

On a $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 2x(1 - 2\ln x) + x^2(-2 \times \frac{1}{x})$

$= 2x - 4x\ln x - 2x$

donc $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = -4x\ln x$.

b) Sens de variation de f.

Signe de $f'(x)$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x = 0$ ou $\ln x = 0$

$x = 0$ ou $x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$-4x$		-	|	-	
$\ln x$		-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	

D'où $\forall x \in [0 ; 1[$ $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0 ; 1[$.

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]1 ; +\infty[$.

Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

c) $f(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^2(1 - 2\ln(\sqrt{e})) = e(1 - \ln e) = 0$

$\forall x \in [0;1]$, $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ car f est croissante sur $[0 ; 1]$;

donc $0 \leq f(x) \leq 1$

$\forall x \in [1;\sqrt{e}]$, $1 \leq x \leq \sqrt{e} \Rightarrow f(1) \geq f(x) \geq f(\sqrt{e})$ car f est décroissante sur $[1;\sqrt{e}]$; donc $1 \geq f(x) \geq 0$. Par conséquent

$\forall x \in [0;\sqrt{e}]$, $0 \leq f(x) \leq 1$

$\forall x \in]\sqrt{e};+\infty[$, $x > \sqrt{e} \Rightarrow f(x) < f(\sqrt{e})$ car f est décroissante sur $]\sqrt{e};+\infty[$.

Donc $\forall x \in]\sqrt{e};+\infty[$, $f(x) < 0$.

Au total $\forall x \in [0;\sqrt{e}]$, $0 \leq f(x) \leq 1$

$\forall x \in]\sqrt{e};+\infty[$, $f(x) < 0$.

5 – a)Equation de la tangente (T) à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse $\sqrt{e}$

L'équation de la tangente (T) est de la forme : $y = f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$

or $f(\sqrt{e}) = 0$ et $f'(\sqrt{e}) = -4\sqrt{e}\ln(\sqrt{e}) = -2\sqrt{e}$

d'ou $y = -2\sqrt{e}(x-\sqrt{e})$ donc (T) : $y = -2\sqrt{e}\,x + 2e$

b) voir courbe à la fin .

Partie B

1 – Intégration par partie

$S = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x t^2(1-2\ln t)dt$

Posons $\begin{cases} U(t) = 1-2\ln t \\ V'(t) = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(t) = -\frac{2}{t} \\ V(t) = \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$

Donc $S = \left[\frac{1}{3}t^3(1-2\ln t)\right]_a^x - \int_a^x -\frac{2}{t}\times\frac{1}{3}t^3\,dt$

$S = \left[\frac{1}{3}t^3(1-2\ln t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{2}{3}t^2\,dt$

$S = \left[\frac{1}{3}t^3(1-2\ln t)\right]_a^x + \left[\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}t^3\right]_a^x = \left[\frac{1}{3}t^3\left(\frac{5}{3}-2\ln t\right)\right]_a^x$

Au total , on a : $S = \frac{x^3}{3}\left(\frac{5}{3}-2\ln x\right) - \frac{a^3}{3}\left(\frac{5}{3}-2\ln a\right)$

2 – a) Si $a < \sqrt{e}$ alors $f(t) > 0$ donc

$\mathcal{A}(a) = \left(\int_a^{\sqrt{e}} f(t)\,dt\right)ua = \left(4\int_a^{\sqrt{e}} f(t)\,dt\right)cm^2$

Si $a > \sqrt{e}$ alors $f(t) < 0$; donc

$\mathcal{A}(a) = \left(\int_{\sqrt{e}}^a -f(t)dt\right)ua = \left(-\int_a^{\sqrt{e}} -f(t)\,dt\right)ua$

$\mathcal{A}(a) = \left(4\int_a^{\sqrt{e}} f(t)\,dt\right)cm^2$

b) Pour $a < \sqrt{e}$ On a

$S = \int_a^x f(t)dt$ et $\mathcal{A}(a) = \left(4\int_a^{\sqrt{e}} f(t)\,dt\right)cm^2$ donc d'après la Partie B 1- on a :

$A(a) = \left[\frac{(\sqrt{e})^3}{3}\left(\frac{5}{3}-2\ln\sqrt{e}\right) - \frac{a^3}{3}\left(\frac{5}{3}-2\ln a\right)\right]\times 4cm^2$

$\mathcal{A}(a) = \left[\frac{8e\sqrt{e}}{9} - \frac{4}{3}a^3\left(\frac{5}{3}-2\ln a\right)\right]cm^2$

$\lim\limits_{n\to 0} A(a) = \lim\limits_{n\to 0}\left(\left[\frac{8e\sqrt{e}}{9} - \frac{4}{3}a^3\left(\frac{5}{3}-2\ln a\right)\right]\right)$

$\lim\limits_{n\to 0} A(a) = \lim\limits_{n\to 0}\left(\frac{8e\sqrt{e}}{9} - \frac{20}{9}a^3 + \frac{8}{3}a^3 \ln a\right)$

$\lim\limits_{n\to 0} A(a) = \frac{8e\sqrt{e}}{9}\ cm^2$

c) Pour $a > \sqrt{e}$, on a :

$\mathcal{A}(a) = \left[\frac{8e\sqrt{e}}{9} - \frac{4}{3}a^3\left(\frac{5}{3} - 2\ln a\right)\right] cm^2$ et $\mathcal{A}(a) = \left(\frac{8}{9}e\sqrt{e}\right) cm^2$ donc

Par identification, on a : $-\frac{4}{3}a^3\left(\frac{5}{3} - 2\ln a\right) = 0 \implies$

$-\frac{4}{3}a^3 \neq 0$ *et* $\frac{5}{3} - 2\ln a = 0 \Rightarrow a = e^{\frac{5}{6}}$

3 – L'aire de la partie du plan comprise entre la courbe ($\mathscr{C}$), la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e^{\frac{5}{6}}$ est égale à la somme des aires des parties du plan d'équations : $\begin{cases} 0 \le x \le \sqrt{e} \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$ *et* $\begin{cases} \sqrt{e} \le x \le a^{\frac{5}{6}} \\ f(x) \le y \le 0 \end{cases}$

$\mathscr{A} = \left(\frac{8e\sqrt{e}}{9} + \frac{8e\sqrt{e}}{9}\right) cm^2 = \frac{16e\sqrt{e}}{9}\ cm^2$

Partie C

1 – $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM} \iff \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$. Or $M \in (\mathscr{C}_1) \Leftrightarrow y = f(x)$ et

$M' \in (\mathscr{C}_n) \Leftrightarrow y' = f_n(x')$ donc $y' = f_n(x') \Leftrightarrow ky = f_n(kx)$

$\Leftrightarrow f_n(kx) = kf(x)$. On a :

$f_n\left(e^{\frac{n-1}{2}}x\right) = e^{\frac{1-n}{2}} \times e^{n-1} x^2\left(n - 2\ln\left(e^{\frac{n-1}{2}}x\right)\right)$

$f_n\left(e^{\frac{n-1}{2}}x\right) = e^{\frac{n-1}{2}}x^2(n - n + 1 - 2\ln x) = e^{\frac{n-1}{2}}x^2(1 - 2\ln x)$

$f_n\left(e^{\frac{n-1}{2}}x\right) = e^{\frac{n-1}{2}} f(x)$ donc la courbe ($\mathscr{C}_n$) est l'image de la courbe ($\mathscr{C}_1$) par l'homothétie de centre O et de rapport $e^{\frac{n-1}{2}}$.

2 – a) courbe ($\mathscr{C}_2$) et ses tangentes . Voir figure

Pour $n = 2$, on a $k = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. ($\mathscr{C}_2$) et les tangentes s'obtiennent par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{e}$ appliqué à ($\mathscr{C}$) et ses tangentes .

$(T_2) : y = -2\sqrt{e}\,x + 2e\sqrt{e}$

b) L'aire de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}_2$), (OI), (OJ) et la droite d'équation $x = e$.

Soit C l'aire de la partie du plan vérifiant : $\begin{cases} 0 \le x \le \sqrt{e} \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

Et C ' l'aire de la partie vérifiant : $\begin{cases} 0 \le y \le f_2(x) \\ 0 \le x \le e \end{cases}$.

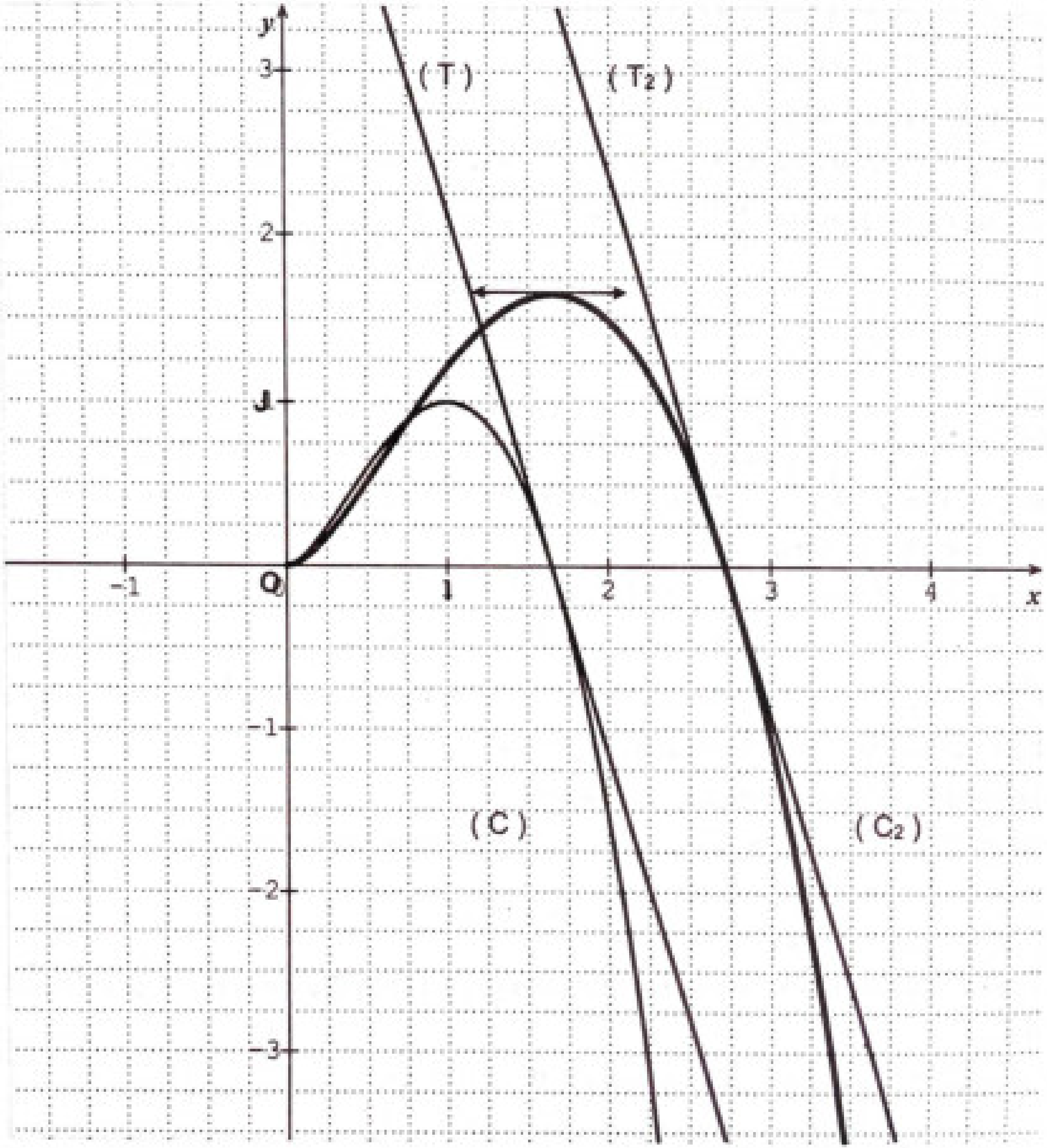
On a : $C' = k^2C$ avec $k = \sqrt{e}$ *et* $C = \frac{8e\sqrt{e}}{9}$ donc $C' = \frac{8e^2\sqrt{e}}{9}\ cm^2$

3 – L'aire de la partie du plan comprise entre ($\mathscr{C}_2$) , la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e^{\frac{4}{3}}$.

Soit $\mathscr{A}'$ l'aire demandée.

On a : $\mathscr{A}' = k^2 \mathscr{A}$, avec $k = \sqrt{e}$ et $\mathscr{A} = \frac{16e\sqrt{e}}{9}$ cm²

Donc l'aire $\mathscr{A}'$ est : $\mathscr{A}' = \frac{16\, e^2\sqrt{e}}{9}\ cm^2$



CORRECTION DU SUJET 4 : BAC C 2013

EXERCICE 1

1.a. La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \sqrt{1 + aU_n^2} \end{cases}$

i) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le U_n \le \dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$

Soit la proposition P_n définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le U_n \le \dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$

- Vérifions que P_0 est vraie.

  On a : $U_0 = 0$ d'où $0 \le U_0 \le \dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$ donc P_0 est vraie.

- Supposons que P_n est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le U_n \le \dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$

- Démontrons que P_{n+1} est vraie .

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le U_n \le \frac{1}{\sqrt{1-a}} \Rightarrow 0 \le U_n^2 \le \left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)^2 \Rightarrow 0 \le U_n^2 \le \frac{1}{1-a} \Rightarrow$$

$$0 \le aU_n^2 \le \frac{a}{1-a} \Rightarrow 1 \le 1 + aU_n^2 \le 1 + \frac{a}{1-a} \Rightarrow 1 \le 1 + aU_n^2 \le \frac{1}{1-a} \Rightarrow$$

$$1 \le \sqrt{1 + aU_n^2} \le \frac{1}{\sqrt{1-a}} \Rightarrow 1 \le U_{n+1} \le \frac{1}{\sqrt{1-a}}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le U_{n+1} \le \frac{1}{\sqrt{1-a}}$$

Au total, P_{n+1} est vraie, donc P_n est vraie .

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le U_n \le \dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$

ii) Démontrons que la suite U_n est croissante.

Calculons $U_{n+1} - U_n$

On a : $U_{n+1} - U_n = \sqrt{1 + aU_n^2} - U_n = \sqrt{U_n^2\left(\dfrac{1}{U_n^2} + a\right)} - U_n = U_n\left(\sqrt{\dfrac{1}{U_n^2} + a} - 1\right)$

Encadrons $U_{n+1} - U_n$

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le U_n \le \dfrac{1}{\sqrt{1-a}} \Leftrightarrow 0 \le U_n^2 \le \dfrac{1}{1-a} \Rightarrow \dfrac{1}{U_n^2} \ge 1 - a$

$\Rightarrow \dfrac{1}{U_n^2} + a \ge 1 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{1}{U_n^2} + a} - 1 \ge 0$. D'où $U_n\left(\sqrt{\dfrac{1}{U_n^2} + a} - 1\right) \ge 0$ ce qui donne $U_{n+1} - U_n \ge 0$. Par conséquent $U_{n+1} \ge U_n$.

Au total, la suite (U_n) est croissante

b) Démontrons que la suite (U_n) est convergente.

La suite (U_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$; donc elle est convergente.

Par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{\sqrt{1-a}}$

2- a) Démontrons que (V_n) est une suite géométrique .

On a : $V_n = (U_{n+1})^2 - (U_n)^2$ d'où

$$V_{n+1} = (U_{n+2})^2 - (U_n)^2 = \left(1 + aU_{n+1}^2\right) - \left(1 + aU_n^2\right)$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = a\left[U_{n+1}^2 - U_n^2\right] \Rightarrow V_{n+1} = aV_n$$

Donc la suite V_n est une suite géométrique de raison a et de premier terme :

$V_0 = U_1^2 - U_0^2 = 1$

b) Expression de V_n en fonction de n

On a :

$V_n = V_p \times q^{n-p} \Rightarrow V_n = 1 \times a^n$; or $V_n = (U_{n+1})^2 - (U_n)^2$

donc $(U_{n+1})^2 - (U_n)^2 = a^n$

c) Calculons la somme des n premiers termes de la suite V_n

$$S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots\dots\dots + a^{n-1}$$
$$= V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \dots\dots\dots + V_{n-1}$$
$$= V_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$S_n = \frac{1-a^n}{1-a}$ avec $V_0 = 1$

d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \sqrt{S_n}$

On a :

$U_1^2 - U_0^2 = a^0$

$U_2^2 - U_1^2 = a^1$

$U_3^2 - U_2^2 = a^2$

$U_4^2 - U_3^2 = a^3$

....

....

$U_n^2 - U_{n-1}^2 = a^{n-1}$

En additionnant membre à membre chaque membre de l'égalité, on obtient :

$U_n^2 - U_0^2 = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \dots\dots\dots + a^{n-1} \Rightarrow$

$U_n^2 - U_0^2 = S_n$

$U_n^2 = S_n$ car $U_0 = 0$

donc $U_n = \sqrt{S_n}$

EXERCICE 2

1- a)Coordonnées des autres sommets de l'ellipse.

- A' est le deuxième sommet sur l'axe focal (OI)

I est le milieu de [AA'] d'où $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 2x_I - x_A \Rightarrow x_{A'} = 9 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 2y_I - y_A \Rightarrow y_{A'} = 0 \end{cases}$

Donc A ' (9 ; 0)

- B et B ' sont les sommets de l'ellipse sur l'axe non focal

En posant IA = a et IF = c où F est un foyer , on a :

$IA = \sqrt{(-1-4)^2 + (0-0)^2} = 5$ et $IF = \sqrt{(0-4)^2 + (0-0)^2} = 4$

d'où on a IA = a = 5 et IF = c = 4

la valeur de b est : $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ donc $b = 3$

On obtient B(4 ; 3) et B' (4 ; - 3)

b) Calculons l'excentricité e : $e = \dfrac{c}{a}$ d'où $e = \dfrac{4}{5}$

c) Déterminons une équation de la directrice (D) de l'ellipse (E) :

l'équation est de la forme $x = -\dfrac{a^2}{c}$ dans le repère $\left(I, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, c'est-à-dire $x = -\dfrac{25}{4}$

.L'équation est de la forme

$$x - x_I = -\frac{a^2}{c} \Rightarrow x = -\frac{a^2}{c} + x_I \Rightarrow x = -\frac{25}{4} + 4$$

$$\Rightarrow x = -\frac{9}{4}$$

dans le repère $\left(O, \vec{e_1} ; \vec{e_2}\right)$

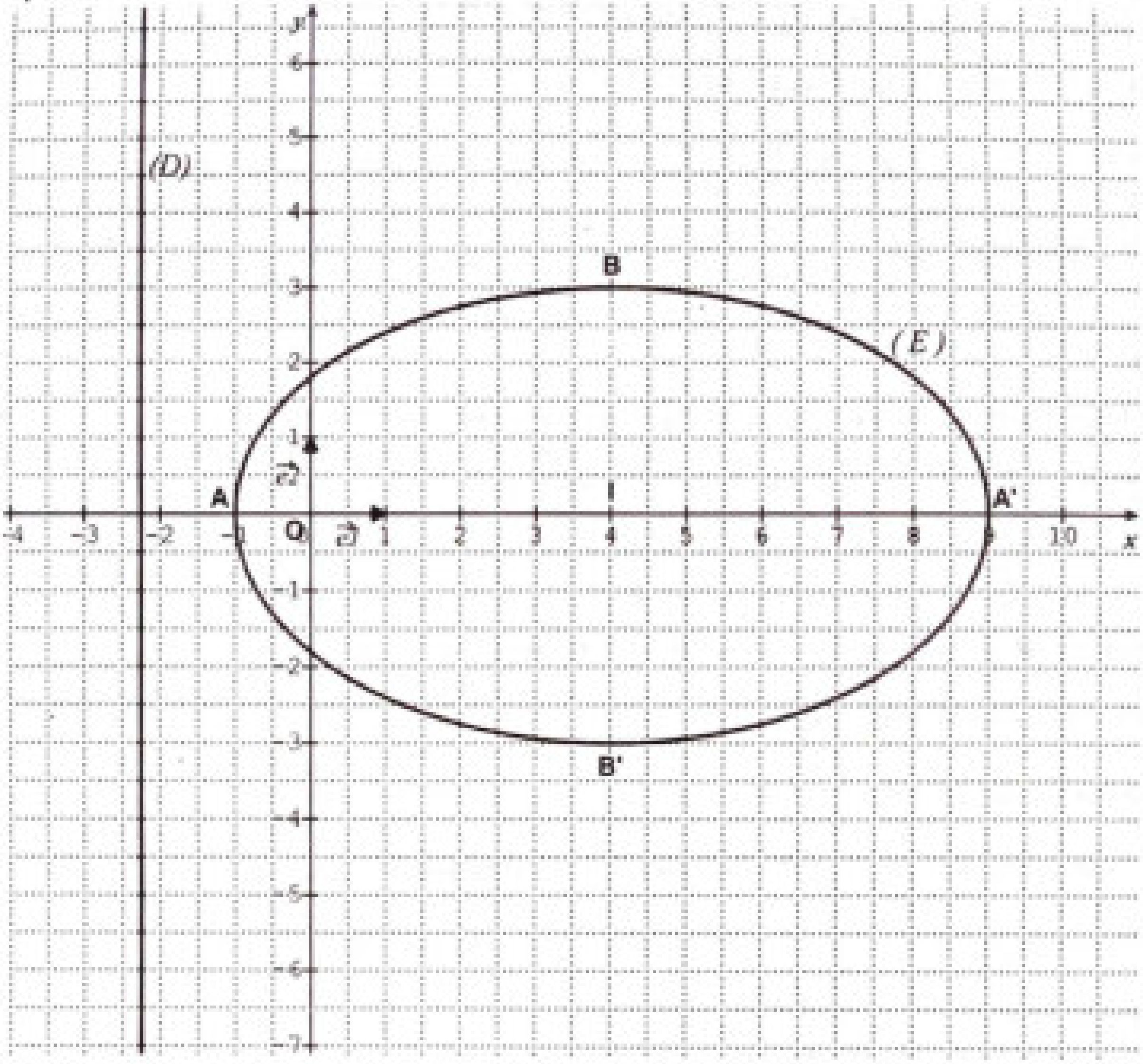
2 –a) Déterminons une équation de (E) dans le repère $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

(E) : dans le repère $\left(I, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$: $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{X^2}{25} + \dfrac{Y^2}{9} = 1$

(E) : dans le repère $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$:

$$\frac{(x - x_I)^2}{a^2} + \frac{(y - y_I)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-0)^2}{9} = 1$$

b) construction de (E)



3- a) $(E_\alpha) : z^2 - 2(4 + 5\cos\alpha)z + (4\cos\alpha + 5)^2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = [-2(4 + 5\cos\alpha)]^2 - 4(4\cos\alpha + 5)^2$

$= 4(16 + 40\cos\alpha + 25\cos^2\alpha) - 4(16\cos^2\alpha + 40\cos\alpha + 25)$

$= 36\cos^2\alpha - 36$

$= -36(1 - \cos^2\alpha)$ or $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ d'où $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\Delta = i^2 6^2 \sin^2\alpha$

b) Résolution de l'équation (E_α)

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2(4 + 5\cos\alpha) + (6\,i\sin\alpha)}{2} = 4 + 5\cos\alpha + 3\,i\sin\alpha$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2(4 + 5\cos\alpha) - (6\,i\sin\alpha)}{2} = 4 + 5\cos\alpha - 3\,i\sin\alpha$$

donc $S = \{4 + 5\cos\alpha + 3\,i\sin\alpha \,;\, 4 + 5\cos\alpha - 3\,i\sin\alpha\}$

c) Montrons que M_1 appartient à (E)

Remplaçons x et y de (E) par l'abscisse et l'ordonnée de M_1 puis de M_2 .

Les coordonnées de M_1 sont: $M_1\begin{pmatrix} 4+5\cos\alpha \\ 3\text{ i }\sin\alpha \end{pmatrix}$

$$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=\frac{(4+5\cos\alpha-4)^2}{25}+\frac{(3\sin\alpha)^2}{9}$$
$$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$$
$$=1$$

donc M_1 appartient à (E)

Montrons que M_2 appartient à (E)

Les coordonnées de M_2 sont : $M_2\begin{pmatrix} 4+5\cos\alpha \\ -3\sin\alpha \end{pmatrix}$

$$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=\frac{(4+5\cos\alpha-4)^2}{25}+\frac{(-3\sin\alpha)^2}{9}$$
$$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$$
$$=1$$

donc M_2 appartient à (E)

PROBLEME

Partie A

I – 1- Calculons la limite de u(x) en 0 et en $+\infty$

$$\lim_{x\to 0}u(x)=\lim_{x\to 0}\left(1+x^2-2x^2\ln x\right)=\lim_{x\to 0}(1+x^2-2x.x\ln x)=1$$

car $\lim_{x\to 0}(1+x^2)=1$ et $\lim_{x\to 0}(x\ln x)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}u(x)=\lim_{x\to+\infty}(1+x^2-2x^2\ln x)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{1}{x^2}+1-2\ln x\right)=-\infty$$

car $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}-2\ln x=-\infty$

2 – a) Sens de variation de u(x)

- dérivée de u(x)

$u(x)=1+x^2-2x^2\ln x$

$u'(x)=2x-4x\ln x-2x=-4x\ln x$

- signe de u'(x)

$u'(x)=0 \Rightarrow -4x\ln x=0 \Rightarrow -4x=0$ ou $\ln x=0 \Rightarrow x=0$ et $x=1$

x	0		1		$+\infty$
$-4x$		$-$		$-$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$U'(x)$		$+$	0	$-$	

D'où

$\forall x \in]0;1[$, $u'(x) > 0$ donc u est strictement croissante sur $]0;1[$.

$\forall x \in]1;+\infty[$, $u'(x) < 0$ donc u est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$

- **Tableau de variation de u(x)**

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$U(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

b) Démontrons que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution α

u est strictement croissante sur $]0;1[$. On a $u(]0;1[) =]1;2[$; or $0 \notin]1;2[$,

donc l'équation $u(x) = 0$ n'admet pas de solution.

u est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

On a : $u(]1;+\infty[) =]-\infty;2[$; or $0 \in]-\infty;2[$, donc l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α.

Au total, $\forall x \in]0;+\infty[$, l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α

c) Démontrons que $1{,}89 < \alpha < 1{,}9$

u est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$, en particulier sur $]1{,}89; 1{,}9[$.

On a : $u(1{,}89) = 1 + 1{,}89^2 - 2(1{,}89)^2\ln(1{,}89) = 0{,}024$

$u(1{,}9) = 1 + 1{,}9^2 - 2(1{,}9)^2\ln(1{,}9) = -0{,}024$

d'où $u(1{,}89).u(1{,}9) < 0$ donc $1{,}89 < \alpha < 1{,}9$

d) signe de u(x)

$\forall x \in]0;1[$, u est continue et strictement croissante sur $]0;1[$

On a $u(]0;1[) =]1;2[$, d'où $u(x) > 0$

$\forall x \in]1;\alpha[$, u est continue et strictement décroissante sur $]1;\alpha[$.

On a: $u(]1;\alpha[) =]0;2[$; d'où $u(x) > 0$

$\forall x \in]\alpha\,;+\infty[$, u est continue et strictement décroissante sur $]\alpha\,;+\infty[$.

On a : $u(]\alpha;+\infty[) =]-\infty;0[$, d'où $u(x) < 0$

Au total : $\begin{cases} \forall x \in]0\,;\alpha[,\ u(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha\,;+\infty[,\ u(x) < 0 \end{cases}$

II – 1- Calculons la limite de f en 0 et en + ∞

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+x^2} = -\infty \text{ car } \lim_{x\to 0}\ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 0}(1+x^2) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\frac{x}{1+x^2} = 0$$

$$\text{car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

2 – a) Déterminons la dérivée de f

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x(\ln x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{u(x)}{x(1+x^2)^2} \quad \text{avec } u(x) = 1+x^2-2x^2\ln x$$

b) Démontrons que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$

On a $f(\alpha) = \dfrac{\ln\alpha}{1+\alpha^2}$; or $u(\alpha) = 0 \Rightarrow 1+\alpha^2-2\alpha^2\ln\alpha = 0 \Rightarrow \ln\alpha = \dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$

d'où $f(\alpha) = \dfrac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\alpha^2} = \dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2(1+\alpha^2)} = \dfrac{1}{2\alpha^2}$ donc $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$

c) sens de variation de f

- signe de f ' :

x	0		α		+∞
u(x)		+		-	
x		+		+	
$(1+x^2)^2$		+		+	
f '(x)		+	0	-	

$\forall x \in]0;\alpha[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0\,;\alpha[$

$\forall x \in]\alpha\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]\alpha\,;+\infty[$

Tableau de variation de f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\searrow$	0

3.a) Coordonnées du point d'intersection de (C) et (OI)

(OI) : $y = 0$ et (C) : $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$

$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln x}{1 + x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

donc le point d'intersection de (C) et (OI) est I(1 ; 0)

b) Signe de f(x)

$\forall x \in]0; 1[$, f est strictement croissante. On a : $f(]0; 1[) =]-\infty; 0[$, d'où $f(x) < 0$

$\forall x \in]1; \alpha[$, f est strictement croissante . On a $f(]1; \alpha[) = \left]0 ; \frac{1}{2\alpha^2}\right[$

d'où $f(x) > 0$

$\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, f est strictement décroissante. On a : $f(]\alpha ; +\infty[) = \left]0 ; \frac{1}{2\alpha^2}\right[$;

d'où $f(x) > 0$.

Au total : $\begin{cases} \forall x \in]0 ; 1[, f(x) < 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, f(x) > 0 \end{cases}$

4- Tracé de (C) (voir papier millimétré)

Partie B

1-a) Déterminons le signe de F

Le signe de $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1 + t^2} dt$ est celui de $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$ dans $[1 ; +\infty [$.

Or $\forall x \in]0; 1], f(x) \leq 0$ et $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) \geq 0$

Donc si $x > 1$ alors $\int_1^x \frac{\ln t}{1 + t^2} dt \geq 0$ (Observer les bornes de l'intégrale)

En conclusion : pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $F(x) \geq 0$

b) Calculons F '(x)

On a $\forall x \in]0 ; +\infty[, F'(x) = f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$

2-a) Démontrons que pour tout x élément de [0 ; + ∞[, $\varphi'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{(\varphi^{-1})' o \varphi(x)} = \frac{1}{(\varphi^{-1})'[\varphi(x)]}$$

Or $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ et $\varphi^{-1}(x) = \tan x$, d'où on a :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\tan'[\varphi(x)]} = \frac{1}{1 + \tan^2[\varphi(x)]} = \frac{1}{1 + x^2}$$

donc $\varphi'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

b) Démontrons que h est continue en 0.

$D_h = [\,0\,;+\infty\,[$. $0 \in D_h$, d'où h est définie en 0 .

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(0) = \frac{1}{1 + \tan^2(0)} = 1;$$

d'où $\lim_{x \to 0} h(x) = h(0) = 1$, donc h est continue en 0.

3-a) Intégration par partie de F(x)

$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1 + t^2} dt$. Posons $U = \ln t$ $\quad V' = \frac{1}{1 + t^2}$

$U' = \frac{1}{t}$ $\quad V = \varphi(t)$

D'où

$$\int_1^x \frac{\ln t}{1 + t^2} dt = [\varphi(t)\ln t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\varphi(t)dt$$

$$= [\varphi(t)\ln t]_1^x - \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}dt$$

$$= [\varphi(t)\ln t]_1^x - \int_1^x h(t)dt$$

$$= \varphi(x)\ln x - \varphi(1)\ln 1 - \int_1^x h(t)dt$$

$$= \varphi(x)\ln x - \int_1^x h(t)dt \quad \text{car} \quad \ln 1 = 0$$

donc $F(x) = \varphi(x)\ln x - \int_1^x h(t)dt$

b) Calculons la limite de $\varphi(x)\ln x$ lorsque x tend vers 0

$\forall x \in \,]\,0; +\infty\,[$, $\varphi(x)\ln x = x h(x) \ln x$ car $h(x) = \frac{\varphi(x)}{x} \Rightarrow \varphi(x) = x\,h(x)$

D'où on a :

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x)\ln x = \lim_{x \to 0} x h(x) \ln x = \lim_{x \to 0} h(x)\, x\ln x = 0$$

car $\lim_{x \to 0} h(x) = h(0) = 1$ et $\lim_{x \to 0} x\ln x = 0$

4-a) Démontrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = \ell$

On a :

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right)$$

En posant $X = \dfrac{1}{x}$; on a quand $x \to +\infty$

$$X \to 0$$

On obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = \lim\limits_{X \to 0} F(X) = \lim\limits_{X \to 0} G(X)$ car $F(x) = F(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = G(0) = \ell$$

b) Le sens de variation de G sur $[0 ; +\infty[$

- Dérivée de G

$\forall x \in [0 ; +\infty[$, $G(x) = F(x)$ d'où $G'(x) = F'(x)$ or $F'(x) = f(x)$

donc $G'(x) = f(x)$

Le signe de $G'(x)$ est celui de $f(x)$.

En conclusion :

$\forall x \in]0 ; 1[$, $G'(x) < 0$, donc G est strictement décroissante sur $]0 ; 1[$.

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, $G'(x) > 0$ donc G est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$.

- Tableau de variation de G

x	0		1		$+\infty$
$G'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$G(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	ℓ

5-a) Justifions que $V_2 = \dfrac{209}{225}$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

$$V_2 = \frac{(-1)^0}{(2 \times 0 + 1)^2} + \frac{(-1)^1}{(2 \times 1 + 1)^2} + \frac{(-1)^2}{(2 \times 2 + 1)^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} = \frac{8}{9} + \frac{1}{25}$$

$$V_2 = \frac{209}{225}$$

b) Déterminons le plus petit entier naturel n :

$$\frac{1}{(2n+3)^2} < 25.10^{-3} \Rightarrow (2n+3)^2 > \frac{1}{25.10^{-3}} \Rightarrow (2n+3)^2 > 40$$

$$\Rightarrow 2\ln(2n+3) > \ln(40) \Rightarrow \ln(2n+3) > \frac{1}{2}\ln(40)$$

$$\Rightarrow \ln(2n+3) > \ln\sqrt{40} \Rightarrow 2n+3 > \sqrt{40} \Rightarrow 2n > \sqrt{40} - 3$$

$$\Rightarrow n > \frac{\sqrt{40} - 3}{2} \Rightarrow n > 1{,}66228$$

donc le plus petit entier naturel est $n_0 = 2$

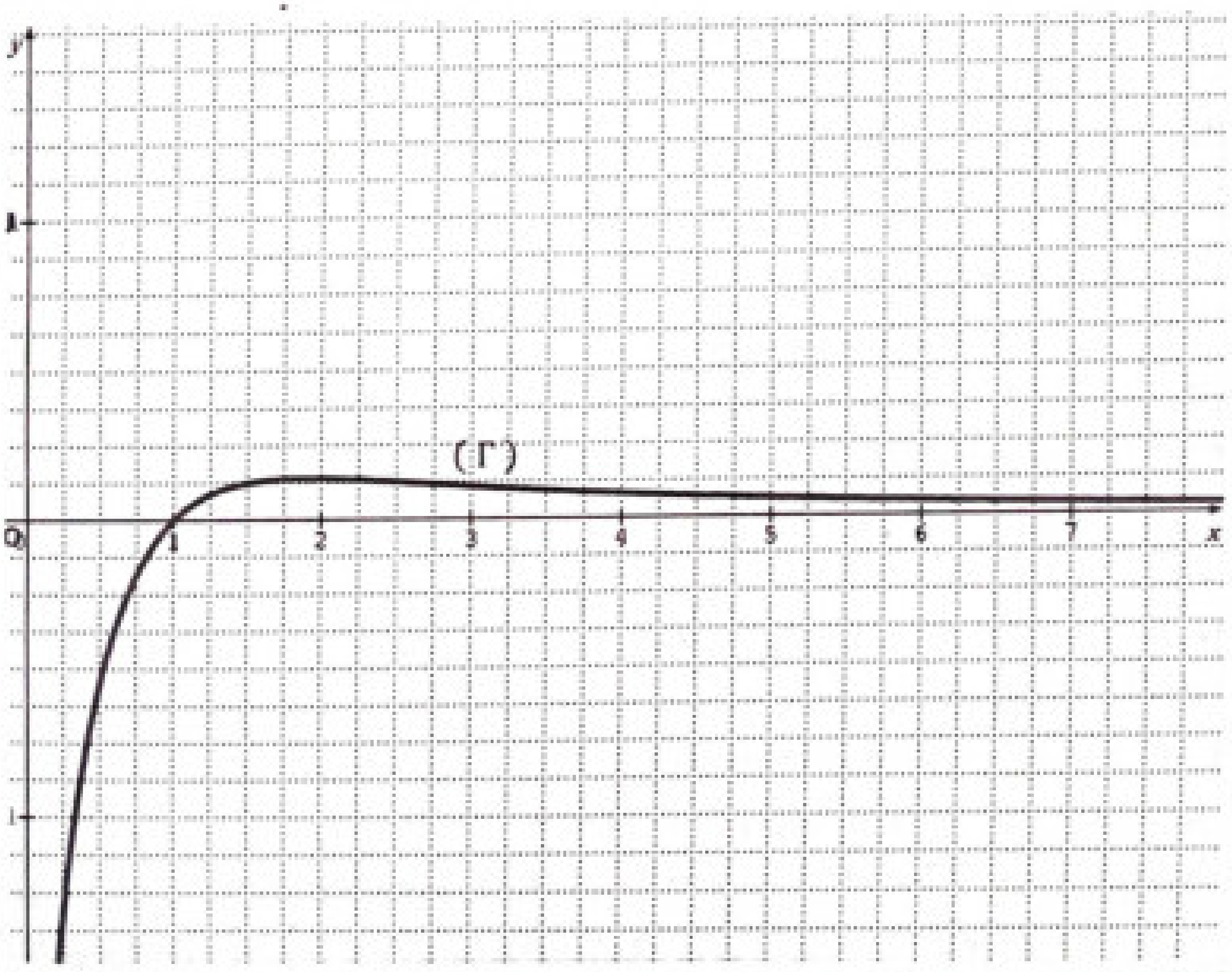
c) Un valeur approchée de ℓ à 25.10^{-3} près est :

$$|\ell - V_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}. \text{ Or } \frac{1}{(2n+3)^2} \leq 25.10^{-3} \text{ d'où } |\ell - V_n| \leq 25.10^{-3}$$

On a obtenu $n_0 = 2$, donc $|\ell - V_2| \leq 25.10^{-3}$

Au total une valeur approchée de ℓ à 25.10^{-3} près est $\ell = V_2$

d) Allure de (Γ) : voir le repère (O, I , J)



CORRECTION DU SUJET 5 : BAC C 2012

EXERCICE 1

1. a) Démontrons que $2x \equiv 1[7]$

$$9x + 7y = 1 \Leftrightarrow 2x + 7x + 7y = 1$$
$$\Leftrightarrow 2x + 7(x + y) = 1$$
$$\Leftrightarrow 2x - 1 = -7(x + y)$$
$$\Leftrightarrow 2x \equiv 1[7]$$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $2x \equiv 1[7]$

Soit le tableau de congruence modulo 7 suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6
2x	0	2	4	6	1	3	5

D'où $2x \equiv 1[7] \Leftrightarrow x \equiv 4[7]$ donc $x = 7k + 4,\ k \in \mathbb{Z}$

$S = \{7k + 4,\ k \in \mathbb{Z}\}$

c) Déterminons l'ensemble des solutions de (E).

En remplaçant x par 7k + 4 , on obtient :

$$9x + 7y = 1 \Leftrightarrow 9(7k + 4) + 7y = 1 \Leftrightarrow 63k + 36 + 7y = 1$$
$$\Leftrightarrow 7y = -63k - 35 \Leftrightarrow y = -9k - 5$$

Donc l'ensemble de solutions de (E) est: $S = \{(7k + 4 ; -9k - 5),\ k \in \mathbb{Z}\}$

2. Résolvons l'équation (E ') : $9x + 7y = 200$

On remarque que : $9x + 7y = 1 \times 200$ d'où la solution particulière de l'équation (E) : (4 ; - 5) sera multipliée par 200 .

Donc la solution particulière de (E ') est $(x_0 ; y_0) = (800 ; -1000)$.

On a : $9x + 7y = 200$

$-\ (9x_0 + 7y_0 = 200)$

$$9(x - x_0) + 7(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow -9(x - x_0) = 7(y - y_0)$$

$\Leftrightarrow x = 7k + 800$; de même $y = -9k - 1000$

Donc l'ensemble des solutions de (E ') est : $S = \{(7k + 800 ; -9k - 1000) ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

3. Déterminons le nombre d'hommes et de femmes de cette association.

Soit x le nombre d'hommes et soit y le nombre de femmes.

On a : $900x + 700y = 20000$; d'où on obtient, après simplification $9x + 7y = 200$.

L'ensemble des solutions de (E ') est $x = 7k + 800$ et $y = -9k - 1000$; avec $k \in \mathbb{Z}$

On a : $x > 0$, $y > 0$ et $x > y$, d'où $7k + 800 > 0$; $-9k - 1000 > 0$

$7k + 800 > -9k - 1000$

On a : $k > -114,286$; $k < -111,111$ et $k > -112,5$, après intersection, on obtient donc $k = -112$

En conclusion, il y a dans cette association, $x = 7(-112) + 800 = 16$ hommes et $y = -9(-112) - 1000 = 8$ femmes

EXERCICE 2

1- Justifions que (Γ) est une ellipse

(Γ) : $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x + 4y^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 + x) + 4y^2 - 9 = 0 \Rightarrow 3(x+1)^2 + 4(y-0)^2 = 12$

$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-0)^2}{3} = 1$ donc (Γ) est une ellipse de centre $\Omega(-1;0)$

2-a) Les coordonnées de F et F ' dans le repère $(K, \vec{e_1}, \vec{e_2})$: $F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

Les coordonnées de F et F ' dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$: $F\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

b) Les coordonnées de A , A ' , B et B ' dans le repère $(K, \vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$; $A'\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $B'\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Les coordonnées de A , A ' , B et B ' dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $A'\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $B'\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

c) Construction de (Γ) : voir courbe

3-a) Construction de N et P . Voir figure

b) Déterminons le rapport r et l'angle θ de la similitude S

$S(M) = P \Leftrightarrow r = \frac{KP}{KM}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KP}}) = \theta$

KMN est un triangle rectangle isocèle en N.

D'après la propriété de Pythagore, on a : $KM^2 = KN^2 + NM^2 \Rightarrow KM = a\sqrt{2}$

P étant le symétrique de K par rapport à N d'où $KN = NP$ donc $KP = 2a$

Au total , le rapport de S , $r = \frac{KP}{KM} = \frac{2a}{a\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{2}}$

Le triangle KMN est un triangle rectangle isocèle en N , d'où

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KN}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MK}}) = -\frac{\pi}{4}$ donc l'angle de la similitude S est :

$\Theta = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KP}}) = -\frac{\pi}{4}$ donc $\boxed{\theta = -\frac{\pi}{4}}$

c) Etant donné que l'image d'une conique par une similitude directe est une conique de même nature , alors l'ensemble ($\mathcal{C}$), image de (Γ), est une ellipse .

Construction de ($\mathcal{C}$) : voir figure

4-a) L'écriture complexe de la similitude directe S est de la forme z ' = az + b ou bien $z' = re^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

On sait que : le centre de S est $K\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, le rapport est $r = \sqrt{2}$ et l'angle est $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

D'où on a :

$$z' = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}(z+1) - 1 \Rightarrow z' = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\right)(z+1) - 1$$

$$z' = (1-i)(z+1) - 1 \Rightarrow z' = (1-i)z - i$$

Donc l'écriture complexe de S est $\boxed{z' = (1-i)z - i}$

b) Déterminons les coordonnées de G et G ' dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

On a : S(F) = G $\Rightarrow z_G = (1-i)z_F - i \Rightarrow z_G = -i$ donc $\boxed{G\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}}$

On a : S(F ') = G ' $\Rightarrow z_{G'} = (1-i)z_{F'} - i \Rightarrow z_{G'} = -2 + i$ donc $\boxed{G'\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}}$

c) Equation cartésienne de ($\mathcal{C}$) dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$:

- Déterminons l'expression analytique de S

$z' = (1-i)z - i \Rightarrow x' + iy' = (1-i)(x+iy) - i$

$\Rightarrow x' + iy' = (x+y) + (-x+y-1)i$

Donc on a $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$

- Tirons x et y par addition et soustraction de x ' et y '

On obtient : $x = \dfrac{x'-y'-1}{2}$ et $y = \dfrac{x'+y'+1}{2}$

En remplaçant x et y de l'équation de (Γ), on obtient l'équation de ($\mathcal{C}$)

On a : $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow$

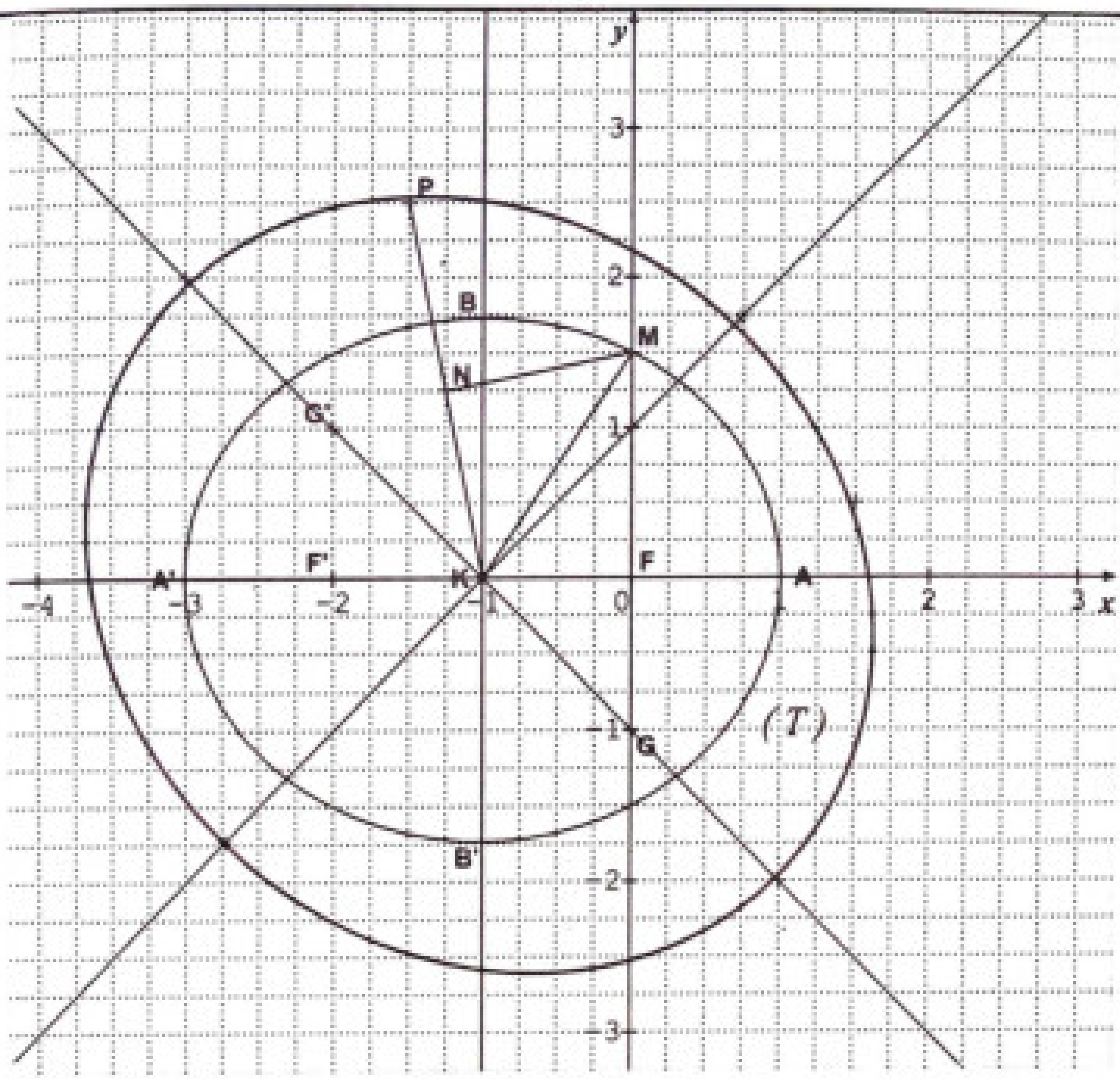
$$3\left(\frac{x'-y'-1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{x'+y'+1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{x'-y'-1}{2}\right) - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4}(x'-y'-1)^2 + (x'+y'+1)^2 + 3(x'-y'-1) - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$7x'^2 + 7y'^2 + 2x'y' + 14x' + 2y' - 41 = 0$$

Donc une équation cartésienne de ($\mathcal{C}$) dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est :

$$7x^2 + 7y^2 + 2xy + 14x + 2y - 41 = 0$$



PROBLEME

PARTIE A

1-a) Montrons que la droite (OJ) est une asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$)

On a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - \ln x$ et $D_f = \left]0 ; +\infty\right[$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - \ln x\right)$$

$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty}$ car $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} -\ln x = +\infty$

d'où, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ ou (OJ) est une asymptote verticale à ($\mathscr{C}$) .

b) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - \ln x \right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{\ln x}{x} \right)$$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - \ln x}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{\ln x}{x} \right)$$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Interprétation graphique

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe ($\mathscr{C}$) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$

2-a) Calculons f ' (x)

$$\forall x \in \left]0 ; +\infty\right[, f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - \ln x$$

$$f'(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 1}{x}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}}$$

b) Sens de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$x - 1$	‖	-	0	+	
$x^2 + x + 1$	‖	+		+	
x	‖	+		+	
$f'(x)$	‖	-	0	+	

$\forall x \in \left]1 ; +\infty\right[, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur] 1 ; + ∞ [

$\forall x \in \left]0 ; 1\right[, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur] 0 ; 1 [

c) Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3- Construction de ($\mathscr{C}$) : voir à la fin

PARTIE B

1 – Intégration par parties .

Posons $U = \ln t$ $\quad V' = 1$

$U' = \frac{1}{t}$ $\quad V = t$

D'où

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t \, dt = [\, t \ln t \,]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} 1 \, dt$$

$$= [t \ln t]_{\frac{1}{n}}^{1} - [\, t \,]_{\frac{1}{n}}^{1}$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t \, dt = [\, t \ln t - t \,]_{\frac{1}{n}}^{1}$$

$$= (\, 1 \ln 1 - 1 \,) - \left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$$

$$\boxed{\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t \, dt = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} - 1}$$

2 – a) Interprétation graphique de $A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t) \, dt$

A_n est l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe ($\mathscr{C}$), l'axe (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \frac{1}{n}$.

b) Vérifions que $A_n = \frac{3}{4} - \frac{2}{3n} - \frac{1}{12n^4} - \frac{\ln(n)}{n}$

$$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3} - \ln t\right)dt$$

$$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}\right)dt - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{3}t\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{n} - 1\right)$$

$$A_n = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^4} + \frac{1}{3n} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{n} + 1$$

$$\boxed{A_n = \frac{3}{4} - \frac{2}{3n} - \frac{1}{12n^4} - \frac{\ln n}{n}}$$

c) Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3n} - \frac{1}{12n^4} - \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{3}{4}} \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3n} = 0 \;;\; \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{12n^4} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$$

3 –a) Pour $1 \leq k \leq n-1$ et $\forall t \in \left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right]$, on a $t \in [0;1]$ et f est décroissante sur $]0;1]$, donc :

$$\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n} \quad \text{d'où} \quad f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dt \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dt \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right)[t]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq f\left(\frac{k}{n}\right)[t]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \Rightarrow$$

donc on obtient : $\boxed{\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}$

b) On a :

$$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt$$

$$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t)\,dt + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t)\,dt + \int_{\frac{3}{n}}^{\frac{4}{n}} f(t)dt + \dots\dots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(t)\,dt$$

d'où $\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$

$\frac{1}{n}f\left(\frac{3}{n}\right) \leq \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)$

$\frac{1}{n}f\left(\frac{4}{n}\right) \leq \int_{\frac{3}{n}}^{\frac{4}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{3}{n}\right)$

....

....

$\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right) \leq \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

En additionnant membre à membre l'inégalité ; on obtient :

$$\frac{1}{n}\left[f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \dots + f(\frac{n}{n}) \right] \leq A_n \leq \frac{1}{n}\left[f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \dots + f(\frac{n-1}{n})\right]$$

4 – a) Démontrons que : $A_n \leq S_n \leq A_n + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})$

On a :

$$S_n = \frac{1}{n}\left[f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \dots + f(\frac{n}{n}) \right]$$

$$= \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}f(\frac{2}{n}) + \frac{1}{n}f(\frac{3}{n}) + \dots + \frac{1}{n}f(\frac{n}{n})$$

$$= \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}\left[f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \dots + f(\frac{n}{n})\right]$$

d'où $\boxed{S_n \leq \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) + A_n}$ (1)

Pour $t \in \left[\frac{1}{n};1\right]$ d'où $\frac{1}{n} \leq t \leq 1$, or f est strictement décroissante d'où

$f(t) \leq f(\frac{1}{n}) \Rightarrow \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(\frac{1}{n})dt$ d'où $\boxed{A_n \leq \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})}$ (2)

Les relations (1) et (2) donnent : $\boxed{A_n \leq S_n \leq A_n + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})}$

b) D'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[A_n + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})\right]$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}} \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) = 0$$

PARTIE C

1 – Démonstration par récurrence.

Soit P_n la proposition suivante : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

- Vérifions que P_1 est vraie

On a : $1^3 = 1$ et $\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = 1$, d'où $1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2$

Donc P_1 est vraie .

Supposons que P_n est vraie , c'est-à-dire $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

- Démontrons que P_{n+1} est vraie .

On a :

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^2(n+1) \\
&= (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] \\
&= (n+1)^2\left[\frac{n^2+4n+4}{4}\right] \\
&= (n+1)^2\,\frac{(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

Donc P_{n+1} est vraie.

En conclusion , pour tout entier naturel non nul, on a :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

2-a) On a : $ln\left(\frac{1}{n}\right) + ln\left(\frac{2}{n}\right) + ln\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + ln\left(\frac{n}{n}\right) = ln\left(\frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \ldots \times \frac{n}{n}\right)$

$$ln\left(\frac{1}{n}\right) + ln\left(\frac{2}{n}\right) + ln\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + ln\left(\frac{n}{n}\right) = ln\left(\frac{1\times 2\times 3\times \ldots\times n}{n\times n\times n\times \ldots\times n}\right)$$

$$ln\left(\frac{1}{n}\right) + ln\left(\frac{2}{n}\right) + ln\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + ln\left(\frac{n}{n}\right) = ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

b) $\forall\, n \geq 2$, $on\ a$: $S_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 - \frac{1}{3} - ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{n}\right)^3 - \frac{1}{3} - ln\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{n}{n}\right)^3 - \frac{1}{3} - ln\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{3n^3}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{3}\right) - \left(ln\left(\frac{1}{n}\right) + ln\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + ln\left(\frac{n}{n}\right)\right)\right]$$

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{3n^3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}n\right) - ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right]$$

Donc $\quad S_n = \frac{1}{12\ ^4}[n(n+1)]^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{n} ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

c) On sait que $\quad S_n = \frac{1}{12\ ^4}[n(n+1)]^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{n} ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{12n^4}[n(n+1)]^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right]$; on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{12n^4}[n(n+1)]^2 - \frac{1}{3}\right] - \lim_{n\to+\infty} S_n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} - \frac{3}{4}$$

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -1}$, car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{12n^4}[n(n+1)]^2\right] = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^4}{12n^4} = \frac{1}{12}$

3 –a) Justification

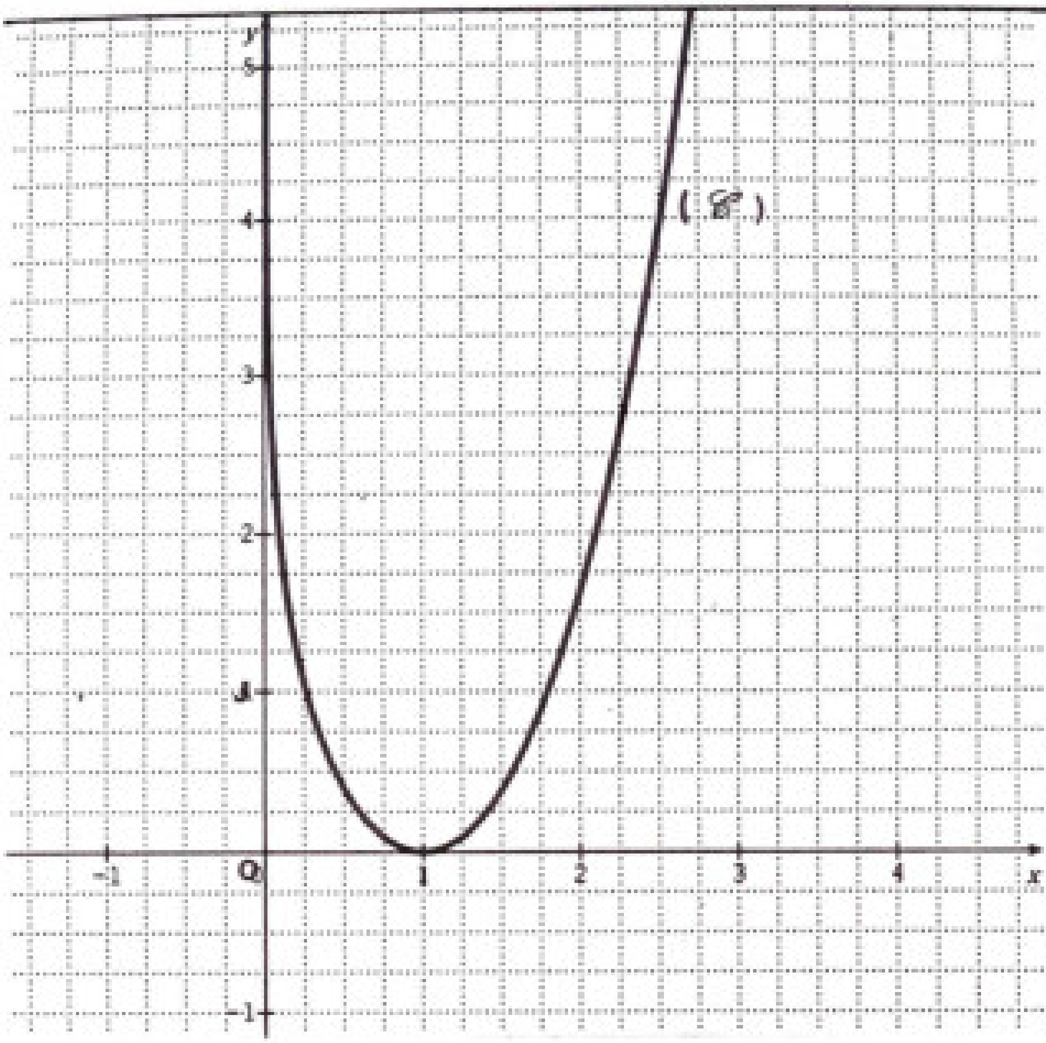
$$\ln(U_n) = \ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right) = \ln(\sqrt[n]{n!}) - \ln(n) = \frac{1}{n}\ln(n!) - \ln(n)$$

$\ln(U_n) = \frac{1}{n}[ln(n!) - n ln(n)]$; donc $\quad \ln(U_n) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

b) Calculons la limite de U_n

On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(U_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -1$, d'où on obtient :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e^{-1}$. Au total $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{e}}$


y
5
4
3
2
1
O
−1
1
2
3
4
x
−1
(𝒞)

CORRECTION DU SUJET 6 : BAC C 2011

EXERCICE 1

1- Calculons les coordonnées $(x' ; y')$ de M' en fonction des coordonnées $(x ; y)$ de M.

On a : $z' = z^2 - 4z \Leftrightarrow x'+iy' = (x+iy)^2 - 4(x+iy)$

$$\Leftrightarrow x'+iy' = x^2 + 2xyi - y^2 - 4x - 4iy$$

$$\Leftrightarrow x'+iy' = (x^2 - y^2 - 4x) + (2xy - 4y)i$$

Donc $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 4x \\ y' = 2xy - 4y \end{cases}$

2- a) Démontrons que l'ensemble (H) des points M du plan est une hyperbole.

$z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x' = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 4x = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - y^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Donc l'ensemble (H) est une hyperbole d'équation : $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

b) Dans le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$,

- les coordonnées du centre $\Omega(2 ; 0)$ avec a = 2 ;
- les sommets de l'hyperbole sont : A(0 ; 0) et A'(4 ; 0) ;
- les asymptotes de (H) ont pour équations (D) : $y = x - 2$ et (D') : $y = -x + 2$

c) Construction de (H). (voir courbe)

3- Déterminons les points M du plan tels que OMM'P soit un parallélogramme.

OMM'P est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PM'} \Leftrightarrow z - z_0 = z' - z_P$

$$\Leftrightarrow z - 0 = z^2 - 4z + \frac{5}{2} + 2i \Leftrightarrow z = z^2 - 4z + \frac{5}{2} + 2i$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 5z + \frac{5}{2} + 2i = 0$$

Equation du second degré d'où on a : $\Delta = 5^2 - 4\left(\frac{5}{2} + 2i\right) \Leftrightarrow \Delta = 15 - 8i$

Les racines carrées de Δ sont : $\begin{cases} x^2 + y^2 = |15 - 8i| \\ x^2 - y^2 = 15 \\ 2xy = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - y^2 = 15 \\ 2xy = -8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 32 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 1 \\ xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Donc les racines carrées de Δ sont : $4 - i$ et $-4 + i$.

Les solutions de l'équation sont :

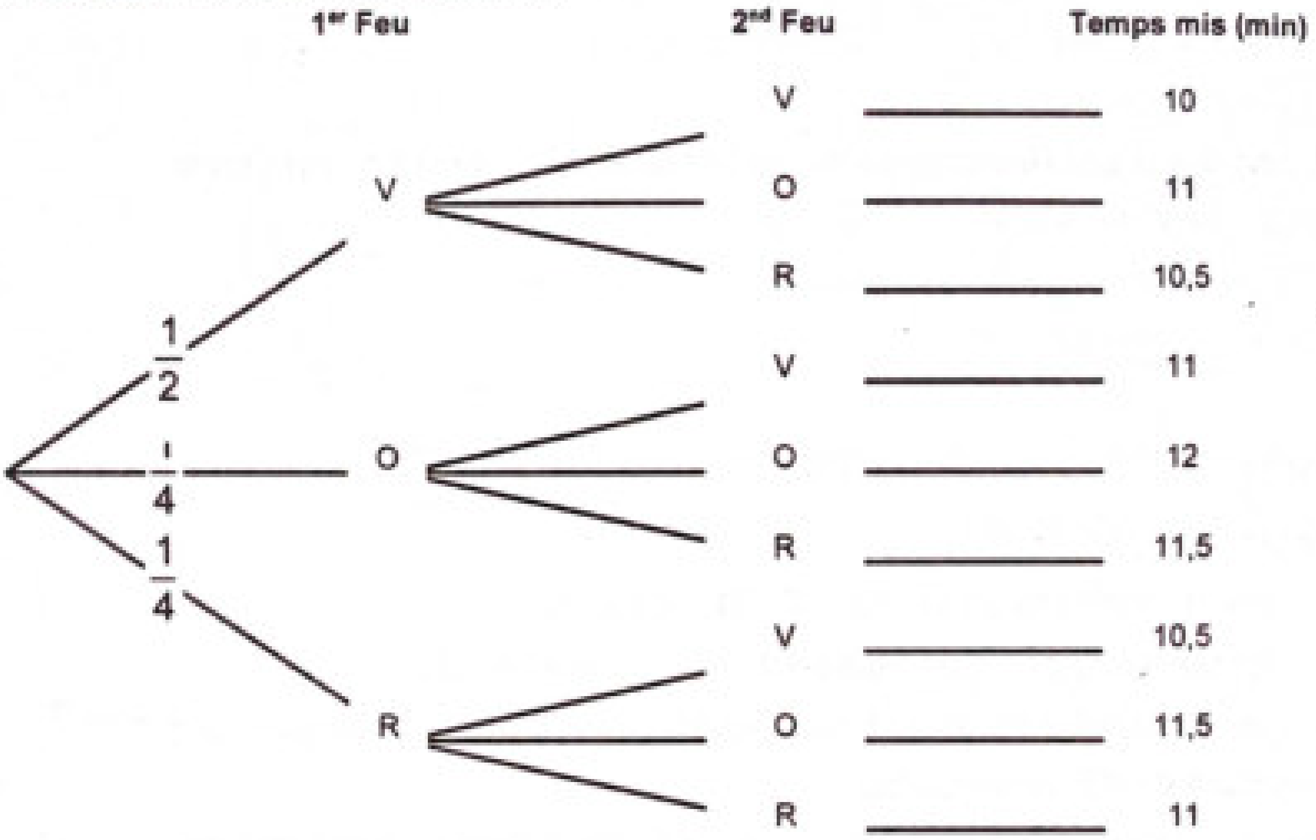
$z_1 = \frac{5-(4-i)}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et $z_2 = \frac{5+(4-i)}{2} = \frac{9-i}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}i$

Donc les points M ont pour affixes : $M\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ et $M\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

EXERCICE 2

1- a) Justifions que l'ensemble des valeurs prises par X est : {10 ; 10,5 ; 11 ; 11,5 ; 12}.

Utilisons un arbre de choix pour justifier



Donc l'ensemble des variables aléatoires est : $X(\Omega) = \{10 ; 10,5 ; 11 ; 11,5 ; 12\}$.

b) Justifions que $P(X = 11) = \frac{5}{16}$.

La probabilité d'avoir X = 11 est : $P(X = 11) = P_V P_O + P_O P_V + P_R P_R$

Avec : P_V = probabilité d'être vert ;

P_O = probabilité d'être orange ;

P_R = probabilité d'être rouge ;

$$P(X = 11) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(X = 11) = \frac{5}{16}$$

c) Déterminons la loi de probabilité de X.

$P(X = 10) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\qquad P(X = 10,5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$P(X = 11) = \frac{5}{16}$ $\qquad P(X = 11,5) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ $\qquad P(X = 12) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

Donc la loi de probabilité de X est :

X	10	10,5	11	11,5	12	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

2- Calculons l'espérance mathématique de X. Interpréter ce résultat.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = 10 \times \frac{1}{4} + 10{,}5 \times \frac{1}{4} + 11 \times \frac{5}{16} + 11{,}5 \times \frac{1}{8} + 12 \times \frac{1}{16}$$

$$E(X) = \frac{43}{4} = 10{,}75$$

Interprétation :

Le temps moyen (ou la durée moyenne) mis par le livreur est de 10,75 mn ou 10 mn 45s. Il est donc en retard.

3- Le livreur part à 19 h 49 min de la boulangerie.

a) Calculons la probabilité qu'il arrive à 20 heures précises chez le client.

Le livreur part à 19 h 49 min de la boulangerie et arrive à 20 heures précises chez le client ; donc le temps mis est de 11 min ; d'où la probabilité cherchée est $P(X = 11)$ donc $P(X = 11) = \frac{5}{16}$

b) Calculons la probabilité qu'il arrive en retard chez le client.

Pour qu'il arrive en retard chez le client, le temps mis est 11,5 min ou 12 min, donc la probabilité est $P(X > 11)$

$$P(X > 11) = P(X = 11{,}5) + P(X = 12) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \qquad P(X > 11) = \frac{3}{16}$$

4-. *Pour cette question, on donnera l'arrondi d'ordre 3 de chaque résultat.*

- **a) Probabilité pour que le pain soit livré exactement trois fois à 20 heures précises.**

Nous sommes en présence d'un schéma de Bernoulli :

- La probabilité qu'il livre le pain à 20 h est $p = \frac{5}{16}$;
- La probabilité qu'il ne livre pas le pain à 20 h est $q = 1 - p = \frac{11}{16}$;

Le livreur répète cette expérience 7 fois : c'est une loi binomiale.

La probabilité pour que le pain soit livré exactement trois fois est :

$$P(X = 3) = C_7^3 (p)^3 (q)^4 = C_7^3 \left(\frac{5}{16}\right)^3 \left(\frac{11}{16}\right)^4 \qquad P(X = 3) = 35 \times \left(\frac{125}{4096}\right) \times \left(\frac{14641}{65536}\right)$$

$P(X = 3) \approx 0{,}239$

b) Probabilité pour que le pain soit livré au moins une fois à 20 heures précises.

La probabilité de ne pas livré le pain à 20 h est :

$$P(X=0) = C_7^0 (p)^0 (q)^7 = C_7^0 \left(\frac{5}{16}\right)^0 \left(\frac{11}{16}\right)^7 \qquad P(X=0) = \left(\frac{11}{16}\right)^7$$

Donc la probabilité pour que le pain soit livré au moins une fois à 20 heures précises au cours d'une semaine est :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{11}{16}\right)^7 \qquad P(X \geq 1) \approx 0{,}927$$

PROBLEME

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

1- Etudions le sens de variations de h.

$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = x + e^{\frac{x}{2}}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 1 + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2- Calculons les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(x + e^{\frac{x}{2}}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x + \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{2}} = -\infty$

  Car $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x + e^{\frac{x}{2}}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$

  Car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$

3- a) Démontrons que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α

h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; on a : $0 \in h(\mathbb{R})$

Donc l'équation h(x) = 0 admet une solution $\alpha \in \mathbb{R}$. On a aussi :

$h(-0{,}71) = -0{,}71 + e^{\frac{-0{,}71}{2}} = -0{,}0088$

$h(-0{,}70) + e^{\frac{-0{,}70}{2}} = 0{,}046$

D'où $h(-0,70)\times h(-0,71)<0$ donc $-0,71<\alpha<-0,70$.

b) Déduisons que $\forall x\in]-\infty;\alpha[, h(x)<0$

$\forall x\in]-\infty;\alpha[$ h est strictement croissante d'où on a : $x<\alpha \Rightarrow h(x)<h(\alpha)$

Or $h(\alpha)=0$ d'où $h(x)<0$ donc $\forall x\in]-\infty;\alpha[, h(x)<0$

Déduisons que $\forall x\in]\alpha;+\infty[, h(x)>0.$

$\forall x\in]\alpha;+\infty[$ h est strictement croissante d'où on a : $x>\alpha \Rightarrow h(x)>h(\alpha)$

Or $h(\alpha)=0$ d'où $h(x)>0$ donc $\forall x\in]\alpha;+\infty[, h(x)>0.$

En conclusion : $\forall x\in]-\infty;\alpha[, h(x)<0$

$\forall x\in]\alpha;+\infty[, h(x)>0.$

<u>Partie B</u> : Etude de la fonction f_1.

Pour tout nombre réel x : $f_1(x)=(2x+4)e^{-\frac{x}{2}}-x$.

1- a) Démontrons que $f_1(\alpha)=-2-\alpha-\dfrac{4}{\alpha}$.

$f_1(x)=(2x+4)e^{-\frac{x}{2}}-x \Rightarrow f_1(\alpha)=(2\alpha+4)e^{-\frac{\alpha}{2}}-\alpha$

Or $h(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha+e^{\frac{\alpha}{2}}=0 \Rightarrow e^{\frac{\alpha}{2}}=-\alpha$

D'où $f_1(\alpha)=(2\alpha+4)e^{-\frac{\alpha}{2}}-\alpha$

$f_1(\alpha)=\dfrac{2\alpha+4}{e^{\frac{\alpha}{2}}}-\alpha$ $\qquad f_1(\alpha)=\dfrac{2\alpha+4}{-\alpha}-\alpha$

$f_1(\alpha)=-2-\dfrac{4}{\alpha}-\alpha$ Donc $\boxed{f_1(\alpha)=-2-\alpha-\dfrac{4}{\alpha}}$

b) Déduisons un encadrement de $f_1(\alpha)$ d'amplitude 0,1.

On a : $-0,71<\alpha<-0,70$ et $-0,71<\alpha<-0,70$

$-\dfrac{1}{0,70}<\dfrac{1}{\alpha}<-\dfrac{1}{0,71}$ et $0,70<-\alpha<0,71$

$\dfrac{1}{0,71}<-\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{0,70}$ et $-2+0,70<-2-\alpha<-2-0,71$

$\boxed{\dfrac{4}{0,71}<-\dfrac{4}{\alpha}<\dfrac{4}{0,70}}$ ① et $\boxed{-1,30<-2-\alpha<-1,29}$ ②

Les relations ① et ② donnent :

$-1,30+\dfrac{4}{0,71}<-2-\alpha-\dfrac{4}{\alpha}<-1,29+\dfrac{4}{0,70}$ $\qquad$ $4,33<-2-\alpha-\dfrac{4}{\alpha}<4,42$

Donc on a : $4,3<f_1(\alpha)<4,4$

2 -a) Pour tout réel x, calculons $f_1'(x)$ et démontrons que $f_1'(x)=-h(x)e^{-\frac{x}{2}}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f_1(x)=(2x+4)e^{-\frac{x}{2}}-x$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f_1'(x)=2e^{-\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{2}(2x+4)e^{-\frac{x}{2}}-1$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f_1'(x)=2e^{-\frac{x}{2}}-(x+2)e^{-\frac{x}{2}}-1$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f_1'(x)=(2-x-2)e^{-\frac{x}{2}}-1$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f_1'(x)=-xe^{-\frac{x}{2}}-1$ $\qquad$ On a : $f_1'(x)=-xe^{-\frac{x}{2}}-1$

$f_1'(x)=-\dfrac{x}{e^{\frac{x}{2}}}-1$ $\qquad$ $f_1'(x)=\dfrac{-x-e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}$ $\qquad$ $f_1'(x)=\dfrac{-\left(x-e^{\frac{x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}}}$

$f_1'(x)=\dfrac{-h(x)}{e^{\frac{x}{2}}}$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ $f_1'(x)=-h(x)e^{-\frac{x}{2}}$

b) Déduisons les variations de f_1.

$\forall x\in\mathbb{R},\ e^{-\frac{x}{2}}>0$ donc $f_1'(x)$ est du signe de $-h(x)$

D'où : $\forall x\in\left]-\infty;\alpha\right[,\ f_1'(x)>0$ donc f_1 est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha[$

$\forall x\in\left]\alpha;+\infty\right[,\ f_1'(x)<0$. donc f_1 est strictement décroissante sur $]\alpha;+\infty[$

3-a) Calculons la limite quand x tend vers $-\infty$ de $f_1(x)$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left((2x+4)e^{-\frac{x}{2}}-x\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\dfrac{2x+4}{x}e^{-\frac{x}{2}}-1\right)$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left[\left(2+\dfrac{4}{x}\right)e^{-\frac{x}{2}}-1\right]$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f_1(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(2+\dfrac{4}{x}\right)e^{-\frac{x}{2}}-1\right]=+\infty$

Calculons la limite quand x tend vers $-\infty$ de $\dfrac{f_1(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f_1(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(2+\dfrac{4}{x}\right)e^{-\frac{x}{2}}-1\right]=+\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{4}{x}\right)e^{-\frac{x}{2}}=+\infty$

Interprétons graphiquement ces résultats.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f_1(x)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f_1(x)}{x}=+\infty$

Donc la courbe $(\mathscr{C}_1)$ admet une branche parabolique de direction (OJ)

b) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left((2x+4)e^{-\frac{x}{2}} - x\right)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2xe^{-\frac{x}{2}} + 4e^{-\frac{x}{2}} - x\right)$

Posons $X = -x$. Quand $x \longrightarrow +\infty$, $X \longrightarrow -\infty$

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{X\to-\infty}\left(-2Xe^{\frac{X}{2}} + 4e^{\frac{X}{2}} + X\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{X\to-\infty}\left(-2Xe^{\frac{X}{2}}\right) = 0$; $\lim\limits_{X\to-\infty} 4e^{\frac{X}{2}} = 0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} X = -\infty$

c) Démontrons que (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_1)$ en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f_1(x) - y] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left((2x+4)e^{-\frac{x}{2}} - x + x\right)$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f_1(x) - y] = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x+4)e^{-\frac{x}{2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f_1(x) - y] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2xe^{-\frac{x}{2}} + 4e^{-\frac{x}{2}}\right]$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}[f_1(x) - y] = 0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} 2xe^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{X\to-\infty} -2Xe^{\frac{X}{2}} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 4e^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{X\to-\infty} 4e^{\frac{X}{2}} = 0$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f_1(x) - y] = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_1)$ en $+\infty$

4- a) Dressons le tableau de variation de f_1.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f_1'(x)$		+	0	-	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_1(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

b) Construisons la droite (D) et $(\mathscr{C}_1)$ dans le plan muni du repère (O, I, J). *voir courbe*

5-a) A l'aide d'une intégration par parties, calculons pour tout nombre réel x : $I(x)$

$$I(x) = \int_0^x (2t+4)e^{\frac{-t}{2}}\,dt$$

Posons $\quad U = 2t + 4 \quad$ et $\quad V' = e^{\frac{-t}{2}}$

$\qquad U' = 2 \quad$ et $\quad V = -2e^{\frac{-t}{2}}$

$I(x) = \left[-2(2t+4)e^{\frac{-t}{2}}\right]_0^x - \int_0^x 2\left(-2e^{\frac{-t}{2}}\right)dt$ $\qquad$ $I(x) = \left[(-4t-8)e^{\frac{-t}{2}}\right]_0^x + \int_0^x 4e^{\frac{-t}{2}}\,dt$

$$I(x)=\left[(-4t-8)e^{\frac{-t}{2}}\right]_0^x+\left[-8e^{\frac{-t}{2}}\right]_0^x \quad I(x)=(-4x-8)e^{\frac{-x}{2}}-(-4\times0-8)e^0+\left(-8e^{\frac{-x}{2}}+8e^0\right)$$

$$I(x)=(-4x-16)e^{\frac{-x}{2}}+16 \Rightarrow I(x)=16-(4x+16)e^{\frac{-x}{2}}$$

b) Déduisons en cm² l'aire $\mathcal{A}_1$.

$$\mathcal{A}_1=\int_0^2(f_1(x)-y)dx=\int_0^2(2x+4)e^{\frac{-x}{2}}dx$$

$\mathcal{A}_1=I(2)\,u.a$ $\qquad \mathcal{A}_1=4\times I(2)\ \text{cm}^2$ $\qquad \mathcal{A}_1=4\left[16-(4\times2+16)e^{-1}\right]\ \text{cm}^2$

$$\mathcal{A}_1=\left[64-96e^{-1}\right]\ \text{cm}^2 \Rightarrow \mathcal{A}_1=\left[64-\frac{96}{e}\right]\ \text{cm}^2$$

Partie C : Etude de la fonction f_k.

1- a) Démontrons que pour tout nombre réel x : $f_k'(x)=-h\left(\frac{1}{k}x\right)e^{-\frac{x}{2k}}$ s

$\forall x\in\mathbb{R},$, $f_k(x)=(2x+4k)e^{\frac{-x}{2k}}-x$

$f_k'(x)=2e^{\frac{-x}{2k}}-\frac{1}{2k}(2x+4k)e^{\frac{-x}{2k}}-1$ $\qquad f_k'(x)=2e^{\frac{-x}{2k}}-\left(\frac{x}{k}+2\right)e^{\frac{-x}{2k}}-1$

$f_k'(x)=\left(2-\frac{x}{k}-2\right)e^{\frac{-x}{2k}}-1$ $\qquad f_k'(x)=-\frac{x}{k}e^{\frac{-x}{2k}}-1$ $\qquad f_k'(x)=\dfrac{-\frac{x}{k}}{e^{\frac{x}{2k}}}-1$

$$f_k'(x)=\frac{-\frac{x}{k}-e^{\frac{x}{2k}}}{e^{\frac{x}{2k}}} \Rightarrow f_k'(x)=\frac{-\left(\frac{x}{k}+e^{\frac{x}{2k}}\right)}{e^{\frac{x}{2k}}}$$

Or $h(x)=x+e^{\frac{x}{2}}$ d'où $h\left(\frac{x}{k}\right)=\frac{x}{k}+e^{\frac{x}{2k}}$

Donc $f_k'(x)=\dfrac{-h\left(\frac{x}{k}\right)}{e^{\frac{x}{2k}}}=-h\left(\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{2k}} \Leftrightarrow f_k'(x)=-h\left(\frac{1}{k}x\right)e^{-\frac{x}{2k}}$

b) En utilisant la partie A, étudions les variations de f_k suivant le signe de k.

On a :$\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-\frac{x}{2k}}>0$ donc $f_k'(x)$ est du signe de $-h\left(\frac{x}{k}\right)$

Pour $k>0$, à partir de la partie A du problème, on a :

- sur $]-\infty;k\alpha[$, $-h\left(\frac{x}{k}\right)>0$ d'où $f_k'(x)>0$ donc f_k est strictement croissante ;
- sur $]k\alpha;+\infty[$, $-h\left(\frac{x}{k}\right)<0$ d'où $f_k'(x)<0$ donc f_k est strictement décroissante ;

Pour $k < 0$,

- sur $]-\infty\,;k\alpha[$, $-h\left(\dfrac{x}{k}\right) < 0$ d'où $f_k'(x) < 0$ donc f_k est strictement décroissante sur $]-\infty; k\alpha\,[$;
- sur $]k\alpha\,;+\infty[$, $-h\left(\dfrac{x}{k}\right) > 0$ d'où $f_k'(x) > 0$ donc f_k est strictement croissante sur $]k\alpha;\ +\infty[$.

c) Vérifions que $f_k(k\alpha) = kf_1(\alpha)$.

On a : $f_1(\alpha) = -2-\alpha-\dfrac{4}{\alpha}$ d'où $\boxed{kf_1(\alpha) = k\left(-2-\alpha-\dfrac{4}{\alpha}\right)}$ ①

On a : $f_k(k\alpha) = (2k\alpha+4k)e^{\frac{-\alpha}{2}} - k\alpha$ or $h(\alpha) = 0 \Rightarrow e^{\frac{\alpha}{2}} = -\alpha$ d'où $f_k(k\alpha) = \dfrac{2k\alpha+4k}{e^{\frac{\alpha}{2}}} - k\alpha$

$$f_k(k\alpha) = \frac{2k\alpha+4k}{-\alpha} - k\alpha$$

$$f_k(k\alpha) = -2k - \frac{4k}{\alpha} - k\alpha$$

$$f_k(k\alpha) = k\left(-2-\frac{4}{\alpha}-\alpha\right)$$

$$\boxed{f_k(k\alpha) = k\left(-2-\alpha-\frac{4}{\alpha}\right)} \quad ②$$

Les relations ① et ② donnent $\boxed{f_k(k\alpha) = kf_1(\alpha)}$

d) Dressons le tableau de variation de f_k suivant le signe de k.

Pour $k > 0$, on a :

x	$-\infty$		$k\alpha$		$+\infty$
$f'_k(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$		$\nearrow$	$f_k(k\alpha)$	$\searrow$	

Pour $k < 0$, on a :

x	$-\infty$		$k\alpha$		$+\infty$
$f'_k(x)$		$-$	0	$+$	
$f_k(x)$		$\searrow$	$f_k(k\alpha)$	$\nearrow$	

2- a) Démontrons que $(\mathcal{C}_k) = \mathcal{H}(\mathcal{C}_1)$.

<u>1ère méthode</u>

Exprimons f_k en fonction de f_1

On a : $f_1(x) = (2x+4)e^{\frac{-x}{2}} - x$ D'où $f_1\left(\frac{x}{k}\right) = \left(\frac{2x}{k}+4\right)e^{\frac{-x}{2k}} - \frac{x}{k}$

$$f_1\left(\frac{x}{k}\right) = \left(\frac{2x+4k}{k}\right)e^{\frac{-x}{2k}} - \frac{x}{k}$$

$$f_1\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{1}{k}\left[(2x+4k)e^{\frac{-x}{2k}} - x\right]$$ Or $f_k(x) = (2x+4k)e^{\frac{-x}{2k}} - x$

Donc $f_1\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{1}{k}f_k(x) \Rightarrow \boxed{f_k(x) = kf_1\left(\frac{x}{k}\right)}$

En conclusion, $(\mathcal{C}_k)$ est l'image de $(\mathcal{C}_1)$ par l'homothétie de centre O et de rapport k.

<u>2ème méthode</u>

$$f_k(kx) = (2kx+4k)e^{\frac{-x}{2}} - kx$$

$$f_k(kx) = k\left((2x+4)e^{\frac{-x}{2}} - x\right) \Rightarrow \boxed{f_k(kx) = kf_1(x)}$$

Donc $(\mathcal{C}_k)$ est l'image de $(\mathcal{C}_1)$ par l'homothétie de centre O et de rapport k.

b) Déduisons la construction de $(\mathcal{C}_{\frac{1}{2}})$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_1)$.

$(\mathcal{C}_{\frac{1}{2}})$ est l'image de $(\mathcal{C}_1)$ par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$. *Voir courbe*

3 -Déterminons en cm² $\mathcal{A}_k$ en fonction de k.

$$\mathcal{A}_k = \int_0^{2k}(f_k(x) - y)dx = \int_0^{2k}(2x+4k)e^{\frac{-x}{2k}}dx$$

Posons : U = 2x + 4k et $V' = e^{\frac{-x}{2k}}$

U' = 2 et $V = -2ke^{\frac{-x}{2k}}$

D'où $\mathcal{A}_k = \left[-2k(2x+4k)e^{\frac{-x}{2k}}\right]_0^{2k} + \int_0^{2k} 4ke^{\frac{-x}{2k}}\,dx$

$$\mathcal{A}_k = \left[(-4kx-8k^2)e^{\frac{-x}{2k}}\right]_0^{2k} + \left[-8k^2e^{\frac{-x}{2k}}\right]_0^{2k}$$

$$\mathcal{A}_k = \left[(-4kx-8k^2)e^{\frac{-x}{2k}}\right]_0^{2k} + \left[-8k^2e^{\frac{-x}{2k}}\right]_0^{2k}$$

$$\mathcal{A}_k = (-8k^2-8k^2)e^{-1} - (-8k^2) + (-8k^2e^{-1} + 8k^2)$$

$$\mathcal{A}_k = (-24k^2e^{-1}+16k^2)\,u.a$$

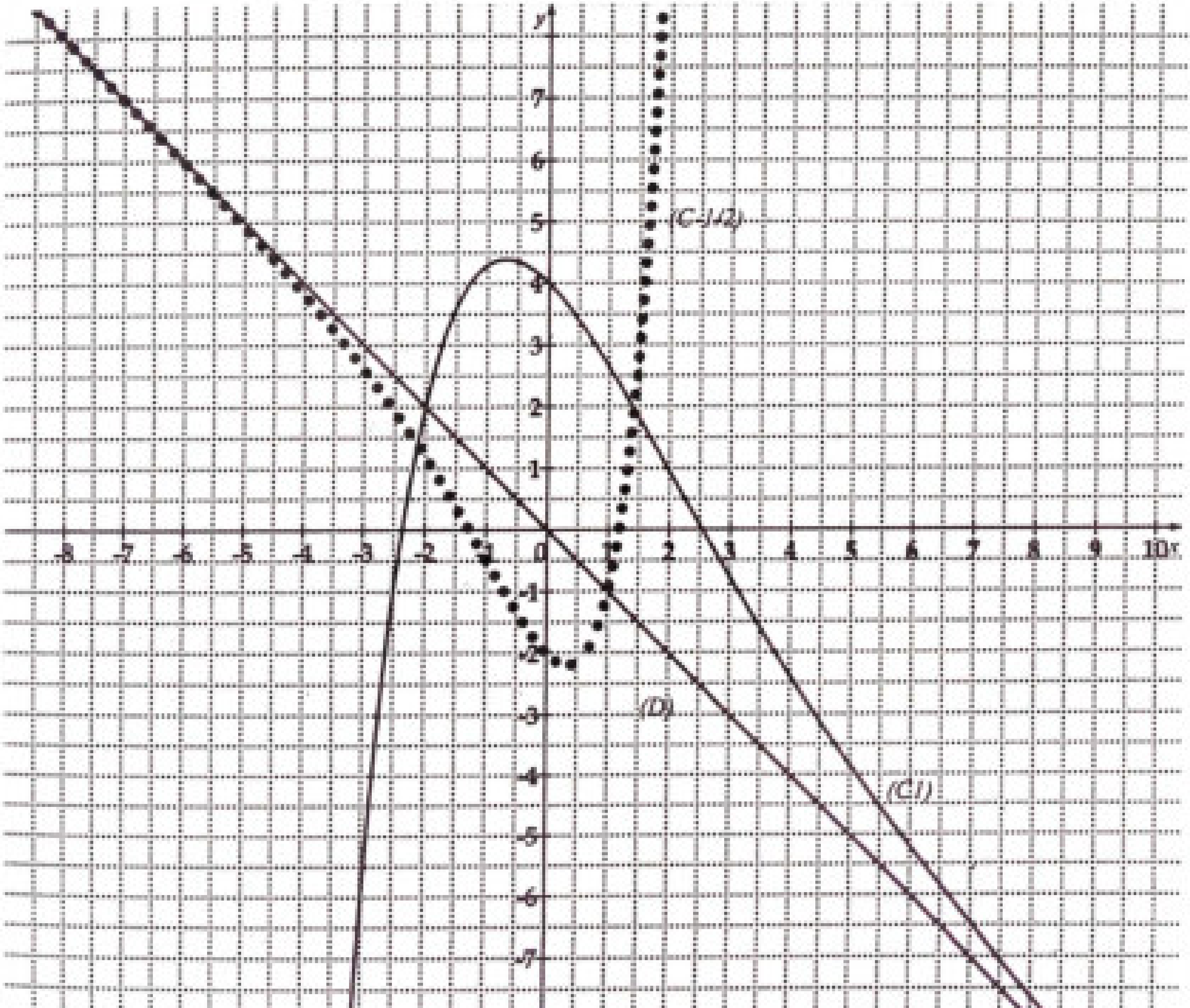
$$\mathcal{A}_k = \left(16k^2 - \frac{24k^2}{e}\right)u.a$$

$$\mathcal{A}_k = 4\times\left(16k^2 - \frac{24k^2}{e}\right)cm^2$$

$$\mathcal{A}_k = \left(64k^2 - \frac{96k^2}{e}\right)cm^2$$

$$\mathcal{A}_k = 4k^2\mathrm{I}(2) \text{ avec } \mathrm{I}(2) = 16 - \frac{24}{e}$$

CONSTRUCTION DE LA COURBE



CORRECTION DU SUJET 7 : BAC C 2010

EXERCICE 1

1. Justifions que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$.

On a : $t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t$ Posons : $t = e^{-x}$

$$e^{-x} - \frac{(e^{-x})^2}{2} < \ln(1+e^{-x}) < e^{-x} \Rightarrow e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < \ln(1+e^{-x}) < e^{-x}$$

Or $f(x) = \ln(1+e^{-x})$ donc $e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$

2. Démontrons que la suite (U_n) est strictement croissante.

$$on\ a:\ U_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right)U_n \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 + \frac{1}{e^{n+1}}$$

$$Or\ \ e^{n+1} > 0\ \ d'où\ \ \frac{U_{n+1}}{U_n} > 1 \Rightarrow U_{n+1} > U_n$$

Donc la suite (U_n) est strictement croissante.

3. Démontrons par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(U_n) = f(1) + f(2) + ... + f(n)$.

Soit la proposition (P_n): $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(U_n) = f(1) + f(2) + ... + f(n)$

- Vérifions que (P_1) est vraie.

$$on\ a:\ U_1 = 1 + \frac{1}{e} = 1 + e^{-1} \Rightarrow \ln(U_1) = \ln(1+e^{-1}) = f(1)\ \ car\ \ f(x) = \ln(1+e^{-x})$$

Donc (P_1) est vraie.

- Supposons que (P_k) est vraie c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(U_k) = f(1) + f(2) + ... + f(k)$.

Démontrons que (P_{k+1}) est vraie.

On a: $U_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right)U_n$

Si $n = k$ alors $U_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{e^{k+1}}\right)U_k$

$$\ln U_{k+1} = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{e^{k+1}}\right)U_k\right] = \ln\left(1 + \frac{1}{e^{k+1}}\right) + \ln U_k = \ln\left(1 + e^{-(k+1)}\right) + \ln U_k$$

Or $\ln(U_k) = f(1) + f(2) + ... + f(k)$

$$\text{Donc}\ \ \ln U_{k+1} = \ln\left(1 + e^{-(k+1)}\right) + f(1) + f(2) + ... + f(k) = f(k+1) + f(1) + f(2) + ... + f(k)$$

$$\ln U_{k+1} = f(1) + f(2) + ... + f(k) + f(k+1)$$

Donc $\left(P_{k+1}\right)$ est vraie.

En conclusion, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln(U_n)=f(1)+f(2)+...+f(n)$

4. On pose : $a_n=\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\dots\frac{1}{e^n}$ et $b_n=\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^4}+\dots\frac{1}{e^{2n}}$

a. Démontrons que: $a_n-\frac{1}{2}b_n<\ln(U_n)<a_n$

Soit l'encadrement : $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}-\frac{e^{-2x}}{2}<f(x)<e^{-x}$

Posons $x=n$ avec $n\geq 1$

On a: $e^{-n}-\frac{e^{-2n}}{2}<f(n)<e^{-n}$

Pour $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots,\ n$

On a:

$e^{-1}-\frac{e^{-2}}{2}<f(1)<e^{-1}$

$e^{-2}-\frac{e^{-4}}{2}<f(2)<e^{-2}$

$e^{-3}-\frac{e^{-6}}{2}<f(3)<e^{-3}$

$e^{-4}-\frac{e^{-8}}{2}<f(4)<e^{-4}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$

$e^{-n}-\frac{e^{-2n}}{2}<f(n)<e^{-n}$

La somme membre à membre donne:

$\left[e^{-1}+e^{-2}+\cdots+e^{-n}\right]-\frac{1}{2}\left[e^{-2}+e^{-4}+\cdots+e^{-2n}\right]<f(1)+f(2)+...+f(n)<e^{-1}+e^{-2}+\cdots+e^{-n}$

donc $a_n-\frac{1}{2}b_n<\ln(U_n)<a_n$

b. Justifions que: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=\frac{1-e^{-n}}{e-1}$

On a : $a_n=\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\dots+\frac{1}{e^n}$

(a_n) est la somme d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme $\frac{1}{e}$.

D'où $\forall n\geq 1$ $a_n=a_1+\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{e}+\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{e}\right)}\Rightarrow a_n=\frac{1-e^{-n}}{e-1}$

c. Démontrons que la suite (U_n) est majorée.

On a : $a_n = \frac{1-e^{-n}}{e-1}$

$n \geq 1 \Leftrightarrow -n \leq -1 \Leftrightarrow e^{-n} \leq e^{-1} \Leftrightarrow -e^{-n} \geq -e^{-1} \Leftrightarrow 1 > 1-e^{-n} \geq 1-e^{-1}$

D'où $1-e^{-n} < 1$

$(1-e^{-n}) \times \frac{1}{e-1} < 1 \times \frac{1}{e-1} \Leftrightarrow \frac{1-e^{-n}}{e-1} < \frac{1}{e-1}$ Donc $a_n < \frac{1}{e-1}$

Or

$a_n - \frac{1}{2}b_n < \ln(U_n) < a_n$

$U_n < e^{a_n}$

D'où $U_n < e^{\frac{1}{e-1}}$

En conclusion, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par $e^{\frac{1}{e-1}}$

En déduisons que la suite (U_n) est convergente.

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc (U_n) est une suite convergente.

d. On note ℓ la limite de la suite (U_n).

Démontrons que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq \ln \ell \leq \frac{1}{e-1}$

On a : $b_n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \ldots + \frac{1}{e^{2n}}$

(b_n) est la somme d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{e^2}$ et de premier terme $\frac{1}{e^2}$

d'où : $b_n = b_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ avec $n \geq 1$

$$b_n = \frac{1}{e^2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{e^2}\right)^n}{1-\frac{1}{e^2}} \Leftrightarrow b_n = \frac{1-e^{-2n}}{e^2-1}$$

Or $1-e^{-2n} < 1$ D'où $b_n < \frac{1}{e^2-1}$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n) = \frac{1}{e^2-1}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n) = \frac{1}{e-1}$

Au total, $a_n - \frac{1}{2}b_n < \ln \mathrm{U_n} < a_n$

Déduisons une valeur approchée de I à 0,1 près.

$$\frac{1}{e-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^2-1}\right)\leq \ln I\leq \frac{1}{e-1}\Leftrightarrow \frac{2(e^2-1)-(e-1)}{2(e-1)(e^2-1)}\leq \ln I\leq \frac{1}{e-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2e^2-e-1}{2(e-1)(e^2-1)}\leq \ln I\leq \frac{1}{e-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(e+\frac{1}{2}\right)(e-1)}{2(e^2-1)(e-1)}\leq \ln I\leq \frac{1}{e-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2e+1}{2(e^2-1)}\leq \ln I\leq \frac{1}{e-1}$$

$\ln I=\frac{1}{e-1}\Rightarrow I=e^{\frac{1}{e-1}}$

$I\simeq e^{0,582}$

$I\simeq 1,79$

EXERCICE 2

1. Démontrons que la probabilité d'obtenir 3 chiffres identiques est $\frac{1}{36}$.

Soit $E=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ l'ensemble des éléments du dé.

Obtenir trois chiffres d'éléments de E est un 3-uplets de cet élément de E.

Donc $Card\Omega=6^3=216$.

La probabilité d'obtenir trois chiffres identiques est :

Soit A l'évènement :

$A=\{111;\ 222;\ 333;\ 444;\ 555;\ 666\}$

$$P(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$$

2. Calculons la probabilité d'obtenir 3 chiffres dont la somme est égale à 6.

Soit B l'évènement. On a :

$B=\{114;\ 141;\ 411;\ 123;\ 132;\ 213;\ 231;\ 312;\ 321;\ 222\}$

$$P(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{10}{6^3}$$

$$P(B)=\frac{5}{108}$$

3. Démontrons que la probabilité d'obtenir exactement deux chiffres identiques est $\frac{5}{12}$.

Soit C l'évènement. On a :

112 121 211 ... ...
113 131 311 ... ...
114 141 411 ... ...
115 151 511 ... ...
116 161 611 ... ...

donc $P(C)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{5\times 3\times 6}{6^3}=\frac{15}{36}$

$$P(C)=\frac{5}{12}$$

4. Le droit de participation au jeu est de 3 000 francs.

- si le joueur obtient 3 chiffres identiques, il reçoit 5 000 francs;
- s'il obtient 3 chiffres deux à deux distincts, il reçoit 3 000 francs;
- s'il obtient exactement deux chiffres identiques, il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur au cours d'une partie.

On appelle gain algébrique d'un joueur la différence entre ce qu'il reçoit et sa mise.

a. Déterminons les valeurs prises par X.

$$X=\{-3000;0;2000\}$$

b. Déterminons la loi de probabilité de X.

$$P(X=-3000)=P(C)=\frac{5}{12}$$

$$P(X=2000)=P(A)=\frac{1}{36}$$

$$P(X=0)=\frac{A_6^3}{6^3}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

Donc la probabilité de X est :

X_i	-3000	0	2000	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

c. Déterminons le gain moyen d'un joueur au cours d'une partie. Le jeu est-il équitable?

Le gain moyen au cours d'une partie est :

$$E(X)=-3000\times\frac{5}{12}+0\times\frac{20}{36}+2000\times\frac{1}{36}=-\frac{10750}{9}$$

$$E(X)=-1194,44$$

Le jeu n'est pas équitable.

PROBLÈME

PARTIE A

1. a. Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3}(-5x + 4\sqrt{x^2+15})$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-5x}{3} + \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Car $\lim_{x\to-\infty} \frac{-5x}{3} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2+15}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}\left(-5x + 4x\sqrt{1+\frac{15}{x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x\left(-5 + 4\sqrt{1+\frac{15}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \left(-5 + 4\sqrt{1+\frac{15}{x^2}}\right) = -1$

b. Démontrons que (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{3}x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

$$f(x) - y = \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2+15}\right) - \left(-\frac{1}{3}x\right) = -\frac{5x}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15} + \frac{1}{3}x$$

$$= -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15} = \frac{\left(-\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15}\right)\left(-\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15}\right)}{-\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15}}$$

$$f(x) - y = \frac{\left(-\frac{4}{3}x\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\sqrt{x^2+15}\right)^2}{-\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15}} = \frac{\frac{16}{9}x^2 - \frac{16}{9}\left(x^2+15\right)}{-\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15}} = \frac{\frac{-80}{3}}{-\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15}}$$

$$f(x) - y = \frac{80}{4x + 4\sqrt{x^2+15}} = \frac{20}{x + \sqrt{x^2+15}}$$

On a : $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty} \frac{20}{x + \sqrt{x^2+15}} = 0$

car $\lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{x^2+15} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 20 = 20$

On a : $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = 0$ donc (Δ) : $y = -\frac{1}{3}x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

c. Justifions que la courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ).

$f(x)-y=\dfrac{20}{x+\sqrt{x^2+15}}$

Pour $x\in\mathbb{R}$, $x+\sqrt{x^2+15}>0$ donc $f(x)-y>0 \Rightarrow f(x)>y$

En conclusion : $\forall x\in\mathbb{R}$, (C) est au dessus de la droite (Δ).

2. a. Calculons $f'(x)$ pour tout réel x.

$\forall x\in\mathbb{R}$. $f(x)=\frac{1}{3}\left(-5x+4\sqrt{x^2+15}\right)$

$f'(x)=\frac{1}{3}\left(-5+\dfrac{4\times 2x}{2x\sqrt{x^2+15}}\right)=\frac{1}{3}\left(-5+\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+15}}\right)$

b. Démontrons que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, puis dressons son tableau de variation. On a : $\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+15}}<5 \Leftrightarrow -5+\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+15}}<0$

D'où $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)<0$ Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

3. Déterminons les points d'intersection de la courbe (C) avec les axes (OI) et (OJ).

- Pour (C) avec (OI)

On a : $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(-5x+4\sqrt{x^2+15}\right)=0$

$\Leftrightarrow -5x+4\sqrt{x^2+15}=0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+15}=5x \Leftrightarrow 16\left(x^2+15\right)=25x^2$

$\Leftrightarrow 9x^2=240 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2=\dfrac{80}{3}$

$x=\sqrt{\dfrac{80}{3}}$ ou $x=-\sqrt{\dfrac{80}{3}}$

$x=\dfrac{4\sqrt{15}}{3}$ ou $x=-\dfrac{4\sqrt{15}}{3}$

f étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc le point d'intersection de (C) avec (OI) est le point de coordonnées: $\left(\dfrac{4\sqrt{15}}{3};0\right)$ avec $f(0)>0$. .

- Pour (C) avec (OJ).

On a : $x = 0$ d'où $f(0) = \frac{1}{3}(0 + 4\sqrt{0+15}) = \frac{4\sqrt{16}}{3}$

Donc le point d'intersection de (C) avec (OJ) est le point de coordonnées : $\left(0 ; \frac{4\sqrt{15}}{3}\right)$

4. a. Construction de (Δ), (Δ') et la courbe (C) (Voir feuille annexe)

b. Démontrons que (C') est l'image de (C) par la symétrie de centre O.

On a : $f(x)=\frac{1}{3}\left(-5x+4\sqrt{x^2+15}\right)$

$$\forall - x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{3}\left[-5(-x) + 4\sqrt{(-x)^2+15}\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[5x + 4\sqrt{x^2+15}\right] = -\frac{1}{3}\left[-5x - 4\sqrt{x^2+15}\right]$$

D'où $f(-x) = -g(x)$ Donc (C') est l'image de (C) par la symétrie de centre O.

c. Construisons la courbe (C') dans le même repère que (C). (Voir feuille annexe)

PARTIE B

1. Démontrons que $(H) = (C) \cup (C')$.

$$M(x,y) \in (C) \cup (C') \Leftrightarrow y = f(x) \text{ ou } y = g(x)$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2+15}\right)$$
$$\Leftrightarrow 3y = -5x + 4\sqrt{x^2+15} \Leftrightarrow 3y + 5x = 4\sqrt{x^2+15}$$
$$\Leftrightarrow (3y+5x)^2 = 16(x^2+15) \Leftrightarrow 9y^2 + 30xy + 25x^2 = 16x^2 + 240$$
$$\Leftrightarrow 25x^2 - 16x^2 + 9y^2 + 30xy + 240 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 10xy + 80 = 0$$

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2+15}\right) \Leftrightarrow 3y = -5x + 4\sqrt{x^2+15}$$
$$\Leftrightarrow 3y + 5x = 4\sqrt{x^2+15} \Leftrightarrow (3y+5x)^2 = 16(x^2+15)$$
$$\Leftrightarrow 9y^2 + 30xy + 25x^2 = 16x^2 + 240$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 10xy - 80 = 0$$

Donc $(H) = (C) \cup (C')$

2. Soit s la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

a. Déterminons l'écriture complexe de s.

$$z'=az+b$$

$$z'=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z+b \quad avec \quad a=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Or $Z_0=\frac{b}{1-a}\Rightarrow 0=\frac{b}{1-a}\Rightarrow b=0$

Donc l'écriture complexe de s est $z'=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z \quad \Leftrightarrow \quad z'=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z$

b. Justifions que $x'=\frac{1}{2}(x+y)$ et $y'=\frac{1}{2}(-x+y)$.

On a : $\quad z'=x'+iy' \; et \; z=x+iy$

$$z'=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)(x+iy)$$

$$z'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}yi-\frac{1}{2}ix+\frac{1}{2}y=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)+\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x\right)i$$

$$\Rightarrow x'+iy'=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)+\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x\right)i$$

Donc $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y \\ y'=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=\frac{1}{2}(x+y) \\ x'=\frac{1}{2}(-x+y) \end{cases}$

c. Déduisons que M appartient à (H) si et seulement si M' appartient à la courbe (Γ) d'équation $4x^2-y^2=20$.

On a $M(x;y)\in(H) \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2+3y^2+10xy-80=0$

Or $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}(x+y) \\ y'=\frac{1}{2}(-x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'+y'=y \\ x'-y'=x \end{cases}$

En remplaçant x et y dans (H), on a :

$3\left(x'-y'\right)^2+3\left(x'+y'\right)^2+10\left(x'-y'\right)\left(x'+y'\right)-80=0$

$3\left(x'^2-2x'y'+y'^2\right)+3\left(x'^2+2x'y'+y'^2\right)+10\left(x'^2-y'^2\right)-80=0$

$3x'^2+3y'^2+3x'^2+3y'^2+10x'^2-10y'^2-80=0$

$16x'^2-4y'^2-80=0$

$4x'^2-y'^2-20=0$

$4x'^2-y'^2=20$

Donc $M\in(H)\Leftrightarrow M'\in(\Gamma)$

3. a. Justifions que (Γ) est une hyperbole puis déterminons les coordonnées de ses foyers et de ses sommets.

On a : $4x^2-y^2=20 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{20}-\frac{y^2}{20}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$

$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$ est l'équation d'une hyperbole d'axe focal $\left(o\,,\vec{i}\right)$.

On a : $a^2=5$ et $b^2=20$

Les sommets sont : $A\left(\sqrt{5}\,;0\right)$ et $A'\left(-\sqrt{5}\,;0\right)$

Les foyers, on a : $C=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5+20}=5$ *donc* $F(5\,;0)$ *et* $F'(-5\,;0)$

b. Déterminons l'excentricité de (Γ).

$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

c. Construisons (Γ) et ses asymptotes dans le même repère que (H).

(On utilisera deux couleurs différentes pour (H) et (Γ)).

Les asymptotes de (Γ) : (Voir annexe)

$(D): y=\frac{b}{a}x \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}x=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}x \Leftrightarrow (D): y=2x$

$(D'): y=-\frac{b}{a}x \Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}x=-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}x \Leftrightarrow (D'): y=-2x$

4. Déduisons des questions précédentes que (H) est une hyperbole et précisons les foyers et les sommets.

(Γ) est l'image de *(H)* par la similitude S, donc *(H)* est l'image réciproque de (Γ) par la similitude S.

(H) est donc une hyperbole.

- Déterminons les foyers F_H, F_H' de *(H)*

$$S(H)=(\Gamma) \Rightarrow z'=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z \Rightarrow z_{F_H}'=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z_{F_H}$$

$$5=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z_{F_H} \Rightarrow z_{F_H}=\frac{5}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i} \Rightarrow z_{F_H}=\frac{10}{1-i} \Rightarrow z_{F_H}=5(1+i)$$

Donc $F_H\left|5;5\right|$ et $F'_H\left|-5;-5\right|$

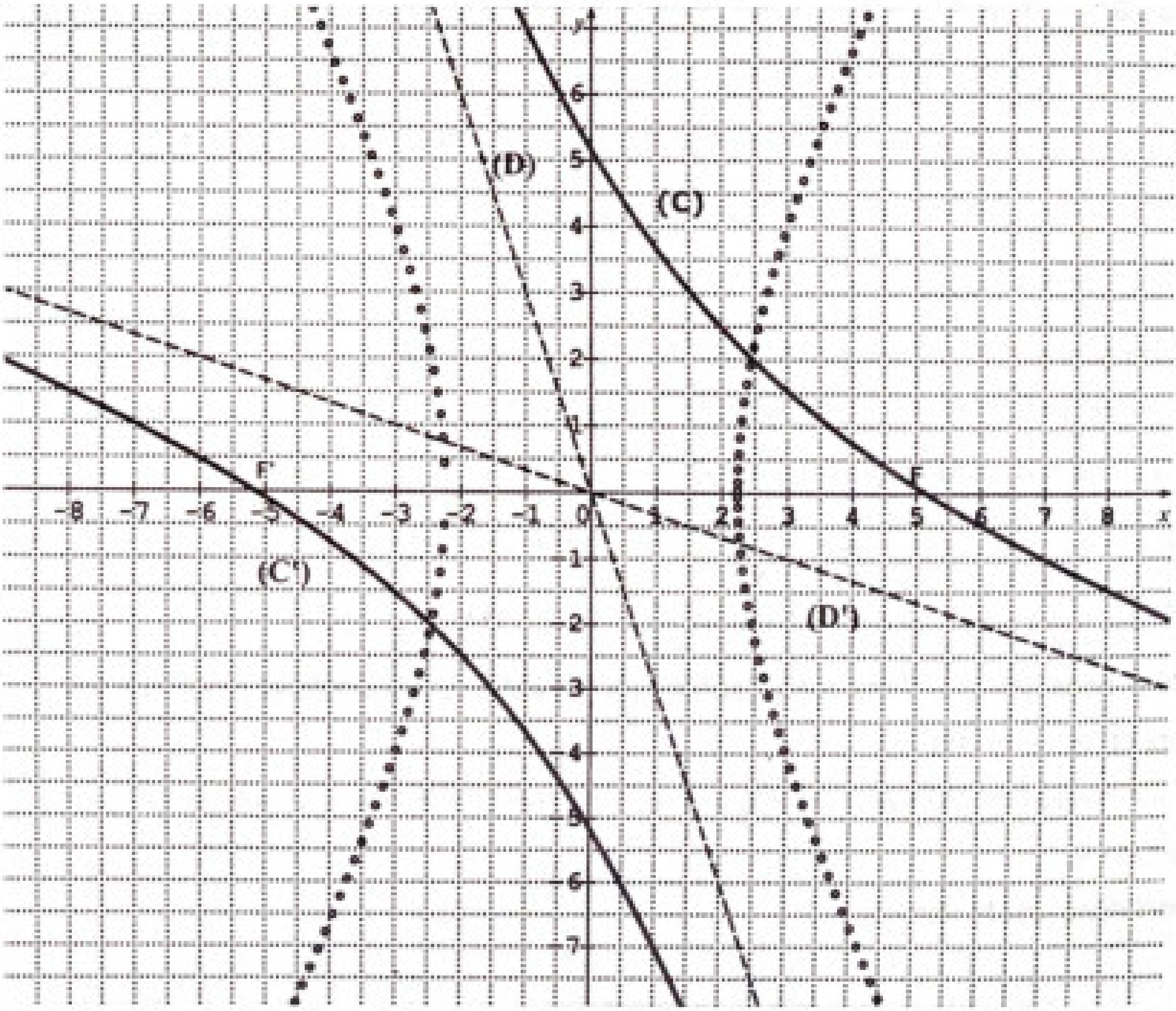
- Déterminons les sommets A_H et A'_H

$$z'_{A_H}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z_{A_H} \Leftrightarrow \sqrt{5}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z_{A_H} \Leftrightarrow z_{A_H}=\frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i} \Leftrightarrow z_{A_H}=\frac{2\sqrt{5}}{1-i}$$

$$\Leftrightarrow z_{A_H}=\sqrt{5}(1+i) \Leftrightarrow z_{A_H}=\sqrt{5}+i\sqrt{5}$$

Donc $A_H\left|\sqrt{5};\sqrt{5}\right|$ d'où $A'_H\left|-\sqrt{5};-\sqrt{5}\right|$

FEUILLE ANNEXE



CORRECTION DU SUJET 8 : BAC C 2009

EXERCICE 1

PARTIE A

1. Exprimons a^6, b^6 et c^6 sous forme algébrique.

$$a=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow a=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\Leftrightarrow a^6=\left(\sqrt{2}\right)^6e^{i\frac{6\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow a^6=8e^{i\pi}\Leftrightarrow a^6=-8i$$

$$b=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow b=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow b^6=\left(\sqrt{2}\right)^6e^{i\frac{6\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow b^6=8e^{i\pi}\Leftrightarrow b^6=-8i$$

$$c=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow c=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow c^6=\left(\sqrt{2}\right)^6e^{i\frac{6\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow c^6=8e^{i2\pi}\Leftrightarrow c^6=8e^{i0}\Leftrightarrow c^6=8$$

2. En déduisons une solution de l'équation (E) : $z\in\mathbb{C},\ z^6=-8i$

$z^6=-8i\ \Rightarrow\ z^6=b^6\ \Rightarrow\ z=b$ Donc b est une solution de (E).

3. Soit $j=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$

a. Vérifions que $j^3=1$

$$j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow j=e^{i\frac{2\pi}{3}}\Leftrightarrow j^3=e^{i0}\Leftrightarrow j^3=1$$

b. Démontrons que jb et j^2b sont aussi des solutions de (E).

On a : $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $b=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

D'où $jb=\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{3}}\times e^{i\frac{2\pi}{4}}\ \Leftrightarrow\ jb=\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$

Vérifions que jb est une solution de (E).

On a : $\left(jb\right)^6=\left(\sqrt{2}\right)^6e^{i\frac{11\pi}{12}\times 6}\ \Rightarrow\ \left(jb\right)^6=8e^{i\frac{\pi}{2}}=8(-i)=-8i$

Donc jb est une solution de (E)

- On a : $j^2b=\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}\ \Rightarrow\ j^2b=\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

Vérifions que j^2b est solutions de (E)

On a : $\left(j^2b\right)^6=\left(\sqrt{2}\right)^6e^{-i\frac{5\pi}{12}\times 6}$

$$\left(j^2b\right)^6=8e^{-i\frac{5\pi}{2}}=8e^{-i\frac{\pi}{2}}=8(-i)\ \Rightarrow\ \left(j^2b\right)^6=-8i$$

Donc j^2b est une solution de (E).

c. En déduisons toutes les solutions de (E) puis écrivons les sous forme algébrique. b ; jb ; j^2b ; $-b$; $-jb$ et $-j^2b$

- Forme algébrique des solutions

$$b=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow b=1+i \Leftrightarrow -b=-1-i$$

$$jb=\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{2\pi}{3}}=(1+i)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$jb=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow -jb=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

$$j^2b=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2(1+i)=-\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Leftrightarrow -j^2b=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

PARTIE B

1. Résolvons dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x\equiv 0[6] \\ x\equiv 3[4] \end{cases}$

Il existe deux entiers u et v tel que $x=6u+0$ et $x=4v+3$

D'où on obtient : $6u=4v+3 \Rightarrow 6u-4v=3$ est une équation du type $ax+by=c$.

- Déterminons $PGCD(6;4)$

On a : $6=2\times 3$ et $4=2^2$ donc $PGCD(6;4)=2$

3 n'est pas un multiple de 2 donc $S=\varnothing$

2. Déterminons tous les entiers naturels n vérifiant à la fois les deux propositions suivantes :

- a^n est un nombre réel
- b^n est un imaginaire pur.

$\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $a_n=\left(\sqrt{2}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$ et $b_n=\left(\sqrt{2}\right)^n e^{in\frac{\pi}{4}}$

$$\begin{cases} a^n\in\mathbb{R} \\ a^n\in i\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\equiv 0[6] \\ n\equiv 2[4] \end{cases}$$

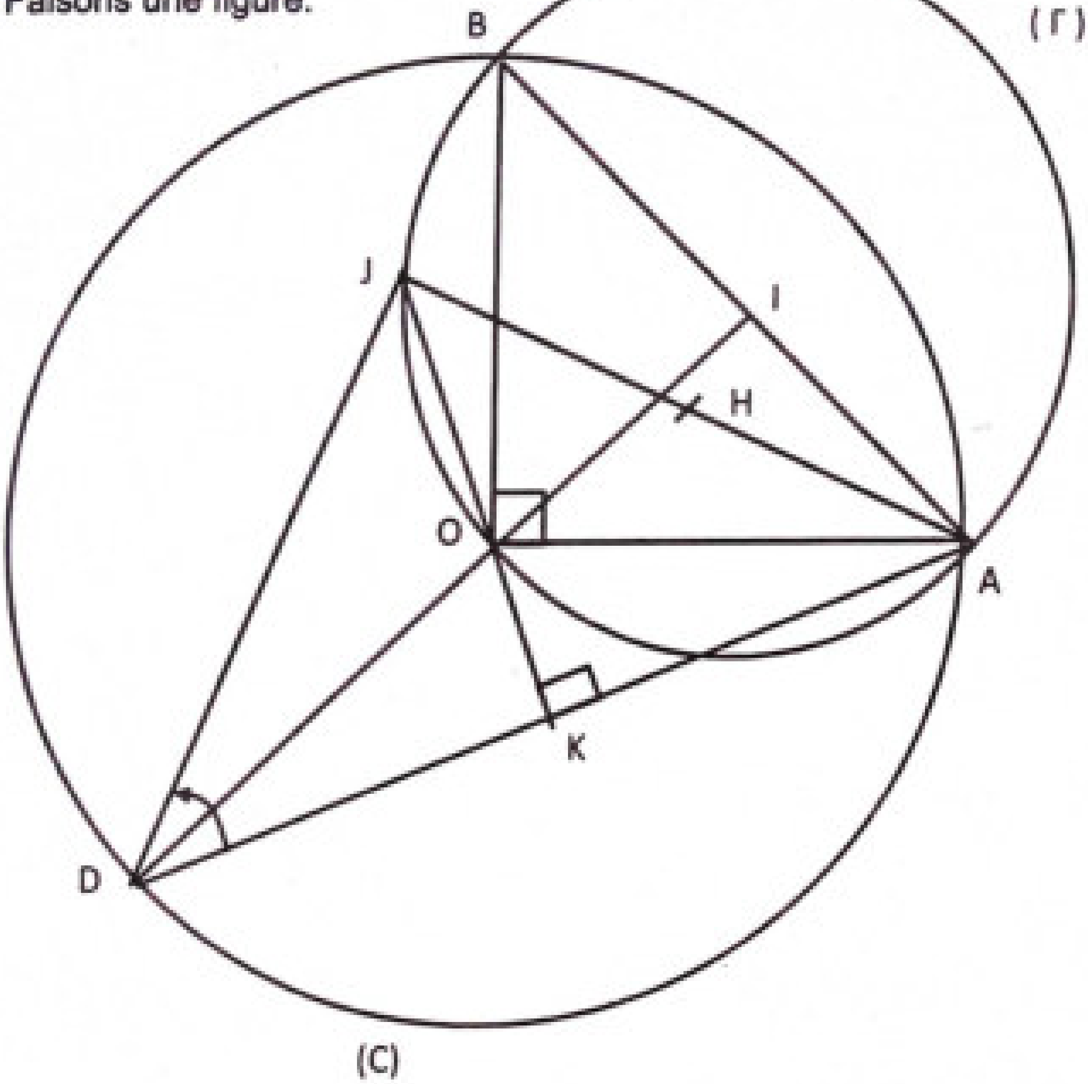
$6u-4v=2$ avec $u\in\mathbb{Z}$ et $v\in\mathbb{Z}$

Or $PGCD(6;4)=2$ est un multiple de 2 donc l'équation admet une solution

$S=\{12k+6;\ k\in\mathbb{N}\}$

EXERCICE 2

1. a. Faisons une figure.



b. Justifions que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

(C) est le cercle de centre O et de rayon OA. $D \in (C)$

L'angle ($\widehat{BDA}$) est un angle inscrit à (C) et l'angle($\widehat{BOA}$) est un angle au centre.
Ils interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$. Donc on a :

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}}\right) = \frac{1}{2}\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$

Donc $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}}\right) = \frac{\pi}{4}$

c. Démontrons que le triangle DAJ est rectangle isocèle en J et de sens direct.

$J \in (\Gamma)$ et $[AB]$ est un diamètre de (Γ) donc le triangle BAJ est rectangle en J.

D'où $(JA) \perp (JB)$ or $D \in (JB)$; donc le triangle DAJ est rectangle en J et de sens direct.

DAJ est un triangle isocèle en J car ayant deux angles de même mesure.
Donc DAJ est un triangle isocèle rectangle en J.

Démontrons que la droite (OJ) est la médiatrice du segment [AD].

On a : DO = OA et DJ = JA donc (OJ) est la médiatrice de [AD].

2. Soit S la similitude directe de centre A telle que S(I) = O.

a. Déterminons le rapport k et l'angle θ de S.

$$S(I)=O \Leftrightarrow \begin{cases} AO = kAI \\ Mes\left(\widehat{\overline{AI}, \overline{AO}}\right)=\theta \end{cases}$$

- le rapport k de S est k = $\frac{AO}{AI}$

On a : $AI=\frac{1}{2}AB$ (1) : car I milieu de $[AB]$

- OAB est un triangle isocèle rectangle en O. D'après la propriété de Pythagore

$$AB^2=OA^2+OB^2 \Longrightarrow AB^2=2AO^2 \Longrightarrow AB=\sqrt{2}OA$$

d'où OA = $\frac{1}{\sqrt{2}}$AB (2)

Partant des relations (1) et (2), on a : k = $\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}AB}{\frac{1}{2}AB}$ = $\sqrt{2}$

Donc le rapport k est : k = $\sqrt{2}$

- l'angle θ de S

$Mes\left(\widehat{\overline{AI}, \overline{AO}}\right)=\theta$ Puisque AOB est un triangle rectangle isocèle en O donc

$$Mes\left(\widehat{\overline{AB}, \overline{AO}}\right)=\frac{\pi}{4}$$

Or $I \in [AB]$ donc $Mes\left(\widehat{\overline{AI}, \overline{AO}}\right)=\frac{\pi}{4}$

Donc l'angle θ de S est égale à $\frac{\pi}{4}$

b. Démontrons que S (H) = K

$$S(H)=K \Leftrightarrow \begin{cases} AK = kAH \\ Mes\left(\widehat{\overline{AH}, \overline{AK}}\right)=\theta \end{cases}$$

- Calculons le rapport k et l'angle θ

On a : k = $\frac{AK}{AH}$

H est le milieu de $[AJ] \Rightarrow AH = \frac{1}{2}AJ$

(OJ) est la médiatrice de $[AD]$ donc $K \in (OJ)$ est équidistant de A et B d'où AK=AD.

JKA est donc un triangle rectangle isocèle en k.

JKA est un triangle rectangle isocèle en K d'où d'après la propriété de Pythagore, on a :

$$JA^2=JK^2+KA^2 \Leftrightarrow JA^2=2KA^2 \Leftrightarrow JA=\sqrt{2}KA$$

Or $k=\frac{AK}{AH}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}JA}{\frac{1}{2}JA}$ Donc le rapport est : $k=\sqrt{2}$

- le triangle JKA est un triangle rectangle isocèle en K donc $Mes\left(\widehat{\overline{AJ},\overline{AK}}\right)=\frac{\pi}{4}$

D'où $Mes\left(\widehat{\overline{AH},\overline{AK}}\right)=\frac{\pi}{4}$

En conclusion : $k=\sqrt{2}$ et $Mes\left(\widehat{\overline{AH},\overline{AK}}\right)=\frac{\pi}{4}$ donc $S(H)=K$

c. Déterminons la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overline{KI},\overline{KJ}}\right)$

(JK) est la médiatrice de $[AD]$ et $k\in[AD]$ donc $Mes\left(\widehat{\overline{KA},\overline{KJ}}\right)=\frac{\pi}{2}$

Considérons le triangle AJB. I milieu de $[AB]$ et H milieu de $[AJ]$

D'où $(HI)//(JB)$

Dans le triangle AJD, H milieu de $[AJ]$ et K milieu de $[AD]$ donc $(KH)//(JD)$.

Comme $(HI)//(JB)$et $(KH)//(JD)$ cela montre que les points H ; K et I sont alignés et $(KI)//(DB)$.

La droite (AD) forme avec (KI) et (DB) deux angles dont les mesures sont :

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KI}}\right)=\frac{\pi}{4}$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)=\frac{\pi}{4}$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KJ}}\right)=\frac{\pi}{2}$ D'où :

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KJ}}\right)=Mes\left(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KI}}\right)+Mes\left(\widehat{\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KJ}}\right)$

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KJ}}\right)=Mes\left(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KJ}}\right)-Mes\left(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KI}}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KJ}}\right)=\frac{\pi}{4}$

3. Déterminons l'image du cercle (Γ) par S.

Soit S la similitude

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{S}{\frown}} \\ \hline I & O \\ A & A \end{array}$$

Donc $S([AI])=[AO]$

L'image du cercle (Γ) par S est le cercle (C) de centre O et de rayon AO.

PROBLÈME

PARTIE A

1. Etudions les variations de u .

$u(x) = x^2 + 4 - 4\ln x$

$D_U =]0;+\infty[$

$u'(x) = 2x - \frac{4}{x} = \frac{2x^2-4}{x} = \frac{2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x}$

Sens de variation

$\forall x \in \left]0;\sqrt{2}\right[,\ u'(x) < 0$ donc u est strictement décroissante sur $]0;\sqrt{2}[$.

$\forall x \in \left]\sqrt{2};+\infty\right[,\ u'(x) > 0$ donc u est strictement croissante sur $]\sqrt{2};+\infty[$.

Tableau de variation de u

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$		$\searrow$	$6-2\ln 2$	$\nearrow$	

2. Justifions que: $\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ u(x) > 0$

$\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ u(x)$ admet un minimum relatif qui est $6-2\ln 2 > 0$

Donc $\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ u(x) > 0$

PARTIE B

1. Calculons la limite de f en 0 et interprétons graphiquement le résultat.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x-1\right) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}.\ln x\right) = -\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ donc la droite (OJ) est une asymptote verticale à (C_f).

2. a. Calculer la limite de f en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{2}x-1\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

b. Démontrons que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x-1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-y\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$, donc la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x-1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

3. a. Vérifions que: $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{u(x)}{2x^2}$.

$f(x)=\dfrac{1}{2}x-1+\dfrac{2\ln x}{x}$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2\times\frac{1}{x}.x-2\ln x}{2x^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2-2\ln x}{x^2}=\dfrac{x^2+4-4\ln x}{2x^2}$

Donc $f'(x)=\dfrac{u(x)}{2x^2}$

avec $U(x)=x^2+4-4\ln x$

b. En déduisons le sens de variation de f et dressons son tableau de variation.

On sait que $\forall x \in]0;+\infty[$, $u(x)>0$ et $2x^2>0$, donc $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x)>0$ Au total f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation de f

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

4. a. Démontrons que $f(x)=0$ admet une solution α tel que $1<\alpha<e$.

$\forall x \in]0;+\infty[$, f est continue est strictement croissante ; On a $f(]0;+\infty[)=\mathbb{R}$,

or $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α.

On a : $f(1)=\dfrac{1}{2}-1+\dfrac{2\ln 1}{1}=-\dfrac{1}{2}$ et $f(e)=\dfrac{1}{2}e-1+\dfrac{2}{e}=1{,}09$

D'où $f(1)\times f(e)<0$ donc $\alpha \in]1;e[$

b. Déterminons une valeur approchée à 10^{-1} près de α.

Méthode de balayage

- Encadrement d'ordre 0

$1<\alpha<e$

x	1	2	e
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

D'où on a : $1<\alpha<2$

- Encadrement d'ordre 1

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Donc on obtient : $1{,}4<\alpha<1{,}5$

5. a. Démontrons qu'il existe un point unique A de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).

Le coefficient directeur de la tangente (T) est $f'(a)$ et celle de la droite (D) est $\frac{1}{2}$

$$(D)//(T) \Leftrightarrow f'(a)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2+4-4\ln a}{2a^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln a=1 \Leftrightarrow a=e$$

Il existe un point A où (D) // (T)

b. Donnons les coordonnées du point A.

$$f(a)=f(e) \Leftrightarrow f(a)=\frac{1}{2}e-1+\frac{2\ln e}{2e} \Leftrightarrow f(e)=\frac{e^2-2e+4}{2e} \Rightarrow A\left(e;\frac{e^2-2e+4}{2e}\right)$$

6 a. Etudions la position relative de (D) par rapport à (C).

$$f(x)-y=\left(\frac{1}{2}x-1+\frac{2\ln x}{x}\right)-\left(\frac{1}{2}x-1\right)$$

$$f(x)-y=\frac{2\ln x}{x}$$

$\forall x\in\,]0;1[$, $f(x)-y<0$, donc (C) est en dessous de (D)

$\forall x\in\,]1;+\infty[$, $f(x)-y>0$, donc (C) est au dessus de (D)

Pour $x=1 \Rightarrow f(x)-y=0$, donc (C) et (D) coïncident

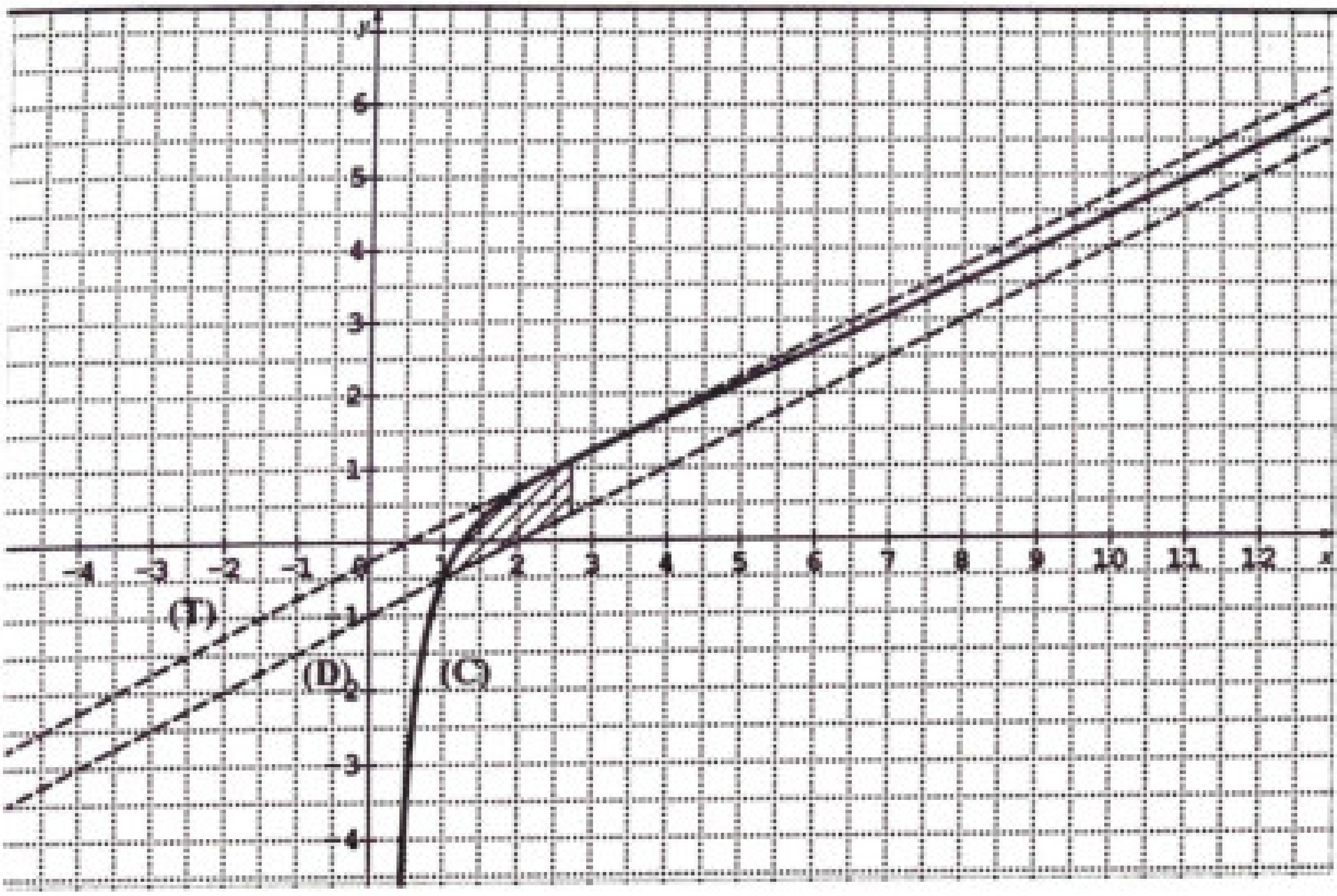
6 b. Construisons (T), (D) et (C).

$$(T): y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

$$y=f'(e)(x-e)+f(e)$$

$$y=\frac{1}{2}(x-e)+\frac{1}{2}e-1+\frac{2}{e}$$

$$(T): y=\frac{1}{2}x-1+\frac{2}{e}$$



PARTIE C

1. a. Hachurons sur le graphique le domaine du plan dont l'aire en unité d'aire est a_1

$$a_1 = \int_{e^0}^{e^1} \frac{2\ln t}{t}\,dt = \int_1^e \frac{2\ln t}{t}\,dt$$

or $f(t) - y = \frac{2\ln t}{t}$ donc a_1 est l'aire (en u.a) du domaine comprise entre les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$, la courbe (C) et la droite (D). **(Voir courbe).**

b. Interprétons graphiquement le nombre a_n .

$$a_n = \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{2\ln t}{t}\,dt$$

On a : $f(t) - y = \frac{2\ln t}{t}$

donc a_n est l'aire (en u.a) du domaine délimité par les droites d'équations $x = e^{n-1}$; $x = e^n$, la courbe (C) et la droite (D)

c. Calculons a_n puis étudions la convergence de la suite (a_n).

$$a_n = \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{2\ln t}{t}\,dt$$

Posons $U = \ln t$ et $U' = \frac{1}{t}$ d'où $U' \times U = \frac{\ln t}{t}$

Donc la primitive de $U' \times U$ est $F(x) = \frac{2(\ln x)^2}{2} = (\ln x)^2$

D'où $a_n = \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{2\ln t}{t}\,dt$

$$a_n = \left[(\ln t)^2\right]_{e^{n-1}}^{e^n}$$

$$a_n = (\ln e^n)^2 - (\ln e^{n-1})^2 = n^2 - (n-1)^2$$

$$a_n = 2n - 1$$

Convergence de a_n

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} (2n-1) = \lim_{n \to +\infty} 2n = +\infty$$

Donc la suite a_n diverge vers $+\infty$

2. Justifions que: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n^2$.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \int_1^{e^1} \frac{2\ln t}{t}\,dt + \int_e^{e^2} \frac{2\ln t}{t}\,dt + \ldots + \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{2\ln t}{t}\,dt = \int_1^{e^n} \frac{2\ln t}{t}\,dt$$

D'après la relation de Chasles

Donc $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \int_1^{e^n} \frac{2\ln t}{t}\,dt$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \left[(\ln t)^2\right]_1^{e^n}$$

$$= (\ln e^n)^2 - (\ln 1)^2 = n^2 - 0$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n^2$$

CORRECTION DU SUJET 9 : BAC C 2008

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct.

On désigne par G le barycentre des points pondérés (A ; 1), (8 ; 1) et (C ; −1).

Pour la figure, prendre comme unité de longueur le centimètre et AB = 6.

Cette figure sera complétée au fur et à mesure.

1. Démontrons que le quadrilatère ACBG est un losange.

G = bar

A	B	C
1	1	-1

$$\Rightarrow \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CA} \quad (1)$$

ABC est un triangle équilatéral d'où CA = CB (2)

Les relations (1) et (2) montrent que ACBG est un losange.

2. a. On appelle O le centre du losange ACBG.

E est le symétrique de O par rapport à B.

Le point F est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$

Construisons les points E et F.

(Voir figure sur feuille annexe)

b. Démontrons que F est l'image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.

$t_{\overrightarrow{CB}}(O) = F \Rightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OF}$ et $S_O(B) = E \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BE}$

On a : AGBC est un parallélogramme

D'où : AOFG est un parallélogramme

Donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{GF} \Rightarrow t_{\overrightarrow{BE}}(G) = F$

En conclusion : F est l'image de G par la translation du vecteur $\overrightarrow{BE}$.

3. On note: $t = t_{\overrightarrow{BE}} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$

a. Déterminons les images des points A et C par t.

$t = t_{\overrightarrow{BE}} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$

$t(A) = t_{\overrightarrow{BE}} \circ t_{\overrightarrow{CB}}(A)$

$t(A) = t_{\overrightarrow{BE}}(G)$

$t(A) = F$

$t(C) = t_{\overrightarrow{BE}} \circ t_{\overrightarrow{CB}}(C)$

$t(C) = t_{\overrightarrow{BE}}(B)$

$t(C) = E$

b. K est l'image de B par t.

Démontrons que le point K appartient à la droite (GF) puis construisons K.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{t} \\ \hline A & F \\ C & E \\ B & K \end{array}$$

D'où (AB) // (FK)

Or (AB) // (FG) donc $K \in (FG)$

On a : $t_{\overrightarrow{CB}} \circ t_{\overrightarrow{BE}} = t_{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}} = t_{\overrightarrow{CE}}$

Construction de K (voir figure)

c. Déterminons l'image du triangle ABC par t.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{t} \\ \hline A & F \\ B & K \\ C & E \end{array}$$

Donc l'image du triangle ABC par t est le triangle FKE

4. On note: $f = t \circ S_{(OC)}$, où $S_{(OC)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OC).

a. Déterminons l'image du triangle ABC par f.

$f(A) = t \circ S_{(OC)}(A) = t(B) \Rightarrow f(A) = K$

$f(B) = t \circ S_{(OC)}(B) = t(A) \Rightarrow f(B) = F$

$f(C) = t \circ S_{(OC)}(C) = t(C) \Rightarrow f(C) = E$

Donc l'image du triangle ABC par f est le triangle KFE

b. Démontrons que f est une symétrie glissée.

$f = t \circ S_{(OC)}$ est la composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{CE}$ et de la symétrie orthogonale d'axe (OC).

De plus, le vecteur $\overrightarrow{CE}$ n'est pas normal à (OC) donc f est une symétrie glissée.

c. Soit $S_{(BF)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BF).

Démontrons que: $s_{(OC)} = t_{\overrightarrow{EO}} \circ s_{(BF)}$

La droite (EO) $\perp$ (BF) donc $t_{\overrightarrow{EO}} \circ S_{(BE)}$ est une symétrie orthogonale d'axe.

$t_{\overrightarrow{EO}} \circ S_{(BF)}(O) = t_{\overrightarrow{EO}}(E) = O$

$t_{\overrightarrow{EO}} \circ S_{(BF)}(C) = t_{\overrightarrow{EO}}(C') = C$

Donc les points O et C sont invariants

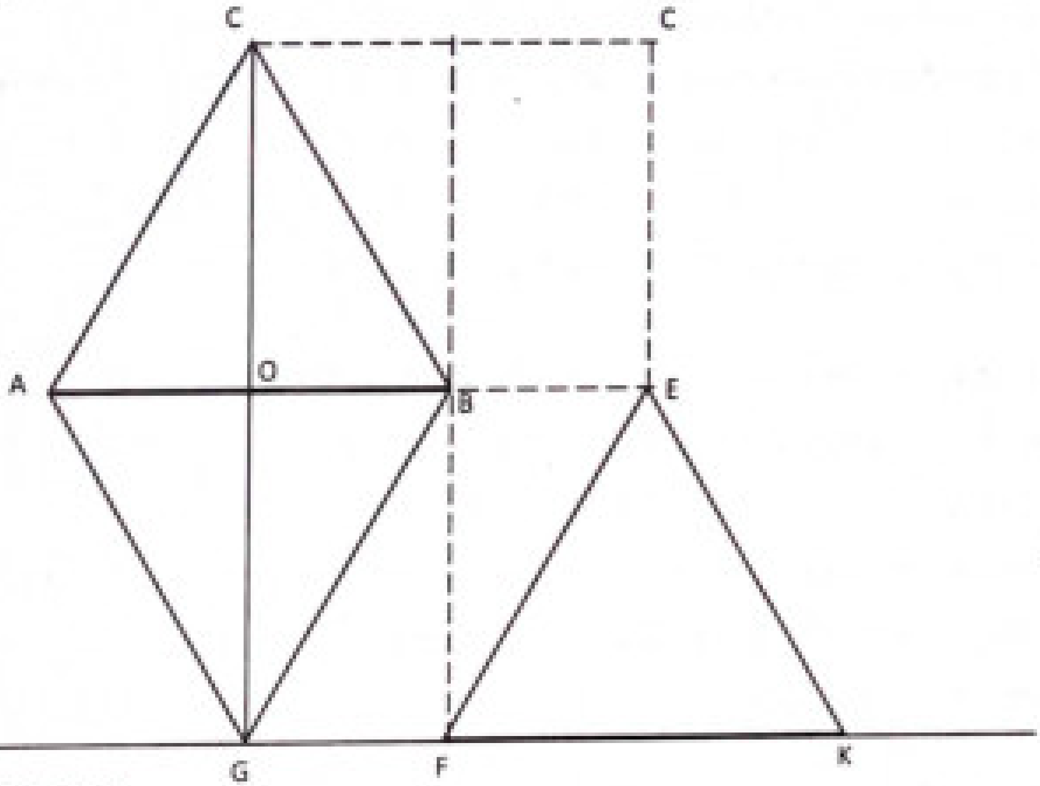
D'où $s_{(OC)} = t_{\overrightarrow{EO}} \circ s_{(BF)}$

d. En déduisons les éléments caractéristiques de f.

$$f = t_{\overrightarrow{BE}} \circ t_{\overrightarrow{CB}} \circ S_{(OC)}$$
$$= t_{\overrightarrow{CE}} \circ t_{\overrightarrow{EO}} \circ S_{(BF)}$$
$$f = t_{\overrightarrow{CO}} \circ S_{(BF)}$$

De plus (CO) et (BF) sont parallèles donc f est la symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{CO}$ et d'axe (BF).

Figure (feuille annexe)



EXERCICE 2

On considère l'équation (E) définie par : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2,\ \ 35x - 27y = 2$

1. a. Utilisons l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD de 35 et 27.

Dividende	35	27	8	3	2
Diviseur	27	8	3	2	1
Reste	8	3	2	1	0

Donc PGCD (35 ; 27) = 1

b. En déduisons une solution de l'équation (E ') : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2,\ \ 35x - 27y = 1$

Solution particulière de (E')

On a : 35 = 27x1+8 27 = 8x3+3 8 = 3x2+2 3 = 2x1+1

On a : 1 = 3−2 x 1 = 3−(8−3 x 2) x1 = 3−8x1 + 3x2 = 3x3−8x1 = 3x (27−8x3)−8x1

1 = 3 x 27− 8x9−8x1

1 = 3 x27− 8x10 = 3 x27− (35−27)x1x10 = 3 x 27−35x10+27x10 = 27x13−35 x10

1 = 35 x (−10) − 27 x (−13)

Donc La solution particulière est : $(x_0\ ,y_0) = (-10\ ,-13)$

2. a. Vérifions que (- 20, - 26) est une solution de (E).

On a : 35x-27y = 2

35x (−20)−27x (−26) = −700+702 = 2. Donc (− 20, − 26) est une solution de (E).

b. Démontrons que les solutions de (E) sont les couples (x, y) d'entiers relatifs vérifiant: $x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$ où k est un entier relatif.

On a : $35k - 27y = 2$: (1) et $35(-20) - 27(-26) = 2$: (2)

La différence de (1) et (2) donne : $35(x + 20) - 27(y + 26) = 0$ ⇒

$$35(x + 20) = 27(y + 26)$$

35 et 27 sont premiers entre eux d'après **le théorème de GAUSS**, on a :

$x + 20 = 27k$ d'où $x = 27k - 20$ de même $y - 35k = -26$, d'où $y = 35k - 26$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc $S = \{(27k-20;35k-26)\ \ k \in \mathbb{Z}\}$

3. Déterminons le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain « jour des génies» sachant qu'ils avaient adoré le génie N'Gouan 8 jours auparavant.

Soit n **le nombre de** jour d'adoration de " N'Gouan"

Et m **le nombre de** jour d'adoration de "Moayé" :

On a : $\begin{cases} n=140x & avec\ x\in\mathbb{N} \\ m=108y & avec\ y\in\mathbb{N} \\ m=n-8 \end{cases}$

De ce qui précède : $108y=140x-8 \Rightarrow 140x-108y=8 \Rightarrow 35x-27y=2$

On obtient: $x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$, $k \in \mathbb{Z}$

Le plus petit entier k (tel que $x\in\mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$) est : $k=1$. On obtient

donc $x = 7$ et $y = 9$

Ainsi, le nombre de jours qui séparent du "prochain jour des génies" est :

$n = 108 \times 9$

$n = 972$

PROBLEME

Partie A

1. a. Justifions que f est continue O.

$f(x)=-1+x\ln x$

$D_f=]0;+\infty[$ et $f(0)=-1$; f est définie en 0

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)= \lim\limits_{x\to 0}(-1+x\ln x)= \lim\limits_{x\to 0}(-1)+ \lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1,$ car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$

Car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

On a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ donc f est continue en 0.

b. Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}$ et Interprétons graphiquement le résultat.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1+x\ln x+1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x} = -\infty$

Interprétation

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$

Donc la courbe (C) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

2. a. Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)= \lim\limits_{x\to +\infty}(-1+x\ln x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Car $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln x=+\infty$

b. Etudions les variations de f.

$f(x)=-1+x\ln x$

$f'(x)=\ln x+1$

$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x+1=0 \Rightarrow \ln x=-1 \Rightarrow x=e^{-1}$

$\forall x\in\ ]e^{-1};+\infty[;\ f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]e^{-1};+\infty[$

$\forall x\in\ ]0;e^{-1}[;\ f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $]0;e^{-1}[$

Tableau de variation de f

0	0	e^{-1}	$+\infty$
f '(x)	$-$	0	$+$
f (x)	-1 ↘	$-1-e^{-1}$	↗ $+\infty$

3. a. Démontrons que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique s comprise entre 1,7 et 1,8.

$\forall x \in \left]e^{-1};+\infty\right[$, f est continue et strictement croissante sur $]e^{-1};+\infty[$.

On a : $0 \in f\left(\left]e^{-1};+\infty\right[\right) = \left]-1-e^{-1};+\infty\right[$

Donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique s.

On a : $\begin{cases} f(1,7) = -1+1,7\ln 1,7 = -0,09 \\ f(1,8) = -1+1,8\ln 1,8 = 0,058 \end{cases}$

D'où $f(1,7) \times f(1,8) < 0$ donc $1,7 < s < 1,8$

Pour la suite on prendra 1,8 pour valeur approchée de s.

b. Justifions que: $\begin{cases} \forall x \in \left]0;s\right[, \quad f(x) < 0; \\ \forall x \in \left]s;+\infty\right[, f(x) > 0 \end{cases}$

D'après le tableau de variation de f, on a :

0	0	e^{-1}	s	$+\infty$
f(x)	$-$	$-1-e^{-1}$	$-$ 0	$+$

f est strictement décroissante sur $]0;e^{-1}[$, $f(]0;e^{-1}[) =]-1-e^{-1};-1[$; d'où $f(x)<0$

f est strictement croissante sur $]e^{-1};s[$; $f(e^{-1};s[) =]-1-e^{-1};0[$; d'où $f(x)<0$

f est strictement croissante sur $]s;+\infty[$; $f(]s;+\infty[) =]0;+\infty[$. D'où $f(x)>0$

En conclusion : $\begin{cases} \forall x \in \left]0;s\right[, \quad f(x) < 0; \\ \forall x \in \left]s;+\infty\right[, f(x) > 0 \end{cases}$

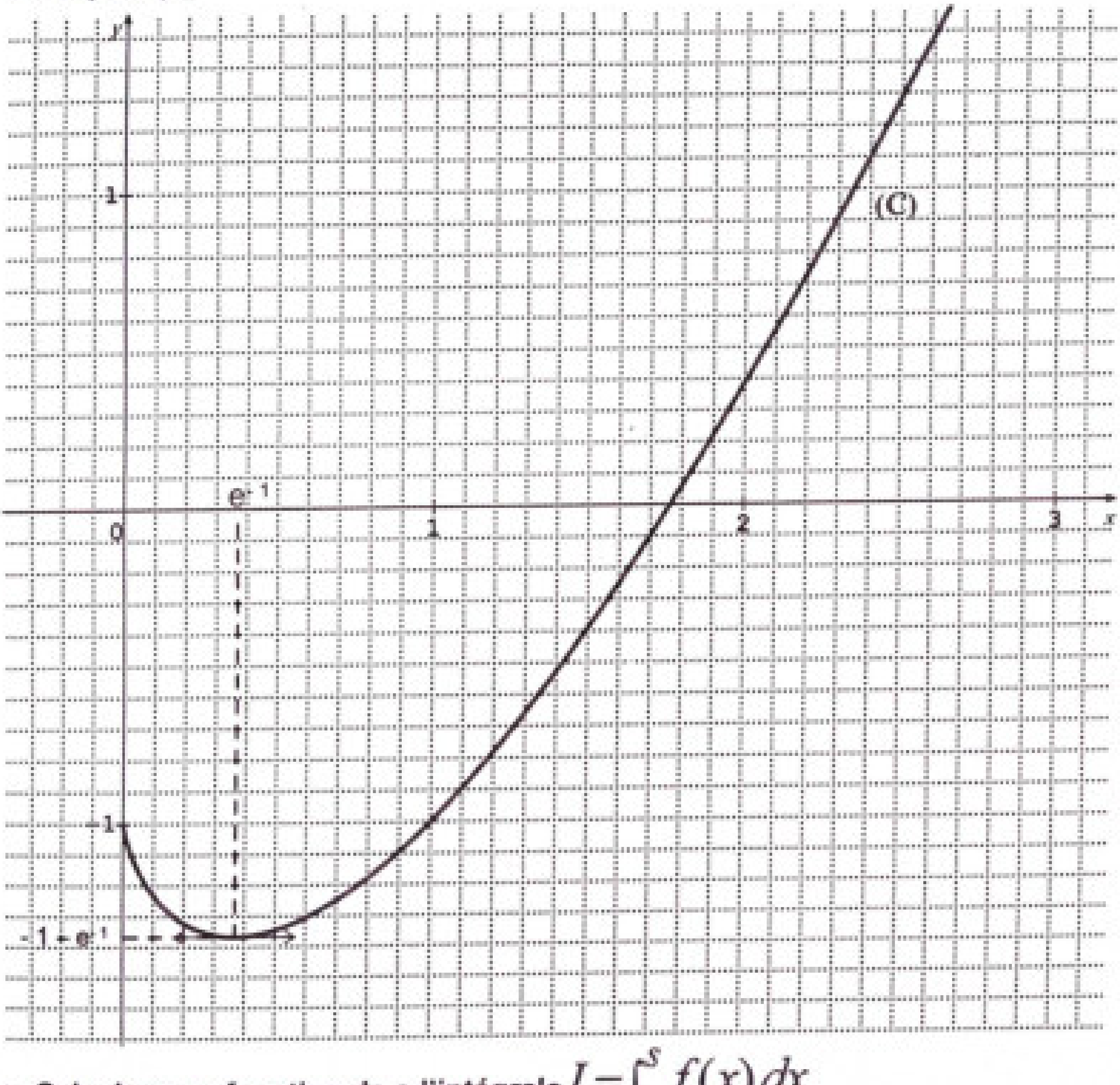
4. a. Justifions que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+x\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}+\ln x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OJ)

b. Traçons (C).



c. Calculons en fonction de s l'intégrale $I=\int_1^s f(x)\,dx$.

$I = \int_1^s f(x)\,dx$

$I = \int_1^s \left(-1 + x\ln x\right) dx$

$I = \int_1^s -1dx + \int_1^s x\ln x\,dx$

$I = \left[-x\right]_1^s + \int_1^s x\ln x\,dx$

Posons $I_1 = \int_1^s x\ln x\,dx$

$U = \ln x \qquad U' = \frac{1}{x}$

$V' = x \qquad V = \frac{1}{2}x^2$

$I_1 = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^s - \int_1^s \frac{1}{2}x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^s - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^s$

$I_1 = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^s$

Donc :

$I = \left[-x\right]_1^s + \left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^s$

$I = -s + 1 + \frac{1}{2}s^2\ln s - \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}\times 1^2\ln 1 + \frac{1}{4}1^2$

$I = -s + \frac{5}{4} - \frac{1}{2}s^2\left(\frac{1}{2} - \ln s\right)$

d. En déduisons une valeur approchée à 10-² près de l'aire $A(s)$ en cm² de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 1 et x = s .

$A(s) = -\int_1^s f(x)dx \;\times\; 25cm^2$

$A(s) = -\left[-s + \frac{5}{4} - \frac{1}{2}s^2\left(\frac{1}{2} - \ln s\right)\right] \;\times\; 25cm^2$

$A(s) = 25s - \frac{125}{4} + \frac{25}{2}s^2\left(\frac{1}{2} - \ln s\right)cm^2$

$A(s) = 10{,}19cm$

Partie B

1. a. Démontrons que: $\forall x \in \left]\frac{1}{e};+\infty\right[,\; g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$

$g(x) = s \Rightarrow \frac{1+x}{1+\ln x} = x \Rightarrow 1 + x = x\left(1 + \ln x\right) \Rightarrow 1 + x = x + x\ln x \Rightarrow x\ln x - 1 = 0$

Donc $f(x)=0$

En conclusion : $g(x)=x \Leftrightarrow f(x)=0$

b. En déduisons le nombre de solutions de l'équation $g(x)=x$ et leur valeur.

L'équation $g(x)=x$ admet une solution unique $s \simeq 1{,}8$

2. a. Démontrons que, $\forall x \in \left]\frac{1}{e};+\infty\right[$, $g'(x)=\frac{f(x)}{x(1+\ln x)^2}$

$$g'(x)=\left(\frac{1+x}{1+\ln x}\right)'=\frac{(1+\ln x)-\frac{1}{x}(1+x)}{(1+\ln x)^2}=\frac{\ln x-\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2}=\frac{x\ln x-1}{x(1+\ln x)^2}$$

$$g'(x)=\frac{f(x)}{x(1+\ln x)^2} \qquad \text{avec} \qquad f(x)=-1+x\ln x$$

b. Justifions que g est strictement croissante sur l'intervalle $[s,2]$.

x	e^{-1}		s		$+\infty$
f(x)		-	0	+	
x		+		+	
$(1+\ln x)^2$		+		+	
g'(x)		-	0	+	

$\forall x \in \left]e^{-1};s\right[$, $g'(x)<0$ donc g est strictement décroissante sur $]e^{-1};s[$.

$\forall x \in \left]s;+\infty\right[$, $g'(x)>0$ donc g est strictement croissante sur $]s;+\infty[$.

Au total on a : $[s;2]\subset[s;+\infty[$ donc g est strictement croissante sur [s ; 2].

D'où $g([s;2])=[g(s);g(2)[$

3. Démontrons que: $g([s,2])\subset[s,2]$

g est strictement croissante sur [s ; 2]. D'où

$$g([s;2])=[g(s);g(2)[$$

$$g([s;2])=\left[s;\frac{3}{1+\ln 2}\right[$$

Or $\left[s;\frac{3}{1+\ln 2}\right[\subset[s;2[$ donc $g([s,2])\subset[s,2]$

4. a. Démontrons que : $\forall x \in [1;+\infty[, \dfrac{1}{(1+\ln x)^2} \leq 1$

On a : $x \geq 1$ car $x \in [1;+\infty[$, $\ln x \geq \ln 1$

$\ln x \geq 0 \Leftrightarrow 1+\ln x \geq 1 \Leftrightarrow (1+\ln x)^2 \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(1+\ln x)^2} \leq 1$

b. Démontrons que pour tout réel x élément de $[s,2]$, $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{2}{3} f(2)$

$x \in [s,2] \Rightarrow s \leq x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{s}$

$x \leq 2$, comme f est croissante sur $[s;+\infty[$,alors

$f(x) \leq f(2)$ d'où $\frac{1}{x} f(x) \leq \frac{1}{s} f(2)$ donc $\dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{2}{3} f(2)$

On a : (1) : $\dfrac{1}{(1+\ln x)^2} \leq 1$ et $\dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{2}{3} f(2)$

En déduisons que: $\forall x \in [s,2]$, $|g'(x)| \leq 0{,}3$

En multipliant membre à membre les inégalités de (1), on obtient :

$$\frac{f(x)}{x} \times \frac{1}{(1+\ln x)^2} \leq \frac{2}{3} f(2)$$

Or ,on sait que : $g'(x) = \frac{f(x)}{x(1+\ln x)^2}$ d'où

$$|g'(x)| \leq \frac{2}{3} f(2) \Leftrightarrow |g'(x)| \leq \frac{2}{3}(-1+2\ln 2) \Leftrightarrow |g'(x)| \leq 0{,}2575 \Leftrightarrow |g'(x)| \leq 0{,}3$$

Donc $\forall x \in [s,2]$, $|g'(x)| \leq 0{,}3$

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = g(U_n)$.

5. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrons que, pour tout entier naturel

n, $U_n \in [s,2]$

Soit P_n la proposition $U_n \in [s,2]$

- Vérifions que P_0 est vraie.

Pour n = 0 on a $U_0 = 2 \in [s,2]$

Donc P_0 est vraie

- Supposons que P_n est vraie $\Rightarrow$ $U_n \in [s;2]$

- Démontrons que Pn+1 est vraie.

$s \leq U_n \leq 2$ d'où $\ln s \leq \ln U_n \leq \ln 2$

$s+1 \leq 1+U_n \leq 2$: (1) et $1+\ln s \leq 1+\ln U_n \leq 1+\ln 2$

$$\frac{1}{1+\ln 2} \leq \frac{1}{1+\ln U_n} \leq \frac{1}{1+\ln s} \quad : (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent :

$$\frac{s+1}{1+\ln 2} \leq \frac{1+U_n}{1+\ln U_n} \leq \frac{2}{1+\ln s} \Rightarrow \frac{s+1}{1+\ln 2} \leq U_{n+1} \leq \frac{2}{1+\ln s}$$

D'où $\frac{s+1}{1+\ln 2} \leq s \leq U_{n+1} \leq \frac{2}{1+\ln s} \leq 2$

Par conséquent $s \leq U_{n+1} \leq 2$

La proposition P_{n+1} est vraie donc P_n est aussi vraie

En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [s;2]$

6. a. Utilisons l'inégalité des accroissements finis pour justifier que:

$\forall n \in \mathbb{N},\ |U_{n+1} - s| \leq 0,3 \times |U_n - s|$.

$|g'(x)| \leq 0,3$ d'où $|g'(U_n)| \leq 0,3$ donc en utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $|U_n - s|$, on a $|g(U_n) - g(s)| \leq 0,3|U_n - s|$

Or $g(s) = s$ et $g(U_n) = U_{n+1}$ Donc $|U_{n+1} - s| \leq 0,3 \times |U_n - s|$

b. En déduisons que: $\forall n \in \mathbb{N},\ |U_n - s| \leq \frac{(0,3)^n}{2}$

On a : $|U_{n+1} - s| \leq 0,3 \times |U_n - s|$ D'où $|U_{n+1} - s| \leq 0,3 \times |U_n - s|$

$|U_1 - s| \leq 0,3 \times |U_0 - s|$

$|U_2 - s| \leq 0,3 \times |U_1 - s|$

$|U_3 - s| \leq 0,3 \times |U_2 - s|$

....

....

....

$|U_n - s| \leq 0,3 \times |U_{n-1} - s|$

En multipliant membre à membre les égalités, on obtient :

$|U_n - s| \leq (0,3)^n |U_0 - s|$ Donc $|U_n - s| \leq \frac{(0,3)^n}{2}$

7. a. Justifions que U_n converge vers s .

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - s) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(0,3)^n}{2}$

$$\lim_{n \to +\infty} (U_n - s) = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{n \ln 0,3}}{2} = 0$$

Car $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln 0,3 = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to -\infty} e^n = 0$

En conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = s$ donc U_n converge vers s

b. À partir de quelle valeur de n , U_n est une valeur approchée de s à 10^{-4} près?

On a : $\frac{(0,3)^n}{2} \leq 10^{-4}$

$$(0,3)^n \leq 2.10^{-4} \Rightarrow \ln(0,3)^n \geq \ln(2.10^{-4})$$

$$\Rightarrow n \ln(0,3) \geq \ln(2.10^{-4})$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln(2.10^{-4})}{\ln(0,3)}$$

$$\Rightarrow n \geq 7,1$$

A partir de $n \geq 8$, U_n est une valeur approchée de s à partir de 10^{-4} près.

CORRECTION DU SUJET 10 : BAC C 2007

EXERCICE 1

1. Justifions que dans un groupe de 6 personnes choisies au hasard dans cette ville, la probabilité pour qu'il y ait un seul gaucher est égale à 0,3025.

Soit G l'évènement ''la personne choisie est un gaucher'' et $\overline{G}$ l'évènement contraire.

On a : $P(G)=0{,}3$ et $P(\overline{G})=0{,}7$

La probabilité pour qu'il ait un seul gaucher est :

$$P(A)=C_6^1 P(G)^1 P(\overline{G})^5 = 6\times(0{,}3)^2\times(0{,}7)^5 \Rightarrow P(A)=0{,}3025$$

2. Calculons la probabilité pour qu'un groupe de 3 personnes choisies au hasard dans cette ville contienne:

a. Exactement 2 gauchers

Soit B l'évènement. La probabilité est :

$$P(B)=C_6^2 P(G)^2 P(\overline{G})^4 = 15\times(0{,}3)^2\times(0{,}7)^4 \Rightarrow P(B)=0{,}324135$$

b. au moins un gaucher

Soit C l'évènement. $P(C)=1-P(\overline{C})$ avec $\overline{C}$ l'évènement les 6 personnes ne contiennent pas de gaucher. La probabilité est :

$$P(C)=1-P \ =1-(0{,}7)^6 \Rightarrow P(C)=0{,}88235$$

3. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de stagiaires de l'atelier pouvant trouver une paire de ciseaux à sa convenance.

a. Déterminons les valeurs prises par X.

$X\in\{2;3;4;5;6\}$

b. Justifions que la probabilité pour que X prenne la valeur 2 est égale à 0,0007.

$$P(X=2)=C_6^6 P(G) \ =1\times(0{,}3)^6 \Rightarrow P(X=2)=0{,}0007$$

c. Calculons la probabilité pour que X prenne la valeur 6.

$$P(X=6)=C_6^1 P(G)^1 P(\overline{G})^5 + C_6^2 P(G)^2 P(\overline{G}) = 6\times(0{,}3)\times(0{,}7)^5 + 15\times(0{,}3)^2\times(0{,}7)$$

$$\Rightarrow P(X=6)=0{,}302526+0{,}324135 \ =0{,}626661$$

Donc $P(X=6)=0{,}6267$

EXERCICE 2

1. a. Construire le triangle ABC. (Voir figure)

b. Démontrons qu'il existe une rotation r transformant B en C et A en E.

Nous savons que le centre d'une rotation qui transforme un point M en un point M' est situé sur la médiatrice du segment [MM']. Puisque la rotation r doit transformer B en C et A en E, son centre doit être situé sur les médiatrices des segments [BC] et [AE]. Les droites (BC) et (AE) n'étant pas parallèles, il en résulte que les médiatrices des [BC] et [AE] se coupent effectivement en un point. Donc il existe une rotation r transformant B en C et A en E, et dont l'angle orienté est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EC})$

c. Déterminons l'angle de la rotation r.

$$\left.\begin{array}{l} R(A)=E \\ R(B)=C \end{array}\right| \Rightarrow Mes\left(\overline{\overline{AB}, \overline{EC}}\right)=\theta$$

On a : E milieu de $[AC]$ d'où $\overline{EC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$

D'où : $Mes\left(\overline{\overline{AB},\overline{EC}}\right)=Mes\left(\overline{\overline{AB},\overline{AC}}\right) \Rightarrow Mes\left(\overline{\overline{AB},\overline{EC}}\right)=\frac{\pi}{3}$

Donc l'angle de la rotation est $\theta=\frac{\pi}{3}$

d. Construire son centre O. (Voir figure)

Soit H le milieu de $[AE]$ et soit H' le milieu de $[BC]$.

Traçons les médiatrices de $[AE]$ et $[BC]$.

Elles se coupent au point O qui est le centre de la rotation r.

2. Soit S la similitude directe de centre O qui transforme B en E.

Soit J le centre du cercle circonscrit au triangle OAE.

a. Déterminons l'angle et le rapport de S.

$$\left.\begin{array}{l} S(B)=E \\ S(O)=O \end{array}\right| \Rightarrow Mes\left(\overline{\overline{OB},\overline{OE}}\right)=\theta$$

On sait que $R_{\left|O;\frac{\pi}{3}\right|}(A)=E \Rightarrow Mes\left(\overline{\overline{OA};\overline{OE}}\right)=\frac{\pi}{3}$

Or le triangle ABC est rectangle en B d'où

$$AB=AC.\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow AB=\frac{1}{2}AC \Rightarrow AB=AE$$

Donc ABE est un triangle équilatéral.

La médiatrice de $[AE]$ passe par H, B et O

D'où

$$Mes\left(\overline{\overline{OA};\overline{OE}}\right)=Mes\left(\overline{\overline{OA};\overline{OH}}\right)+Mes\left(\overline{\overline{OH};\overline{OE}}\right)=2Mes\left(\overline{\overline{OH};\overline{OE}}\right)=2Mes\left(\overline{\overline{OB};\overline{OE}}\right)$$

$$\Rightarrow Mes\left(\overline{\overline{OB};\overline{OE}}\right)=\frac{1}{2}Mes\left(\overline{\overline{OA};\overline{OE}}\right)=\frac{\pi}{6}$$

Donc l'angle de la similitude S est $\theta=\frac{\pi}{6}$

Déterminons le rapport k de la similitude S

$$\left.\begin{array}{l} S(B)=E \\ S(O)=O \end{array}\right| \Rightarrow OE=kOB \Rightarrow k=\frac{OE}{OB}$$

Les triangles OAE et ABE sont équilatéraux d'où OE = OA = AE

OB = 2OH et $OH=OA.\cos\frac{\pi}{6}$

Donc $k = \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{OA}{2OA\cos\frac{\pi}{6}} \Rightarrow k = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b. Démontrons que S (A) = J.

Montrons que $Mes\left(\overline{OA;OJ}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ et $k = \dfrac{OJ}{OA} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

J est le centre du cercle circonscrit au triangle OAE ; or OAE est un triangle équilatéral ; donc I est l'intersection des angles :

$Mes\left(\overline{OA};\overline{OJ}\right) = \frac{\pi}{6}$ car $J \in (OB)$

F point d'intersection de la demi-droite $[EJ]$ avec $[OA]$.

Donc F est le milieu de $[OA] \Rightarrow \quad OF = \dfrac{1}{2}OA = \dfrac{1}{2}OJ\cos\dfrac{\pi}{6}$

$OF = \dfrac{\sqrt{3}}{3}OJ$ et $OF = \dfrac{1}{2}OA$ donc $k = \dfrac{OJ}{OA} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}OA}{OA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

En conclusion : **S (A) = J**.

3. Soit k un nombre réel non nul, M et M' deux points du plan tels que $\overline{AM} = k\overline{AB}$ et $\overline{EM'} = k\overline{EC}$

a. Construisons les points M et M' pour $k = \dfrac{3}{2}$ (Voir figure)

b. Démontrons que M est le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs (k - 1) et (-k).

$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. En introduisant le point M , on a : $\overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$

d'où $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{MB} \quad \Leftrightarrow \quad (1-k)\overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

d'où $(k-1)\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Donc M = bar

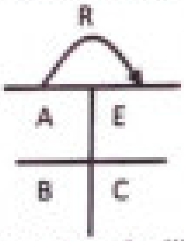
A	B
k-1	-k

c. Démontrons que r(M) = M' et en déduire que le triangle OMM' est équilatéral.

La rotation et les similitudes conservent les barycentres

M = bar

A	B
k-1	-k



D'où l'image de M sera le barycentre de l'image de A et B par R.

Donc R(M)=M' avec M'= bar

E	C
k-1	-k

$$R(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM=OM' \\ et\ Mes\left(\overline{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}\right)=\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

D'où le triangle OMM' est un triangle isocèle de sommet O avec un angle de $\frac{\pi}{3}$.

Donc le triangle OMM' est équilatéral.

d. Démontrons que les points O, A, M et M' sont cocycliques.

- $M' \in [AE]$ et le triangle OAE est équilatéral donc $Mes\left(\overline{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AM'}}\right)=-\frac{\pi}{3}$.

- le triangle OMM' est équilatéral donc $Mes\left(\overline{\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MM'}}\right)=-\frac{\pi}{3}$

Au total $2Mes\left(\overline{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AM'}}\right)=2Mes\left(\overline{\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MM'}}\right)$ donc les points O ; A : M et M'sont cycliques.

4. Soit N le centre du cercle circonscrit au triangle OMM'.

a. Démontrons que S (M) = N.

$$S(M)=N \Rightarrow Mes\left(\overline{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)=\theta \text{ et } k=\frac{ON}{OM}$$

Calculons θ et k

- N est le centre du cercle circonscrit au triangle OMM' équilatéral

D'où N appartient aux bissectrices des angles du triangle OMM'.

D'où $Mes\left(\overline{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)=\frac{\pi}{6}$ Donc $\theta=\frac{\pi}{6}$

- K milieu de $[OM] \Rightarrow OK=\frac{1}{2}OM$ et $OK=ON\cos\frac{\pi}{6}$

$OK=\frac{\sqrt{3}}{2}ON$ d'où $\frac{\sqrt{3}}{2}ON=\frac{1}{2}OM$

Donc $k=\frac{ON}{OM}=\frac{ON}{\sqrt{3}ON} \Rightarrow k=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

En conclusion : S (M) = N.

b. Déterminons l'ensemble des points N lorsque M décrit la droite (AB).

S	
A	J
B	E
M	N
O	O

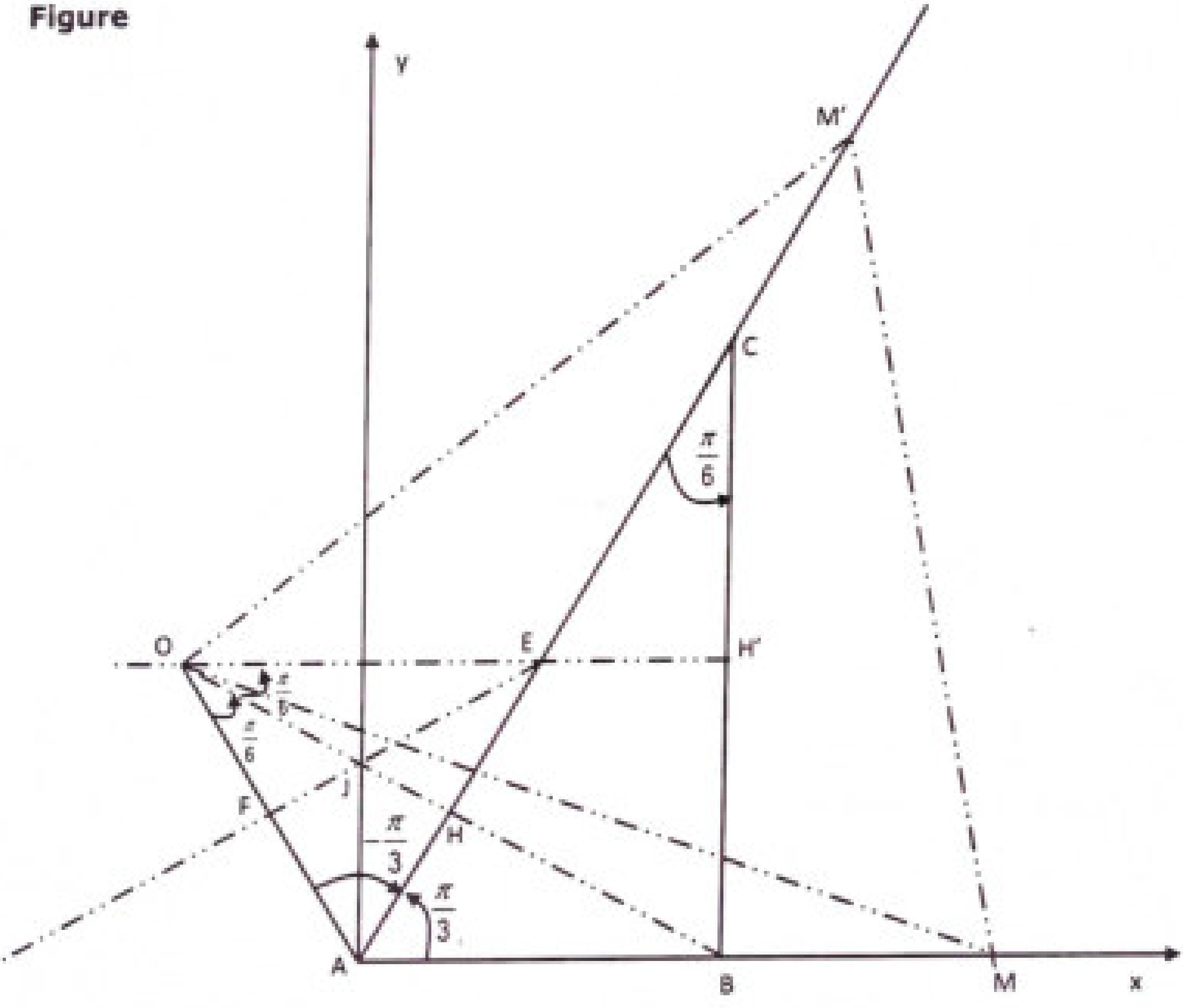
La similitude conserve les droites

donc $S(AB)=(JE)$

donc l'ensemble des points N lorsque M décrit la droites (AB)

est la droite (JE).

Figure



PROBLEME

PARTIE A

1. Calculons les limites de f en -1 et en 1.

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{1+x}{1-x} = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \ln X = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{1+x}{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$

Interprétons graphiquement les résultats obtenus.

On a : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation x=-1 est asymptote verticale à (C).

On a : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation x= 1 est asymptote verticale à (C).

2. a. Démontrons que : $\forall x \in]-1\,;1[,\ f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

$$f'(x) = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]' = \frac{1}{2} \times \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

D'où $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

b. En déduisons le tableau de variation de f .

$\forall x \in]-1;1[,\ 1-x^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$

x	-1		1
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

c. Déterminons une équation de la droite (T), tangente à (C) au point d'abscisse 0.

(T) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f(0) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$

$f'(0) = \frac{1}{1-0^2} = 1$

Donc (T) : $y = x$

3. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x) - x$

a. Déterminons le sens de variation de g.

$g(x) = f(x) - x$

$g'(x) = f'(x) - 1 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{1-x^2} - 1 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$

$\forall x \in]-1;1[, \quad g'(x) > 0$

Donc g est strictement croissante sur $]-1;1[$

b. Calculons $g(0)$ et en déduisons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

$g(0) = f(0) - 0 \quad \Rightarrow \quad g(0) = 0$

- signe de $g(x)$

$\forall x \in]-1;1[$, g est continue et strictement croissante sur] – 1 ; 1 [et $g(0) = 0$

Donc $\begin{cases} \forall x \in]-1;0[, & g(x) < 0 \\ \forall x \in]0;1[, & g(x) > 0 \end{cases}$

c. Déterminons la position de (C) par rapport à (T).

On a : $f(x) - y = f(x) - x$ or $g(x) = f(x) - x$

Donc $\forall x \in]-1;0[, f(x) - x < 0$ d'où $\forall x \in]-1;0[, f(x) < x$

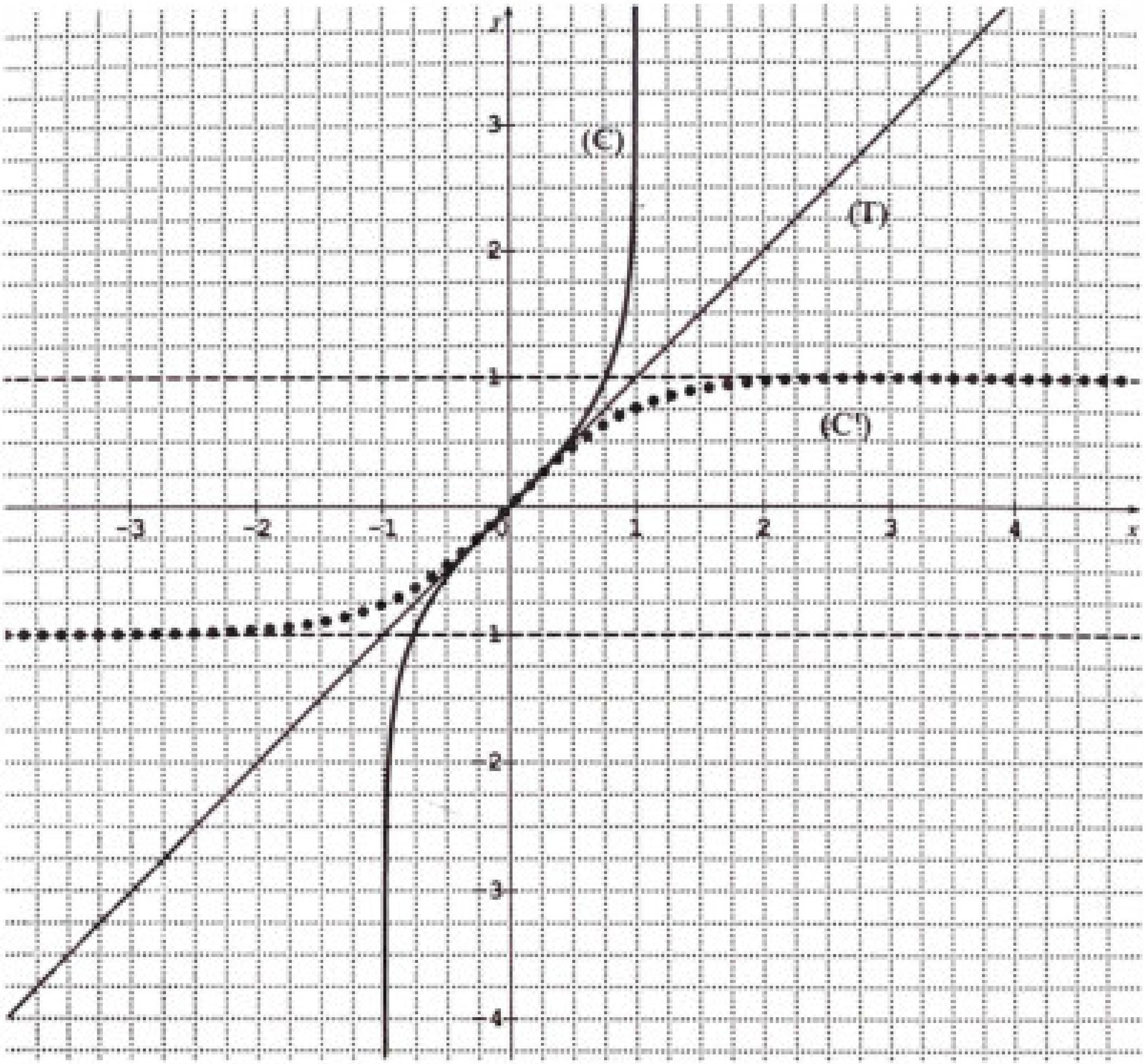
Donc (C) est en dessous de (T) sur $]-1;0[$.

$\forall x \in]0;1[, \quad f(x) - x > 0$ d'où $f(x) > x$

Donc (C) est au dessus de (T) sur $]0;1[$.

Pour x = 0, (C) et (T) se coupent.

4. Construisons, dans le même repère, (C) et (T).



5.

a. Démontrons que f est une bijection de $]-1;1[$ sur $\mathbb{R}$.

f est continue et strictement croissante sur $]-1;1[$; elle réalise une bijection de $]-1;1[$ sur $f(]-1;1[)=\left]\lim_{x\to-1} f(x); \lim_{x\to 1} f(x)\right[=\mathbb{R}$

b. Construisons (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le repère (O, I, J).

Pour construire (C'), on trace la droite d'équation y = x, puis on cherche le symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation y = x. **(voir figure ci-dessus)**

c. Démontrons que: $\forall y \in \mathbb{R},\ f^{-1}(y)=\dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

$$\forall y\in\mathbb{R},\ f^{-1}(y)=x \Rightarrow f(x)=y \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=y \Rightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2y$$

$$\Rightarrow \frac{1+x}{1-x}=e^{2y} \Rightarrow 1+x=(1-x)e^{2y} \Rightarrow 1+x=e^{2y}-xe^{2y}$$

$$\Rightarrow x+xe^{2y}=e^{2y}-1 \Rightarrow x\left(1+e^{2y}\right)=e^{2y}-1$$

$$\Rightarrow x=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

PARTIE B

1. Soit ϕ une primitive de f^{-1} sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à déterminer $\phi(x)$).

a. Démontrons que $\phi\circ f$ **est une primitive de la fonction** $x\mapsto xf'(x)$ **sur** $]-1;1[$.

Dérivons $\phi\circ f$

$(\phi\circ f)'(x)=f'(x)\times\ \phi'(f(x))$

Or $\phi'(x)=f^{-1}(x)$

D'où $(\phi\circ f)'(x)=f'(x)\times\ f^{-1}(f(x))$

$(\phi\circ f)'(x)=f'(x).\,x$ car $f^{-1}(f(x))=x$

Donc $(\phi\circ f)'(x)=x.f'(x)$

Au total $\phi\circ f$ est une primitive de $x.f'(x)$ sur $]-1;1[$

b. Démontrons que pour tous éléments a et b de $]-1;1[$,

$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt=\phi\circ f(b)-\phi\circ f(a)$

On a : $\phi'(x)=f^{-1}(x)$

D'où $\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt=\int_{f(a)}^{f(b)}\phi'(t)dt=\left[\phi(t)\right]_{f(a)}^{f(b)}=\phi(f(b))-\phi(f(a))$

Donc $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt=\phi\circ f(b)-\phi\circ f(a)$

c. En déduisons que : $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \int_a^b tf'(t)dt$

On a : $\left(\phi \circ f\right)'(x) = x.f'(x)$

D'où $\int_a^b tf'(t)dt = \int_a^b \left(\phi o f\right)' dt$

$\int_a^b f'(t)dt \left[\phi o f(t)\right]_a^b$

$\int_a^b f'(t)dt = \phi o f(b) - \phi o f(a)$

$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \phi o f(b) - \phi o f(a)$

Donc $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \int_a^b tf'(t)dt$

d. Démontrons que pour tout élément x de $\left]-1;1\right[$: $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x tf'(t)dt$

On a : $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x tf'(t)dt$

Or $f(0) = 0$

Donc $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x tf'(t)dt$ d'après *B1. c*

2. a. Démontrons que pour tout élément x de $\left]-1;1\right[$: $\int_0^x tf'(t)dt = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

$\int_0^x tf'(t)dt = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$ d'après ***A2. a*** on a : $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

D'où : $\int_0^x tf'(t)dt = \int_0^x t\left(\frac{1}{1-t^2}\right)dt = \int_0^x \frac{t}{1-t^2}dt$

Posons U = 1 − t² ; On a $\begin{cases} si\ t=0 & \Rightarrow & U=1 \\ si\ t=x & \Rightarrow & U=1-x^2 \end{cases}$

D'où $dU = -2tdt$

Donc $\frac{t}{1-t^2}dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{dU}{U}\right)$

Au total :

$$\int_0^x \frac{t}{1-t^2}dt = -\frac{1}{2}\int_1^{1-x^2}\frac{dU}{U} = -\frac{1}{2}\left[\ln U\right]_1^{1-x^2} = -\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right) + \frac{1}{2}\ln 1$$

$$\int_0^x \frac{t}{1-t^2}dt = -\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)$$

b. En déduisons que, pour tout élément y de $\mathbb{R}$, $\int_0^y f^{-1}(t)dt = \ln\left(\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\right)$

$\int_0^y f^{-1}(t)dt = \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$ car $\forall x \in]-1;1[$, $f(x)=y$.

D'où $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x tf'(t)dt$

On sait que : $\int_0^y tf^{-1}(t)dt = -\frac{1}{2}ln(1-x^2)$

Or : $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow x = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

$\Rightarrow x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$

D'où : $1-x^2 = \dfrac{4}{\left(e^y+e^{-y}\right)^2} \Leftrightarrow \ln\left(1-x^2\right) = \ln\left(\dfrac{4}{\left(e^y+e^{-y}\right)^2}\right)$

Donc : $-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right) = \ln\left(\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\right)$

En conclusion : $\int_0^y f^{-1}(t) = \ln\left(\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\right)$

3. Soit A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C') de f^{-1} et les droites d'équations respectives **x = 0** et **x = 1**.

Calculons A en unité d'aire.

$$A = \int_0^1 f^{-1}(t)dt.ua$$

$$A = \ln\left(\frac{e^1+e^{-1}}{2}\right).ua$$

4. a. Hachurons sur le graphique, l'ensemble D des points dont les cordonnées (x, y) vérifient : $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$ *et* $f^{-1}(x) \le y \le f(x)$

Il s'agit de la partie du plan comprise entre (C) et (C'), dont l'abscisse est comprise entre 0 et 1 et dont l'ordonnée est comprise également entre 0 et 1.

b. Calculons l'aire de D en cm^2.

$$D = \int_0^1 \left(f(x) - f^{-1}(x)\right)dx.ua$$

$$D = \int_0^1 f(x)dx.ua - \int_0^1 f^{-1}(x)dx.ua$$

Or $\int_0^1 f^{-1}(x)dx = \ln\left(\dfrac{e+e^{-1}}{2}\right)$ (1)

Calculons $\int_0^1 f^{-1}(x)\,dx$ avec $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$\int_0^t f(x)\,dx=\lim_{\substack{t\to 1\\ <}}\int_0^t f(x)\,dx$$

$\int_0^t f(x)\,dx$ avec $t\in\left[0;1\right]$.

Posons : $U=f(x)$ et $V'=1$
$U'=f'(x)$ et $V=x$

On a : $\int_0^t f(x)dx = [xf(x))]_0^t - \int_0^t xf'(x)dx = [xf(x)]_0^t + \frac{1}{2}ln(1-t^2)$

D'où : $$\int_0^t f(x)\,dx = \frac{1}{2}t\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1-t^2\right)$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\int_0^t f(x)\,dx = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\frac{1}{2}t\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1-t^2\right)\right)=\ln 2$$

Car $\lim_{x\to 1}(1+t)\ln(1+t)=2\ln 2$ et $\lim_{x\to 1}(\ldots\ldots 1+\ldots\ldots\ln\left(1+t\right)=0$

On a : $D=\left(\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 f^{-1}(x)dx\right)u.a$

D'où $D=\left(ln\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)+ln2\right)u.a$

Au total : $D=\left(\ln\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)+\ln 2\right)\times 4\text{cm}^2$

Les éditions Matrice, Janvier 2017
© ISBN : 978-2-36553-136-8
EAN : 9782365531368

Dépôt légal : N° 12980 du 1er Juillet 2016

Les éditions Matrice
(0225) 23 48 54 62/ 58 22 45 08
23 BP 2605 Abidjan 23
Email: matrice.editions@gmail.com
Site web: www.topmatrice.com

Achevé d'imprimer sur les presses des éditions Matrice Janvier 2017

MATHS T^{le}

Séries C/E

Yves Arsène SESS ♦ YAO Denis

Le *"TOP CHRONO"* est votre collection d'annales d'exercices corrigés avec méthodes de résolution, rappels de cours et sujets d'examens résolus.
Cette collection couvre la classe de CM2 et les classes du secondaire, de la sixième à la terminale, dans toutes les séries, dans les matières au programme (Mathématiques, Physique et Chimie, Sciences de la Vie et de la Terre, Philosophie, Français, Histoire et Géographie, Anglais, Espagnol, Allemand, EDHC,...)

Autres Collections

Le *"CHRONOMAÎTRE"* est une collection de cahiers d'apprentissage et de répétition. Cette collection, destinée aux élèves des classes du CP1 à la terminale, permet un suivi quotidien de l'acquisition des savoirs et savoir-faire par l'apprenant.

Le *"TOP EXPRESS"* est une collection de formulaires et d'aide-mémoire vous permettant de faire la revue complète de tout le programme de l'année en un clin d'oeil.

"TOP 10" est un recueil des 10 derniers sujets d'examen avec leurs corrections détaillées.

"MARATHON", la collection pour apprendre par l'exemple.

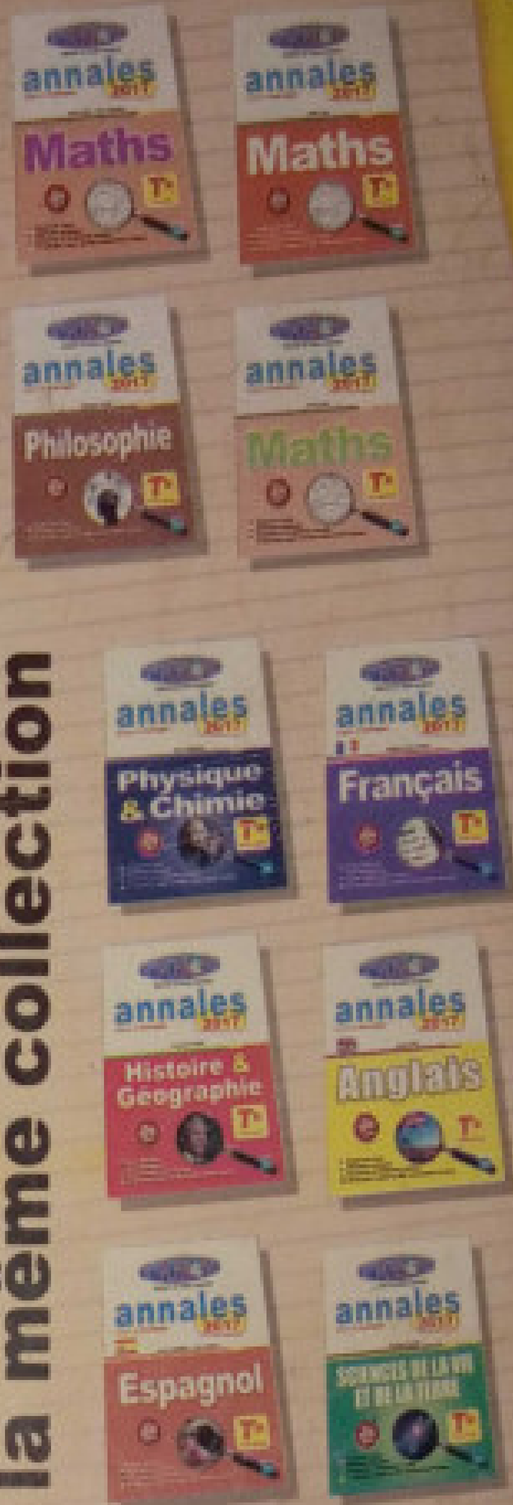
Le *"COURS MAGISTRAL"* est votre collection de manuels de cours très détaillés mais précis avec des exercices d'application adaptés afin de favoriser l'acquisition progressive des savoirs et savoir-faire. Cette collection vous aide à maîtriser vos cours et vous permet de vous préparer efficacement en vue d'affronter sereinement vos interrogations écrites, vos devoirs, vos examens et concours.

"BOUSSOLE" est une collection de manuels ludiques et éducatifs pour les tout-petits du préscolaire.

"EDEN" est une collection de la littérature sentimentale. Dans cette collection ressentez les frissons de l'Amour, vivez des aventures amoureuses palpitantes.

"INTIMES CONFIDENCES", ces récits illustrés transcrivent des faits de sociétés dans un langage simple et accessible.

Dans la même collection



Tout document non stické est un faux avec un contenu douteux.
Tout détenteur de ce type de document est passible de poursuites judiciaires.

ISBN : 978-2-36553-136-8