TRAVAUX DIRIGES N°2 DE MATHEMATIQUES T^le^D

ANNEE SCOLAIRE : 2023 – 2024

CHAPITRE : COMPLEMENTS SUR LES FONCTIONS ET ETUDE GLOBALE D'UNE FONCTION NUMERIQUE

EXERCICES INTRODUCTIFS

EXERCICES SUR LE CHOIX DE LA BONNE REPONSE

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Sans recopier l'énoncée, indiquez à chaque numéro le chiffre correspondant à la bonne réponse.

A. *Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant :*
$\forall \in \mathbb{R}, f(4-x)+f(x)=8$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$, *soit* (C) *la courbe de* f *dans un repère orthonormé* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1.) La courbe (C) *admet :*
a) Un centre de symétrie $\Omega(-2\,;4)$
b) Un centre de symétrie $\Omega(2\,;4)$
c) Un axe de symétrie d'équation $x=2$

2.) La courbe (C) *admet une asymptote d'équation :*
a) $x=5$ *b)* $y=5$ *c)* $y=5x$

3.) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *vaut :*
a) $-\infty$ *b)* 3 *c)* -5

4.) Si f *est strictement croissante sur* $]2\,;+\infty[$ *alors elle est :*
a) Croissante sur $\mathbb{R}$ *b) Décroissante sur* $]-\infty\,;2[$ *c) Non monotone sur* $\mathbb{R}$

B. *Soit* f *une fonction numérique de la variable réelle* x *et* (C_f) *sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1.) Si $f(x)=(2x+1)^3$ *alors sa dérivée vaut :*
a) $f'(x)=3(2x+1)^2$ *b)* $f'(x)=(2x+1)^2$ *c)* $f'(x)=6(2x+1)^2$

2.) Soit f *une fonction de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* f^{-1} *sa bijection réciproque. Si* $f(-2)=3$ *et* $f'(-2)=\frac{1}{4}$ *alors* $(f^{-1})(3)$ *est égale à :*
a) $\frac{3}{4}$ *b)* $\frac{4}{3}$ *c)* 4

3.) si $\forall x\mathbb{R}^*$, $3-\frac{1}{x}\le f(x)\le\frac{1}{x}+3$ *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *vaut :*
a) 0 *b)* 3 *c)* $+\infty$

4.) Si $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}$ *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *vaut :*
a) $-\infty$ *b)* 1 *c)* $+\infty$

5.) Si $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ *alors* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *vaut :*
a) 1 *b)* 0 *c)* $+\infty$

6.) Si $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+x$ *alors* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *vaut :*
a) $-\infty$ *b)* $+\infty$ *c)* $-\frac{1}{2}$

7.) Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $g(x)=x-\sqrt{x^2+1}$ *alors :*
a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\circ g)(x)=+\infty$ *b)* $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\circ g)(x)=0$ *c)* $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\circ g)(x)=-\infty$

8.) Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=0$ *alors :*
a) La courbe (C_f) *de* f *admet une branche parabolique de direction* (OI)
b) La courbe (C_f) *de* f *admet une branche parabolique de direction* (OJ)
c) La courbe (C_f) *de* f *admet une direction asymptotique.*
9.) Si f *est une fonction continue sur* $[a\,;b]\subset\mathbb{R}$ *et* $f(a)$ *et* $f(b)$ *sont de signes contraires, alors l'équation* $f(x)=0$ *admet :*
a) Au moins une solution *b) Au plus une solution* *c) Exactement une solution*
10.) Si $f(x)=cos^3 x$ *alors elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée :*
a) $f'(x)=-3\,cos^2 x$ *b)* $f'(x)=-\sin x\,cos^2 x$ *c)* $f'(x)=-3\sin x\,cos^2 x$
11.) Si $f(x)=sin(2x+7)$ *alors une primitive* F *de* f *sur* $\mathbb{R}$ *s'écrit :*
a) $F(x)=-\frac{1}{2}cos(2x+7)$ *b)* $F(x)=-2\,cos(2x+7)$ *c)* $F(x)=\frac{1}{2}cos(2x+7)$
12.) Si $f(x)=cos(3x)+x$ *alors une primitive* F *de* f *sur* $\mathbb{R}$ *s'écrit :*
a) $F(x)=-\frac{1}{3}sin(3x)+\frac{x^2}{2}$ *b)* $F(x)=-3\,sin(3x)+\frac{x}{2}$ *c)* $F(x)=\frac{1}{3}sin(3x)+\frac{x^2}{2}$
13.) Si $f(x)=3(6x-5)^2$ *alors une primitive* F *de* f *sur* $\mathbb{R}$ *s'écrit :*
a) $F(x)=\frac{1}{3}(6x-3)^3$ *b)* $F(x)=\frac{1}{6}(6x-3)^3$ *c)* $F(x)=\frac{1}{6}(6x-3)^2$
14.) Si $f(x)=2\,sin(2x-5)$ *alors une primitive* F *de* f *sur* $\mathbb{R}$ *s'écrit :*
a) $F(x)=-2\,cos(2x-5)$ *b)* $F(x)=-\,cos(2x-5)$ *c)* $F(x)=-\frac{1}{2}cos(2x-5)$

C. *Détermination d'une primitive.*
1.) La fonction $F:x\mapsto \tan x$ *est la primitive sur* $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$*, qui s'annule en* 0 *de la fonction :*
a) $x\mapsto 1+tan^2 x$ *b)* $x\mapsto\frac{1}{sin^2 x}$ *c)* $x\mapsto sin^2 x$
2.) La primitive de la fonction $x\mapsto \sin x$ *sur* $\mathbb{R}$*, qui s'annule en* 0 *est la fonction :*
a) $x\mapsto 1-cos\,x$ *b)* $x\mapsto -\,cos\,x$ *c)* $x\mapsto cos\,x-1$
3.) La primitive sur $]-1\,;\,+\infty[$ *de la fonction* $x\mapsto\frac{1}{(1-x)^3}$*, qui s'annule en* 0 *est la fonction :*
a) $x\mapsto\frac{1}{2(1-x)^2}-\frac{1}{2}$ *b)* $x\mapsto\frac{1}{4(1-x)^4}-\frac{1}{4}$ *c)* $x\mapsto\frac{-1}{2(1-x)^2}+\frac{1}{2}$
4.) La primitive sur $\mathbb{R}$ *de la fonction* $x\mapsto xcos(x^2)$*, qui prend la valeur* 1 *en* 0 *est la fonction :*
a) $x\mapsto\frac{1}{2}sin(x^2)+1$ *b)* $x\mapsto sin(x^2)+1$ *c)* $x\mapsto 2\,sin(x^2)+1$

D. *Soit* f *la fonction numérique dont le tableau de variation est le suivant :*

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	0

1.) La fonction f *est définie sur :*
a) $\mathbb{R}^*$ *b)* $\mathbb{R}_-$
c) $\mathbb{R}$ *d)* $\mathbb{R}-\{-1\}$
2.) Le sens de variation de f *est :*
a) f *est strictement croissante sur* $]-\infty\,;\,-1]$ *et strictement décroissante sur* $[-1\,;\,+\infty[$.
b) f *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}-\{-1\}$
c) f *est croissante sur* $]-\infty\,;\,-1]$ *et décroissante sur* $[-1\,;\,+\infty[$.
3.) $f'(-1)$ *vaut :*
a) $f'(-1)=2$ *b)* $f'(-1)=5$ *c)* $f'(-1)=0$
4.) D'après le tableau de variation, la courbe de f *admet une asymptote d'équation :*
a) $y=-1$ *b)* $y=0$ *c)* $x=0$
5.) D'après le tableau de variation, la droite d'équation $f(x)=0$ *admet une unique solution* α *sur l'intervalle :*
a) $]-\infty\,;-1[$ *b)* $]-\infty\,;3[$ *c)* $]3\,;0[$
6.) Si α *est l'unique solution de l'équation* $f(x)=0$*, alors le signe de* f *sur son ensemble de définition est alors :*
a) $\begin{cases}\forall x\in]-\infty\,;\alpha],f(x)>0\\ \forall x\in[\alpha\,;\,+\infty[,f(x)<0\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\forall x\in]-\infty\,;\alpha],f(x)\geq 0\\ \forall x\in[\alpha\,;\,+\infty[,f(x)\leq 0\end{cases}$

c) $\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;3], f(x) < 0 \\ \forall x \in [3\,;\,+\infty[, f(x) > 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;-1], f(x) < 0 \\ \forall x \in [-1\,;\,+\infty[, f(x) > 0 \end{cases}$

7.) D'après le tableau de variation, f réalise une bijection de $]-1\,;\,+\infty[$ vers :

a) $]0\,;3[$ *b)* $\mathbb{R}$ *c)* $]-\infty\,;3[$

***E.** Soit f la fonction numérique dont le tableau de variation est le suivant.*

x	-2		-1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$	$1 \parallel -\infty$	$\nearrow$	$\sqrt{3}$

1.) La fonction f est définie sur :

a) $[-2\,;2]$ *b)* $[-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}]$

c) $[-2\,;\,-1[\cup]-1\,;2]$ *d)* $\mathbb{R}-\{-1\}$

2.) Le sens de variation de f est :

a) f est strictement décroissante sur $[-2\,;\,-1[$ et strictement croissante sur $]-1\,;\,2]$.

b) f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}-\{-1\}$

c) f est strictement décroissante sur $[-\sqrt{3}\,;\,1[$ et croissante sur $]-\infty\,;\,\sqrt{3}[$.

3.) L'image par f' de -1

a) vaut $f'(-1) = 2$ *b) n'existe pas* *c) vaut $f'(-1) = 0$*

4.) L'image par f de -1 :

a) n'existe pas *b) vaut $f(-1) = 0$* *c) vaut $f(-1) = 1$*

5.) L'équation $f(x) = 0$ admet :

a) Aucune solution *b) Une solution*

c) Deux solutions de même signe *c) Deux solutions de signes contraires*

6.) D'après le tableau de variation, f réalise une bijection de $[-2\,;\,-1[$ vers :

a) $]-\sqrt{3}\,;1[$ *b)* $[-\sqrt{3}\,;1[$ *c)* $]-\infty\,;\sqrt{3}]$

7.) En supposant que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une notée $\alpha \in [-2\,;\,-1[$ et l'autre $\beta \in]-1\,;2]$. Le signe de f sur son ensemble de définition est :

a) $\begin{cases} \forall x \in]-2\,;\,\alpha] \cup]-1\,;\,\beta], f(x) \leq 0 \\ \forall x \in [\alpha\,;\,-1[\cup [\beta\,;2], f(x) \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;\,\beta] \cup]-\sqrt{3}\,;\,1], f(x) \leq 0 \\ \forall x \in [\alpha\,;\,1[\cup \left[\beta\,;\sqrt{3}\right], f(x) \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \forall x \in]-2\,;\,\alpha] \cup]-1\,;\,\beta], f(x) < 0 \\ \forall x \in [\alpha\,;\,-1[\cup [\beta\,;2], f(x) > 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;\,\alpha] \cup]-\sqrt{3}\,;\,1], f(x) \leq 0 \\ \forall x \in [\alpha\,;\,1[\cup \left[\beta\,;\sqrt{3}\right], f(x) \geq 0 \end{cases}$

***F.** On considère une fonction numérique f dérivable sur son domaine de définition D_f, de dérivée f'. Son tableau de variation est donné ci – contre. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J).*

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
f '(x)		+	$\parallel$	-	0	+	
f(x)	-3	$\nearrow$	$+\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Nº	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1	*L'ensemble de définition de f est :*	$\mathbb{R}-\{-2\}$	$\mathbb{R}-\{2\,;3\}$	$\mathbb{R}-\{2\}$	$\mathbb{R}$
2	*L'équation $f(x) = 0$ admet exactement :*	*trois solutions*	*deux solutions*	*une solution*	*Aucune solution*
3	*La courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation :*	$x = 2$	$x = -3$	$y = 2$	$y = -3$
4	*La courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation :*	$x = 2$	$x = -3$	$y = 2$	$y = -3$
5	*La tangente à (C) au point d'abscisse $x_0 = 3$ a pour équation :*	$x = 1$	$y = 2$	$y = 3x + 2$	$y = 2x + 3$
6	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ *est égale à :*	0	-3	$-\infty$	$+\infty$

AUTRES TYPES D'EXERCICES INTRODUCTIFS

INTRODUCTIF 1

1.) Calculer les limites en $-\infty$ des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \frac{1-x}{2x^3+5}$ $\quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2}}$ $\quad f_3(x) = \frac{2-2x^3}{x^3-2x^2+4x-1}$

$f_4(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ $\quad f_5(x) = \sqrt{x^2+x} + x$ $\quad f_6(x) = 1 + \frac{x}{2+\sqrt{1+x^4}}$

$f_7(x) = \sqrt{1-x^3} + x - 1$ $\quad f_8(x) = \sqrt{3x^2-6x-1} + 2x - 5$ $\quad f_9(x) = mx - \sqrt{1+x^2}, (m \in \mathbb{R})$

2.) Calculer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \frac{1-x}{x^3}$ $\quad f_5(x) = cos\left(\frac{\pi x+1}{2-x}\right)$

$f_2(x) = \sqrt{x^2-3x} - 3x$ $\quad f_6(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2}$

$f_3(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$ $\quad f_7(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+2}$

$f_4(x) = \sqrt{2x^2+1} - x + 2$ $\quad f_8(x) = \frac{2}{x-1} - \sqrt{x+1}$

INTRODUCTIF 2

1.) Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$ $\quad$ *b)* $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$

2.) Etudier la limite de f en x_0 dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ *et* $x_0 = 0$ $\quad$ *b)* $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ *et* $x_0 = 0$

c) $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ *et* $x_0 = 0$ $\quad$ *d)* $f(x) = \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ *et* $x_0 = \frac{\pi}{2}$

e) $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$ *et* $x_0 = 0$ $\quad$ *f)* $f(x) = \frac{\sqrt{5x+1}-\sqrt{4x+4}}{x-3}$ *et* $x_0 = 3$.

INTRODUCTIF 3

1.) Dans chacun des cas suivants, montrer que f est continue sur l'intervalle I puis calculer $f(I)$.

a) $f(x) = x^2 + 2$ *et* $I = [-1\,;3]$ $\quad$ *b)* $f(x) = \tan x$ *et* $I =]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$

c) $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$ *et* $I = [5\,;8]$ $\quad$ *c)* $fx) = 2x\sqrt{x+1}$ *et* $I = [3\,;5]$

2.) Dans chacun des cas suivants, montrer que f admet un prolongement par continuité en x_0 puis donner ce prolongement.

a) $f(x) = \frac{x^3-2x^2+3x+1}{x+1}$ *et* $x_0 = -1$ $\quad$ *b)* $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ *et* $x_0 = 1$

c) $f(x) = (x-1).sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$ *et* $x_0 = 1$ $\quad$ *d)* $f(x) = \frac{x\sin x}{\cos x - 1}$ *et* $x_0 = 0$

3.) Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = sin(2x^2-1)$ *et* $I = \mathbb{R}$ $\quad$ *b)* $f(x) = (2x+3)^3$ *et* $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *et* $I = \mathbb{R}$ $\quad$ *d)* $f(x) = \frac{2x-5}{x^2+3}$ *et* $I = \mathbb{R}$

4.) Dans chacun des cas suivants, montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ *et* $I = [1\,;+\infty[$ $\quad$ *b)* $f(x) = \sqrt{x^2-x} - x$ *et* $I =]-\infty\,;0]$

INTRODUCTIF 4

1.) Dans chacun des cas suivants, étudier les branches infinies de la courbe (C_f) de la fonction numérique de la variable réelle x :

a) $f(x) = \frac{x^2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ $\quad$ *b)* $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x$ $\quad$ *d)* $f(x) = \frac{2}{x-1} - \sqrt{x+1}$

e) $f(x) = x - 2\sqrt{x-2}$ $\quad$ *f)* $f(x) = \frac{-3x^2+5x-1}{x+4}$

2.) On donne la fonction g sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x-2}$.
Étudier la dérivabilité de g en 2 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

INTRODUCTIF 5

1.) Soit la fonction f définie sur $]-\infty;\frac{1}{2}]$ par $f(x)=x^2-x$.
a) Démontrer que f réalise une bijection de $]-\infty;\frac{1}{2}]$ sur $[-\frac{1}{4};+\infty[$.
b) Calculer $f(-1)$.
c) Démontrer que la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$.
2.) Déterminer deux intervalles I et J pour que la fonction h définie par $h(x)=\sqrt{x+2}$ soit une bijection de I sur J.
3.) Soit g la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2-x-5}{x-3}$.
a) Montrer que $\forall x\in[4\,;5],|f'(x)|\leq\frac{3}{4}$.
b) En déduire que $\forall x\in[4\,;5]$, on a : $\left|f(x)-\frac{15}{2}\right|\leq\frac{3}{4}|x-5|$.

INTRODUCTIF 6

Soit la fonction f définie sur $]0\,;\frac{\pi}{2}]$ par $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$.
1.) Étudier les variations de f.
2.) Montrer que f réalise une bijection de $]0\,;\frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
3.) On note f^{-1} sa fonction réciproque.
a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J-\{1\}$ et expliciter $(f^{-1})'(x)$.
b) La fonction f^{-1} est – elle dérivable à droite en 1 ? Justifier votre réponse.

INTRODUCTIF 7

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.
1.) $F(x)=8x^3-12x^2+6x-7$; $f(x)=6(2x-1)^2$ avec $I=\mathbb{R}$.
2.) $F(x)=-2\cos(3x+2)$; $f(x)=6\sin(3x+2)$ avec $I=\mathbb{R}$.
3.) $F(x)=\sqrt{2x+1}$; $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ avec $I=]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$.
4.) $F(x)=\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)^2$; $f(x)=\frac{(x\sqrt{x}-1)(2+x\sqrt{x})}{x^3}$ avec $I=]0\,;\,+\infty[$.

INTRODUCTIF 8

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=-\frac{1}{x^2}+8x^3-3$.
1.a) Montrer que la fonction G définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $G(x)=\frac{1}{x}+2x^4-3x$ est une primitive de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
b) Déterminer toutes les primitives de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
2.) Déterminer la primitive G_0 de g sur $]0\,;\,+\infty[$ vérifiant $G_0(-1)=2$.

INTRODUCTIF 9

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.
a) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $I=\mathbb{R}$
b) $f(x)=2(2x+3)^5$ et $I=\mathbb{R}$
c) $f(x)=\frac{\sin x}{(1+\cos x)^3}$ et $I=]0\,;\,\pi[$
d) $f(x)=x^2\sin(x^3)$ et $I=\mathbb{R}$
e) $f(x)=\frac{1}{(2x-3)^3}$ et $I=]-\infty\,;\frac{1}{2}[$
f) $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$ et $I=\mathbb{R}$
g) $f(x)=-x^3+2x^2+5$ et $I=\mathbb{R}$
h) $f(x)=\sin(2x+1)$ et $I=\mathbb{R}$
i) $f(x)=\sin x\cos^2 x$ et $I=\mathbb{R}$
j) $f(x)=\cos(2x)-2\cos x$ et $I=\mathbb{R}$
k) $f(x)=\frac{1}{3}(5x^4+1)\sin(x^5+x)$ et $I=\mathbb{R}$
l) $f(x)=(2x+1)^4$ et $I=\mathbb{R}$
m) $f(x)=(2x-1)(x^2-x+1)$ et $I=\mathbb{R}$
n) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ et $I=]1\,;\,+\infty[$
o) $f(x)=\frac{x}{(x^2-1)^2}$ et $I=]-\infty\,;\,-1[$
p) $f(x)=x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $I=]0\,;\,+\infty[$
q) $f(x)=x\cos\left(3x^2-\frac{\pi}{4}\right)$ et $I=\mathbb{R}$
r) $f(x)=\frac{x(2x^2+1)}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$ et et $I=\mathbb{R}$

INTRODUCTIF 10

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I vérifiant la condition indiquée.
a) $f(x)=x^3-x^2-1$; $I=\mathbb{R}$ et $F(0)=7$

b) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$; $I=]0\,;\,+\infty[$ et $F(1)=0$
c) $f(x)=(2x-3)(x^2-3x-6)^2$; $I=\mathbb{R}$ et $F(-1)=9$
d) $f(x)=\frac{3x}{(x+1)^2}$; $I=\mathbb{R}$ et $F(\sqrt{2})=-2$
e) $f(x)=(4x-3)^6$; $I=\mathbb{R}$ et $F(3)=0$
f) $f(x)=\frac{2}{(3-x)^3}$; $I=]-\infty\,;3[$ et $F(0)=0$
g) $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}$; $I=]-\infty\,;1[$ et $F(0)=\sqrt{5}$
h) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$; $I=\mathbb{R}$ et $F(0)=1$
i) $f(x)=sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$; $I=\mathbb{R}$ et $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{6}$
j) $f(x)=sin\,x\,cos^4\,x$; $I=\mathbb{R}$ et $F(\pi)=0$
k) $f(x)=\frac{sin\,x}{cos^3\,x}$; $I=]0\,;\frac{\pi}{2}[$ et $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$
l) $f(x)=\frac{sin\,x-xcos\,x}{x^2}$; $I=]0\,;\,+\infty[$ et $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$
m) $f(x)=x^3-\frac{2}{x^2}$; $I=]0\,;\,+\infty[$ et $F(2)=0$
n) $f(x)=3\sin x-4\cos x$; $I=\mathbb{R}$ et $F(\pi)=-1$
o) $f(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}+\sin x$; $I=]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$ et $F(0)=1$
p) $f(x)=2x-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}$; $I=]0\,;\,+\infty[$ et $F(1)=1$

INTRODUCTIF 11

Soient f et g deux fonctions numériques respectivement définies sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ par :
$f(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ et $g(x)=\frac{sin\,x}{cos^3\,x}$.
1.a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que $\forall x\in[0\,;\,+\infty[, f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2}$.
b) En déduire la primitive F de la fonction f de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ qui vérifie $F(1)=\frac{5}{2}$.
2.a) Vérifier que g est dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ de dérivée $g'(x)=\frac{3}{cos^4\,x}-\frac{2}{cos^2\,x}$
b) Déterminer une primitive de la fonction h définie par $h(x)=\frac{1}{cos^4\,x}$.

INTRODUCTIF 12

Soient f ; g et h trois fonctions numériques respectivement définies par :
$f(x)=\frac{2x+1}{(x-2)^3}$; $g(x)=\frac{3x^2-4x+1}{(2x^2-x)^2}$ et $h(x)=sin\,2x\,cos^3\,x$.
1.) Déterminer les ensembles de définitions respectifs des fonctions f, g et h.
2.a) Déterminer les nombres réels a et b tels que : $\forall x\in D_f, f(x)=\frac{a}{(x-2)^2}+\frac{b}{(x-2)^3}$.
b) En déduire une primitive F de f sur $]-\infty\,;2[$.
3.a) Déterminer les nombres réels c et d tels que : $\forall x\in D_g, g(x)=\frac{c}{x^2}+\frac{d}{(2x-1)^2}$.
b) Déterminer la primitive F de f sur $]-\infty;0[$ qui s'annule en -1.
4.) Linéariser la fonction h puis déduire une primitive H de h vérifiant $F(0)=-1$.

INTRODUCTIF 13

Soient f, g, h et k quatre fonctions numériques respectivement définies par :
$f(x)=(cos\,3x+1)^{\,2}$; $g(x)=sin\,3x(cos\,3x+1)$; $h(x)=\frac{x^4-12x^3+50x^2-84x+46}{x^2-6x+9}$ et
$k(x)=sin^4(2x)$.
1.a) Calculer la dérivée $f'(x)$ et déduire l'ensembles des primitives G de la fonction g.
b) Déterminer la primitive de g qui prends la valeur 1 en $\frac{\pi}{3}$.
2.a) Déterminer l'ensemble de définition D_h de la fonction h.
b) Déterminer les réels a, b, c et d tels que $\forall\in D_h, h(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{(x-3)^2}$.
c) En déduire une primitive H de h sur D_h.
3.a) Montrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $k(x)=\frac{1}{8}cos(8x)-\frac{1}{2}cos(4x)+\frac{3}{8}$.
b) Déduis – en la primitive K de k qui s'annule en $\frac{\pi}{4}$.

PROBLEMES DE SYNTHESE

PROBLEME 1

On désir étudier la fonction numérique de la variable réelle f définie par $f(x)=\frac{x^3-4}{x^2+1}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique $1\ cm$.

***Partie A* : Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+3x+8$.

1.a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α dans l'intervalle $[-1{,}6\ ;\ -1{,}5]$.

c) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

2.) Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

***Partie B* : Étude de la fonction numérique f**

1.a) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.

b) Montrer que $\forall x\in D_f, f'(x)=x\times\frac{g(x)}{(x^2+1)^2}$.

c) Déduis – en le sens de variation de f sur son ensemble de définition qu'on notera D_f.

d) Dresser le tableau de f.

2.) On admet que $\forall x\in D_f, f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$.

En déduire en encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

3.a) Démontrer qu'il existe des nombres réels a,b,c et d tels que : $\forall x\in D_f, f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$.

b) Montrer que la courbe (C) admet une asymptote oblique (Δ) à l'infinie dont on donnera l'équation.

c) Étudier la position relative de (C) par rapport à (Δ).

4.) Déterminer les abscisses des points B et B' de (C) admettant une tangente parallèle à (Δ).

5.) Construire la courbe (C) et (Δ).

PROBLEME 2

On désir étudier la fonction numérique de la variable réelle f définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\frac{1-x}{1+x^3}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique $2\ cm$.

***Partie A* : Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3-3x^2-1$.

1.) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2.) Étudier le sens variation de g et dresser son tableau de variation.

3.a) Démontrer que l'équation $g(x)=\ 0$ admet une solution unique α et que :
$1{,}6<\alpha<1{,}7$.

b) Déduis – en le signe de g sur $\mathbb{R}$.

***Partie B* : Étude de la fonction numérique f**

1.) Calculer les limites de f en -1 et en $+\infty$ puis interpréter graphiquement les résultats.

2.a) Démontrer que : $\forall\ x\in]-1;\ +\infty[, f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

d) Étudier la position de (C) par rapport à (T).

3.a) Montrer que $\forall x\in D_f, f(\alpha)=\frac{2}{3}\times\frac{1-\alpha}{1+\alpha^2}$.

b) En déduire en encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

4.) Tracer (T) et (C).

PROBLEME 3

On désir étudier la fonction numérique de la variable réelle f définie par : $f(x)=-\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique $2\ cm$.

***Partie A* : Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit g la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $g(x)=2-x^2\sqrt{x^2-1}$.

1.a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
b) Calculer la limite de g en $+\infty$
c) Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
2.a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$.
b) Donner un encadrement puis une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
3.) Justifier que : $\begin{cases} \forall x \in]1 ; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha ; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$.

Partie B : Étude de la fonction numérique f

1.) Étudier la parité de f.
2.a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{x}{2} + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
c) Étudier la position de (C) par rapport à (D) sur $]1 ; +\infty[$.
3.) Étudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter graphiquement le résultat.
4.a) Démontrer que : $\forall\, x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2\sqrt{x^2-1}}$
b) Dresser le tableau de variation de f.
5.a) Démontrer que : $f(\alpha) = -\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{\alpha^3}$.
b) Déduis – en une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près.
6. Tracer (C) et (D).

PROBLEME 4

On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$
de représentation graphique (C_g) dans le plan muni un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A : Étude d'une fonction irrationnelle

1.a) Sur quel ensemble la fonction g est – elle définie ?
b) Écrire g sans le symbole de la valeur absolue.
c) Étudier la continuité et la dérivabilité de g en -1 et en 1.
Interpréter graphiquement ces résultats.
2.a) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
b) Calculer la dérivée g' de g puis étudier le sens de variation de g.
c) Dresser le tableau de variation de g.
3.a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $-1 \leq \alpha \leq 0$.
Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
b) Déduis – en le signe de g sur son ensemble de définition.
4.a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à (C_g) en $-\infty$.
b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse nul. c) Construire (C_g) ; (T) et (D).

Partie B : Étude d'une fonction réciproque

Soit f la restriction de g à $[1 ; +\infty[$.
1.) Démontrer que f réalise une bijection de $[1 ; +\infty[$ vers un intervalle I que l'on précisera.
2.) On note f^{-1} la bijection réciproque de f.
a) Déterminer l'ensemble de définition de f^{-1}.
b) Ecrire explicitement f^{-1}.
c) Construire la courbe $(C_{f^{-1}})$ de f^{-1}.

PROBLEME 5 *(Cf Composition Régionale du Premier Semestre Grand Lomé 2015)*

Soit f une fonction définie sur $[\frac{\pi}{2} ; \pi[$, par $f(x) = \frac{1}{1+\cos x}$ et (C) sa courbe dans le plan muni de repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
1.a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.
b) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau variation.
2.a) Montrer f que réalise une bijection de $[\frac{\pi}{2} ; \pi[$ sur un intervalle J à préciser.
b) La réciproque f^{-1} est –elle dérivable sur J ? Justifier.

3.a) Déterminer l'antécédent de 2 *par* f^{-1}
b) Calculer $(f^{-1})'(2)$.
4.a) Montrer qu'une primitive de f *sur* $[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi[$, *est une fonction définie par :* $F(x) = tan\left(\frac{x}{2}\right) + t\ ;\ t \in \mathbb{R}$.
b) Déterminer la primitive de qui prend la valeur 2 *en* $\frac{\pi}{2}$.

PROBLEME 6

On considère la fonction h *définie sur* $[-1\ ;\ +\infty[$ *par* $h(x) = 2x - 3 + \sqrt{x+1}$.
1.) Déterminer le sens de variation de h *sur* $[-1\ ;\ +\infty[$ *puis déterminer* $h(\,[-1\ ;\ +\infty[\,)$.
2.a) En déduire que l'équation $h(x) = 0$ *a une solution unique* α *dans* $[-1\ ;\ +\infty[$.
b) Montrer que $0 < \alpha < 1$.
c) Donner un encadrement à 10^{-2} *près de* α.
3.) On désigne par h^{-1} *la bijection réciproque de* h.
a) Calculer $h(0)$ *puis déterminer* $(h^{-1})'(-2)$.
b) Quel est le sens de variation de h^{-1}.
4.) On désigne par (C) *et* (C') *les représentations graphiques respectives de* h *et* h^{-1} *dans un repère orthonormé* (O, I, J).
a) Comment obtient – on (C') *à partir de* (C).
b) Tracer l'allure de chacune des courbes (C) *et* (C') *dans le repère (On utilisera des couleurs différentes).*

PROBLEME 7

Soit f *la fonction numérique de la variable réelle* x *définie par :* $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ *de représentation graphique* (C_f) *dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

***Partie A* : Étude de la fonction numérique *f*.**

1.a) Vérifier que la fonction f *est définie sur l'ensemble* $]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$.
b) Calculer les limites de f *aux bornes de son domaine de définition* D_f *puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.*
2.a) Montrer que la fonction f *est dérivable sur son ensemble de définition puis vérifier que :*
$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$.
b) Donner le sens de variation de f.
c) Dresser le tableau de variation de f *et vérifier que* $f([2\ ;3]) \subset [2\ ;3]$.
d) Montrer que l 'équation $f(x) = x$ *admet une unique solution* α *et que* $\alpha \in [2\ ;3]$.
e) Déduis – en le signe de f *sur son ensemble de définition.*
3.a) Montrer que pour tout $x \in [2\ ;3], |f'(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$.
b) Déduis – en que pour tout $x \in [2\ ;3], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}|x - \alpha|$.
4.a) Montrer que f *réalise une bijection de* $]1\ ;\ +\infty[$ *sur un intervale* J *que l'on précisera.*
b) Calculer $f(3)$ *puis déduire la valeur exacte de* $(f^{-1})'\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{4}\right)$.
c) Montrer que pour tout $x \in J, f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.
5.) On désigne par $\left(C_{f^{-1}}\right)$ *la courbe de* f^{-1}. *Représenter les courbes* (C_f) *et* $\left(C_{f^{-1}}\right)$.

***Partie B* : Étude d'une primitive.**

Soit g *une fonction numérique de la variable réelle* x *définie par :*
$g(x) = x - (3 + 2\sqrt{2}) + \sqrt{x^2-1}$ *et* (C_g) *sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
1.) Calculer $g'(x)$ *puis déduire que* g *est une primitive de la fonction* f *qui s'annule en* 3.
b) Calculer les limites de g *aux bornes de son ensemble de définition que l'on précisera.*
2.) Déduire de la partie A, le sens de variation de g *puis dresser son tableau de variation.*
3.) Étudier les branches infinies de g.
4.) Construire la courbe (C_g) *dans le même repère que les autres courbes.*

PROBLEME 8

Soit f *la fonction définie par :* $f(x)=\begin{cases}\frac{x(x-2)}{x-1} & si\ x<0\\ x+\sqrt{|x^2-x|} & si\ x\geq 0\end{cases}$.

On note par (C_f) *la courbe représentative de* f *dans un repère orthonormé* (O,I,J).

1.a) Déterminer le domaine de définition D_f *de* f *puis calculer les limites de* f *aux bornes de ce domaine.*

b) Étudier la continuité et la dérivabilité de f *en* 0 *et* 1.

Interpréter graphiquement les résultats.

2.) Calculer $f'(x)$ *sur chaque intervalle où* f *est dérivable.*

3.a) Résoudre dans $]0\ ;\ 1[$*, l'inéquation* $2\sqrt{x^2-x}+1-2x\leq 0$

b) En déduire le signe de $f'(x)$ *sur* $]0\ ;\ 1[$ *puis étudier son signe sur les autres intervalles.*

4.) Dresser le tableau de variation de f.

5.a) Montrer que (C_f) *admet une asymptote oblique* (Δ_1) *en* $+\infty$.

b) Étudier la position relative de (C_f) *par rapport à* (Δ_1) *sur* $]1\ ;+\infty[$.

6.a) Montrer que (C_f) *admet une asymptote oblique* (Δ_2) *en* $-\infty$.

b) Étudier la position relative de (C_f) *par rapport à* (Δ_2) *sur* $]-\infty\ ;\ 0[$.

7.) Construire $\left(C_f\right)$ *et ses asymptotes.*

8.) Soit g *la restriction de* f *à l'intervalle* $I=]1\ ;\ +\infty[$.

a) Montrer que g *est une bijection de* I *sur un intervalle* J *à préciser.*

b) La bijection réciproque g^{-1} *de* g *est-elle dérivable sur* J *?*

Calculer $(g^{-1})'(2)$.

c) Expliciter $(g^{-1})(x)$ *pour* $x\in J$.

d) Construire $(C_{g^{-1}})$ *la courbe de* g^{-1} *dans le même repère que* (C_f).

PROBLEME 9 *(Cf Devoir Surveillé du Premier Semestre Lyçée Lomé port 2021 - 2022)*

Partie A : Résolution d'une inéquation irrationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'inéquation suivante :* $\sqrt{x^2-1}\leq 1$.

Partie B : Étude d'une fonction irrationnelle

Soit f *la fonction numérique sur* $\mathbb{R}$ *définie par* $f(x)=\frac{1+\sqrt{|1-x^2|}}{x}$, (C) *est sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé* (O,I,J).

1.a) Montrer que l'ensemble de définition D_f *de* f *est* $\mathbb{R}^*$.

b) Étudier la parité de f*. Interpréter graphiquement ce résultat.*

c) Calculer les limites de f *aux bornes de* D_f.

2.a) Écrire $f(x)$ *sans le symbole valeur absolue suivant les valeurs de* x.

b) Étudier la dérivabilité de f *en* -1 *et en* 1.

Interpréter graphiquement ces résultats.

3.a) Montrer que $f'(x)=\begin{cases}-\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}, \forall x\in]-1\ ;0[\cup]0\ ;1[\\ \frac{1-\sqrt{x^2-1}}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\end{cases}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ *suivant les valeurs de* x.

(On pourra se servir de la Partie A)

c) Donner le sens de variation de f *puis dresser son tableau de variation.*

4.) Étudier les branches infinies de (C).

5.) Tracer (C) *et ses asymptotes éventuelles dans le plan.*

Partie C : Étude d'une fonction réciproque

1.) Montrer que la restriction h *de* f *à l'intervalle* $I=]\sqrt{2}\ ;\ +\infty[$ *est une bijection sur un intervalle* J *à déterminer.*

2.) La bijection h^{-1} *est-elle dérivable sur* J *? Justifier.*

3.) Calculer $f\left(\sqrt{5}\right)$ *puis en déduire la valeur exacte de* $(h^{-1})'\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$

4.a) Dresser le tableau de variation de h^{-1}.

b) Tracer la courbe (C') *de* h^{-1} *dans le même repère que* (C).

PROBLEME 10 *(Cf Composition Régionale du Premier Semestre Grand Lomé 2021)*

***Partie A* : Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$.

1.a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 2\sqrt{1+x^2} - x > 0$.

b) Étudier les variations de la fonction g.

2.a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Vérifier que $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

***Partie B* : Étude d'une fonction numérique f**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé. On note (D) et (D') les droites d'équations respectives $y = -3x$ et $y = x$

1.) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

2.) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

3.) Donner le tableau de variation de la fonction f

4.a) Démontrer que les droites (D) et (D') sont des asymptotes à la courbe (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Préciser les positions relatives de (C) par rapport aux droites (D) et (D')

5.) Tracer la courbe (C).

6.) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\,;\,\alpha]$

a) Démontrer que h est une bijection de $]-\infty\,;\,\alpha]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) On note h^{-1} la bijection réciproque de h. Calculer $h(0)$ et $(h^{-1})'(2)$.

c) Construire (C'), la courbe de h^{-1} dans le même repère que (C).

PROBLEME 11 *(Cf Composition Régionale du Premier Semestre Grand Lomé 2022)*

On considère la fonction numérique f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$.

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

***Partie A* : Étude d'une fonction irrationnelle**

1.) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2.) Ecrire la fonction f sans le symbole de valeur absolue.

3.) Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.

4.a) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 3 puis interpréter graphiquement les résultats.

b) Etudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

5.) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

6.a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + x - 1 \leq 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{-x^2 + 2x + 3} - x + 1 \leq 0$.

c) En déduire le sens de variation de f.

7.) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition puis étudier les branches infinies de (C_f).

8.) Dresser le tableau de variation de f puis tracer sa courbe (C_f).

***Partie B* : Étude d'une fonction réciproque**

Soit g la restriction de f sur $]-\infty\,;\,-1]$.

1.) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1}.

2.) Trouver l'ensemble de dérivabilité de g^{-1}.

3.) Calculer $(g^{-1})'(0)$.

4.) Expliciter $g^{-1}(x)$ puis tracer sa courbe $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère que (C_f).