EXERCICE 3

1)a- Etudions les variations de $g(x) = x + 1 + 2x\ln(-x)$

$$Dg = \{x \in \mathbb{R} / -x > 0\}$$

$$Dg =]-\infty; 0[$$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ ***car*** $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 2x\ln(-x) = -\infty \end{cases}$

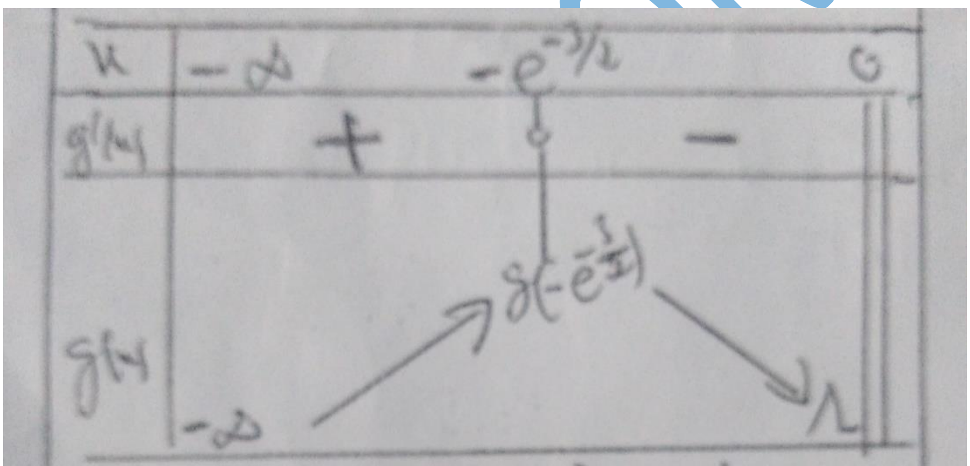
• $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 1$ $car \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} (x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} 2x\ln(-x) = 0 \end{cases}$

•g est continue et dérivable sur $]-\infty; 0[$ ***et on a :***

$$g'(x) = 3 + 2\ln(-x)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln(-x) = -3$$

$$\Leftrightarrow x = -e^{-\frac{3}{2}}$$



g est strictement croissant sur $]-\infty; -e^{-3/2}[$ ***et décroissant sur*** $[-e^{-\frac{3}{2}}[$

b) Calculons g(-1)

g(-1)=0

c) Déduisons-en le signe de g(x)

•$\forall\ x\epsilon]-\infty\,;-1[\,;g(x)\epsilon]-\infty\,;0[\ alors\ g(x)<0$

•$\forall x\epsilon]-1\,;0[\,;g(x)\epsilon]0\,;1[\ alors\ g(x)>0$

2)a-Etudions la continuité de f en 0

• $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x+1+x^2\ln(-x)=1\ car\ \lim\limits_{x\to 0^-} x+1=1\ et\ \lim\limits_{x\to 0^-} x^2\ln(-x)=0$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)^2e^{-x}=1\ car\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)^2=1\ et\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x}=1$

•f(0)=1

Alors f est continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1$

b) Etudions la dérivabilité de f en 0

• $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0^-}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x+1+x^2\ln(-x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}[1+x\ln(-x)]=1\ car\ \lim\limits_{x\to 0^-} x\ln(-x)=0$

• $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(x+1)^2e^{-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} x+2-\left[\frac{(e^{-x}-1)}{-x}\right]=1\ car\ \lim\limits_{x\to 0^+} x+2=2\ et\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-x}-1}{-x}=1$

Conclusion $f'_g(0)=f'_d(0)=1$. ***Alors f est dérivable en 0 de nombre dérivé 1***

3)a-Calculons limites de f en -∞et +∞

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+1+x^2\ln(-x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x[1+\frac{1}{x}+x\ln(-x)]=-\infty\ car$

$$\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\ et\ \lim\limits_{x\to-\infty} x\ln(-x)=-\infty$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-x}=0\ car\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

b) Prouvons que $\forall x\in]-\infty\,;0[\ f'(x)=g(x)$

$$\forall x\in]-\infty;0[;f\ est\ continue\ et\ dérivable\ et\ on\ a: f'(x)=1+2x\ln(-x)+\frac{x^2}{x}$$

$$f'(x)=x+1+2x\ln(-x)=g(x)\ alors\ \forall x\in]-\infty;0[;f'(x)=g(x)$$

c) Justifions que $\forall x\in[0;+\infty[;f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$

***f* est continue et dérivable sur [0 ;+∞[** *et on a* $f'(x) = 2(1)(x+1)e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2$

$$f'(x) = (x+1)e^{-x}[2-(x+1)]$$

$$f'(x) = (1+x)(1-x)e^{-x}$$

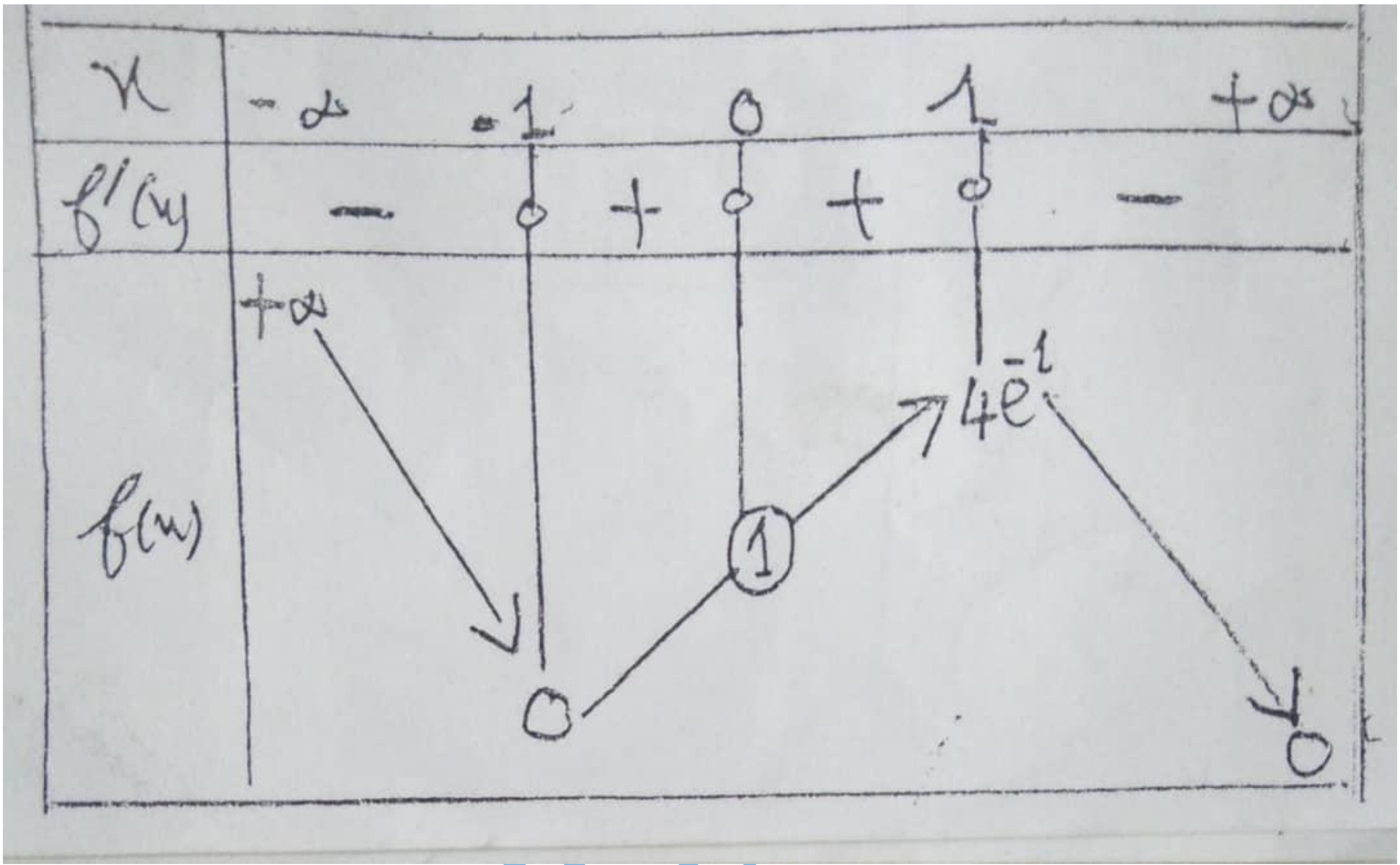
Alors $f'(x) = (1-x^2)e^{-x}\ \forall x \in [0\,;+\infty[$

d) Dressons alors le tableau des variations de f

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$		$+$					
$1-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$		$+$	
$(1-x^2)e^{-x}$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

•$\forall x \in]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[\,; f'(x) < 0$ *alors f est strictement décroissante sur* $]-\infty\,;-1]$ *et* $[1\,;+\infty[$

•$\forall x \in]-1\,;1[\ f'(x) > 0$ *alors f est strictement croissant sur* $[-1\,;1]$



4)a- Démontrons que l'équation f(x)=x admet dans [0 ;+∞[une solution unique α

Posons $h(x) = f(x) - x$

H est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ *et on a* $h'(x) = f'(x) - 1$

$$\forall x \in [0; +\infty[; h'(x) < 0; donc\ h\ est\ strictement\ décroissante\ sur\ [0; +\infty[.$$

$$h(1) \times h\left(\frac{3}{2}\right) < 0\ du\ coup\ l'équation\ h(x) = 0\ c'est\ à\ dire$$

$$f(x) = x\ admet\ dans\ [0; +\infty[\ une\ solution\ unique\ \alpha \epsilon]1; \frac{3}{2}[$$

b) Démontrons que $\forall x \in [1 ; \frac{3}{2}[\ f(x) \in \left[1 ; \frac{3}{2}\right]$

Posons I= $[1; \frac{3}{2}]$

•f est strictement décroissante sur [1 ; +∞[donc $f\left(\left[1;\frac{3}{2}\right]\right)=[f\left(\frac{3}{2}\right);f(1)]=[\frac{25}{4}e^{-\frac{3}{2}};4e^{-1}]$

Or $\left[\frac{25}{4}e^{-\frac{3}{2}};4e^{-1}\right]\subset I$ *alors* $\forall\in[1;\frac{3}{2}[, f(x)\in I$

c) Démontrons que pour tout $x\left[1;\frac{3}{2}\right];\ |f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

$\bullet\forall x\in I;\ -\frac{5}{4}\leq -x^2+1\leq 0\,;donc\ |1-x^2|\leq\frac{5}{4}$

•Pour tout $x\in I; e^{-\frac{3}{2}}\leq e^{-x}\leq e^{-1}$ *donc* $|e^{-x}|\leq e^{-x}$

Ainsi pour tout $x\in\left[1\,;\frac{3}{2}\right];\ |f'(x)|\leq\frac{1}{2}car\,|f'(x)|\leq\frac{5}{4e}et\frac{5}{4e}\leq\frac{1}{2}$

d) Déduisons-en que $\forall x\in I\ |f(x)-\alpha|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$

$$\forall x\in\left[1;\frac{3}{2}\right];|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$$

D'après le théorème d'inégalité des accroissement finis on a :

$$|f(x)-f(\alpha)|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|\ or\ f(\alpha)=\alpha\ ainsi\ \forall x\in I$$

$$|f(x)-f(\alpha)|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$$

5)a- Démontrons que $\forall x\epsilon IR\ f(x)=e^{-x}(2x-2)-f'(x)$

$$f(x)+f'(x)=(x-1)^2e^{-x}+(1-x^2)e^{-x}$$

$$=e^{-x}(x^2+2x+1+1-x^2)$$

$$f(x)+f'(x)=(2x+2)e^{-x}\Rightarrow f(x)=\boldsymbol{(2x+2)e^{-x}-f'(x)}\quad \textbf{\textit{cqfd}}$$

b) Calculons $P=\int_0^2(2x+2)e^{-x}\,\boldsymbol{dx}$

Posons $u(x)=2x+2$ *et* $v'(x)=e^{-x}$

$u'(x)=2$ *et* $v(x)=-e^{-x}$

$P = [-e^{-x}(2x+2)]_0^2 + \mathbf{2}\int_0^2 e^{-x}\,dx$

$\underline{P = 4e - 8e^{-2}}$

c)Déduisons $\mathcal{A}$

$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)dx \times u.a$

$\mathcal{A} = \int_0^2 [(2x+2)e^x - f'(x)]dx \times u.a$

$\mathcal{A} = (P - [f(x)]_0^2) \times u.a$

$\mathcal{A} = P - (9e^{-2} - 1) \times u.a$

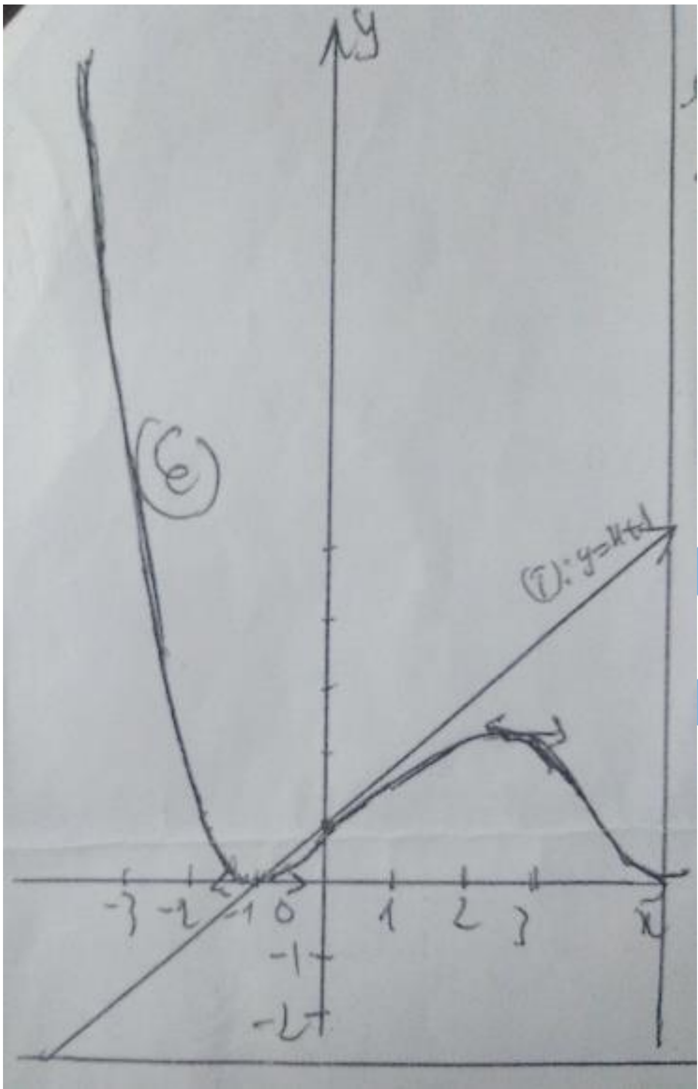
$\underline{\mathcal{A} = 4e + 1 - 17e^{-2} \times u.a}$

6)a- Etudions les branches infinies de la courbe (C) de f

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *alors la droite d'équation* $y = 0$ *est asymptote horizontale à* (C) *au voisinage de* $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ ***alors (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de*** $-\infty$

b) Construisons (C)


y
(C)
-3 -2 -1 0 1 2 3
x
-1
-2