EXERCICE SUR LES NOMBRES COMPLEXES (Tle scientifique)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexe, l'équation :
(E) : $iz^4+(1+2i)z^3-(3+i)z^2+2(-9+7i)z+24i=0$

1)Démontre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure Z_0 que tu préciseras .

2)Démontre que l'équation P(z)=0 admet une solution réelle Z_1 que tu préciseras.

3) a- Calcule $(-3-3i)^2$

b-Achève alors la résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

4)Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O,I,J)d'unité longueur 100m . On considère les points A,B,Cet D d'affixe respectives 2i ; -1+i ;2-2i et -3 .

a -Donne la nature du triangle ABC.

b-Détermine l'équation cartésienne du cercle(C) circonscrit au triangle ABC .

c-Calcule en hectare l'aire de la surface du triangle ABC.

5)a-Justifie que les points O,B,et C sont alignés.

b-Détermine l'affixe d'un point E pour que ABCE soit un parallélogramme puis donne la nature de ce parallélogramme.

c-Justifie que $(-1+i)^{12}$est un nombre réel dont tu préciseras.

6) On donne le nombre complexe $T=\frac{2iz+4}{z+3}$

a- Donne une interprétation géométrique du module de (T) et de l'argument de (T).

b- Détermine les ensembles des points M de coordonnés M(x ;y) d'affixe z suivant :

i-(Δ) : $|T|=2$;

ii-(Γ) : $\arg(T)=\pi+2K\pi$

Fait au BENIN le 14 MAI par

Mr Cokouvi Félix DE Restif TOUKOUI

Tél :+229 54964144/68847266

Corrigé-type de l'exercice sur les nombres complexes

1) ***Démontrons que (E) admet une solution imaginaire pure Z_0***

(E) : $iz^4+(1+2i)z^3-(3+i)z^2+2(-9-7i)z+24i=0$

Soit $Z_0=ib$; $b \in IR^*$

Z_0 solution de (E) $\Rightarrow i(ib)^4+(1+2i)(ib)^3-(3+i)(ib)^2+2(-9-7i)(ib)+24i=0$

$\Rightarrow 2b^3+3b^2-14b+i(b^4-b^3+b^2-18b+24)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b^3+3b^2-14b=0 \ (1) \\ b^4-b^3+b^2-18b+24=0 \ (2) \end{cases}$$

De (1) on a : $b(2b^2+3b-14)=0$

$\Rightarrow b=0$ ***ou*** $2b^2+3b-14=0$

Calculons le discriminant de $2b^2+3b-14$

$\Delta= 3^2-4(2)(-14)$

$\Delta=121$; $\Delta>0$ ***alors*** $2b^2+3b-14$ ***admet deux solutions b1 et b2***

$b1=\frac{-3-\sqrt{121}}{2(2)}$; $b2=\frac{-3+\sqrt{121}}{2(2)}$

$b1=\frac{-7}{2}$; $b2=2$

Selon la condition $Z_0=ib(b\in IR^*)$***, b est différent de 0 alors b=2 ou b=-7/2***

•Pour b=2, l'équation (2) donne $\Rightarrow (2)^4-(2)^3-(2)^2-18(2)+24=0$

$\Rightarrow 44-44=0$ ***alors b=2 et par conséquent*** $\underline{Z_0=2i}$

2) ***Démontrons que P(z) admet une solution réelle Z1 à préciser.***

Soit $Z1=a(a\in IR)$

Z1 solution de (E) $\Rightarrow i(a)^4+(1+2i)a^3-(3+i)a^2+2(-9-7i)a+24i=0$

$\Rightarrow a^3-3a^2-18a+i(a^4+2a^3-a^2+14a+24)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^3-3a^2-18a=0 \ (3) \\ a^4+2a^3-a^2+14a+=0 \ (4) \end{cases}$$

De (3) on a : $a(a^2-3a-18)=0$

$\Rightarrow a=0$ ***ou*** $a^2-3a-18=0$

Calculons le discriminant de $a^2-3a-18$

$\Delta=(-3)^2-4(1)(-18)$

$\Delta=81$; $\Delta>0$ ***alors l'équation*** $a^2-3a-18$ ***admet deux solutions a1 et a2***

$a1=\frac{3+\sqrt{81}}{2}$; $a2=\frac{3-\sqrt{81}}{2}$

$a_1=-3$; $a_2=6$

•*Pour a=0 ; le (4) donne 24=0 (absurde)*

•*Pour a=-3 ; le (4) donne 0=0*

•*Pour a=6 ; le (4) donne 1800=0(absurde)*

Alors a=-3 et donc $\underline{Z_1=-3}$

3)a- Calculons $(-3-3i)^2$

$\underline{(-3-3i)=18i}$

b)Achevons la résolution de (E) dans $\mathbb{C}$ *.*

Z_0 *et* Z_1 *sont les solutions de (E)*

Ainsi on a : (E) : $(z-z_0)(z-z_1)(az^2+bz+c)=0$ *avec* $a\in\mathbb{C}^*$ *et* $(b,c)\in\mathbb{C}^2$

(E) :$(z-2i)(z+3)(az^2+bz+c)=0$

(E) : $az^4+(3a+b-2ia)z^3+(c+3b-2ib-6ia)z^2+(3c-2ic-6ib)z-6ic=0$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a = i (1) \\ b+3a-2ia=1+2i (2) \\ c+3b-2ib-6ia=-3-i \quad (3) \\ 3c-2i-6ib=-18+14i \ (4) \\ -6ic = 24i (5) \end{cases}$$

De (1) a=i

De (5) c=-4

De (2) b=-1-i

(E) devient

=> $(z-2i)(z+3)[iz^2+(-1-i)z-4]=0$

=> $z=2i$ **ou** $z=-3$ **ou** $iz^2+(-1-i)z-4=0$

Calculons le discriminent de $iz^2+(-1-i)-4$

$\Delta=(-1-i)^2-4(i)(-4)$

$\Delta=18i$

$\Delta=(-3-3i)^2$

L'équation $iz^2+(-1-i)-4$ admet deux solutions Z3 et Z4

$Z3=\frac{1+i-\sqrt{(-3-3i)^2}}{2i}$; $Z4=\frac{1+i+\sqrt{(-3-3i)^2}}{2i}$

Z3=-1+i ;Z4=2-2i

L'ensemble solution de (E) dans $\mathbb{C}$ *est :* _S** $\mathbb{C}$={2i ;-3 ;-1+i ;2-2i}_**

4) ZA= 2i ; ZB=-1+i ; ZC=2-2i ; ZD= -3

a- Donnons la nature du triangle ABC

Posons $\frac{ZC-ZB}{ZA-ZB}=\frac{(2-2i)-(-1-i)}{2i-(-1-i)}$

$\frac{ZC-ZB}{ZA-ZB}=-3i$

-3i eIR* alors le triangle ABC est un triangle rectangle en B

b- Déterminons l'équation cartésienne du cercle (C)

Etant donné que le cercle est circonscrit au triangle ABC qui est rectangle en B alors le diamètre du cercle est le [AC] et de rayon R=AC/2 ayant pour centre le point N milieu du segment[AC] .

ZN=ZA+ZC/2

ZN=1

AC= |ZC-ZA|

= |2-2i-2i|

$AC=2\sqrt{5}$

Alors R= $\frac{2\sqrt{5}}{2}$

$R=\sqrt{5}$

Equations cartésienne de (C)est : (C) : $(x-x_N)^2+(y-y_N)^2=R^2$

(C) : $(x-1)^2+y^2=5$

c- Calculons en hectare l'aire de la surface ABC $\mathbf{A}=\frac{1}{2}(ABxBC)x1000m^2$

AB=|ZB-ZA|

AB =√2

BC= |ZC-ZB|

BC= 3√2

$A = \frac{1}{2}(ABxBC)x1000m^2$

A=30000m² en hectare A=3ha

5) a- Justifions que les points O,B, et C sont alignés

$$\frac{ZC - ZO}{ZB - ZO} = \frac{2 - 2i}{-1 + i}$$

$$\frac{ZC-ZO}{ZB-ZO} = -2$$

-2 e IR* alors les points O,B et C sont alignés.

b-Déterminons l'affixe du point E pour que ABCE soit un parallélogramme

ABCE serait un parallélogramme si et seulement si $Z\overrightarrow{AB} = Z\overrightarrow{EC}$

$Z\overrightarrow{AB} = Z\overrightarrow{EC}$***=>ZB-ZA=ZC-ZE***

=>ZE=ZA+ZC-ZB

=>ZE=3 -i

C-Justifie que (-1+i)¹² est un nombre réel dont nous préciserons

•Ecrivons (-1+i)¹² sous forme trigonométrique

|-1+i|=√2

Soit θ un argument de (-1+i)

$=> \begin{cases} Cos\theta = -\sqrt{2}/2 \\ Sin\theta = \sqrt{2}/2 \end{cases} => \begin{cases} Cos\theta < 0 \\ Sin\theta > 0 \end{cases}$

On peut prendre $\theta = \pi - \frac{\pi}{4}$ ***donc*** $\theta = \frac{3\pi}{4}$

La forme trigonométrique de (-1+i) est $\sqrt{2}(\frac{Cos3\pi}{4} + \frac{iSin3\pi}{4})$

(-1+i)= $\sqrt{2}(\frac{Cos3\pi}{4} + \frac{iSin3\pi}{4})$

$(-1+i)^{12}=(\sqrt{2})^{12}(\frac{Cos3\pi}{4}+\frac{iSin3\pi}{4})^{12}$

$= (\sqrt{2})^{12}(\frac{Cos36\pi}{4}+\frac{iSin36\pi}{4})$

$= (\sqrt{2})^{12}(Cos9\pi + iSin9\pi)$

$= [(\sqrt{2})^{2}]^{6}[\, Cos(8\,\pi+\pi) + iSin(8\pi+\pi)]$

$= (2)^6\, [\, Cos\,\pi + iSin\pi]$

$=64(-1+0)$

$= --64$ ***or -64*** ϵIR ***donc*** $(-1+i)^{12}$ ***est un nombre réel qui est -64***

6)a -Donnons une interprétation géométrique du module de (T) et arg(T)

$T=\frac{2iz+4}{z+3}$

$=\frac{2i(z-2i)}{z-(-3)}$

$=\frac{2i(z-zA)}{z-zD}$

$|T| = |\frac{2i(z-ZA)}{z-ZD}|$

$=\frac{|2i|\,|(z-ZA)|}{|z-ZD|}$

$|T|=2AM/DM$

Arg(T)=arg(2i) + arg(z-ZA/z-ZD)

$Arg(T)=\frac{\pi}{2}+mes(\overrightarrow{DM};\overrightarrow{AM})+2K\pi$

b- Déterminons les ensembles des points de coordonnées M(x ;y) d'affixe z

i)(Δ) : (T)=2 $=>\frac{2AM}{DM}=2$

=>AM=DM alors (Δ) est la médiatrice du segment[AD]

ii)(Γ) : arg(T)= $\pi + 2K\pi$

=> $\frac{\pi}{2} + mes(\overrightarrow{DM};\overrightarrow{AM}) + 2K\pi = \pi + 2K\pi$

=> ***mes*** $(\overrightarrow{DMF};\overrightarrow{AM})=\pi - \frac{\pi}{2}$

=>***mes*** $(\overrightarrow{DM};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}$ ***Alors (Γ) est le cercle de diamètre [AD]donc de rayon AD/2 .***

Fait au BENIN le 14 mai 2024 par Mr

Cokouvi Félix DE Restif TOUKOUI

Tél : +229 54964144/68847266

FIN !