EXERCICE 1

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \frac{x}{2} + x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1- Etudions la continuité de f en 0 :

On a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(1 + \frac{x}{2} + x\ln\left[1 + \frac{1}{x}\right]\right)$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[1 + \frac{x}{2} + x\ln(x+1) - x\ln(x)\right]$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = 1 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln(x+1) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln(x) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\left(1 + \frac{x}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Donc f est continue à droite de 0.

f n'est pas définie à gauche de 0.

Etudions la dérivabilité de f en 0 :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[1 + \frac{x}{2} + x\ln(x+1) - x\ln(x)\right]$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty \text{ car } \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{x}{2} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0. La courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f admet au point 0 une tangente verticale.

2- a) Déterminons l'ensemble de définition D de f :

$$D = \left\{x \in IR /\ 1 + \frac{1}{x} > 0 \ et\ x \neq 0\right\} \cup \{0\}$$
$$D =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

Calculons la dérivée première f' et la dérivée seconde f'' de f :

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{2} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{(x+1)^2} \quad donc \quad \boldsymbol{f''(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}}$$

b) Etudions le sens de variation de f' :

$\forall x \in]-\infty; -1[, f''(x) > 0$ *donc f' est strictement croisante sur* $]-\infty; -1[$

$\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) < 0$ *donc f' est strictement décroisante sur* $]0; +\infty[$.

Déterminons les limites de f' en $-\infty$ et en $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{2} + ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \frac{1}{2}}$$

Déduction : $f'est\ strictement\ croisante\ sur\ ]-\infty;-1[$ et

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \frac{1}{2}\ \ donc\ f'est\ croissante\ \forall\, x \in\,]-\infty;-1[.$$

$$f'(x) > \frac{1}{2}$$

$$f'(x) > \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) > 0$$

$\forall x \in\,]0;\ +\infty[, f'(x) > 0, f'est\ strictement\ \ croissante$ sur $]0;\ +\infty[$

$f'\ strictement\ \ croissante$ sur $]0;\ +\infty[$ et

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \frac{1}{2}\ donc\ f'est\ strictement\ croissante\ \forall x \in\,]0;\ +\infty[$$

$$f'(x) > \frac{1}{2}$$

$$f'(x) > \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) > 0$$

$\forall x \in\,]0;\ +\infty[, f'(x) > 0, f'est\ strictement\ \ croissante$ sur $]0;\ +\infty[$

d'où f' est positive sur chacun des intervalles $]-\infty;\ -1[$ et sur $]0:\ +\infty[$.

3- Déterminons les limites de f aux bornes de D :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[1 + \frac{x}{2} + xln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{2} + \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad car \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{\frac{1}{x}} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\dfrac{x}{2}\right) = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[1+\frac{x}{2}+xln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x}{2}+\frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad car \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{\frac{1}{x}} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{x}{2}\right) = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = +\infty \quad car \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} \left[ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right] = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} \left(1+\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Dressons le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		//////		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	//////	1	$\nearrow$	$+\infty$

4- a) Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = 2+\frac{x}{2}$ est asymptote à $(\mathcal{C})$:

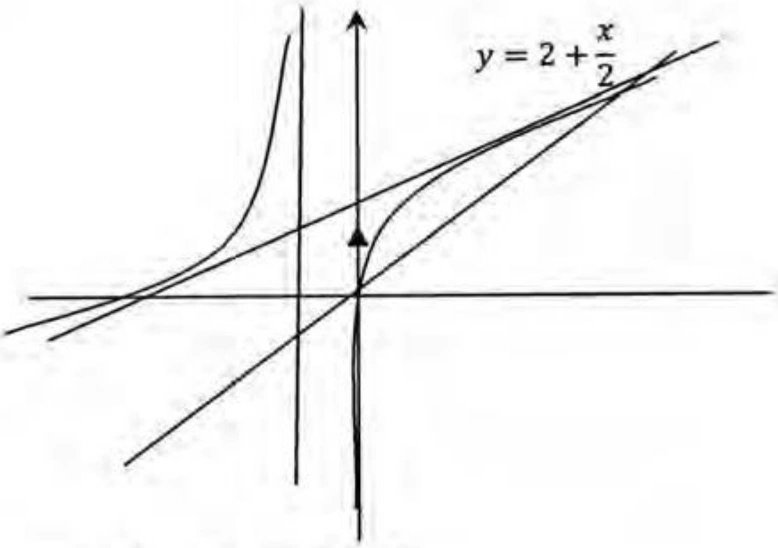
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \left(2+\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left[xln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \left(2+\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[-1+\frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \left(2+\frac{x}{2}\right) = 0$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \left(2+\frac{x}{2}\right) = 0$ *donc la droite* (Δ) d'équation $y = 2+\frac{x}{2}$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

b) Courbe :



5-) $g(x) = f(x) - x$ sur $[3; 5]$

a) Montrons que $\forall\, x \in [3;5], 0 < f'(x) \leq \frac{2}{3}$:

f' est strictement décroissante sur $[3; 5]$ donc

$\forall\, x \in [3;5], f'(5) \leq f'(x) \leq f'(3)$:

$$\text{or}\begin{cases} f'(5) = \frac{1}{2} + ln\left(\frac{6}{5}\right) - \frac{1}{6} > 0 \\ f'(3) = \frac{1}{3} + ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{4} < \frac{2}{3} \end{cases}$$

D'où $\forall\, x \in [3;5], 0 < f'(x) \leq \frac{2}{3}$

Montrons que $\forall x \in [3;5], g'(x) < 0$

$\forall\, x \in [3;5], g'(x) = f'(x) - 1$

On a : $f'(x) \leq \frac{2}{3} \Longrightarrow f'(x) - 1 \leq -\frac{1}{3} < 0$

D'où $\forall\, x \in [3;5], 0 < g'(x) - 1 < 0.$

b) Montrer que $g(x) = 0$ admet une unique solution α :

g est continue et strictement décroissante sur $[3;5]$.

De plus $g(3) \approx 0{,}36$ et $g(5) \approx 0{,}59$. Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [3;5]$.

c) Montrons que $\forall\, x \in [3;5], |f(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$:

f est dérivable sur $[3;5]$

$\forall\ x \in [3;5],\ |f(x)| \leq \frac{2}{3}$ et comme $\alpha \in [3;5]$ en appliquant le théorème des accroissements finis à f *entre* x *et* α on a :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha| \ or$$

$or\ f(\alpha) = \alpha\ d'où\ \forall\, x \in [3;5], |f(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|.$

d) On définit la suite $(U_n)\, n \in IN$ par $U_0 = 3$ et $\forall\ n \in IN$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

i) Démontrons que $n \in IN, |U_n - \alpha| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$:

f est continue et strictement croissante sur $[3;5]$.

Donc $\forall\, x \in [3;5], f(3) \leq f(x) \leq f(5)$

Or $f(3) \approx 3{,}36$ et $f(5) \approx 4{,}4$ donc $3 \leq f(x) \leq 5$

$$U_0 = 3\ donc\ U_0 \in [3;5]$$

Supposons que pour un entier naturel $k \geq 0,\ U_k \in [3;5]$.

On a : $U_{k+1} = f(U_k)$. Comme $U_k \in [3;5], f(U_k) \in [3;5]$.

D'où $\forall\, n \in IN, U_n \in [3;5]$

En utilisant (5c) et en remplaçant x par U_n on a :

$\forall\, n \in IN\ |U_n - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_{n-1} - \alpha|$

$$|U_1 - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_0 - \alpha|$$
$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_1 - \alpha|$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$|U_n - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_{n-1} - \alpha|$$

En multipliant membre à membre les inégalités et en simplifiant on a :

$\forall n \in IN, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - \alpha|$

Or $3 \leq \alpha \leq 5$ et $U_0 = 3$ équivaut à dire que $|U_0 - \alpha| \leq 2$

D'où $\forall n \in IN, |U_n - \alpha| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ii) Déduisons la limite de $(U_n)\ n \in IN$:

$\forall n \in IN, |U_n - \alpha| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ *et*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad donc \quad \lim_{n \to +\infty} (U_n)^n = \alpha$$

Déterminons une valeur approchée de α à 0,2 près pour que $|U_n - \alpha| \leq 0{,}2$, *il suffit que* $2\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0{,}2$

$$\Rightarrow n \geq \frac{(0{,}1)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow n \geq 5{,}68$$

$$\Rightarrow n \geq 6$$

Donc U_6 est une valeur approchée de α à 0,2 près.

EXERCICE 3

Partie A

$$f(x) = 1 - x^2 e^{-x}$$

1- Etudions les variations de la fonction f :

Déterminons le domaine de définition : $D_f = IR$

Calculons les limites aux bornes de Df :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (1 - x^2 e^{-x}) = -\infty \ car \ \lim_{x \to -\infty} (-x^2 e^{-x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - x^2 e^{-x}) = 1 \ car \ \lim_{x \to +\infty} (-x^2 e^{-x}) = 0$$

$$\textbf{Donc: } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \ ; \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

Calculons la fonction dérivée :

f est dérivable sur IR comme somme de deux fonctions dérivables :

$$f'(x) = x(x-2)e^{-x}$$

<u>Signe de f'(x) :</u>

$\forall\ x \in IR,\ e^{-x} > 0$; le signe de f '(x) dépend alors de celui de $x(x-2)$

$x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	

$\forall\ x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[, f'(x) > 0$

$\forall\ x \in]0; 2[, f'(x) < 0$

Pour $x \in \{0; 2\}$ $f'(x) = 0$

<u>Sens de variation :</u>

* f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]2; +\infty[$,

* f est strictement décroissante sur $]0; 2[$.

<u>Tableau de variation de f :</u>

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	$1-4e^{-2}$	↗	1

2) Déduisons que l'équation f(x) = 0 a une solution et une seule notée α :

$\forall\ x \in]0; +\infty[, f(x) \geq f(2) > 0$ donc l'équation f(x) = 0 n'admet pas de solution dans $]0; +\infty[$.

Sur $]-\infty; 0[$, f est continue et strictement croissante ; de plus $f(]-\infty; 0[) =]-\infty; 1[$ qui contient 0 , par conséquent l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans $]-\infty; 0[$.

Donnons une valeur approchée à 10^{-2} près de α :

$f(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) > 0$;

$f(-1) = 1 - e \quad \Rightarrow \quad f(-1) < 0$

donc $-1 < \alpha < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

$f(-0{,}71) < 0$, $f(-0{,}70) > 0 \Rightarrow -0{,}71 < \alpha < -0{,}70$

Une valeur approchée à 10^{-2} près de α est : - 0,71

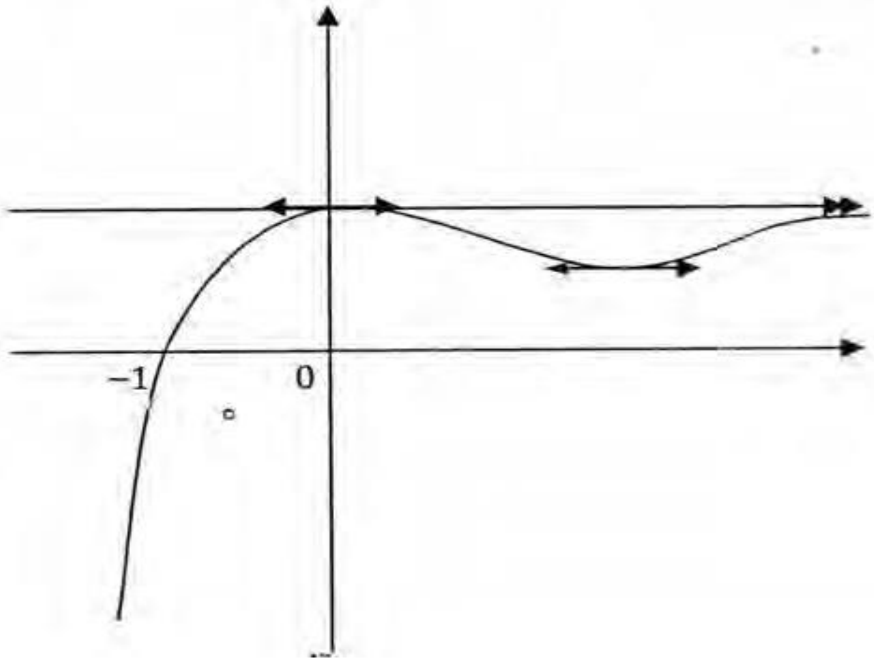
3- Traçons la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé Cherchons les asymptotes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ Donc la droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

Branche infinie à $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x} - xe^{-x}\right) = +\infty \ car \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -xe^{-x} = -\infty \end{cases}$$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (oy).



4) a- Montrons que pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1$.

$\mathbf{x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq e^0 = 1}$ **donc** $\mathbf{\forall x \geq 0,\ e^x \geq 1}$

b- Montrons que $0 \leq \int_0^\lambda x^2 e^{-x}\,dx \leq \frac{\lambda^3}{3}$

$0 \leq \int_0^\lambda x^2 e^{-x}\,dx \leq \frac{\lambda^3}{3}$ on sait que : $0 \leq x \Rightarrow 1 \leq e^x \Rightarrow e^{-x} \leq 1$

et on sait aussi que $e^{-x} > 0, \forall x \in IR$

$0 < e^{-x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 e^{-x} \leq x^2$ car $x^2 \geq 0$

$0 \leq \int_0^\lambda x^2 e^{-x}\,dx \leq \int_0^\lambda x^2\,dx \Rightarrow 0 \leq \int_0^\lambda x^2 e^{-x}\,dx \leq \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\lambda = \frac{\lambda^3}{3}$

Donc $\mathbf{0 \leq \int_0^\lambda x^2 e^{-x}\,dx \leq \frac{\lambda^3}{3}}$

Partie B

1) Vérifions que pour tout réel x, $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 1$

$f(x) = 1 - x^2 e^{-x}$; $f'(x) = x(x-2)e^{-x}$;

$f''(x) = (-x^2 + 4x - 2)e^{-x}$

$f''(x) + 2f'(x) + f(x)$

$\Leftrightarrow (-x^2 + 4x - 2)e^{-x} + 2(x^2 - 2x)e^{-x} + 1 - x^2 e^{-x}$

$= 1 + (-x^2 + 4x - 2 + 2x^2 - 4x - x^2 - x^2)e^{-x} = 1 + (-2)e^{-x}$

Donc $\mathbf{f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 1}$

2- Déterminons $F(x)$:

$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 1 - 2e^{-x}$

$f(x) = 1 - 2e^{-x} - f''(x) - 2f'(x)$

$F(x) = x + 2e^{-x} - f'(x) - 2f(x) + k$

$F(0) = 0 \Rightarrow 2 - f'(0) - 2f(0) + k = 0 \Rightarrow k = 0$

Donc $\mathbf{F(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x} + x - 2}$

3-a) Calculons l'aire $A(\lambda)$ en cm^2 :

$A(\lambda) = \left(\int_0^\lambda (1 - f(x))\,dx\right)$ UA avec $1UA = 4cm^2$

$A(\lambda) = \left([x - F(x)]_0^\lambda\right) \times 4\ cm^2$

$\mathbf{A(\lambda) = [4(-\lambda^2 - 2\lambda - 2)e^{-\lambda} + 8]cm^2}$

b- Déterminons la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} A(\lambda) = \lim_{x\to+\infty} [4(-\lambda^2 - 2\lambda - 2)e^{-\lambda} + 8]cm^2 = \ 8\ cm^2$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} A(\lambda) = 8\ cm^2}$$

Partie C

1) Résolvons l'équation $y'' + 2y' + y = 0$:

L'équation caractéristique est : $r^2 + r + 1 = 0$

$$r^2 + r + 1 = 0 \iff (r+1)^2 = 0 \Rightarrow r = -1$$

La solution générale est $P : x \longmapsto (ax + b)e^{-x}$ où $a \in IR$ et $b \in IR$.

$$\mathbf{P(x) = (ax + b)e^{-x} \quad a \in IR\,,\, b \in IR}$$

2) Démontrons que $g + f$ est une solution de (E_1) :

g solution de (E) $\Leftrightarrow g''(x) + g'(x) + g(x) = 0$

Soit $x \in IR$, $(g+f)''(x) + 2(g+f)'(x) + (g+f)(x) =$

$(g''(x) + 2g'(x) + g(x)) + (f''(x) + 2f'(x) + f(x))$

$= f''(x) + 2f'(x) + f(x)$ car $g''(x) + 2g'(x) + g(x) = 0$

$= 1 - 2e^{-x}$ d'après 1) de B précédemment trouvé.

D'où $(g + f)$ est une solution de (E_1).

Démontrons que $h - f$ est une solution de (E_2).

Soit $x \in IR$, $(h - f)''(x) + 2(h - f)'(x) + (h - f)(x) =$

$(h''(x) + 2h'(x) + h(x)) - (f''(x) + 2f'(x) + f(x))$

$= (1 - 2e^{-x}) - (1 - 2e^{-x}) = 0$

D'où $(h - f)$ est une solution de (E_2).

Déduisons l'ensemble des solutions de (E_1) :

Posons $h = g + f$ avec $g = P$:

L'ensemble solution est : $h : x \longmapsto (ax + b)e^{-x} + 1 - x^2e^{-x}$

$$\mathbf{h(x) = (-x^2 + ax + b)e^{-x} + 1 \ \ avec\ a \in IR,\ b \in IR.}$$

3) Déterminons la solution φ de (E_1) telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$:

$\varphi(x) = (-x^2 + ax + b)e^{-x} + 1$

$\varphi'(x) = (-2x + a + x^2 - ax - b)e^{-x}$

$\varphi(0) = 0 \Rightarrow b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$

$\varphi'^{(0)} = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = -1$

On a en fin : $\boldsymbol{\varphi(x) = (-x^2 - x - 1)e^{-x} + 1}$

Partie D

$$g_a(x) = (-x^2 + ax + a)e^{-x} + 1$$

1- Montrons que les courbes (C_a) passent par un même point fixe I :

Pour $a = 1$, $g_1(x) = (-x^2 + x + 1)e^{-x} + 1$

Pour $a = 0$, $g_0(x) = -x^2e^{-x} + 1$

$g_1(x) = g_0(x) \Leftrightarrow (-x^2 + x + 1)e^{-x} + 1 = -x^2e^{-x} + 1$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$g_a(-1) = 1 - e$ d'où $I(-1; 1 - e)$ donc les courbes (C_a) passent toutes par un même point fixe I .

2- On suppose $a \neq -2$. Démontrons que la fonction g_a admet deux extrémums dont l'un est obtenu pour $x = 0$:

$g_a(x) = (-x^2 + ax + a)\mathbf{e}^{-x} + \mathbf{1}$

$g'_a(x) = (-2x + a + x^2 - ax - a)\mathbf{e}^{-x}$

$= (x^2 - (a + 2)x)\mathbf{e}^{-x}$

Le signe de $g'_0(x)$ dépend de celui de $x^2 - (a + 2)x$ car $e^{-x} > 0$

Or pour $a \neq -2$, $x \mapsto x(x - (a + 2))$ s'annule en 0 et en $(a + 2)$ en changeant de signe. Par conséquent $g_a(x)$ et $g_a(a + 2)$ sont des extrémums de g_a.

3) Donnons une équation cartésienne de Γ :

$Ma(a + 2; g_a(a + 2))$

Posons $x = a + 2$ et $y = g_a(a + 2)$

$y = [-(a + 2)^2 + a(a + 2) + a]\mathbf{e}^{-(a+2)}$

$y = 1-(4 + a)e^{-x} + 1$ d'où (Γ): $\mathbf{y = 1-(x + 2)e^{-x} + 1}$ car $a = x + 2$

FIN DE LA CORRECTION