

MATHEMATIQUES

Série A₁

Toute calculatrice scientifique est autorisée

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2

Exercice 1 (2 points)

Écris le numéro de l'affirmation suivi de VRAI lorsque l'affirmation est vraie ou de FAUX lorsque l'affirmation est fausse.

- 1) La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement positive sur \mathbb{R} .
- 2) Si f est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$, dans un repère orthonormé.
- 3) La limite de toute fonction rationnelle à l'infini est égale à la limite du monôme de plus haut degré du numérateur.
- 4) Si une fonction f est dérivable sur l'intervalle $[a; b]$ et que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[a; b]$.

Exercice 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés ci-dessous quatre réponses sont données dont une seule permet d'obtenir une affirmation juste. Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse

N°	Énoncés	Réponses			
		A	B	C	D
1	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \dots$	0	$+\infty$	4	$-\infty$
2	Soit A et B deux événements d'un même univers Ω et P une probabilité définie sur Ω . Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = \dots$	$P(A) + P(B)$	$P(A) - P(B)$	$P(A) \times P(B)$	$P(A \cap B) - P(A) - P(B)$
3	Soit a un nombre réel. $e^a \times e^{-a} = \dots$	e^{-a^2}	e^{-2a}	1	0
4	$x \in]0; +\infty[; \ln x = 1$ équivaut à $x = \dots$	e^2	1	$\frac{1}{e}$	e

Exercice 3 (5 points)

Les élèves du club santé d'un lycée ont organisé une séance de collecte de sang. Sur un échantillon de 18 personnes qui se sont présentées, on a noté 11 personnes du groupe sanguin A, 4 personnes du groupe sanguin B, 2 personnes du groupe sanguin O et une personne du groupe sanguin AB.

Pour expliquer certaines analyses que va subir en laboratoire chaque poche de sang, le technicien en prélève simultanément 3 au hasard parmi les 18.

- 1- Justifie qu'il y a 816 manières différentes de prélever les trois poches de sang.
- 2- Détermine la probabilité de l'événement E : « prélever trois poches du même groupe sanguin ».
- 3- a) Soit l'événement G : « prélever des poches ne contenant pas de groupe sanguin O »
Justifie que la probabilité de l'événement G est égale à $\frac{35}{51}$.
b) Déduis-en la probabilité de l'événement F : « prélever au moins une poche du groupe sanguin O ».
- 4- Soit X la variable aléatoire qui à chaque prélèvement associe le nombre de poches du groupe sanguin O.
Sachant que les valeurs prises par X sont 0 ; 1 et 2,
a) Détermine la loi de probabilité de X .
b) Calcule l'espérance mathématique de X .

Exercice 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$, par : $f(x) = -x + 1 + \ln x$

On désigne par (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On prendra pour unité graphique 2 cm.

- 1) a) Justifie que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
b) Interprète graphiquement le résultat ci-dessus.
- 2) On admet que pour tout nombre réel x strictement positif : $f(x) = x \left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)$
Déduis-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 3) On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et f' désigne la fonction dérivée de f .
a) Justifie que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1-x}{x}$
b) Justifie que f est strictement croissante sur $]0; 1[$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.
c) Dresse le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.
- 4) En utilisant le tableau suivant, construis (C_f) sur $]0; 5]$

x	0,1	0,5	1	2	3	4	5
L'arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	-1,4	-0,2	0	-0,3	-0,9	-1,6	-2,4

- 5) a) Justifie que la fonction F définie par : $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x \ln x$, est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
b) Sachant que (C_f) est au-dessous de l'axe des abscisses, calcule l'aire \mathcal{A} en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , l'axe (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

Exercice 5 (5 points)

Une épidémie apparaît dans une région. x jours après le début de l'épidémie le nombre de personnes infectées peut être modélisé sur une période de 56 jours par la fonction f définie par :

$$x \in [1; 56], f(x) = -x^3 + 57x^2 + 1$$

Le Chef de l'institut national d'hygiène publique de cette région dispose chaque jour d'un stock de médicaments qui ne peut prendre en charge que 28000 malades.

Afin de renforcer éventuellement le stock journalier de médicaments, le chef de l'institut souhaite déterminer d'une part le jour où le nombre de personnes malades sera maximal et d'autre part savoir si le stock journalier de médicaments suffira ce jour pour la prise en charge des malades.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques au programme, réponds aux préoccupations du Chef.

CORRIGE

BAREME

EXERCICE 1 2pts

1- VRAI

2- VRAI

3- FAUX

4-FAUX

2 x 0,50

EXERCICE 2 2pts

1- C

2- A

3- B

4- D

2 x 0,50

EXERCICE 3 5pts

1) justification correcte 0,50

2) $P(E) = \frac{C_{11}^3 + C_4^3}{816} = \frac{169}{816}$ 0,50 x 23) a- $P(G) = \frac{C_{16}^3}{816} = \frac{35}{51}$ 0,50 x 2b- $P(F) = 1 - P(G) = \frac{16}{51}$ 0,504) a- $P(X = 0) = \frac{35}{51}$; $P(X = 1) = \frac{5}{17}$; $P(X = 2) = \frac{1}{51}$ 0,50 x 3b- $E(X) = 0 \times \frac{35}{51} + 1 \times \frac{5}{17} + 2 \times \frac{1}{51} = \frac{1}{3}$ 0,25 x 2**EXERCICE 4** 6 pts1-a) Justification correcte $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ 0,50

b) Interprétation graphique correcte 0,25

2- Dédution correcte $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ 0,503-a) Justification correcte $f'(x) = \frac{1-x}{x}$ 1

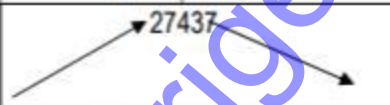
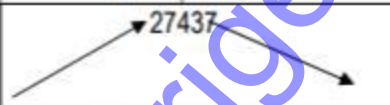
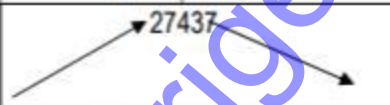
b) Justification correcte sens de variation 0,50 x 2

c) tableau de variation 0,50

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

4) Construction de (C_f) 0,505-a) Justification correcte $F'(x) = f(x)$ 1b) Calcule de l'aire $\mathcal{A} = 4\left(\frac{15}{2} - 4\ln 4\right)\text{cm}^2$ 0,75

EXERCICE 5 (5points)

CRITERES	INDICATEURS	BAREME												
CM1 Pertinence	<ul style="list-style-type: none"> • Énoncé du titre de la leçon : Étude de fonctions polynômes et rationnelles • Étape de la résolution : <ul style="list-style-type: none"> ▪ Déterminer la dérivée de f ▪ Déterminer le sens de variation de f ▪ Dresser le tableau de variation de f ▪ Déterminer le jour où le nombre maximal de malades est atteint et détermine cette valeur. ▪ Comparer et conclure. 	0,75 1 sur 6.....0,25 2 sur 6.....0,50 3 sur 6.....0,75												
CM2 Utilisation correcte des outils et modèles	<ul style="list-style-type: none"> ▪ f est dérivable sur $[0; 56]$ et $f'(x) = -3x^2 + 114x$ $\{ \forall x \in [0; 38[, f'(x) > 0$ $\{ \forall x \in]38; 56], f'(x) < 0$ • f est strictement croissante sur $[0; 38[$ f est strictement décroissante sur $]38; 56]$ • Tableau de variation <table border="1" style="margin-left: 20px; margin-top: 10px;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">38</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f'(x)$</td> <td colspan="2" style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f(x)$</td> <td colspan="3" style="padding: 5px; text-align: center;">  </td> </tr> </table> • Le nombre maximal est atteint le 38^e jour et le nombre de malades est 27 437. • On a $27\,437 < 28\,000$ donc le stock journalier de médicaments suffira pour la prise en charge des malades ce jour. 	x	0	38	$+\infty$	$f'(x)$	+		-	$f(x)$				2,50 1 sur 5.....1 2 sur 5.....1,50 3 sur 5.....2,50
x	0	38	$+\infty$											
$f'(x)$	+		-											
$f(x)$														
CM3 Cohérence	<ul style="list-style-type: none"> - Qualité des enchaînements - Résultats attendus - Résultats en adéquation avec la démarche. 	1,25 1 sur 3.....0,75 2 sur 3.....1,25												
CP	<ul style="list-style-type: none"> - Originalité, - Précision ou concision, - Propreté de la copie 	0,50 1 sur 3.....0,25 2 sur 3.....0,50												

