

CORRECTION

MATHEMATIQUES série A1

EXERCICE 1

On considère la fonction polynôme P définie par : $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

1) Vérifions que $P(x) = (x+2)(2x^2 - 3x + 1)$

On a :

$$\begin{aligned} (x+2)(2x^2 - 3x + 1) &= 2x^2 \times x - 3x \times x + x \times 1 + 2 \times 2x^2 - 2 \times 3x + 2 \times 1 \\ &= 2x^3 - 3x^2 + x + 4x^2 - 6x + 2 \\ &= 2x^3 - 3x^2 + 4x^2 + x - 6x + 2 \\ &= 2x^3 + x^2 - 5x + 2 \end{aligned}$$

Or $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

D'où $P(x) = (x+2)(2x^2 - 3x + 1)$

2-a) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation $2x^2 - 3x + 1 = 0$

Calculons le discriminant de $2x^2 - 3x + 1$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1$$

$$\Delta = 9 - 8$$

$$\Delta = 1$$

Le discriminant est supérieur à zéro, l'équation a donc deux solutions qu'on notera x_1 et x_2

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 2} & x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 2} \\ & \\ = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 2} & = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} \\ & \\ = \frac{3 - 1}{4} & = \frac{3 + 1}{4} \\ & \\ = \frac{2}{4} & = \frac{4}{4} \\ & \\ x_1 = \frac{1}{2} & x_2 = 1 \end{array}$$

$$S_R = \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$$

2-b) Déduisons-en tous les zéros du polynôme P

Posons $P(x) = 0$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ \text{ou} \\ 2x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

Ainsi les zéros du Polynôme P sont : $-2; \frac{1}{2}$ et 1

3) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation $2e^{3x} + e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$

$$\text{Posons } X = e^x \Rightarrow \begin{cases} e^{3x} = X^3 \\ e^{2x} = X^2 \end{cases}$$

Ce qui nous amène à l'équation auxiliaire : $2X^3 + X^2 - 5X + 2 = 0$ d'où $P(X) = 0$.

$$\text{Ainsi } \begin{cases} X = -2 \\ \text{ou } X = \frac{1}{2} \\ \text{ou } X = 1 \end{cases} \quad \text{or } \forall x \in \mathbb{R} \ e^x > 0 ; \text{ on retient } \begin{cases} e^x = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ e^x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{2} \\ e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\ln 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{Donc } S_R = \{-\ln 2 ; 0\}$$

EXERCICE 2

1) Justifions que le nombre de bureaux possible est égal à 6840.
Le bureau est constitué de 3 personnes dont les rôles sont bien définis, prises parmi 20 personnes.
Former ainsi un bureau revient à faire un arrangement de 3 dans 20.
Le nombre de bureaux est $A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840$

2) Calculons la probabilité de l'évènement A.

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{6840}$$

Si aucun représentant des chefs religieux ne fait partie du bureau, les 3 personnes seront choisies parmi $(20 - 4) = 16$.

$$\text{Ainsi } \text{Card}(A) = A_{16}^3 = 16 \times 15 \times 14 = 3360$$

$$\text{D'où } P(A) = \frac{3360}{6840} = 0,491$$

3-a) Pour réaliser l'évènement B, il faut choisir 1 personne parmi les 4 représentants des chefs religieux et choisir parmi les 16 autres personnes 2 et choisir un rôle pour le représentant des chefs religieux.

$$\text{Ainsi } \text{Card}(B) = A_4^1 \times A_{16}^2 \times A_3^1 = 4 \times 16 \times 15 \times 3 = 2880$$

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{6840}$$

$$P(B) = \frac{2880}{6840} = 0,421$$

3-b) Le poste du représentant des chefs religieux étant défini, il ne nous reste qu'à choisir une personne parmi les 4 représentants des chefs religieux et choisir 2 personnes parmi les 16 autres qui restent.

$$\text{Ainsi } \text{Card}(C) = A_4^1 \times A_{16}^2 = 4 \times 16 \times 15 = 960$$

$$\text{D'où } P(C) = \frac{960}{6840} = 0,140$$

4-a) L'évènement « $X = 3$ » équivaut à ce que le bureau soit constitué uniquement de représentants des chefs religieux.

$$\text{Card}(X = 3) = A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$P(X = 3) = \frac{24}{6840} = 0,004$$

4-b) La loi de probabilité

X	0	1	2	3	Total
P(X)	0,491	0,421	0,084	0,004	1

$$P(X = 2) = 1 - (0,491 + 0,421 + 0,004)$$

$$= 1 - 0,916$$

$$= 0,084$$

4-c) L'espérance mathématique

$$E = 0 \times 0,491 + 1 \times 0,421 + 2 \times 0,084 + 3 \times 0,004$$

$$E = 0,601$$

PROBLEME

On considère la fonction f dérivable et définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{-x+1}{2} + \ln x$

1-a) Calculons la limite de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-x+1}{2} + \ln x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-x+1}{2} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \ln x$$

$$= \frac{1}{2} + (-\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

La droite d'équation : $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de f .

1-b) Calculons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= +\infty \times \left(-\frac{1}{2} \right) \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

2-a) Démontrons que pour tout x strictement positif ; $f'(x) = \frac{-x+2}{2x}$

$$(f(x))' = \left(\frac{-x+1}{2} + \ln x \right)'$$

$$= \left(\frac{-x}{2} + \frac{1}{2} + \ln x \right)'$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{-x+2}{2x}$$

2-b) Justifions les variables de f

Etudions le signe de $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \text{ équivaut à } -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	0	(2)	$+\infty$
$2x$		+	+
$-x+2$		+	(0)
$f'(x)$		+	(0)

$$\forall x \in]0; 2[; f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]2; +\infty[; f'(x) < 0$$

Conclusion

f est strictement croissante sur $]0; 2[$ et
 f est strictement décroissante sur $]2; +\infty[$

2-c) Tableau de variation

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			$-\frac{1}{2} + \ln 2$		
					$-\infty$

$$f(2) = \frac{-2+1}{2} + \ln 2$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln 2$$

3-a) Vérifions que $f(1) = 0$

$$f(1) = \frac{-1+1}{2} + \ln 1$$

$$= \frac{0}{2} + 0$$

$$f(1) = 0$$

3-b) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]3,5; 4[$

f est continue et strictement décroissante sur $]2; +\infty[$ d'où sur $]3,5; 4[$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 3,5} f(x)\right) \times \left(\lim_{x \rightarrow 4} f(x)\right) = \left(\frac{-3,5+1}{2} + \ln 3,5\right) \left(\frac{-4+1}{2} + \ln 4\right)$$

$$= -0,0003$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 3,5} f(x)\right) \times \left(\lim_{x \rightarrow 4} f(x)\right) < 0$$

Alors $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]3,5; 4[$

3-c) Donnons un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1

Méthode par Balayage

x	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
$f(x)$	0,002	-0,019	-0,041	-0,065	-0,089	-0,114

$$-0,019 < 0 < 0,002 \text{ alors } 3,5 < \alpha < 3,6$$

4) [Voir Annexe](#)

5-a) Justifions que la fonction F définie par $F(x) = \frac{-x^2}{4} - \frac{1}{2}x + x \ln x$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$

F est définie sur $]0; +\infty[$ et est dérivable

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{-x^2}{4} - \frac{1}{2}x + x \ln x \right)' \\ &= -\frac{2x}{4} - \frac{1}{2} + 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} \\ F'(x) &= \frac{-x+1}{2} + \ln x \\ \mathbf{F'(x) = f(x)} \end{aligned}$$

5-b) Calculons A

$$\begin{aligned} A &= (2 \times 5 \int_1^e f(x) dx) \text{ cm}^2 \\ \int_1^e f(x) dx &= [Fx]_1^e \\ &= F(e) - F(1) \\ &= \left(-\frac{e^2}{4} - \frac{e}{2} + e \ln e \right) - \left(\frac{-1}{4} - \frac{1}{2} + 1 \times \ln 1 \right) \\ &= \frac{-e^2 + 2e + 3}{4} \\ A &= 10 \times \frac{-e^2 + 2e + 3}{4} \\ \mathbf{A} &= \frac{5}{2} (-e^2 + 2e + 3) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

5-c) Pour $e = 2,7$

$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{2} [-(2,7)^2 + 2 \times 2,7 + 3] \\ &= 2,5(-7,29 + 5,4 + 3) \\ &= 2,5 \times 1,11 \\ \mathbf{A} &= 2,775 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Anonymat

